II 章. 断熱不変量

この章では, 断熱不変量の概念 (これは重要かつ興味深いにもかかわらず数学者がほとんど調べてこなかった) について考える. 自由度 1 の振動系のパラメータが小さく周期変動する場合の無限時間にわたる断熱不変量の変化を調べる. 系が非線形なら, この変動はすべての $-\infty < t < +\infty$ にわたって小さい, ことがわかった ([16] を見よ).

1 節では断熱不変量と永劫断熱不変量を定義する. 2 節では, 作用が永劫不変であることの証明を I 章 8 節の型の一般定理へ還元する. 3 節では自由度 2 の保存系に対しての類似の手続きを概観する. 得られた結果を 4 節において軸対称磁場中の荷電粒子の運動の研究に応用する. 断熱磁場トラップは粒子を永遠に引き留めて置くことができる ことを示そう. 最終節は多次元の場合のいくつかの注意を述べる.

§1. 断熱不変量の概念

この節では, 断熱不変量の概念の数学的定義のうちの可能なひとつを与える. 自由度 1 の線形および非線形振動系における断熱不変量の変動の蓄積の問題を議論する.

1. 断熱変化. パラメータが変化し得る力学系, たとえば可変長の振り子を考えよう. (系の運動に比べて) 非常にゆっくりパラメータが変わるとき, 異なる漸近的現象が現われる. 振り子の例では, 振動振幅は (極限では) 長さの関数であることがわかる. 長さがある適当な法則にしたがって十分ゆっくり変化するなら, 長さが元の長さに戻るたびに, 振動の振幅も初期の値に戻る.

パラメータのこのような緩慢な変化は断熱的とよばれる. 断熱変化の概念は物理学者によってやや曖昧な形で導入された. 系のパラメータを変えている人物にはその変化が見えない (さもなければ, パラメータを系の運動と同期するように変えて系を揺らせることができる) と想定された. この要請に対する数学的な定式化は非常に微妙である.

[26] にしたがって, この困難を避け, $\lambda = f(\mu t)$ の形のパラメータ λ の低速変化を考える. ここで $f(x)$ は固定した滑らかな関数であり, μ は非常に小さな数である. 一般性を失うことなく, いわゆる「遅い時間」λt をゆっくり変化するパラメータと考えることができ, ハミルトン関数 $H(p, q; \lambda)$ を固定する. 非常に小さな μ を考え, 大きいけれども有限な時間間隔 $t \sim \dfrac{1}{\mu}$ の間の系の運動を問題にしよう.

2. 断熱不変量. ハミルトン関数を

$$H(p, q; \lambda) \quad (p = p_1, \dots, p_n;\ q = q_1, \dots, q_n;\ \lambda = \mu t)$$

とする力学系を考える.

定義. 関数 $J(p, q; \lambda)$ が系の断熱不変量と言われるのは, 小さな μ に対して

$$J(t) = J[p(t), q(t); \lambda(t)]$$

が $t \sim \dfrac{1}{\mu}$ の間に少ししか変化しないときである (ここで, λ や H の変化は 1 程度である).

もう少し詳しく言うと, J が 断熱不変量 であるのは, 任意の $\kappa > 0$ に対して $\mu_0 > 0$ を見つけることができ, $0 < \mu < \mu_0$ ならば区間 $0 < t < \dfrac{1}{\mu}$ のすべての t に対して

$$|J(t) - J(0)| < \kappa.$$

にできるときである.

明らかに, 自己保存 (不変) 量はどれも断熱不変量である. 自明でない例を以下に示す.

I. 自由度 1 でハミルトン関数を $H(p, q; \lambda)$ とする振動系を考えよう. パラメータ λ の値を固定すれば相平面 p, q 上で, エネルギーのレベル曲線族 $H(p, q; \lambda) =$ 一定 が書ける. 点 p_0, q_0 を通る曲線はある領域を囲む. その面積を $2\pi I(p_0, q_0; \lambda)$ と書く. I が断熱不変量であることを示すことができる [5],[6]. 量 I は 作用変数 あるいは 作用 とよばれる.

数学振り子

$$H = \frac{p^2 + \omega^2 q^2}{2}, \qquad \text{図 8}$$

の場合, $I = \dfrac{H}{\omega}$ である. ただし, $\omega = \omega(\lambda)$ は振動周波数である.

II. 第二の例としてゆっくり動く 2 枚の平行平面の間の完全弾性球の運動を考える (8 図). 平面間の距離と球の速度の積は断熱不変量である. これは初等的なやり方でも示すことができる ([26] を見よ). 例 II は例 I の極限的な場合と考えることもできる.

III. もうひとつの例は, 磁場の中の荷電粒子の運動を考えて得られる. 場 B の強さが時間的にも空間的にも一定なら, 粒子は力線のまわりの渦巻に沿って動く. 粒子の速度 v を場に平行な成分と垂直な成分に分ける:

$$v = v_{||} + v_{\perp}.$$

場 $B(\lambda)$ がゆっくり変化するとき, 「磁気モーメント」

$$I = \frac{W_{\perp}}{B},$$

の大きさが断熱不変量であることを示すことができる ([28] を見よ). ここで $W_{\perp} = \dfrac{v_{\perp}^2}{2}$ は横断的方向の運動エネルギーである.

3. 永劫断熱不変量. 断熱不変量 I は時間 $t \sim \dfrac{1}{\mu}$ の間, 少ししか変化しない. しかし, 無限時間経てば, 大きく変化し得る. これは I の小さな変化が集積する可能性と関係する. たとえば, 線形振動系 (ぶらんこ)

$$\ddot{x} = -\omega^2(1 + \alpha \cos \mu t)x \quad (\alpha \ll 1)$$

を考えてみよう. 知られているように ([6]), ある値 (すなわち, $\mu \approx \dfrac{2\omega}{k},\ k = 1, 2, \ldots$) のときにパラメトリック共鳴が可能である. つまり, $t \to \infty$ のとき $I(t) \to \infty$ となる. このようなぶらんこは, パラメータ μ の変化が任意に小さい場合でも生じ得る.

しかし, 自由度 1 の非線形振動系のハミルトン関数 $H(p, q; \lambda)$ がゆっくり周期的に変動したとき, 断熱不変量は永遠に保存される. すなわち, 任意の $\kappa > 0$ に対して, $\mu_0(\kappa) > 0$ を見つけることができて, $|\mu| < \mu_0$ なら, すべての $-\infty < t < +\infty$ に対して

$$|I(t) - I(0)| < \kappa,$$

とすることができる. この主張は 2 節で証明する.

線形系は例外である. というのは, その振動の周波数が振幅に依らないからである. 非線形系ではこれと違って, 振幅が増すと周波数が変わり, 振動は増大することができなくなる. なぜなら, 共鳴条件 $\mu \approx \dfrac{2\omega}{k}$ が破れるからである.

§2. ハミルトン関数の緩慢な周期変化にともなう永劫断熱不変性

この節では, 自由度 1 であって, 遅い時間 λt に周期的に依存する解析的なハミルトン関数 $H(p,q;\lambda)$:

$$H(p,q;\lambda+2\pi) = H(p,q;\lambda).$$

を持つ非線形振動系を考える. 作用 I が永劫断熱不変量であることを証明する.

1. 保存近似. まずあらっぽいゼロ次近似を考える. $\lambda =$ 一定 で系は自励であるとする. 自由度 1 の保存系として, この系は可積分である. 系の周期運動を記述するのに, 作用・角変数 I,ω を使うのが都合よい. これらの変数は正準変換

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad w = \frac{\partial S}{\partial I} \tag{2.2.1}$$

によって導入される. 母関数は

$$S(I,q) = \int_{H=h}^{q} p dq, \tag{2.2.2}$$

である. ただし, $h = H_0(I)$ は

$$I(h) = \frac{1}{2\pi}\oint_{H=h} p dq, \tag{2.2.3}$$

の逆関数であり, (2.2.2) および (2.2.3) 内の p は, 方程式 $H(p,q) = h$ から得られる量 $p(h,q)$ を表す.

式 (2.2.1) は, 各固定した λ の値に対して, 正準変換 $p,q \to I,w$ を定義する. I,w の時間変化はハミルトン関数を $H_0(I)$ とする正準方程式により決定される. したがって, 量 I は保存され, 円周 $I =$ 一定 上の角度座標 w は周波数

$$\dot{w} = \omega(I) = \frac{\partial H_0}{\partial I}. \tag{2.2.4}$$

で一様に変化する. すべての関数 $H(p,q;\lambda)$, $S(I,q;\lambda)$, $H_0(I;\lambda), w(I;\lambda)$ はパラメータ λ に依存する. その依存性は (2.2.1)–(2.2.4) ではあからさまに書かなかった. 保存近似では, パラメータ λ の値は固定される. 近似は $t \sim 1$ の間適用可能である.

2. 断熱近似. 1 項で導入した作用・角座標はパラメータ λ が時間変化する場合に便利である. 変換 $p,q \to I,w$ は正準であるが, パラメータ λ に依存するから, 時間 t に依存する. だから, I,w の時間変化はハミルトン関数を

$$H(I,w;\lambda) = H_0(I) + \mu H_1(I,w;\lambda), \tag{2.2.5}$$

とする正準方程式によって決定される. ここで $H_1 = \dfrac{\partial S}{\partial \lambda}$ は 1 価関数であって, w と λ に関し周期 2π である.

古典摂動論 (I 章を見よ) によれば, 相空間 $p,q;\lambda$ に
おいて以下のような描像が得られる.
座標 λ が 2π 異なる点を同一視する.
すると, 方程式 $I =$ 一定 は 2 次元

トーラスを決める. このトーラス
上の角度座標 w と λ を
緯度, 経度と呼ぶことにする (図 9).

保存近似 ($\mu = 0$) においては,
トーラスの各点は子午線 $\lambda =$ 一定 に
沿って, 経度に依存する角速度 $\omega(I;\lambda)$
で動く. $\mu \neq 0$ では, 子午線を横切る
ゆっくりした運動 ($\lambda = \mu$) が加わって, 運動は 2 周波数になる. しかし, 摂動論の近似内では, 相点は不変トーラス $I =$ 一定 の上にとどまる. この近似は断熱とよばれる. 困難なくわかるように, 真の運動は時間 $t \sim \dfrac{1}{\mu}$ の間断熱近似に近い. これで I の断熱不変性が証明された.

次に非線形系にける I の 永劫 断熱不変性の証明に移ろう.

3. 不変トーラス. 線形系においては, $\omega(I) =$ 一定 かつ $H_0(I) = I\omega$ である. 振動は非線形であると仮定する. $\overline{\omega}(I)$ は平均周波数

$$\overline{\omega}(I) = \frac{1}{\omega}\oint \omega(I;\lambda)d\lambda = \frac{d\overline{H}_0}{dI}, \quad \text{ここで} \quad \overline{H}_0(I) = \frac{1}{2\pi}\oint H_0(I;\lambda)d\lambda.$$

を表すとする. また

$$\frac{d^2\overline{H}_0}{dI^2} = \frac{d\overline{\omega}}{dI} \neq 0. \tag{2.2.6}$$

を仮定する. 条件 (2.2.6) の下で, I の 永劫 断熱不変性を証明しよう. このことを頭に入れておいて, ハミルトン関数を (2.2.5) とする系の 真の(近似的でない) 不変トーラスをたくさん探そう. これらのトーラスは μ が小さければトーラス $I =$ 一定 に近い. これらは 2 次元であり, 3 次元相空間 $p, q; \lambda$ を薄い層に分ける. 初期点 $p_0, q_0; \lambda_0$ が 2 つのトーラス λ_1 と λ_2 の間にあれば, 軌跡 $p(t), q(t); \lambda(t)$ は全体が λ_1 と λ_2 の間に含まれる. 次の命題を証明する.

1. 任意の $\kappa > 0$ に対して, μ_0 を見つけることができて, $|\mu| < \mu_0$ なら任意の点 $p_0, q_0; \lambda_0$ は 2 つの不変トーラス T_1 と T_2 の間に挟まれるようにできる. ただし,

$$|I(p_1, q_1; \lambda_1) - I(p_2, q_2; \lambda_2)| < \kappa,$$

であり, $p_1, q_1; \lambda_1$ は T_1 に属し, $p_2, q_2; \lambda_1$ は T_2 に属するとする.

この命題 1 から作用の永劫不変性がただちに従う.

定理 1. 振動系が作用–角変数に関するハミルトン関数 (2.2.5) を持つとし, $\dfrac{\partial H_0}{\partial I} \neq 0$, $\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \neq 0$ が領域 $|I - I_0| \leq r$ 内いたるところ成り立つとする. このとき任意の $\kappa > 0$ に対して μ_0 を見つけることができて, $|\mu| < \mu_0$ かつ $|I(0) - I_0| \leq r - \kappa$ なら, すべての $-\infty < t < +\infty$ に対して $|I(t) - I(0)| \leq \kappa$ が成り立つようにできる.

定理 1 の前提のもとで命題 1 を証明しよう.

4. 予備正準変換. ハミルトン関数 (2.2.5) を (1.8.1) の形に還元したい. このためには, 高速運動 w の位相を独立変数にとると都合がいい.

補題. 周波数 $\omega(I;\lambda)=\dfrac{\partial H_0}{\partial I}$ がいま問題にしている領域でゼロにならないとする. このとき, 変数 I, w, λ の解析関数 P, Q, T で, μ に依存しないものが存在して, 以下の 3 つの性質を満たす.

1) $P, Q-\lambda$ および $T-w$ は w および λ に関し周期 2π である.

2) ハミルトン関数を (2.2.5) とする正準方程式は正準方程式

$$\frac{dP}{dT}=-\frac{\partial k}{\partial Q},\quad \frac{dQ}{dT}=\frac{\partial k}{\partial P}$$

と等価である. ただし, この方程式のハミルトン関数は

$$k(P,Q;T)=\mu k_0(P)+\mu^2 k_1(P,Q;T)+\ldots, \tag{2.2.7}$$

であり, Q, T に関して周期 2π であって, トーラス層 $|P-I_0|\leq r$ の複素近傍において解析的である.

3) (2.2.7) において, 関数 $k_0(P)$ は $\overline{H}_0(I)$ の逆である. したがって $\overline{H}_0(k_0(P))=P$ である.

まず何をおいても新しい時間 $T=w$ を導入する. 知られているように [4], $I, w; \lambda$ 空間におけるハミルトン系の積分曲線は微分形式

$$Idw-H(I,w,\mu t)dt=-\frac{1}{\mu}(Hd\lambda-\varepsilon Idw). \tag{2.2.8}$$

につねに結び付いている. この形式に定数を乗じても関係式を変えない. (2.2.8) において, $I, w; t$ ではなくて $H, \lambda; w$ を独立変数とみなす. (2.2.5) を I に関して解いて

$$I(H,\lambda;w)=I_0(H,\lambda)+\mu I_1(H,\lambda;w)+\ldots$$

を得る. 記法

$$p'=H,\quad q'=\lambda,\quad T=w,\quad K=\mu I.$$

を導入する. すると,

$$K(p',q';T)=\mu I_0(p',q')+\mu^2 I_1(p',q';T)+\ldots \tag{2.2.9}$$

および

$$Hd\lambda-\mu Idw=p'dq'-K(p',q';T)dT,$$

が成り立つ. だからハミルトン関数を (2.2.5) とする系と, (2.2.9) とする系は等価である ([4] を見よ).

2. における周波数 $\omega(I;\lambda)$ は時間変化することに注意しよう. 正準変換 $p', q'\to P, Q$ によって, 座標 $q'=\lambda$(slow time) を変え, 新しい時間に関して周波数 Q が一定値 $\overline{\omega}(I)$ となるようにする. このことを頭に入れておいて, ハミルトン関数を $I_0(p',q')$ とする系に, 正準変換

$$p'=\frac{\partial S}{\partial q'},\quad Q=\frac{\partial S}{\partial P}$$

によって作用–角変数を導入する．この変換の母関数は

$$S(P, q') = \int^{q'} H_0(I, \lambda) d\lambda,$$

である．ここで, $I = k_0(P)$ は $H_0(I)$ の逆関数である．明らかに, 量 $P, Q; T$ は 4. の補題の要請をすべて満たす.

この補題に応じて, ハミルトン関数を (2.2.7) とする系に関する類似の主張から 3. の命題 1 がしたがう.

5. ハミルトン関数 (2.2.7) を持つ系の研究. 関数 (2.2.7) は形式的には I 章 8 節の記述範囲には入らない．というのは, (2.2.7) は「時間」T を明示的に含んでいるからである．ところが, I 章 8 節の結論は正しく, I 章で概説された方法で容易に得ることができるし, IV 章ではもっと込み入った問題で詳しく実行する．ここでは証明の詳細にはこれ以上立ち入らない．ここでは別の方法により, 系 (2.2.7) を自由度 2 の保存系に還元できることを示す．このために, 正準方程式

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = -\frac{\partial k}{\partial Q}, \quad \frac{\partial R}{\partial \tau} = -\frac{\partial k}{\partial T}, \quad \frac{\partial Q}{\partial \tau} = \frac{\partial k}{\partial P}, \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} = 1$$

で, ハミルトン関数を

$$R + k(P, Q, T) = R + \mu k_0(P) + \mu^2 \ldots \tag{2.2.10}$$

とし, 角度座標を Q, T とするものが, ハミルトン関数を (2.2.7) とする正準方程式を含むことに注意する．関数 (2.2.10) は (1.8.1) の形をしている.

(1.9.5) に類似で I 章 8 節の結果の正当性を保証する不等式は (2.2.6) からしたがう.

これらの方法のどちらを使っても, 次の命題を証明することができる.

命題 II. (2.2.7) 式が $|\mu| < \overline{\mu}$ に対して, 領域 $|\mathrm{Im} Q, T| \le \rho$, $|P - P_0| \le r$ において解析的であるとする．ただし, $|k_0| \le M$, $|k_1 + (\mu) \ldots| \le M$, $\left|\dfrac{d^2 k_0}{d P_0^2}\right| \ge \theta > 0$ とする．このとき, どの $\kappa > 0$ に対しても, $\mu_0(\kappa, \overline{\mu}, r, \rho, M, \theta) > 0$ を見つけることができて, $|\mu| < \mu_0$ なら, 実トーラス層 F(ただし $|P - P_0| \le r$) は, $\kappa\ \mathrm{mes} F$ 未満の測度の残余不定性の精度で不変トーラスで満たされており, あるトーラス $P =$ 一定 からこれらの不変トーラスの距離は κ 未満である.

命題 I, および 3. の定理 1 も, 4. により命題 II から簡単に出る.

§3. 保存系の断熱不変量

この節では, 自由度 2 の保存系において, 作用変数が永劫不変量であることを証明する.

1. 断熱近似. 自由度 2 の保存力学系 (X, Y) を考えよう．この座標のうちのひとつ, たとえば X が少し変化しても系の状態にほとんど影響しないと仮定する．このとき, ゆっくり変化するパラメータ μX に依存する 1 自由度系 Y が近似的に存在すると仮定できる．作用変数 I_Y は以下の意味で断熱不変であることを示すことができる.

4 変数の関数 $H(\ldots)$ を固定しよう． X, Y, P_X, P_Y を正準共役変数とする．ハミルトン関数 $H(\mu X, Y; P_X, P_Y)$ で定義される力学系を考える．μ が小さければ, X が 1 程度の大きさ変化しても系の状態は少ししか変わらない．X と P_X の値を固定する．このとき, H は関数 $H_Y(Y, P_Y)$

に変換される．ハミルトン関数を $H_Y(Y, P_Y)$ とする系における作用変数を $I_Y(Y, P_Y)$ と書く．したし I_Y の大きさはパラメータ $\mu X, P_X$ に依存する．ハミルトン関数を $H(\mu X, Y; P_X, P_Y)$ とする元の系に対しては，$I_Y[\mu X(t), Y(t), P_X(t), P_Y(t)]$ の変動が $t \sim \dfrac{1}{\mu}$ の間に小さく，μ も小さい，という意味で，作用 I_Y は断熱不変量である．

関数 $H(\mu X, Y; P_X, P_Y)$ は $H = H_X(\mu X, P_X; I_Y)$ の形に書くことができる．X, P_X の時間変動を近似的に決めるためには，ハミルトン関数を $H_X(\mu X, P_X)$ (一定パラメータ I_Y に依存する) とする正準方程式を作れば十分である．この 1 自由度系において運動が周期的なら，作用変数 $I_\chi \sim \dfrac{1}{\mu}$ を導入することができる．断熱近似において，運動は周波数 ω_Y での Y の高速振動と，μ 程度の大きさの周波数 ω_X での X のゆっくりした振動の合成である．その際，I_Y と μI_X は保存される．

この近似は以下で証明する．エネルギーの値 h を固定したとき，比 $\dfrac{\omega_Y}{\omega_X}$ の平均値 $\dfrac{\overline{\omega}_Y}{\overline{\omega}_X}$ が I_Y に依存する，という仮定の下で，I_Y と μI_X の永劫断熱不変性を証明しよう．

図 10

2. 例. x 軸に沿って引っ張られる「ポテンシャルディッチ (ditch)」内の運動を考えよう (図 10).

$$H = \frac{P_X^2 + P_Y^2 + U(x, Y)}{2}$$

ただし

$$U = \omega^2 Y^2, \quad \omega = 1 + x^2, \quad x = \mu X, \quad \mu \ll 1$$

1. で導入された量は

$$H_Y = \frac{P_Y^2 + U}{2} + \frac{P_X^2}{2}, \qquad I_Y = \frac{P_Y^2 + U}{2\omega_Y}, \qquad \omega_Y = \omega = 1 + x^2, \quad \overline{\omega} = \frac{2h}{3I_Y} + \frac{1}{3},$$
$$H_X = \frac{P_Y^2 + 2I_Y x^2}{2} + I_Y, \quad \mu I_X = \frac{P_X^2 + 2I_Y x^2}{2\sqrt{2I_Y}}, \quad \omega_X = \mu\sqrt{2I_Y}.$$

なる形を取る．$\dfrac{\overline{\omega}_Y}{\overline{\omega}_X}$ の I_Y への依存性に関する我々の仮定は満たされる．だから $I_Y, \mu I_X$ は永劫断熱不変である．

ディッチの底において，無限遠へとことがり去ることが可能である ($Y = P_Y = I_Y = 0, P_X - v, X = X_0 + vt$)．ところが，$I_Y \neq 0$ なら，運動は少なくとも十分小さな μ に対しては，有界領

域で生じる (図 11). というのは, h と $I_Y \neq 0$ をわれわれの要請する初期条件に対応する値に固定し, そこで μ をゼロに持っていく. μ が十分小さいと

$$|I_Y(t) - I_Y(0)| < O(\mu) \quad \text{for all} \quad -\infty < t < +\infty$$

が成り立つ.

ところが

$$h - I_Y(1 + x^2) = \frac{P_X^2}{2} \geq 0$$

であるから, x 方向の運動は

$$|x_{\max}| = \sqrt{\frac{h}{I_Y} - 1} + O(\mu).$$

によって限られる.

図 11

3. 予備正準変換. 系のハミルトン関数を (2.2.9) の形に還元しよう. I_Y と μI_X の永劫断熱不変性は, 後者の系の 2 次元不変トーラスの存在から簡単に演繹することができる. というのは, これらのトーラスはエネルギー $H = h$ の 3 次元レベル曲面を分割するからである.

補題. ハミルトン関数 $H(x, Y; P_X, P_Y)$ $(x = \mu X)$ は解析的であり, 固定した x, P_X に対して, 作用–角変数を $I_Y(x, P_X; h)$, $w(x, Y, P_X, P_Y)$ とする振動系を定義するとする. このとき, x, Y, P_X, P_Y を新しい変数 x', w', P', I' で表現する解析的変数変換があって次を満たす.

1) 関数 x, Y, P_X, P_Y は w に関して周期 2π である. $\mu \to 0$ のとき, 変数 x', w', P', I' は x, w_Y, P_X, P_Y に移行する.

2) 正準方程式

$$\frac{dP_X}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X}, \quad \frac{dP_Y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Y}, \quad \frac{dX}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_X}, \quad \frac{dY}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_Y}$$

の積分曲線に沿って, パラメータ h に依存するハミルトン関数を $K(P', x'; w'; h)$ とする正準方程式

$$\frac{dP'}{d\omega'} = -\frac{\partial K}{\partial x'}, \quad \frac{dx'}{d\omega'} = \frac{\partial K}{\partial P'} \tag{2.3.1}$$

が満たされる.

3) K は $K = -\mu I'$ なる形をしている. ここで

$$I' = I_0(P', x'; h) + \mu I_1(P', x'; w'; h) + \ldots \tag{2.3.2}$$

は w' に関して周期 2π の解析関数であり, $I_0(P',x';h)=I_Y(x',P';h)$ である.

証明. 関係 $H(x,Y;P_X,P_Y)$ より, P_Y を $P_Y(x,P_X,Y;h)$ の形に表すことができる. $2\pi I_Y(x,P_X;h)=\oint P_Y dY$ と置く. この関係は関数 $h(x,P_X;I_Y)$ を定義する. 母関数 $P'X+S(x,P',Y,I')$ で

$$S=\int^Y P_Y[x,P',Y;h(x,P';I')]dY.$$

なるものが, 正準変換 $X,Y,P_X,P_Y\to X',w',P',I'$ を, 公式

$$X'=X+\frac{\partial S}{\partial P'},\quad w'=\frac{\partial S}{\partial I'},$$
$$P_X=P'+\mu\frac{\partial S}{\partial x},\quad P_Y=\frac{\partial S}{\partial Y}.$$

を使って決める. また $x'=\mu X'$ と置く.

$$H\{x,Y;P',P_Y[x,P',Y;h(x,P';I')]\}=h(x,P';I')$$

であるから,

$$H\{x,Y;P_X,P_Y[x,P',Y;h(x,P';I')]\}=h(x,P';I')+\mu\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial P_X}+\dots$$

が成り立つ. したがって, X,Y を新しい変数で表せば,

$$H(x,Y;P_X,P_Y)=h(x',P';I')+\mu\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial P_X}-\mu\frac{\partial S}{\partial P'}\frac{\partial H}{\partial x}+\dots \tag{2.3.3}$$

を得る. (2.3.3) は

$$H(x,Y;P_X,P_Y)=H'(x',P',I',w')=h_0(x',P';I')+\mu h_1(x',P',I',w')+\dots \tag{2.3.4}$$

の形に ($h_0\equiv h$) 書くことができる. ここで $\mu h_1+\dots$ は w' に関して周期 2π の解析関数である.

時間は w' の位相で測る. この目的のために, 表式 $P'dX'+I'dw'-Hdt$ における独立変数として $P',X';I',w';t$ の代りに $P',X';-H,t;w'$ を取る ([4] を見よ). h をパラメータとみなし, w' を時間と見る. ハミルトン関数の役割をするのは $-I'(X',P';w';h)$ である. ただし I' は方程式

$$H'(\mu X',P',I',w')=h. \tag{2.3.5}$$

から決まる. 座標 t は巡回的である. 変数 $-H,t$ を捨てれば, 自由度 1 の非自励系を得る. 座標 X' とハミルトン関数 $-I'$ に μ を乗じる. すなわち, $\mu X'=x', -\mu I'=K$. w' に関する x' や P' の微分はハミルトン関数を K とする正準方程式 (2.3.1) によって決まる.

(2.3.5) と (2.3.4) からすると, 関数 I' は (2.3.2) の形をしている. だから補題の証明ができた.

4. 作用が永劫断熱不変性を持つことの証明. (2.3.2) 式に応じて, 関数 K は (2.2.9) の形をしている. (2.2.6) は 1. の最後に定式化した条件からしたがう. したがって 2 節の論拠が適用できる. 不変トーラスが得られ, I_Y と μI_X の永劫断熱不変性の証明も得られる.

§4. 磁気トラップ

この節では, 磁場の中の荷電粒子の運動を考える. 粒子が沿って動くべき磁力線の瞬間ねじれ半径は磁場が有意に変化する距離に比べて小さいと仮定する. この条件が満たされるのは, 場が大きいか, あるいはほぼ一定のときか, あるいは粒子の速度が小さいときである. 最後の場合を考えることにする (だからといって一般性を失うわけではない).

軸対称磁気トラップの中では, 断熱不変量 $\dfrac{W_\perp}{B}$ は永劫保存であることを示す. したがってこのようなトラップは荷電粒子を永遠に捉えておくことが可能である.

1. 運動方程式. 磁場 $\mathbf{B}$ はベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ から決まるとする. $\mathbf{A}$ は極座標 r, φ, z で唯一の成分 $A\varphi = A(r, z)$ を持つ. すると, 磁場の強さ $\mathbf{B}$ の成分は

$$B_r = -\frac{\partial A}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial rA}{\partial r}$$

である. したがって力線は方程式

$$rA = 一定, \quad \varphi = 一定$$

によって決定される. 適当に選んだ単位系において, 質量 1, 単位電荷のラグランジュ関数は

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \dot{z}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + rA\dot{\varphi}$$

である. これから, 「インパルス」(註: 運動量のこと)

$$p_r = \dot{r}, \quad p_z = \dot{z}, \quad p_\varphi = r^2\dot{\varphi} + rA$$

とハミルトン関数

$$H = \frac{1}{2}\left[p_r^2 + p_z^2 + \frac{(p_\varphi - rA)^2}{r^2}\right]$$

が得られる. φ は巡回座標であるから, $p_\varphi = M$ は保存され, 残るのは, ポテンシャル

$$U(r, z) = \frac{(M - rA)^2}{2r^2} \tag{2.4.1}$$

から決まる場の中での平面運動を求めることである. ここで M は固定した定数である.

関数 (2.4.1) は, 力線 $rA = M$ に沿ってゼロの底を持つ「ポテンシャルディッチ」を定義する. この線の近傍において

$$U(r, z) = \frac{1}{2}B^2y^2 + \ldots, \tag{2.4.2}$$

が成り立つ. ここで y は力線からの距離であり, B は力線上での磁場の強さの絶対値である.

2. 変数変換. 3節の結果を適用するために, r, z 平面に曲線座標 x, y を導入する. 点 r, z から力線に垂線を下ろし, その基点までの不動点 O からの距離を $rA = M$ に沿って測り, 弧長を x と書く. (2.4.2) におけるように, 垂線の長さを y とする (図 12).

すると

$$dr^2 + dz^2 = [1 + yk(x)]^2 dx^2 + dy^2,$$

が得られる. ここで $k(x)$ は点 $x, 0$ における力線の曲率である. したがって

$$p_x = [1 + yk(x)]^2 \dot{x}, \quad p_y = \dot{y}$$

であり, ゆえに

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{p_x^2}{[1 + yk(x)]^2} + p_y^2\right) + U, \quad \text{ただし} \quad U(x, y) = \frac{1}{2}B(x)y^2 + \dots$$

である.

図 12, 13

われわれに興味があるのは, 荷電粒子の描く力線のまわりのラーマー渦巻の半径が場の特徴的な大きさに比べて非常に小さい場合である. 上で導入した記法を使えば, 定数 M と全エネルギー h の値として, 不等式

$$U \leq h$$

が力線 $rA = M$ のまわりの $\sim \mu$ の幅の帯 (strip) を定義するような値を考えることを意味する (図 13). したがって, 新しい変数 X, Y, P_X, P_Y を関係式

$$x = \mu H, \quad y = \mu Y, \quad p_x = \mu P_X, \quad p_y = \mu P_Y,$$

によって導入するのが便利である. これらの変数が時間変化する仕方はハミルトン関数を $H' = \mu^{-2}H$ とする正準方程式によって記述される.

$$H' = \frac{1}{2}\left(\frac{P_x^2}{[1 + \mu Y k(\mu X)]^2} + P_y^2\right) + U', \quad U'(\mu X, Y) = \frac{1}{2}B(\mu X)Y^2 + \dots$$

このハミルトン関数は

$$H' = \frac{P_x^2 + P_Y^2 + B^2(x^2)Y^2}{2} + \mu H_1(x, Y, P_X, P_Y) + \dots$$

の形に書ける. この関数は $H'(\mu X, Y; P_X, P_Y; \mu)$ の形であって, 3 節で考察した形に似ている. (簡単にわかるように, μ へのもうひとつの依存性は 3 節の議論の適用可能性に本質的ではない.)

3. 磁気モーメントの永劫不変性. これから得るべき結果の定式化を考察するにあたって, どんな漸近挙動にかかわっているのかをもっと正確に定義しておこう. 磁場の強さ $\mathbf{B}$ を固定し, また自己保存量 M を固定する. 次に x の初期値[13] を固定し, 最後に $y, \dot{x}, \dot{y}$ の初期値を選んで $H \sim \mu^2, \mu \ll 1$ となるようにする. このために, $y, \dot{x}, \dot{y}$ を μ 程度の大きさに取る必要がある. $Y, \dot{X}, \dot{Y}$ を固定し, $y = \mu Y, \dot{x} = \mu \dot{X}, \dot{y} = \mu \dot{Y}$ と取り, μ をゼロに向かわせる.

3 節の方法により以下の結果を得る.

I. 磁場が解析的であって, $B(x) > 0$, $|x| \to \infty$ のとき $B(x) \to \infty$ であれば, 任意の $\kappa > 0$ に対して $\mu_0 > 0$ を見つけることができて, $|\mu| < \mu_0$ のとき, すべての $-\infty < T < +\infty$ に対して $|I_Y(t) - I_Y(0)| < \kappa$ にできる. ただし $I_Y = \dfrac{P_Y^2 + B^2 Y^2}{2B}$ である.

これからただちにわかるとおり, $I_Y \neq 0$ なる粒子は, $x \to \infty$ のときに場 B が無限に増大するならば (ストッパー付きのトラップ), 有限領域内に閉じ込められる.

I_Y の物理的意味は, $Y = 0$ のときのモーメントを考えれば明らかになる. このモーメントのとき, $\dot{\varphi} = 0$ および $\dfrac{\dot{y}^2}{2} = W_\perp$ である (1 節, 2.III を見よ). したがって $\mu^2 I_Y = \dfrac{W_\perp}{B}$. である. こうして, 命題 I は次のように定式化できる.

II. 軸対称磁気トラップにおいて, 磁気モーメントの大きさ $\dfrac{W_\perp}{B}$ は永劫断熱不変である.

§5. 多次元の場合

この節では, 2 節および 3 節の結果を多自由度の場合に持っていけるかどうかを簡単に議論する.

1. 多重パラメータ問題. 定理 1 が正しいのは, ハミルトン関数が準周期的に変化するときである. すなわち, $H(p, q; \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ が数個の角パラメータ λ_i に依存し, そのパラメータの各々が独自の周波数 $\dot{\lambda}_i = \mu \xi_i$ で変化するときである.

$\nu = n + 1$ およびある $K > 0$ に対して

$$|(k, \xi)| \geq K |k|^{-\nu}, \quad \text{if} \quad |k| > 0 \tag{2.5.1}$$

を仮定する. すると, 「時間」$T = w$ に移行すると, ハミルトン関数を $K(\pi', q_i', T)$ の形で得る. ただし $\pi' = \sum \xi_i p_i'$ である. (2.5.1) のおかげで, 変換 $p', q' \to P, Q$ ができる. 量 P_i はハミルトン関数 (2.2.7) に組合せ $\Pi = \sum \xi_i P_i$ の形でしか入っていない. 2 節の 5 項と同様, 方程式 $\Pi = F_\mu(Q_i, P_i)$ を満たす不変多様体を見つけることができる. 元の $(n+2)$ 次元空間 $p, q; \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ の $(n+1)$ 次元トーラスがこれらに対応する.

2. 多自由度の場合. この時点で, かなりの困難が立ち現われる. すなわち, 断熱不変量が $t \sim \dfrac{1}{\mu}$ の間で保存されることすらいままで研究されて来なかった ([29] を見よ). この場合の特殊性については少ししか時間を割けない.

何が困難であるかというと, 高速運動の周波数間の比が低速運動の位相に依存する可能性が

[13] x の初期値の有界領域を指定するだけで十分である. $Y, \dot{X}, \dot{Y}, M$ を固定するときもおなじことが成り立つ

あるからである. この現象の簡単な例として, 3次元トーラス上の方程式系

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= \omega_1(z) + \mu f(x, y, z),\\ \dot{y} &= \omega_2(z) + \mu g(x, y, x),\\ \dot{z} &= \mu\end{aligned}\right\} \tag{2.5.2}$$

を挙げることができる. (ここで x, y, z はトーラス上の点の角度座標である.) 軌跡 (2.5.2) は変数変換によって平行化できない.

したがって, 準周期運動で満たされた不変トーラスは, ゆっくり周期的に係数が変化する一般の自由度 n で可積分系の場合でもほとんど存在しない. このようなトーラスが実際に発見されたなら, これらは $(n+1)$ 次元であり, $(2n+1)$ 次元空間 $p_i, q_i; \lambda$ を分割しないであろうから, 作用変数の永劫不変性を証明することは依然として不可能である.

多次元の場合のもうひとつのアプローチは [30] に与えられている.