I 章. 摂動論

この章では, 発想と構成法を記述する. これを用いて, II 章および III 章で力学の特定の問題を解く.

使うのは,

1) 19 世紀の天体力学者によって発展させられ, H. Poincare[1](1, 2, 3, 4 節参照) の研究で完成した手法;

2) 平衡点および周期点の位置の安定性に関する G.D. Birkhoff の研究 [3](9 節参照);

3) A.N. Kolmogorov の示唆したニュートン型の逐次近似法 (4 節参照).

著者の研究 [14]-[17] はいわゆる縮退に関するものである. 6 節と 7 節の注意により, 固有縮退 (proper degeneracy?) は 8 節で扱うことができる. 極限縮退のある種の場合は 10 節で吟味される[4].

この章では, 精密な定式化と厳密な証明を避ける. 複雑な構成法と厳密な証明のよって来る結縁のみを述べる.

§1. 力学の可積分および非可積分問題

解析的ハミルトン関数 $H(p,q)$ を持つ正準運動方程式

$$\dot p = -\frac{\partial H}{\partial q},\quad \dot q = \frac{\partial H}{\partial p},\quad (p = p_1,\dots,p_n;\ q = q_1,\dots,q_n) \tag{1.1.1}$$

で定義される自由度 n の保存力学系を考える. 力学の古典的方法によれば, いわゆる可積分の系だけしか調べることができない.

例 1. 相空間 p, q が n 次元トーラスと n 次元ユークリッド空間のある開領域 (domain) との直積であるとする. $q_i (\mathrm{mod}\ 2\pi)$ をトーラス上の角度変数とし, p_i を空間座標とする. そしてハミルトン関数は p のみに依存すると仮定する. すなわち, $H = H(p)$. ハミルトン方程式 (1.1.1) は

$$\dot p = 0,\quad \dot q = \omega(p),\quad (\omega = \frac{\partial H}{\partial p} = \omega_1 \dots, \omega_n)$$

なる形をとる. しかもただちに積分可能である. 各トーラス p = 一定 は不変である. 周波数 ω が尽数関係になければ (つまり, 整数 k_i に関する式 $\omega_1 k_1 + \dots + \omega_n k_n = 0$ から $k_i = 0$ がしたがう) なら, 運動は n 個の周波数 $\omega_1, \dots, \omega_n$ に関して準周期的 (conditionally periodic, quasi-periodic) とよばれる. このとき簡単に証明できるように, 軌跡 $p(t), q(t)$ はトーラスをいたるところ稠密に埋める. 変数 p, q は**作用–角変数**とよばれる.

今日, かなり多くの可積分問題が知られている. 自由度 n のこれらの問題の解は包合 (involution) 関係にある[5] n 個の一価第一積分が存在する (そして見つけることができる) という事実に基づいている.

---

[4] われわれの短論文 [14-17] が印刷されたのと同時に, J.Moser の 2 編の論文 [24,25] の最初のものが出た. それによると, [12] の解析性の代りに, 数百回微分可能性で十分である. われわれは J.Moser の結果も技術も使わない. というのは, この論文の主要部分は [24-25] の出版の前にできていた. ただ 10 節では, J.Moser が [14] の結果を強めているのでそれを考慮した (VI 章 6 節も見よ)

[5] 関数 $f(p,q)$ と $g(p,q)$ が包合関係にあるとは, これらのポアッソン括弧 $\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}$ が恒等的にゼロのときである.

これらの積分の存在が, $2n$ 次元相空間 p, q における以下のような軌跡のふるまいを意味することを示すことができる ([20], VI 章 1 節). ある特定の $(2n-1)$ 次元集合が相空間を不変領域 (domain) に分割する. 各領域は不変な n 次元多様体に成層化されている. 領域が有界なら, これらの多様体はトーラスであって, 準周期運動の台となっている. 例 1 の作用–角変数がこのような領域に導入できる. 包合関係にある n 個の第一積分が見つかれば, 作用–角変数を導入する正準変換は求積で求めることができる.

例 **2.** 以下は可積分問題である: 二体問題, 二中心問題, 三軸不等楕円体の表面の測地線に沿う自由点の運動, 対称剛体がその対称軸上の点で固定されたときの運動, 重心で固定された非対称剛体の運動.

非可積分[6] の問題は: いわゆる平面円制限三体問題を含む n 体問題, 凸曲面上の測地線に沿っての自由点の運動, 対称剛体, 自由度 $n > 1$ の非線形振動.

可積分系の探索は主として 19 世紀に行われた (Jacobi, Liouville, Kovalevska 他). だが, ポアンカレの仕事によって明らかになったとおり, 力学系はその一般形においては非可積分である. 積分は知られていないばかりでなく, 存在しないのである. なぜなら, 軌跡全体は不変 n 次元多様体に乗っていないからである.

§2. 古典的摂動論

系が可積分系から小さな「摂動」だけ違うと仮定する. 例 1 の記法を使って

$$H(p, q) = H_0(p) + \mu H_1(p, q) + \ldots, \tag{1.2.1}$$

と書く. ここで μ は小さく, $\mu H_1 + \ldots$ は q に関して周期 2π である. ポアンカレ [1] によると, このケースを調べることは力学の基本問題である. 摂動 μH_1 は $t \to \infty$ での軌跡のふるまいにどんな影響を持つのか? 不変トーラスは保存されるのか? 軌跡はトーラス $p =$ 一定 の近くに留まることができるのか?

例 2 の可積分および非可積分問題の比較からすると, これらの疑問が力学において重要であることがわかる. これらに完全に答えるならば, とくに, 惑星系の安定性の問題への答えも得られるであろう.

t が大きい場合の軌跡の近似的な研究のために, 天文学の摂動論において, 以前から特別な道具が発展してきた. 正準変換 $p, q \to p', q'$ が H を

$$H(p, q) = H_0'(p') + \mu^2 H_1'(p', q') + \ldots, \tag{1.2.2}$$

の形に還元したとすると, 時間 $t \sim \dfrac{1}{\mu}$ の間に, 運動 $p'(t), q'(t)$ は $H_0'(p')$ で記述される準周期運動から量 $\sim \mu$ だけ異なる. p, q に戻ると, $p(t), q(t)$ に対して, $t \sim \dfrac{1}{\mu}$ の間 μ 程度の誤差の近似表式を得る. もっと精度が必要なら, 以下のような近似を行えばよい. すなわち, $p', q' \to p'', q''$ で, H を

$$H(p, q) = H_0''(p'') + \mu^3 H_1''(p'', q'') + \ldots,$$

[6] もっと注意深くいうと, 積分が完遂できない問題, である. というのは非可積分性の証明は複雑であり, 個々の場合に限って厳密に行うことができるからである.

の形に還元する．この場合の誤差は $\sim \mu^3 t$ である．逐次近似が収束すれば, 極限として, $H(p,q) = H_0^{(\infty)}(p^{(\infty)})$ が得られ, 系は可積分である．トーラス $p^{(\infty)} =$ 一定 は不変であり, 準周期軌道で満たされる．

このプログラムを実行するにあたって 2 つの困難に遭遇する．

1°．**小分母．** 正準変換 $p, q \to p', q'$ で, $p = p' + \mu \dfrac{\partial S}{\partial q}$, $q' = q + \mu \dfrac{\partial S}{\partial p'}$, $S(p', q) = \sum_{k \neq 0} S_k(p') e^{i(k,q)}$ なる形のものを探そう．座標 p', q' で関数 $H(p,q)$ を書くと[7]

$$H_0(p) + \mu \overline{H}_1(p) + \mu \widetilde{H}_1(p,q) + \ldots = H_0(p') + \mu \overline{H}_1(p') + \mu \left[\frac{\partial H_0}{\partial p} \frac{\partial S}{\partial q} + \widetilde{H}_1 \right] + \mu^2 \ldots$$

となる．(1.2.2) を得るためには, q に依存するオーダー μ の項を消去する必要がある．つまり, $(\omega, \dfrac{\partial S}{\partial q}) + \widetilde{H}_1 = 0$ となること, すなわち,

$$S_k(p') = \frac{i h_k(p')}{(\omega, k)}, \quad \text{ただし} \quad \widetilde{H}_1 = \sum_{k \neq 0} h_k e^{i(k,q)}. \tag{1.2.3}$$

が必要である．分母 (ω, k) は k の「共鳴」値においてゼロになり, すべての ω に対して適当に k を選ぶといくらでも小さくなる．この小分母 (ω, k) のために, $n > 1$ に対して形式変換の正当性が疑わしくなる．

2°．**近似の発散．** 各近似の級数が途中で切れ, したがって収束する場合がある．このような場合を Birkhoff[3](9 節参照) は詳しく調べた．しかし, Siegel[10] が示したところによると, 一般に, Birkhoff が調べた場合も含めて, 全近似を合わせると発散する．収束の結果として, 軌跡の構造は例 1 で記述したような様子になるべきである．しかし, 事実は, 摂動系の軌跡は不変トーラスの上にはない．

$\det \left| \dfrac{\partial \omega}{\partial p} \right| \neq 0$ と仮定する．このとき, 非摂動系の不変トーラスの任意の近傍に n 次元トーラスがあって, その上ですべての軌跡はある時間の後に閉じる．小さな摂動を受けると, 閉軌跡からなるこの n 次元多様体は一般に壊れる．その結果, 摂動論の級数は, 一般的に言って, 相空間のどの領域においても収束しない．

上記考察は, 必ずしも $(\omega, k) \neq 0$ であるような不変トーラスが摂動系に存在する可能性を排除するわけではない．ただし, これらのトーラスは決して領域を満たさない．

§3．小分母

小分母 (ω, k) の影響を調べるために, 天文学者は長い間算術的な議論を使ってきた ([1],[5] を見よ)．そのうちもっとも単純な議論は, 数の中にはより無理数的なものがある, というものである．

さらに, でたらめに選ばれたベクトル ω の成分同士は尽数関係にない．したがって, ほとんどすべての[8] ベクトル ω に対して, 整数 $k \neq 0$ をどう選んでも $(\omega, k) \neq 0$ が成り立つ．

[7] H_1 の上の線は q に関する平均を意味する．すなわち, $\overline{H}_1(p) = (2\pi)^{-n} \int H_1(p,q) dq$.

[8] リュベーグ測度ゼロの集合を除いて, すべて

ディオファンタス近似理論からの以下の定理 ([54] 参照) はこのアイデアをもっと正確に表現する.

定理. ほとんどすべてのベクトル $\omega = \omega_1, \ldots, \omega_n$ はすべての整数 $k \neq 0$ およびある $K(\omega) > 0$ に対して不等式

$$|(\omega, k)| \geq K|k|^{-\nu}, \quad (|k| = |k_1| + \ldots + |k_n|; \nu = n+1) \tag{1.3.1}$$

を満たす.

<u>証明</u>. 有界な領域 (domain)Ω, 固定した $K > 0$, および整数 k を考える. このとき, 不等式 (1.3.1) は幅が $2K|k|^{-\nu}$ より狭い「共鳴ゾーン」においてのみ成り立たない. Ω にのみ依存する定数を $D > 0$ として, このゾーンの体積は $K|k|^{-\nu}D$ を越えない.

$|k| = m$ を満たす k の数は Lm^{n-1} を越えない (定数 $L > 0$ は n にのみ依存する). したがって, $|k| = m$ を満たす共鳴ゾーンの測度は $Km^{-2}DL$ を越えず, $|k| > 0$ なるゾーンすべての測度は $\sum_{m=1}^{\infty} Km^{-2}DL \leq K\overline{D}(\Omega)$, $\overline{D} = 2LD$, を越えない. $K \to 0$ のとき, 共鳴ゾーンの全測度はゼロに向かい, ゆえに主張の証明がただちにしたがう. $\square$

だから大多数のベクトル ω に対して, 小分母 (ω, k) はゼロにならないばかりでなく, $|k|$ の巾で下から抑えることができる. このことから, 摂動論の級数 (1.2.3) が大多数のベクトル ω に対して収束するという望みが発生する ([1],[5],[7] を見よ). 事実, 解析関数 H_1 のフーリエ係数 h_k は幾何級数的に (in geometric progression) 減少する.

H_1 が $|\mathrm{Im}\, q| \leq \rho$ において解析的であり, $|H_1(p, q)| \leq M$ であるとする. すると $|h_k| \leq Me^{-|k|\rho}$ である (V 章 3.2 節参照). 条件 (1.3.1) を満たすと, 係数 $S_k = \dfrac{ih_k}{(\omega, k)}$ は h_k と同じようなスピードで幾何級数的にに減少する. 任意の $\delta > 0$ に対して

$$|S_k| \leq \frac{ML}{K\delta^\nu} e^{-|k|(\rho - \delta)}$$

が成り立つ. ただし, ν, L は絶対定数である (IV 章の (4.6.5) 式). したがって, 級数 S は $|\mathrm{Im} q| < \rho$ において収束し, 若干小さな領域 $|\mathrm{Im} q| < \rho - 2\delta$ において

$$|S_k| \leq \frac{ML}{K\delta^\nu} \tag{1.3.2}$$

が成り立つ (IV 章 (4.6.6) 式).

こうして, (1.2.3) 式はほとんどすべての ω に対して収束する. しかし, 1) このようにして得られた関数は p に関していたるところ不連続に依存する. 2) $s \to \infty$ の際のすべての近似 $p^{(s)}, q^{(s)}$ の収束は疑わしい.

§4. ニュートン法

上記 1) と 2) を克服するために, A.N.Kolmogorov[12] は以下のように示唆した.

示唆 1) 周波数 ω^* で準周期的な運動が乗っている摂動系の不変トーラス T_{ω^*} のみを探す. (1.3.1) を満たす周波数 ω^* の集合ははじめに決めておく. 対応する非摂動系: $p\ :\ p^* + \mu ...;$ $\dfrac{\partial H_0}{\partial p^*} = \omega^*$ の不変トーラスの近傍内にトーラス T_{ω^*} を探す.

式 (1.2.3) において, $\omega(p) = \dfrac{\partial H_0}{\partial p}$ の代りに ω^* を入れる. すると, 新しい変数で表された $H(p,q)$ は付加的な項 $\mu\left[(\omega-\omega^*)\dfrac{\partial S}{\partial q}\right]$ を含む. $|p-p^*| \sim \mu$ に対して, この項の大きさは $\sim \mu^2$ 程度である.

示唆 2) トーラス $p = p^*$ の指定した近傍において, 新しい変数 p', q' を解析的正準変換 $p, q \to p', q'$ によって導入する. これにより, ハミルトン関数 $H(p,q) = H_0(p) + H_1(p,q)$ は

$$H(p,q) \equiv H^{(1)}(p',q') = H_0^{(1)}(p') + H_1^{(1)}(p',q'),$$

なる形になる. ここで, $|H_1^{(1)}| \sim |H_1|^2$ である.

このようにして得られる 2 次 (quadratic) 収束は, ニュートン法 ([51] を見よ) に典型的であるが, これによって不変トーラス T_{ω^*} を見つけることができる. もう少し正確に言うと, 上記示唆 2) が以下のように関係する. すなわち, $|\mathrm{Im}\, q| \le \rho$ に対して $|H_1| \le M_1$ であるとする. (1.2.3), (1.3.1), (1.3.2) および上記 1) により, 変数 p', q' をうまく選んで, $|\mathrm{Im}\, q'| \le \rho - L\delta$, $|p' - p'^*| \le M_1$ に対して

$$|H_1^{(1)}(p',q')| \le M_2 = \frac{M_1^2}{\delta^{2\nu}}, \tag{1.4.1}$$

が成り立つようにできる. ここで $L > 0, \nu > 0$ は自由度の数 n にのみ依存する定数である. 点 p'^* において $\dfrac{\partial H_0^{(1)}}{\partial p'} = \omega^*$ が成り立ち, $\delta > 0$ は, H_0, ω^*, ρ にのみに依存するある定数を越えない限り自由に選ぶことができる.

そこで, 出発時に (1.4.1) が成り立つことを仮定して, 不変トーラス T_{ω^*} に収束する逐次近似をどうやって構成するかを示そう. $H^{(1)}(p',q')$ は $H(p,q)$ と同じ形をしているから, (1.2.3) を使うと, 正準変換

$$p', q' \to p'', q'' \to \ldots \to p^{(s)}, q^{(s)} \to \ldots$$

$$H(p,q) = H^{(s)}(p^{(s)}, q^{(s)}) = H_0^{(s)}(p^{(s)}) + H_1^{(s)}(p^{(s)}, q^{(s)})$$

を構成することができる. 不等式

$$|p^{(s)} - p^{*(s)}| \le M_s, \quad |\mathrm{Im}\, q^{(s)}| \le \rho_s \quad (\rho_0 = \rho, M_1 = M),$$

および

$$M_{s+1} = \frac{M_s^2}{\delta_s^{2\nu}}, \quad \rho_{s+1} = \rho_s - L\delta_{s+1}, \quad \frac{\partial H_0^{(s)}}{\partial p^{(s)}}\Big|_{p^{*(s)}} = \omega^* \quad (s = 1, 2, \ldots)$$

で定義された収縮する領域において, (1.4.1) より

$$|H_1^{(s)}| \leq M_{s+1} = \frac{M_s^2}{\delta_s^{2\nu}}. \tag{1.4.2}$$

が成り立つ.

これ以後, δ_s を扱う. $\delta_{s+1} = \delta_s^{3/2}$ $(s = 1, 2, \ldots)$ と置く. $M_s < \delta_s^T$ で T が十分大きければ, (1.4.2) により

$$M_{s+1} \leq \delta_s^{2T-2\nu} \leq \delta_s^{3/2} = \delta_{s+1}^T \tag{1.4.3}$$

である. T を大きくとって固定する. たとえば $T = 4\nu + 1$ と取る. また $|\mathrm{Im}\ q| \leq \rho$ に対して $|H_1(p, q)| \leq M_1 = \delta_1^T$ が成り立つとする. ただし, δ_1 は十分小さい. このとき, すべての $s = 1, 2, \ldots$ に対して, 領域 $|\mathrm{Im}\ q^{(s)}| \leq \rho_s$, $|p^{(s)} - p^{*(s)}| \leq M_s$ において $|H_1^{(s)}(p^{(s)}, q^{(s)})| \leq \delta_s^T$ が成り立つ. 加えて, 十分小さな δ_1 に対して, $\delta_s > \dfrac{\rho}{2} > 0$ $(s = 1, 2, \ldots)$ が成り立つ. 簡単に示せるように, (1.4.2) および (1.4.3) より, 上のように構成した領域は不変解析トーラス T_{ω^*} へと縮んでいく.

こうして, 摂動運動に関して以下のような描像に達した ([13]参照). $\det\left|\dfrac{\partial \omega}{\partial p}\right| = \det\left|\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial p^2}\right| \not\equiv 0$ を仮定する. このとき、 任意の点 p の小さな近傍に, 周波数 ω が尽数関係を満たす点があり, また $\omega(p) = \omega^*$ が (1.3.1) を満たすような点もある. これに応じて, ハミルトン関数 $H_0(p)$ を持つ正準方程式は, あるトーラス $p =$ 一定 上でいたるところ稠密な準周期運動を決める. 他のトーラスについては何も決めない.

わかったのは次のことである. 小さな摂動 $H = H_0(p) + \mu H_1(p, q)$ $(\mu \ll 1)$ に対して, 尽数関係になく, 固定した K に対して (1.3.1) を満たす周波数 ω^* を持ったいていの (most) 不変トーラスは消えずに残り, 変形するだけである. 変形したトーラス T_{ω^*} を出発する摂動系の軌跡はそのトーラスをいたるところ稠密に準周期的に埋める. トーラス T_{ω^*} はいたるところ疎な閉集合 (nowhere dense set) をなす (これらの間は破壊された尽数関係トーラスの残骸で占められる). ただし, これら不変でいたるところ疎な集合は正の測度を持つ. この測度は $K \to 0,\ \mu \to 0$ のとき, 相空間の全測度に向かう (7節を見よ).

$n = 2$ の場合, 2次元トーラス T_{ω^*} は3次元不変「エネルギーレベル」$H =$ 一定 を分割する (7図). したがって, 2つのトーラス T_{ω^*} の間隙から出発した軌跡はこの間隙から抜け出すことはできない. こうして, $n = 2$ の場合, 不変トーラスが存在すれば運動の安定性に関して結論を出すことができる.

$n > 2$ の場合, n 次元トーラス T_{ω^*} は $(2n - 1)$ 次元多様体 $H =$ 一定 を分割せず, 「間隙」は無限遠にまで達している. この場合, 初期条件の majority に対してのみ運動の情報を得ることができる.

図 7.

§5. 固有縮退

4 節の議論において, 周波数 $\omega(p)=\dfrac{\partial H}{\partial p}$ が独立であること, つまり, $\det\left|\dfrac{\partial\omega_i}{\partial p_j}\right|\neq 0$ を仮定した. しかし, 「固有縮退」の場合がそれほど稀でなく生じ得る. 非摂動系において運動が, 自由度の数 n より少ない数の周波数 n_0 によって記述される場合がこれである ([5] を見よ). 磁気トラップの問題 $(n_0=1,\ n=2)$ や天体力学の多体問題がまさにこれである. とくに多体問題では, 二体問題 $(n_0=1,\ n=3)$ が非摂動系の役割を果たす. これらの場合, 行列式

$$\det\left|\frac{\partial\omega_j}{\partial p_j}\right|=\det\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i\partial p_j}\right|$$

は恒等的にゼロである. 本節では, 古典摂動論の立場 (2 節参照) から固有縮退を考える.

例. 例 1(1 節) の作用・角変数 $p_1,\ldots,q_n$ において

$$H=H_0(p_1,\ldots,p_{n_0}),$$

が成り立つとする. ただし, $n_0<n$ である. 「高速変数」$p_1,\ldots,p_{n_0}$ のベクトルを p_0 と書き, 「低速変数」$p_{n_0+1},\ldots,p_n$ を p_1 と書くことにする. q_0 と q_1 は対応する座標である.

正準方程式

$$\dot q_0=\omega_0(p_0),\quad \dot p_0=0,\quad \dot q_1=0,\quad \dot p_1=0$$

$\left(\text{ここで}\,\omega_0(p_0)=\dfrac{\partial H_0}{\partial p_0}\right)$ は n_0 個の周波数 $\omega_0=\omega_1,\ldots,\omega_{n_0}$ を持つ準周期運動の n_0 次元の不変トーラス $p_0=$ 一定$,p_1=$ 一定$,q_1=$ 一定 上でのようすを記述する.

そこで, 摂動

$$H(p,q)=H_0(p_0)+\mu H_1(p,q)+\ldots \tag{1.5.1}$$

があると仮定する. すると, 古典摂動論[9] から次のような運動の描像が得られる $\left(\text{精度は}\ t\sim\dfrac{1}{\mu}\text{に対して}\ \sim\mu\right)$.

H_1 を「永年部分」

$$\overline{H}_1(p,q_1)=\overline{H}_1(p_1,\ldots,p_n;q_{n_0+1},\ldots,q_n)=(2\pi)^{-n_0}\int H_1 dq_0$$

と「周期部分」$\widetilde{H}_1(p,q)$ に分ける:

$$H_1(p,q)=\overline{H}_1+\widetilde{H}_1$$

摂動の永年部分と周期部分がまったく異なる役割を果たすことがわかる. ハミルトン関数を $\mu\overline{H}_1$ とする正準方程式

$$\dot p_1=-\mu\frac{\partial\overline{H}_1}{\partial q_1}+\ldots,\quad \dot q_1=\mu\frac{\partial\overline{H}_1}{\partial p_1}+\ldots,$$

[9] いまの場合, 「平均法」ともよばれる ([5],[7] 参照).

は不変トーラスを定義するパラメータ p_1, q_1 のゆっくりとした永年変化を決める．ハミルトン関数 $H_0+\mu\overline{H}_1$ によって記述される, パラメータのゆっくり変化する準周期運動のまわりの振動運動だけを記述するのが周期部分 $\widetilde{H}_1$ である．

上で指し示した運動の描像は, p_1, q_1 をパラメータとみなすならば, 2節の変換 $p_0, q_0 \to p_0', q_0'$ によって得ることができる．

摂動運動の性質に関してもっと精密な結論を得るためには, ハミルトン関数を $\overline{H}_1(p_1, q_1)$(パラメータ p_0 に依存する) とする「平均」正準方程式を調べる必要がある．以下では, これらの方程式が可積分あるいは近可積分である場合を考察する．これは, たとえば, 小質量の平面三体問題や, 一般 n 体問題において小質量, 小離心率, 小軌道傾斜角の場合に生じる．

可積分の場合, 適当に変数 p_1, q_1 を選ぶと, 永年部分 $\overline{H}_1=\overline{H}_1(p_1,\dots,p_n)$ は角変数 q_1 に依存せず, 第一近似では, n_0 個の高速周波数 $\omega_0=\xi_0$ と $n_1=n-n_0$ 個の低速周波数 $\omega_1=\mu\xi_1$ からなる準周期運動

$$\dot{q}_0=\omega_0(p_0),\quad \dot{p}_0=0,\quad \dot{q}_1=\omega_1(p),\quad \dot{p}_1=0$$

が得られる．$\mu\widetilde{H}_1$ に起因する摂動は平均がゼロであり, この運動に重ね合わさっている．

われわれの基本的な結果は, 固有縮退の場合に4節で記述したものに似た厳密な摂動論を構成したことにある. 以下で示すことは, μ が十分小さいとき, 大多数の初期条件に対して, 摂動運動が実際準周期的であり, またすべての時間 $-\infty<t<+\infty$ にわたって, 上で記述した第一近似に近いことである (8節を見よ).

4節の技術を適用するにあたって, いくつもの困難に出会う．最初で最大のものは, 小分母 (ω, k) の中で, ゼロがあることである．というのは, $\mu=0$ の場合, たったの n_0 個の周波数 ω_0 しかないからである．さらに, 以後の近似において, n 個の周波数 ω_0, ω_1 は小分母 $[(\xi_0, k_0)+\mu(\xi_1, k_1)]$ を決めるが, それらのうちいくつかは, 周波数 ω の近似的尽数関係により小さく, 残りは縮退のために小さい．$k_0=0$ の場合, μ のオーダーの分母が確かに得られる．

§6. 注意 I

縮退に結び付いた困難は [15], [16] および [17] によって克服された．まず, モデル問題で $n_0=1$ の場合 [15], 次に断熱不変量の問題 [16] において, そして一般の場合 [17] に．われわれの構成法は2つの remarks に基づいている．本節では, 最初の remark について考察する．$n_0=1$ の場合を調べればそれがわかる．

5節において注意したように, 分母 $[(\xi_0, k_0)+\mu(\xi_1, k_1)]$ のいくつかは周波数 ω が尽数関係に近いことに起因して小さく, 他のもの $(k_0=0)$ は μ が小さいことにより小さい．典型的な小分母 $(\xi_0, k_0)+\mu(\xi_1, k_1)$ は

$$|(\xi_0, k_0)+\mu(\xi_1, k_1)| \geq \begin{cases} K|k|^{-\nu}, & \text{if} \quad k_0\neq 0, \\ \mu K|k|^{-\nu}, & \text{if} \quad k\neq 0 \end{cases} \quad (\nu=n+1) \tag{1.6.1}$$

の形で下から大きさを見積もることができることがわかる．

というのは, 簡単に確かめられるように, ξ_0, ξ_1 空間では, K, μ, k を固定したとき, 条件 (1.6.1) は $2K|k|^{-\nu}$ より幅の広くない「共鳴帯」(resonance strip) においてのみ破られる．それ以後の議論は3節と同様に進む．

この簡単な remark からすると, ハミルトン関数が

$$H = H_0(p_0) + \mu H_1(p) + H_2(p,q) + \dots, \quad H_2 \sim \mu^2 \tag{1.6.2}$$

の形の場合に, 不変トーラスへと収束する近似を構成することができる.

なぜなら, $H_0 + \mu H_1$ を非摂動ハミルトン関数と見ることができるからである. 新しい変数 p', q' を 2 節, 4 節で定義した正準変換によって導入する. $|H_2| \le M$ と仮定する. すると, (1.6.1) および (1.2.3) より, (1.4.1)–(1.4.3) を導くときと同様,

$$|S| \sim \frac{M}{\mu}, \quad |p_0 - p_0'| \sim M^2, \quad |p - p'| \sim \frac{M}{\mu}, \quad |q - q'| \sim \frac{M}{\mu}. \tag{1.6.3}$$

であることがわかる. 新しい変数では

$$H = H_0(p_0') + \mu H_1(p') + H_3(p', q'),$$

である. ただし,

$$|H_3| \sim \frac{M^2}{\mu}. \tag{1.6.4}$$

(記号 $\sim$ は非常にあらっぽい意味で「程度の大きさ」を表す. ここでは M と μ を $K\delta^\nu$ よりかなり小さく取ることにより, 因子 $K\delta^\nu$ を無視している.)

さて, (1.6.4) より, $|H_2| \le M \sim \mu^2$ に対して $|H_3| \sim M^{3/2}$ を得る. このことから, $M_{s+1} = M_s^{3/2-\Delta}$, $\Delta > 0$ として (たとえば $M_{s+1} = M_s^{4/3}$) ニュートン逐次近似を導入することができる.

残っているのは, ハミルトン関数 (1.5.1) を (1.6.2) の形にすることである. この操作は高速変数に関して平均することであるが, $n_0 = 1, n = 2$ に場合, 新しいアイデアは必要としない.

事実, $n_0 = 1$ に対して, (1.2.3) には小分母はなく, 正準変換 $p, q \to p', q'$ の母関数は単純に公式

$$S(p_0', p_1', q_0, q_1) = \frac{1}{\omega}(p_0', p_1', q_1) \int_0^{q_0} \tilde{H}_1(p_0', p_1', q_0, q_1) dq_0. \tag{1.6.5}$$

によって決まる. 簡単に示せるように, 新しい変数 p', q' において (2 節を見よ), ハミルトン関数 (1.5.1) は

$$H_0(p_0') + \mu \overline{H}_1(p', q_1') + H_2(p', q') + \dots, \quad H_2 \sim \mu^2 \tag{1.6.6}$$

なる形を取る.

さらに, $n_0 = 1, n = 2$ なら $n - n_0 = 1$ であり, ハミルトン関数を $\overline{H}_1$ とする平均系 (p_0' はパラメータであり, p_1' と q_1' は正準共役変数である) は自由度 1 であって可積分である. p_1', q_1' の代りに作用・角変数 p_1'', q_1'' を導入して, $\overline{H}_1(p_0', p_1'; q_1')$ を $\overline{H}_1''(p_0', p_1'')$ の形に還元し, これによって (1.6.6) を (1.6.2) の形にもっていく.

$n_0 = 1, n = 2$ の場合に帰着できる問題は, ハミルトン関数がゆっくり周期的に変動する自由度 1 の振動系の断熱不変量のふるまいの問題や, 軸対称磁気トラップにおける磁気モーメントの断熱不変性の問題 (II 章を見よ) である.

$n > 2$ のとき, (1.6.2) への還元が可能なのは, 平均系が可積分かあるいは近可積分のときである.

$n_0 > 1$ の場合, ハミルトン関数 (1.5.1) を (1.6.2) の形へ還元すること, 譲歩して (1.6.6) の形へと還元することは新たな実質的困難を伴う. 困難は以下のようなものである. 高速変数で平

均するときに, 見積もり $|H_2| \sim \mu^2$ が 4 節にしたがって得られるのは, 選んだ p_0^* のまわりの領域 $\sim \mu$ においてのみなのである.

ところが, このとき, 以後の近似へと進むことができない. 実際, $|H_2| < M$ に対して公式 (1.6.3) において, コーシーの公式によって微分を見積もると, $|q_0 - q_0'| \sim \dfrac{M}{\mu^2}$ を得る. したがって, (1.6.4) において, $|H_3| \sim \dfrac{M^2}{\mu^2}$ であり, $M \sim \mu^2$ の場合には $H_3 \sim H_2$ となってしまい, ニュートン近似が得られない.

§7. 注意 II

上記の困難を克服するには次のようにすればよい. 非縮退の場合 (2節, 4節) をあらためて考えよう. 領域 $|p - p^*| \sim \mu$ に関する制限は 4 節の示唆 1) に結び付いている. これにより, $H_1^{(1)}$ に $|p - p^*|^2$ 程度の大きさの項が導入される.

摂動論の古典的手法 (2 節) に戻ると, 4 節の示唆 1) を捨てて, 2 節 (1.2.3) 式内の ω を関数 $\omega(p) = \dfrac{\partial H_0}{\partial p}$ と取る. ところがそのとき, p のいたるところ不連続な関数を扱わなくて済むようにするために,

$$S = \sum_{0<|k|<N} S_k e^{i(k,q)}$$

と置いて, 摂動論の級数を有限個のハーモニクスに制限する.

すると, $H_1^{(1)}$ の中に $\mu\widetilde{H}_1 - \mu[\widetilde{H}_1]_N = \mu \sum_{|k|\geq N} h_k e^{i(k,q)}$ なる形の項が現われる. この項が μ^2 程度の大きさであるためには, N を $\ln \dfrac{1}{\mu}$ 程度に取れば十分である (解析関数 $\widetilde{H}_1$ のフーリエ係数は幾何級数的に減少する).

得られた関数 S は正準変換 $p, q \to p', q'$ を定義する. この変換は, p' がある領域 G_{KN} に属していれば小さい. 領域 G_{KN} は H の定義されている領域 G から有限個 ($\sim N^n$) の共鳴ゾーンを除いて得られる. 領域 G_{KN} 内では

$$|(\omega(p), k)| \geq K|k|^{-\nu} \quad (0 < |k| < N; \nu = n + 1). \tag{1.7.1}$$

が成り立つ.

(1.7.1) より判るとおり, 領域 G_{KN} の成分の大きさ (magnitude) は $\left(\ln \dfrac{1}{\mu}\right)^{-n}$ 程度, つまり ~ 1 程度である. したがって, 6 節の最後に言及した困難はもう生じない. 高速変数に関して平均を取るにあたって remark 2 を利用すれば, ~ 1 程度の大きさの領域において (1.6.2) を得, したがって (1.6.3) を得る.

remark 2 は非縮退の場合にも有用である. これを使えば, 不変集合の測度を見積もるのに, ボレル (Borel) の monogenic 関数の道具立て [18] を使う必要がない. 論文 [19] にはこのアイデアの形式的な説明を与えておいた. ここでは, Remark 2 の応用の基礎的な技術的様相を若干述べる.

$|\mathrm{Im}\ q| \leq \rho$ に対して $|f(q)| \leq M$ が成り立つなら, フーリエ級数の残余を

$$|f(q) - [f(q)]_N| \leq M^2 \quad \text{for} \quad |\mathrm{Im}\ q| \leq \rho - \gamma \quad \text{if} \quad N = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{M}.$$

の形で見積もることができる (詳しくは V 章 3.2 節の 3) 項を見よ).

さて, ハミルトン関数 $H_0(p)+H_1(p,q)$ が領域 G の $|\mathrm{Im}\, q|\le\rho$ に対して不等式 $|H_1|\le M$ を満たすと仮定する. われわれの構成法はパラメータ β,γ,δ,K に依存する. これ以後, これらの値を十分小さく選び, $\gamma\gg\delta\gg\beta\gg M$ を満たすとする.

remark 2 を考慮して, 2 節や 4 節の議論から, 新しい変数 p',q' を導入して $H=H_0^{(1)}(p')+H_1^{(1)}(p',q')$ とし, 以下で条件で定義される領域内で $|H_1^{(1)}|\sim M^2$ が満たされるようにできる. すなわち, 1) p' はその β 近傍とともに G_{KN} に属す ((1.7.1) を見よ. $p'\in G_{KN}-\beta$ と書く); 2) $|\mathrm{Im}\, q|<\rho-\delta-\gamma$. ここで $N=\dfrac{1}{\gamma}\ln\dfrac{1}{M}$ であり, $|H_1^{(1)}|\sim M^2$ は

$$|H_1^{(1)}<\frac{M^2}{\beta^2\delta^{2\nu}} \tag{1.7.2}$$

のことである (詳しくは, [19] の基本補題を見よ).

量 $\beta,\gamma,\delta>0$ は, H_0,ρ,K に依存する定数によって上から限られる以外は任意に選ぶことができる. ただし, K は任意である. $\kappa>0$ が与えられたとき, 量 K,β,γ,δ,M を取って, $|H_1|\le M$ に対して, 不変トーラスの補集合が全相空間の κ 程度の部分を占めるようにする.

簡単に判るように (V 章の算術補題を見よ), 許される (admissible)p' の領域 $G_{KN}-\beta$ は G とは共鳴帯だけ異なる. 共鳴帯の全測度は

$$K\sigma+\beta N^n \quad (\sigma=\sum_{1\le m<N}m^{-2},\ N=\frac{1}{\gamma}\ln\frac{1}{M}). \tag{1.7.3}$$

の形の上限を持つ. 同様な上限は以後に続く近似においても得られる. ただし, σ の代りに, s 次近似では $\sigma_s=\displaystyle\sum_{N_{s-1}\le m<N_1}m^{-2}$ を使う. したがって $\displaystyle\sum_s\sigma_s<2$ である.

量 $K,\beta_s,\gamma_s,\delta_s,M_s$ は次のように選ぶ:

1) $\displaystyle\sum_s(\gamma_s+\delta_s)<\frac{\rho}{2}$(こうするとすべての近似が可能になる),

2) $M_{s+1}=M_s^2\beta_s^{-2}\delta_s^{-2\nu}<M_s^{3/2}$(こうすると近似は収束する. (1.7.2) を見よ),

3) $\displaystyle\sum_s(K\sigma_s+\beta_sN_s^n)<\kappa$(こうすると, (1.7.3) により, 不変集合の補集合の測度が $\sim\kappa$ になる).

次のように置く.

$$\gamma_s=\delta_s^\alpha,\quad \beta_s=\delta_s^3,\quad M_s=\delta_s^T,\quad N_s=\frac{1}{\gamma_s}\ln\frac{1}{M_s},\quad \delta_{s+1}=\delta_s^{3/2}$$
$$(0<\alpha\ll1,\ T\gg1)$$

T を十分大きく取って 2) が満たされるようにする. α を十分小さく取って $\beta_sN_s^n<\delta_s$ となるようにする (δ_1 が十分小さいなら). このとき, 十分小さな δ_1 に対して, 1) が満たされる. さらに, 十分小さな K と δ_1 に対して, 3) が満たされる. K をこのように選び, 次に δ_1 を十分小さく選んで上の要請がすべて満たされるようにする.

$M=\delta_1^T$ に対して, 不変トーラスに収束する近似を得, これらのトーラスの補集合の測度は 3) からすると κ 程度の大きさである.

§8. 固有縮退問題への適用

Remark 1 と 2 を結び付けて, 固有縮退の困難がすべて克服できる (5 節を見よ). そこで, 次の定理へと移ろう (この定理の前提は, たとえば三体問題において 2 つの惑星の質量が小さく, そのケプラー楕円の軌道傾斜角も小さい場合なら満たされる).

ハミルトン関数が解析的であって, 相空間 p, q(ただし, $p = p_0, p_1$; p_0 は n_0 次元のベクトル, p_1 は $n_1 = n - n_0$ 次元のベクトル; $q = q_0, q_1$ はそれぞれ高速および低速角変数 (mod 2π) である) 内の領域 F において

$$H(p,q) = H_0(p_0) + \mu H_1(p,q) + \dots, \tag{1.8.1}$$

なる形をしている.

以下の 2 つを仮定する.

1) 摂動の永年部分

$$\overline{H}_1 = (2\pi)^{-n_0} \oint H_1 dq_0$$

は低速運動の位相 q_1 に依存しない. すなわち $\overline{H}_1 = \overline{H}_1(p)$ である.

2) 次数 n_0 および n_1 の運動量に関する周波数の微分係数の行列式

$$\left|\frac{\partial \omega_0}{\partial p_0}\right| = \left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_0^2}\right| \not\equiv 0, \quad \left|\frac{\partial \xi_1}{\partial p_1}\right| = \left|\frac{\partial^2 \overline{H}_1}{\partial p_1^2}\right| \not\equiv 0$$

は恒等的にはゼロにならない.

このとき, 十分小さな $|\mu|$ および F 内の大多数の[10] 初期条件に対して, ハミルトン関数 (1.8.1) を持つ正準方程式で定義される運動は準周期的である. これらの初期条件を持つ運動は, すべての $-\infty < t < +\infty$ に対して, n_0 個の高速周波数 ω_0 および n_1 個の低速周波数 $\omega_1 = \mu\xi_1$ を持つ準周期運動 (1.8.2)

$$\dot{p}_0 = 0, \quad \dot{q}_0 = \omega_0(p_0) = \frac{\partial H_0}{\partial p_0}, \quad \dot{p}_1 = 0, \quad \dot{q}_1 = \mu\xi_1(p) = \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial p_1} \tag{1.8.2}$$

に近い (系 (1.8.2) で適当な初期条件をとって).

証明には, まず Remark 2(7 節) を使って高速変数に関して平均化を行う (変数 p_0, q_0 に関して 7 節の変換 $p, q \to p', q'$ を行う. ただし, p_1, q_1 はパラメータとみなす). 次に, 第二近似, 第三近似以下を行う. その際, Remark 1 を利用する (6 節).

証明の詳細にわたることは避ける. というのは, n 体問題 ($n > 3$ に適用するためにはもっと一般の結果 (IV 章参照) が必要だからである. この一般結果は, ここで考察した非特異縮退の場合をいわゆる極限縮退と結びつけて引用するからである.

§9. 極限縮退. バーコフの変換

[10] リュベーグ測度の意味で

可積分系の相空間を層状に分割する n 次元トーラス $p=$ 一定 の間で「極限的な場合」として, 個々のトーラスの次元 $k<n$ の場合がしばしばある. 例として, ハミルトン関数を $H=\dfrac{x^2+\dot{x}^2}{2}$ とする振動系を考えよう. 軌跡は $x,\dot{x}$ 平面の同心円 $(n=1)$ である. 平衡点の位置は $x=\dot{x}=0(k=0)$ で与えられる.

このような場合, 「極限縮退」という ([5] を見よ). 極限縮退として 2 つの場合が殊にしばしば現われる (振動論!): 平衡点の位置 $(k=0)$ と周期運動 $(k=1)$ である. これらの場合は Birkhoff[3] が詳しく研究した. 彼の結果は以下の議論で利用する. 証明は [3] および [8] を見よ.

点 $p=q=0$ がハミルトン関数 $H(p,q)$ を持つ系の平衡点の位置であるとする. ハミルトン関数は原点の近傍で, $p=p_1,\dots,p_n,q=q_1,\dots,q_n$ の巾級数

$$H=H_2(p,q)+H_3(p,q)+H_4+\dots, \tag{1.9.1}$$

として展開される (H_m は次数 m の項である).

ハミルトン関数を H_2 とする正準方程式は線形であるから可積分である. ハミルトン関数を H_2 とする線形系の平衡点は安定であると仮定する (いわゆる楕円型). このとき, 線形正準変換 $p,q\to p',q'$ があって, H_2 を

$$H_2(p,q)=(\lambda,\tau),\quad \text{ただし}\quad \tau=\tau_1\dots,\tau_n,\ 2\tau_1=p_i'^2+q_i'^2;$$

の形に還元する. ここで $\lambda=\lambda_1,\dots,\lambda_n$ はハミルトン関数を H_2 とする線形振動系の基本周波数の組である. この系では, 不変 n 次元トーラスは方程式 $\tau=$ 一定 >0 で与えられる. 周波数 λ が算術的に独立なら, 運動は準周期的であり, 軌跡はこれらのトーラスをいたるところ稠密に埋める. 周波数 λ はどのトーラス上でも同じである. 作用・角変数 τ,φ は p',q' と式

$$p=\sqrt{2\tau}\cos\varphi,\quad q=\sqrt{2\tau}\sin\varphi. \tag{1.9.2}$$

で結ばれる正準極座標である.

原点の小さな近傍において, (1.9.1) 式の項 $H_3,H_4,\dots$ は H_2 に比べて小さい. 摂動論の発想に従って, 適当な正準変換 $p''=p'+\dots,q''=q'+\dots$ によって H_3 その他を消去するよう努力してみる. 小分母 (λ,k) が現われるであろう. さらに, 計算によれば, H_3 は消去できるけれども H_4 の一部と残りの偶数次項の一部が残る. こうして, 任意の整数 $2s\geq 3$ に対して, (1.9.1) はいわゆる正規形 (1.9.4) に還元されることがわかる.

$$(\lambda,k)\neq 0\quad \text{for}\quad |k|=|k_1|+\dots+|k_n|\leq 2s-1. \tag*{$(1.9.3)_s$}$$

を仮定する.

このとき, 原点の近傍で収束する巾級数[11] 正準変換 $p^{(s)}=p'+\dots,q^{(s)}=q'+\dots$ が存在して, (1.9.1) は $p^{(s)},q^{(s)}$ により

$$H(p,q)=\overline{H}^{(s)}(\tau^{(s)})+\widetilde{H}^{(s)}(p^{(s)},q^{(s)}), \tag{1.9.4}$$

[11] 多項式かもしれない

なる形に表される．ただし

$$2\tau_i^{(s)} = (p_i^{(s)})^2 + (q_i^{(s)})^2, \quad \overline{H}^{(s)} = (\lambda, \tau^{(s)}) + \sum_{i,j} \lambda_{ij} \tau_i^{(s)} \tau_j^{(s)} + \dots$$

は τ_i^s の多項式 $(\lambda_{ji} = \lambda_{ij})$ であり，$\widetilde{H}^{(s)} = O(|\tau^{(s)}|^s)$ は $p^{(s)}, q^{(s)}$ に関する収束巾級数であって，次数 $2s$ の項から始まる．多項式 $\overline{H}^{(s)}$ の係数 $\lambda_i, \lambda_{ij}, \dots$ は s に依存しないし，(1.9.1) を (1.9.4) に還元する方法にも依存しない．これらは，p, q の正準変換に関する関数 (1.9.4) の不変量である．

ハミルトン関数を $\overline{H}^{(s)}$ とする系は可積分である．作用・角変数は $p^{(s)}, q^{(s)}$ と式 (1.9.2) で結ばれる正準極座標 $\tau^{(s)}, \varphi^{(s)}$ である．不変トーラスは方程式 $\tau^{(s)} =$ 一定 で与えられる．対応する周波数 $\lambda_i^{(s)} = \lambda_i + 2\sum_j \lambda_{ij}\tau_j^s$ は一般的に言えば，トーラス毎に異なる．行列式

$$|2\lambda_{ij}| = \left|\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial \tau^2}\right|_0 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 2\lambda_{ij} & \lambda_i \\ \lambda_j & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \overline{H}}{\partial \tau^2} & \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial \tau} & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (1.9.5)_{1,2}$$

(階数は n または $n+1$) のどれかひとつがゼロでなければ，(1.9.1) は**一般楕円型**とよばれる．

正規形 (1.9.4) により，原点の小さな $(\sim \varepsilon)$ 近傍に始まる軌跡のふるまいを調べることができる．$t \sim \varepsilon^{-s}$ に対して，軌跡は，ハミルトン関数を $\overline{H}^{(s)}$ とする可積分系の軌跡の近くにとどまる．後者の軌跡は $-\infty < t < +\infty$ すべてに対して原点の近傍にとどまる．だから，$k \neq 0$ に対して $(\lambda, k) \neq 0$ なら，原点の ε 近傍から出発する軌跡は，少なくとも時間 $C_s\varepsilon^{-s}$ の間，原点の近くにとどまる．ここで ε が十分に小さければ，s は任意に大きい．

しかし，2 節で注意したように，級数列 $p^{(s)} = p' + \dots, q^{(s)} = q' + \dots$ は $s \to \infty$ のとき発散する．したがって，点 $0, 0$ の安定性は (1.9.4) からは出ない．

自由度 n の保存系の周期運動の近傍の研究 [3] は，自由度 $n-1$ の系の平衡点の位置の研究に還元できる．ただし，その場合，ハミルトン関数 (1.9.1) は時間に周期的に依存する．すなわち $H(p, q; t + 2\pi) = H(p, q; t)$．(1.9.3) の代りに，$|k| \leq 2s - 1$ に対して $(\lambda, k) \neq k_0$，$k_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ を要求すると，バーコフ変換 $p, q \to p^{(s)}, q^{(s)}$ があって，$H(p, q; t)$ を (1.9.4) の形に還元する．関数 $p^{(s)}(p, q), q^{(s)}(p, q)$ と $\tilde{H}^{(s)}(p^{(s)}, q^{(s)})$ はこの場合やはり t に依存する (周期 2π)．

§10. ハミルトン系の平衡点の安定性

一般楕円型の保存系の平衡点の安定性ははじめて著者の論文 [14] によって，自由度 2 の場合に，仮定 $(1.9.3)_\infty$ および $(1.9.5)_2$ の下に証明された．A.M. Leontovich[23] はこの結果を有界三体問題に適用し，ラグランジュの周期解が安定であることを証明した．

次に J.Moser は，λ_1/λ_2 の無理数性 (条件 $(1.9.3)_\infty$) の代りに条件 $(1.9.3)_{2\frac{1}{2}}$ を取れば十分であること，すなわち，$|k_1| + |k_2| \leq 4$ に対して $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 \neq 0$ を取ればいいことを観察した．自由度が 2 より大きいなら，安定性は未解決である．証明されているのは大多数の初期条件に対してのみである．

同様な結果は非自励系の場合に (著者によって [14], そして Moser によって [25]) 得られている. 2 周波数問題, すなわち, 自由度 2 の自励系の周期運動の場合や自由度 1 でハミルトン関数が周期変化する系の平衡点の場合, では安定性が証明された.

ここでは一般楕円型のハミルトン系の平衡点の安定性の証明を, $|k_1| + |k_2| \leq 4$ に対して $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 \neq 0$ ($(1.9.3)_{2\frac{1}{2}}$ を見よ) という仮定の下で述べる.

9 節に応じて, ハミルトン関数が

$$H = H_0(\tau) + H_1(\tau, \varphi), \quad \text{ただし} \quad H_0(\tau) = (\lambda, \tau) + \sum \lambda_{ij}\tau_i\tau_j, \quad |H_1| \leq C|\tau|^{2\frac{1}{2}}. \qquad (1.10.1)$$

なる形をしていることを正当化できる ((1.9.4) を見よ). ここで $H_1(\tau, \varphi)$ は τ, φ に関し領域 $|\tau_i - \varepsilon| < \varepsilon,\ |\mathrm{Im}\ \varphi| < 1$ において解析的である. 条件 $(1.9.5)_1$ が成り立つことをなによりも先ず仮定する. 次に領域 $|\tau - \varepsilon| < \varepsilon$ 内で τ を動かすと, 周波数 $\lambda(\tau) = \dfrac{\partial H_0}{\partial \tau}$ は点 $\lambda = \lambda(0)$ のまわりの ε 程度の大きさの領域を走り回る.

ところが簡単に気づくように, ε 程度の大きさの領域内の点 λ の大多数は

$$|(\lambda, k)| \geq K\varepsilon|k|^{-\nu} \quad (|k| > 0,\ \nu = n + 1) \qquad (1.10.2)$$

の形の分母 (λ, k) に対して, 適当な $K > 0$ を取ると下限を見積もることができる.

というのは, 簡単にわかるように, 数 k の共鳴帯の測度は, いま考えている領域の測度の $K|k|^{-\nu}$ 程度の部分を構成するからである. 以下の議論は 3 節と同じ道筋で進む.

この remark より, 十分小さな (ε に依存しない)$K > 0$ に対して, 小分母 $(\lambda(\tau), k)$ は, 領域 $G : |\tau_i - \varepsilon| < \varepsilon$ 内の大多数の τ に対して下限 (1.10.2) を持つ. われわれの結論は $\lambda = \lambda(0)$ の算術的な性質には依らない.

そこで 7 節の構成法を領域 G 内の関数 (1.10.1) に適用しよう. $\beta = \delta^3\varepsilon$ と置く. $|H_1| \leq M$ としよう. 十分小さな δ に対して, 領域 $G_{\varepsilon K, N} - \beta$ 内で (1.7.2) より

$$|H_1^{(1)}(\tau', \varphi')| < \frac{M^2}{\varepsilon^2\delta^{2\nu+6}}.$$

を得る. $M < C\varepsilon^{5/2}, M < \delta^T$ なら, 十分大きな T および十分小さな δ に対して, すぐ上の公式より,

$$|H_1^{(1)}(\tau', \varphi')| < M^{11/10} \quad (\text{一般に} \ < \mathrm{M}^{6/5-\Delta},\ \Delta > 0)$$

がしたがう. したがって,

$$\gamma_s = \delta_s^\alpha, \quad \beta_s = \delta_s^3\varepsilon, \quad M_s = \delta_s^T, \quad N_s = \frac{1}{\gamma_s}\ln\frac{1}{M_s}, \quad \delta_{s+1} = \delta_s^{11/10}$$

と置く. 十分小さな α, 十分小さな K, 十分大きな T, 十分小さな δ_1 および $\varepsilon < \delta_1^R = \delta_1^{2/5T}$ に対して, 7 節で構成した近似は収束する. 原点の ε 近傍において準周期運動の乗る不変トーラスを得る.

この時点まで, われわれの議論は任意の自由度 n に対して正しかった. しかし, $n = 2$ ならば, 見つけた 2 次元トーラスはそれを含む 3 次元多様体 $H =$ 一定 を分割する. 原点近傍のこれら各多様体上に不変トーラスがあるなら, 原点はもちろん安定平衡点である.

われわれの構成法で $H=$ 一定 上に与えられたトーラスが存在するのは比 $\dfrac{\lambda_1(\tau)}{\lambda_2(\tau)}$ が線 $H_0(\tau)=0$ に沿って変化するときである. 自由度 n の場合, これは条件

$$\frac{D\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n},\dots,\dfrac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)}{D(\tau_1,\dots,\tau_{n-1})}\neq 0 \tag{1.10.3}$$

によって表される (ここで τ_n は式 $H_0(\tau)=0$ より, $\tau_1,\dots,\tau_{n-1}$ によって表される).

式 (1.10.3) は対称な形にすると $(1.9.5)_2$ の形になる. だから, $n=2$ の場合は仮定 $(1.9.5)_2$ および $(1.9.3)_{2\frac{1}{2}}$ から安定性が出る. 仮定 $(1.9.5)_2$ はもっと弱めることができる ([14] を見よ) [12].

$n\geq 2$ の場合, 得られたトーラスは平衡点の ε 近傍の大きな部分を占める. このことは (1.7.3) の型の見積もりを使って証明される. この見積もりは共鳴ゾーン $G\backslash(G_{\varepsilon K,N}-\beta)$ と領域 G 全体の測度の比を表現する. 詳しい証明は IV 章で述べる (そこでは $n_0=0$ と置くべき). 技術的な便宜のために, 証明は仮定 $(1.9.3)_{3\frac{1}{2}}$ (つまり $|k|\leq 6$ に対して $(\lambda,k)\neq 0$) および $(1.9.5)_1$ の下で行う.

一般の多次元楕円の場合の安定性は未解決である. 一番単純な未解決問題は, 4 次元空間からそれ自身の中への正準写像の不動点の安定性を決定することである.

[12] (1.9.3) を完全に捨て去ることができない例が知られている ([4] を見よ).