III 章．惑星運動の安定性

IV 章の基本定理の助けにより, この章では三体問題および多体問題における「惑星」運動の類 (class) を調べる．惑星の質量が十分小さければ, 惑星の瞬間軌道が同一平面内で円に近いような大多数の初期条件に対して, 惑星同士の相互摂動は, 無限時間の経過中にこれらの運動にほんの少ししか影響を与えない.

とくに, われわれの結果からすると, n 体問題において, 正のリュベーグ測度を持つ初期条件集合があって, 物体の初期位置と速度がこの集合に属すなら, 物体間の相互距離は永遠に有界にとどまる.

このような仮説は天文学者によってずっと以前に提案されたが, 最近 Birkhoff 以来, 数学者は反対の見解への傾向を持ってきた ([3],[8] 参照).

結果の精密な定式化は 1 節で述べる．平面三体問題だけを詳しく考える．2 節では適切な座標を導入して 3 節で問題を階数降下させ, IV 章で考察する形にもっていく．4 節では IV 章の基本定理を適用するのに必要な非退化条件の確認を行う．最終節では, 基本定理を平面惑星問題および空間多体問題の研究に応用する仕方について手短かに指摘する.

この章を書くにあたってポアンカレの教科書 [1] を広範囲にわたって利用した (とくに 2 節において).

§1．運動の描像

この節では, 大質量中心天体のまわりの n_0 個の「惑星」の運動問題へと IV 章の基本定理を適用した結果を定式化する (副節 3-5)．副節 1 および 2 では, 古典摂動論の厳密でないある種の結論を説明する.

1．ケプラー運動. n_0 個の質点 (「惑星」) を考える．それらの質量 $m_1, \ldots, m_{n_0}$ は「中心天体」とよばれる質点の質量 M に比べて小さいとする．これらの点はすべてニュートンの法則に従って, すなわち

$$f = \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}$$

に従って互いに引き合っているとする．$m_1, \ldots, m_{n_0}$ が M に比べて十分小さければ, 「ゼロ次近似」において, 惑星同士の引力は無視できて, 中心天体 M は不動であるとみなせる．これらの仮定の下では, 各惑星 m_k はほかの惑星とは無関係に, いわゆる M を焦点とするケプラー楕円に沿って運動する.

こうして, ゼロ次近似において, 系の運動は準周期的であり, M のまわりの惑星回転の n_0 個の周波数で記述される.

以下では, ケプラー楕円の軌道面はみな近く,「惑星」は楕円上を同じ方向に動くと仮定する.

惑星同士の摂動によって真の運動とゼロ次近似の運動の間に違いが生じる．摂動論は次のような描像を提供する.

2．ラグランジュ運動. 簡単のため, 平面三体問題 ($n_0 = 2$) を考え, 初期にケプラー楕円の離心率 e_k ($k = 1, 2$) が小さいと仮定する．面内の楕円の位置は, 楕円の長径 $2a_k$ が座標軸となす角度 g_k(g_k は近日点経度とよばれる．14 図) によって定義される.

図 14.

摂動運動は, 変化するパラメータ a_k, e_k, g_k を持つケプラー運動として記述可能である. 1 次近似では, a_k, e_k, g_k の変動は一定値のまわりの $a_k(t), e_k(t), g_k(t)$ の惑星の質量程度の小さな「震動」に帰着される.

2 次近似は小さいけれども有界でない (永年) **近日点運動**が含まれる. e_k および g_k のこの小さな変動は以下のような仕方で記述できる. ケプラー楕円の長軸方向を向き, 長さ $\sqrt{m_k}\sqrt[4]{a_k e_k}$ が離心率に比例するベクトル $\mathbf{e}_k$ でケプラー楕円を特徴づける[1]. 各惑星に対して, このベクトルは 2 つの一様回転するベクトルの和であることがわかる. つまり, $\mathbf{e_k} = \mathbf{e}_{k_1} + \mathbf{e}_{k_2}$. ベクトル $\mathbf{e}_{k_1}$ と $\mathbf{e}_{k_2}$ の角速度は小さく, 両惑星で同じである.

軌道半長径 a_k は永年変化しない. このように変動する楕円に沿っての惑星の運動はラグランジュ運動とよばれる.

摂動論の示すところよれば (証明にはなっていない), **惑星の質量と離心率の初期値が十分小さければ, $\mathbf{e}_{k_l}$ の多数回の回転の間, 真の運動はラグランジュ運動に近い.**

n_0 個の周波数 $\nu_1, \ldots, \nu_{n_0}$to n_0^2 個のベクトル $\mathbf{e}_{kl}$ を持つ同様な描像が n_0 個の惑星の平面問題においても得られる.

空間問題において, ケプラー楕円は, 軌道傾斜角 i_k(軌道面と座標平面の間の角度) および交線 (これらふたつの平面の交差線) によりさらに決まる. これらの永年変化は, 交線方向に伸びる長さ $\sqrt{m_k}\ \sqrt[4]{a_k i_k}$ のベクトル i_k によって記述される. i_k は一様回転ベクトルの和でもあるが, この場合, 個数は $n_0 - 1$ である.

こうして, ラグランジュ運動は準周期的であり, ケプラー運動の「高速」周波数に, n_0 個 (平面問題) あるいは $2n_0 - 1$ 個 (空間問題) の永年運動の「低速」周波数が加わる.

2. 真の運動. われわれの基本結果は,

惑星の質量, 離心率, および軌道傾斜角が十分小さければ, 大多数の初期値に対して真の運動は準周期的であり, 無限時間間隔 $-\infty < t < +\infty$ の間中, 適当に選んだラグランジュ運動と少ししか違わない.

というものである.

はじめに平面三体問題を考えよう. 重心を固定すれば, 系は 4 自由度を持ち, 8 次元相空間を持つ. 座標として, たとえば, 第一の惑星のケプラー楕円を定義する 3 つの量 (たとえば a_1, e_1, g_1) とこの楕円上での惑星の位置を取り, 第二の惑星の同様な量を取る.

定数 $\alpha_k, c_k, C_k > 0$ を固定しよう. 天体の質量を

$$m_k = \mu\alpha_k, \quad M = 1, \quad (\mu \ll 1).$$

とする. 相空間内で条件

$$\alpha_1\sqrt{a_1}e_1^2 + \alpha_2\sqrt{a_2}e_2^2 \leq \varepsilon, \tag{3.1.1}$$

[1] $\mathbf{e}_k$ はラプラスベクトルとよばれる.

および

$$c_1 \leq a_1 \leq C_1,\quad c_2 \leq a_2 \leq C_2,\quad (\text{ただし } c_1 < C_1 < c_2 < C_2). \tag{3.1.2}$$

で定義される領域 (domain) を考える．この有界領域を $F(\varepsilon)$ と表す．

IV 章の結果に基づいて, 2 節〜4 節で次の主張を証明する．

定理. 任意の $\kappa > 0$ に対して, $\varepsilon_0 > 0$ を見つけて,

$$\varepsilon < \varepsilon_0,\quad \mu < \varepsilon^4,$$

のときには $F(\varepsilon)$ を 2 つの部分に分けることができる．すなわち,

$$F(\varepsilon) = \mathbf{F}(\varepsilon) + f(\varepsilon),$$

と書け, そのうちのひとつ $\mathbf{F}(\varepsilon)$ は不変であり, 残りの $f(\varepsilon)$ は小さい．すなわち

$$\mathrm{mes} f(\varepsilon) \leq \kappa\ \mathrm{mes} F(\varepsilon).$$

$\mathbf{F}(\varepsilon)$ に属する点は準周期的であり, $\mathbf{F}(\varepsilon)$ 内に 4 次元の解析的不変トーラスをあぶり出す．

初期条件が $\mathbf{F}(\varepsilon)$ に属するなら, 任意の瞬間に惑星の真の位置は, あるラグランジュ運動を遂行する点の位置から κ 未満の違いしかない．

4. n_0 **個の惑星の平面問題.** 類似の結果を $n_0 > 2$ 個の惑星に対して得ることができる．この場合も IV 章の基本定理へと帰着させることができる．対応する計算は 5 節で概説した．非常に扱いにくい場合なので, すべてを述べることはしない．

平面問題では $4n_0$ 次元相空間内の領域 $F(\varepsilon)$ は (3.1.1), (3.1.2) の一般化となる条件

$$\sum_{k=1}^{n_0} a_k\sqrt{a_k}e_k^2 \leq \varepsilon,\quad c_k \leq a_k \leq C_k,\quad (\text{where } C_{k-1} < c_k < C_k). \tag{3.1.3}$$

で与えられる．3 項の定理における唯一の違いは,「4 次元」を「$2n_0$ 次元」に置き換えることである．

5. n_0 **個の惑星の空間問題.** 空間問題では, 相空間は $6n_0$ 次元であり, (3.1.3) の条件に不等式

$$\sum_{k=1}^{n_0} a_k\sqrt{a_k}i_k^2 \leq \varepsilon \tag{3.1.4}$$

を加えねばならない．そして, 3 項の定理において「4 次元」を「$3n_0 - 1$ 次元」に置き換える必要がある．このように変更すれば 3 項の定理が成り立つ．

6. 三体問題の場合. この場合, 角運動量保存 (5 節) を使うと 3 項の結果より強いことが言える．離心率が小さいことを仮定する必要がないことがわかる．必要なのは, 衝突の可能性を排除するほど離心率が十分小さいことを仮定することだけである (図 15)．3 項の定理の (3.1.1) の代りに,

$$\sum_{k=1}^{2} a_k\sqrt{a_k}(1 - \sqrt{1 - e_k^2}) \leq \varepsilon_0(a_k, c_k, C_k), \tag{3.1.5}$$

を要請すれば十分である. ただし,

$$\varepsilon_0 = \min_{e_1, e_2} \sum_{k=1}^{2} a_k \sqrt{a_k} (1 - \sqrt{1 - e_k^2}),$$

であって, $C_1(1+e_1) = c_2(1-e_2), 0 \le e_1, e_2 \le 1$ なる条件を満たす.

(3.1.5), (3.1.2) で定義される領域を F で表すと, 3 項の定理を強める次の主張が成り立つ.

定理. 任意の $\kappa > 0$ に対して, $\mu_0 > 0$ を見つけて,

$$\mu < \mu_0,$$

ならば F を 2 つの領域

$$F = \mathbf{F} + f,$$

に分けることができる. そのうちのひとつ $\mathbf{F}$ は不変であり, 残りの f は小さい. すなわち,

$$\mathrm{mes}\ f \le \kappa\ \mathrm{mes} F.$$

$\mathbf{F}$ に属する点は準周期運動をし, 4 次元解析的不変トーラスをあぶり出し, $\mathbf{F}$ 内に永劫とどまる. 初期条件が $\mathbf{F}$ に属すれば, 運動の全期間にわたっての軌道半長径の変化は κ を越えない.

7. 類似の定理が空間三体問題でも成り立つ. この場合, $F(\varepsilon)$ は (3.1.5), (3.1.2) および (3.1.4) によって, 十分小さな ε のときに定義される.

§2. ヤコビ, ドローネー, およびポアンカレ変数

ヤコビを記念してつけた正準変数系 (p, q), ドローネー変数 (L, G, l, g) およびポアンカレ変数 $(\Lambda, \Gamma, \lambda, \gamma$ および $\Lambda, \xi, \lambda, \eta)$ をこの節で導入する.

1. ヤコビ座標. 平面三体問題を考えよう. 質量 M_0, m_1, m_2 が直角座標 x_0, x_1, x_2 を持つ. 重力定数が 1 となる単位系を使う. するとラグランジュ関数は

$$L = \frac{1}{2}\left(M_0 \dot{x}_0^2 + m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2\right) + \frac{m_1 M_0}{|x_1 - x_0|} + \frac{m_2 M_0}{|x_2 - x_0|} + \frac{m_1 m_2}{|x_2 - x_1|} \tag{3.2.1}$$

の形を取る. 各種重心を定義する. M_0 そのもの, M_0 と m_1 の重心, M_0, m_1, m_2 の重心をそれぞれ X_0, X_1, X_2 と表す. ヤコビの相対座標

$$q_1 = x_1 - X_0, \quad q_2 = x_2 - X_1, \tag{3.2.2}$$

を導入すると

$$L = \frac{1}{2}\left(\mu_1 \dot{q}_1^2 + \mu_2 \dot{q}_2^2 + M_2 \dot{X}_2^2\right) + \frac{m_1 M_0}{|q_1|} + \frac{m_2 M_0}{|x_2 - x_0|} + \frac{m_1 m_2}{|x_2 - x_1|} \tag{3.2.3}$$

を得る. ここで μ_i は質量であって,

$$\mu_1 = m_1 \frac{M_0}{M_1}, \quad \mu_2 = m_2 \frac{M_1}{M_2}, \quad (M_1 = M_0 + m_1, \quad M_2 = M_0 + m_1 + m_2) \tag{3.2.4}$$

で与えられる.

図 16

一般性を失うことなく, 全天体の重心が止まっていると見なすことができる. すると系のハミルトン関数は

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{\mu_1} + \frac{p_2^2}{\mu_2}\right) - \frac{m_1 M_0}{|q_1|} - \frac{m_2 M_0}{|q_2|} - \left[\frac{m_1 m_2}{|x_2 - x_1|} + \left(\frac{m_2 M_0}{|x_2 - x_0|} - \frac{m_2 M_0}{|q_2|}\right)\right] \tag{3.2.5}$$

となる. ただし $p_k = \mu_k \dot{q}_k$ である.

2. ドローネー要素. 固定した中心質量 M に引かれる質点 m の平面問題に目を向けよう. この問題では

$$H = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} - \frac{mM}{|q|}$$

である. ここで

$$\begin{array}{ll} p^2 = (p^{(1)})^2 + (p^{(2)})^2, & |q| = \sqrt{(q^{(1)})^2 + (q^{(2)})^2}, \\ p = p^{(1)}, p^{(2)}, & q = q^{(1)}, q^{(2)} \end{array} \tag{3.2.6}$$

である. 天体 m が M を焦点とするケプラー楕円に沿って動くことが知られている. 楕円の形は軌道半長径 a と離心率 e で決まる. 楕円の位置は角度 g (近日点経度) と天体 m の軌道上の位置角 l (平均近点離角) で決まる. 量 a, e, l, g は楕円要素とよばれる.

知られているように ([1] を見よ), 正準変換によって

$$p^{(1)}, p^{(2)}, q^{(1)}, q^{(2)} \to L, G, l, g \tag{3.2.7}$$

ドローネー要素 L, G, l, g が導入される. ただし,

$$L = m\sqrt{M}\sqrt{a}, \quad G = L\sqrt{1-e^2}, \quad H = -\frac{m^3 M^2}{2L^2}. \tag{3.2.8}$$

である. G は角運動量であることに注意する:

$$G = [mq, q] = p^{(1)} q^{(1)} - p^{(2)} q^{(2)}.$$

$S_{m,M}(L, G; q^{(1)}, q^{(2)})$ を変換 (3.2.7) の母関数とする．ただし，

$$p^{(1)} = \frac{\partial S}{\partial q^{(1)}}, \quad p^{(2)} = \frac{\partial S}{\partial q^{(2)}}, \quad l = \frac{\partial S}{\partial L}, \quad g = \frac{\partial S}{\partial G} \tag{3.2.9}$$

である．平面三体問題において，変数 L_k, G_k, l_k, g_k $(k = 1, 2)$ は母関数を

$$S = S_{\mu_1, M'_1}(L_1, G_1; q_1^{(1)}, q_1^{(2)}) + S_{\mu_2, M'_2}(L_2, G_2; q_2^{(1)}, q_2^{(2)}),$$

として，公式 (3.2.9) により導入される．ここで，$M'_1 = M_1$ および $M'_2 = M_2 \dfrac{M_0}{M_1}$ である．

(3.2.4), (3.2.6), (3.2.8) からすると，ハミルトン関数 (3.2.5) は

$$H = -\frac{\mu_1^3 {M'_1}^2}{2L_1^2} - \frac{\mu_2^3 {M'_2}^2}{2L_2^2} - \left[\frac{m_1 m_2}{|x_2 - x_1|} + \left(\frac{m_2 M_0}{|x_2 - x_0|} - \frac{m_2 M_0}{|q_2|}\right)\right] \tag{3.2.10}$$

なる形をとる．ここで x_0, x_1, x_2, q_2 は，関係式 (3.2.9), (3.2.2) により，L, G, l, g を用いて表現される．

3．質量の巾級数による展開． 質量 m_1 と m_2 は M_0 に比べて小さいと仮定する．すなわち，

$$M_0 = 1, \quad m_1 = \mu\alpha_1, \quad m_2 = \mu\alpha_2 \tag{3.2.11}$$

ここで α_1, α_2 は有限，μ は微小なパラメータである．$\mu^k f_k + \mu^{k+1} f_{k+1} + \ldots$ の形の収束級数を $(\mu^k)\ldots$ と表す．明らかに

$$\left.\begin{array}{lll} M_1 = 1 + (\mu) + \ldots, & M_2 = 1 + (\mu) + \ldots, & M'_2 = 1 + (\mu) + \ldots, \\ \mu_1 = \mu\alpha_1 + (\mu^2) + \ldots, & \mu_2 = \mu\alpha_2 + (\mu^2) + \ldots, & \end{array}\right\} \tag{3.2.12}$$

が成り立つ．L_k, G_k

$$L_k = \mu_k \sqrt{M'_k}\sqrt{a_k}, \quad G_k = L_k\sqrt{1 - e_k^2}. \tag{3.2.13}$$

に対応する「接触」ケプラー楕円要素を a_k, e_k で表す．簡単に計算できるように，(3.2.10) 式のかぎ括弧部分は

$$[(3.2.10)\text{ のかぎ括弧内}] = \mu^2\alpha_1\alpha_2\left[\frac{1}{|q_1 - q_2|} - \frac{|q_1|^s}{|q_2|^2}\right] + (\mu^3) + \ldots, \tag{3.2.14}$$

の形を取る．ただし，q_k は原点のまわりの要素 $a_k, e_k; l_k, q_k$ のケプラー軌道に沿って動く点の動径ベクトルであり，s はベクトル q_1 と q_2 の間の角度の余弦を表す．(3.2.14) により，ハミルトン関数 (3.2.10) は

$$H = -\frac{\mu_1^3 {M'_1}^2}{2L_1^2} - \frac{\mu_2^3 {M'_2}^2}{2L_2^2} - \mu^2\alpha_1\alpha_2\left[\frac{1}{|q_1 - q_2|} - \frac{|q_1|^s}{|q_2|^2}\right] + (\mu^3) + \ldots, \tag{3.2.15}$$

の形に書ける．

4. ポアンカレ変数. H, L と G を定数 μ で割ると, 運動方程式のハミルトン形は保存される. 正準変換

$$\mu^{-1}L_k, \mu^{-1}G_k; l_k, g_k \quad \rightarrow \quad \Lambda_k, \Gamma_k; \lambda_k, \gamma_k \quad \rightarrow \quad \Lambda_k, \xi_k; \lambda_k, \eta_k \tag{3.2.16}$$

によってポアンカレ変数 $\Lambda, \Gamma, \lambda, \gamma$ および $\Lambda, \xi, \lambda, \eta$

$$\left.\begin{array}{lll} \mu\Lambda_k = L_k, & \mu\Gamma_k = L_k - G_k, & \xi_k = \sqrt{2\Gamma_k}\cos\gamma_k, \\ \lambda_k = l_k + g_k, & \gamma_k = -g_k, & \eta_k = \sqrt{2\Gamma_k}\sin\gamma_k, \end{array}\right\} \tag{3.2.17}$$

を導入する. 変数 Λ, Γ は (3.2.8) および (3.2.17) から出る公式により, 楕円要素で表現される:

$$\Lambda_k = \beta_k\sqrt{a_k}, \quad \Gamma_k = \Lambda_k(1-\sqrt{1-e_k^2}), \quad \text{ただし} \quad \beta_k = \frac{\mu_k\sqrt{M'_k}}{\mu} = \alpha_k + (\mu)\dots \tag{3.2.18}$$

変数 $\Lambda, \Gamma, \lambda, \gamma$ (あるいは $\Lambda, \xi, \lambda, \eta$) の時間変動は, (3.2.5) から得られるハミルトン関数 $F = \dfrac{H}{\mu}$

$$F = -\frac{{\beta'_1}^3}{2\Lambda_1^2} - \frac{{\beta'_2}^3}{2\Lambda_2^2} - \mu^2\beta_1\beta_2\left[\frac{1}{|q_1-q_2|} - \frac{|q_1|^s}{|q_2|^2}\right] + (\mu^2) + \dots, \tag{3.2.19}$$

を持つ正準変換によって記述される. ここで $\beta'_k = \dfrac{\mu_k}{\mu}{M'}_k^{2/3} = \beta_k + (\mu)\dots$ は天体の質量のみに依存する.

§3. バーコフ変換

この節では, 新しい変数 $\overline{\overline{\Lambda}}$, $\overline{\overline{\lambda}}, \overline{\overline{\xi}}$, $\overline{\overline{\eta}}$ を選ぶ. 基本定理 (4 章, 1 節) をこれらの変数で表現した三体問題に適用する.

1. ハミルトン関数. (3.2.9) を変数 $\Lambda, \lambda, \xi, \eta$ で表現する. 明らかに,

$$F = F_0(\Lambda) + \mu F_1(\Lambda, \lambda; \xi, \eta) + (\mu^2)\dots$$

$$F_0 = -\frac{{\beta'_1}^3}{2\Lambda_1^2} - \frac{{\beta'_2}^3}{2\Lambda_2^2}, \quad F_1 = -\beta_1\beta_2\ [\quad] \tag{3.3.1}$$

である. さらに, F は Λ_1, Λ_2 $(\Lambda_1 - \Lambda_2 \neq 0)$ および $|\xi|, |\eta| < R$ (R は Λ に依存する) に対して解析的であり, F は λ_1, λ_2 に関して周期 2π である. F の「永年部分」, すなわち λ に関する F の平均値

$$F_1(\Lambda, \lambda; \xi, \eta) = \overline{F}_1(\Lambda; \xi, \eta) + \widetilde{F}_1(\Lambda, \lambda; \xi, \eta), \tag{3.3.2}$$

を定義する. ここで $\int\int \widetilde{F}_1 d\lambda_1 d\lambda_2 = 0$ である. 簡単にわかるように, $\overline{F}_1$ は ξ, η に関して偶である. $\overline{F}_1$ において, 変数 Λ をパラメータと考える. 点 $\xi = \eta = 0$ はハミルトン関数を (各固定した Λ に対して) $\overline{F}_1(\xi, \eta)$ とする系の平衡点の位置である. バーコフ理論 (I 章, 9 節) を $\overline{F}_1(\xi, \eta)$ に適用する.

2. 座標 ξ', η'. ハミルトン方程式に何の影響も持たない定数 $\overline{F}_{10}$ を無視すれば, ξ, η の巾で展開した $\overline{F}_1$

$$\overline{F}_1 = \overline{F}_{10} + \overline{F}_{12} + \overline{F}_{14} + \ldots,$$

は負定値の 2 次形式 $\overline{F}_{12}$ から始まる[2]．線形正準変換 $\xi, \eta \to \xi', \eta'$ により, $\overline{F}_{12}$ を

$$\overline{F}_{12} = v_1'\Gamma_1' + v_2'\Gamma_2' \qquad (2\Gamma_k' = \xi_k'^2 + \eta_k'^2 = p_k'q_k'; \;\; p_k = \xi_k + i\eta_k, \;\; q_k = \xi_k - i\eta_k) \tag{3.3.3}$$

なる形に還元できる．ここで係数 v_k' は Λ に依存する．$\overline{F}_{14}$ を

$$\overline{F}_{14} = v_{11}'\Gamma_1'^2 + 2v_{12}'\Gamma_1'\Gamma_2' + v_{22}'\Gamma_2'^2 + \ldots, \tag{3.3.4}$$

なる形に書く．ここでドットは ξ', η' に関する 4 次 (degree) の項を表す．p', q' の巾に展開したとき, これは $p_1'^k q_1'^l p_2'^m q_2'^n$ のみを与える．ただし $(k-l)^2 + (m-n)^2 \neq 0$ である．(3.3.4) の係数 v_{ij} は Λ に依存する．

3. 座標 $\xi^{(s)}, \eta^{(s)}$. Λ が

$$k_1 v_1' + k_2 v_2' \neq 0 \quad \text{for} \quad 0 < |k_1| + |k_2| \leq 6, \tag{3.3.5}$$

を満たすようなものであれば, バーコフ理論 (I 章, 9 節) に応じて, さらなる正準変換

$$\xi, \eta \to \xi'\eta' \to \xi^{(2)}, \eta^{(2)} \to \xi^{\left(2\frac{1}{2}\right)}, \eta^{\left(2\frac{1}{2}\right)} \to \xi^{(3)}, \eta^{(3)} \to \xi^{\left(3\frac{1}{2}\right)}, \eta^{\left(3\frac{1}{2}\right)} \tag{3.3.6}$$

が存在して, $\overline{F}_1$ を

$$\overline{F}_1 = \overline{\overline{F}}_1^{(s)}(\Gamma^{(s)}) + O(|\xi^{(s)}|^{2s}, |\eta^{(s)}|^{2s}) \quad (2\Gamma_k^{(s)} = (\xi_k^{(s)})^2, (\eta_k^{(s)})^2) \tag{3.3.7}$$

の形に還元する．$\overline{F}_1$ は偶関数であるから, $\xi^{(2)}, \eta^{(2)} = \xi', \eta'$ がしたがう．記法

$$\overline{\xi} = \xi^{\left(2\frac{1}{2}\right)}, \;\; \overline{\eta} = \eta^{\left(2\frac{1}{2}\right)}, \;\; 2\overline{\Gamma} = \overline{\xi}^2 + \overline{\eta}^2,$$
$$\overline{\overline{\xi}} = \xi^{\left(2\frac{1}{2}\right)}, \;\; \overline{\overline{\eta}} = \eta^{\left(2\frac{1}{2}\right)}, \;\; 2\overline{\overline{\Gamma}} = \overline{\overline{\xi}}^2 + \overline{\overline{\eta}}^2,$$

を導入しよう．変換 $\xi', \eta' \to \overline{\xi}, \overline{\eta}$([3],[8] を見よ) の公式の形から, $2s = 5$ に対しては, (3.3.7) より,

$$\overline{\overline{F}}_1^{\left(2\frac{1}{2}\right)} = \overline{v}_0 + \overline{v}_1\overline{\Gamma}_1 + \overline{v}_2\overline{\Gamma}_2 + \overline{v}_{11}\overline{\Gamma}_1^2 + 2\overline{v}_{12}\overline{\Gamma}_1\overline{\Gamma}_2 + \overline{v}_{22}\overline{\Gamma}_2^2, \tag{3.3.8}$$

であることがわかる．ここで

$$\overline{v}_0 = \overline{F}_{10}, \;\; \overline{v}_k = v_k', \;\; \text{および} \;\; \overline{v}_{kl} = v_{kl}'$$

[2] わがハミルトン関数 F は天体力学の摂動関数と符号だけ違う．

である ((3.3.4) を見よ).

したがって, I 章, 9 節に応じて, (3.3.7) 式で $2s=7$ とすると,

$$\overline{\overline{F}}_1^{\left(3\frac{1}{2}\right)} = \overline{v}_0 + \sum \overline{v}_k \overline{\overline{\Gamma}}_k + \sum \overline{v}_{kl} \overline{\overline{\Gamma}}_k \overline{\overline{\Gamma}}_l + \sum \overline{v}_{klm} \overline{\overline{\Gamma}}_k \overline{\overline{\Gamma}}_l \overline{\overline{\Gamma}}_m, \tag{3.3.9}$$

が成り立つ. ただし, 係数 $\overline{v}_k$ および $\overline{v}_{kl}$ は (3.3.8) 式のものと同じである (しかも $\overline{v}_{kl} = \overline{v}_{lk}$).

4. 正準変換 $\Lambda, \lambda; \xi, \eta \to \overline{\overline{\Lambda}}, \overline{\overline{\lambda}}, \overline{\overline{\xi}}, \overline{\overline{\eta}}$**.** $S(\overline{\overline{\xi}}, \overline{\overline{\eta}})$ は変換 $\xi, \eta \to \overline{\overline{\xi}}, \overline{\overline{\eta}}$ の母関数を表すとする ((3.3.6) を見よ). これはパラメータ Λ に依存する. すなわち, $S = S(\Lambda; \overline{\overline{\xi}}, \eta)$ である. これは正準変換

$$\Lambda \to \overline{\overline{\Lambda}} = \Lambda, \quad \lambda \to \overline{\overline{\lambda}} = \lambda + \frac{\partial S}{\partial \overline{\overline{\Lambda}}}, \quad \xi, \eta \to \overline{\overline{\xi}}, \overline{\overline{\eta}}$$

を定義する. λ は λ に依存しない項だけ変更されるから, ハミルトン関数 F_1 の永年部分と周期部分への分割 (3.3.2) は保存される. そこで $\overline{\overline{\Lambda}}, \overline{\overline{\lambda}}, \overline{\overline{\xi}}, \overline{\overline{\eta}}; F; \overline{v}$ をそれぞれ $p_0, q_0; p_1, q_1; H; \lambda, \tau$ と表そう. ハミルトン関数 (3.3.1) を, (3.3.1), (3.3.2), (3.3.7), (3.3.8) に応じて $\overline{\overline{\Lambda}}, \overline{\overline{\lambda}}, \overline{\overline{\xi}}, \overline{\overline{\eta}}$ で表すと, IV 章, 1 節の (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3), (4.1.4) の形を取る ($n_0 = 2, n_1 = 2$).

5. 非縮退条件. さて G_0, ρ, R および C を選んで, IV 章, 1 節の基本定理の条件を満たさせる.

変換 (3.3.6) は条件 (3.3.5) が破れる点において特異点を持つ. これらの点は空間 Λ の有限個の部分多様体をなす. というのは

$$\left| \frac{\partial(v_1', v_2')}{\partial(\Lambda_1, \Lambda_2)} \right| \not\equiv 0 \tag{3.3.10}$$

だからである. (3.3.10) の正当性は 4 節, 7 項で証明する.

一般性を失うことなく, 空間 Λ の領域 G_0 が上に指摘した多様体から有限の距離に位置すると仮定することができる. このとき, 表式 $|k_1 v_1' + k_2 v_2'|$ $(0 < |k_1| + |k_2| \leq 6)$ は G_0 内に一様な下限を持つ. この結果, 十分小さな R と ρ に対して, 4 項で定義した関数 H は領域 $|p_1 q_1| \leq R, |\mathrm{Im}\, q_0| \leq \rho, p_0 \in G_0$ において解析的である. C が十分大きければ, 基本定理 (IV 章, 1 節) の条件 3) は満たされる. 条件 4) は

$$\left| \frac{\partial^2 F_0}{\partial \Lambda_k \partial \Lambda_l} \right| \not\equiv 0 \tag{3.3.11}$$

および

$$|\overline{v}_{kl}| \not\equiv 0 \tag{3.3.12}$$

であることを要請する. (3.3.11) の正当性は (3.3.1) からしたがう. 不等式 (3.3.12) は 4 節, 7 項で証明する. こうして, 上で指定したように G_0, ρ, R および C を選ぶと, 基本定理のすべての条件が満たされる. 基本定理の結論 I – IV から本章の 1 節, 1 項の定理が与えられる.

§4. $\overline{F}_1$ の展開係数の漸近的ふるまいの計算

この節では行列式 (3.3.10) および (3.3.12) が恒等的にはゼロにならないことを証明する．証明は, 軌道半長径の比 $\alpha = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ がゼロに向かうときのこれらの行列式の漸近的ふるまいの計算に基づく．

1. $\overline{|q_1 - q_2|^{-1}}$ の展開. (3.2.19) および (3.3.2) より,

$$\overline{F}_1 = -\beta_1\beta_2\overline{\left[|q_1 - q_2|^{-1} + \frac{|q_1|^s}{|q_2|^2}\right]}$$

が出る．しかし簡単にわかるように, λ_1 に関する $|q_1|$ の平均値はゼロに等しい．したがって

$$\overline{F}_1 = -\beta_1\beta_2\overline{[|q_1 - q_2|^{-1}]} \tag{3.4.1}$$

である．

$a_1 = \alpha, a_2 = 1$ と置き, 変数 ξ', η' による収束巾展開における ν' の係数の $\alpha \to 0$ のときの漸近的ふるまい (3.4.3) を決める ((3.3.7) と (3.3.8) を見よ).

$$|q_1 - q_2|^{-1} = \nu'_0 + \nu'_1\Gamma'_1 + \nu'_2\Gamma'_2 + \nu'_{11}\Gamma'^2_1 + 2\nu'_{12}\Gamma'_1\Gamma'_2 + \nu'_{22}\Gamma'^2_2 + R'_4 + R'_5, \tag{3.4.2}$$

ここで, R'_4 は p', q' に関して 4 次 (degree) の項からなり, $(k - l)^2 + (m - n)^2 \neq 0$ として ${p'_1}^k {q'_1}^l {p'_2}^m {q'_2}^n$ なる形をしている．また R'_5 は 5 次以上の項である．7 項において, (3.4.3) 式から困難なく行列式 (3.3.10) および (3.3.12) の漸近的ふるまいを得るつもりである．

(3.4.2) の係数 ν' が

$$\left.\begin{aligned}
&\nu'_0 = 1 + O(\alpha^2), && \nu'_1 = \frac{3}{4\beta_1}\alpha^{3/2} + O(\alpha^{7/2}), && \nu'_2 = \frac{3}{4\beta_2}\alpha^2 + O(\alpha^{7/2}),\\
&\nu'_{11} = -\frac{3}{8\beta_1}\alpha + O(\alpha^3), && \nu'_{12} = -\frac{9}{8\beta_1\beta_2}\alpha^{3/2} + O(\alpha^{7/2}), &&\\
& && \nu'_{22} = \frac{3}{2\beta_2^2}\alpha^2 + O(\alpha^{7/2}), &&
\end{aligned}\right\} \tag{3.4.3}$$

なる形をしていることを証明しよう．証明は 2 項–7 項において行う．6 項の補題を使う．

2. e_1, e_2 の巾による展開. ルベリエの表 [32] より,

$$\begin{aligned}
&|q_1 - q_2|^{-1} =\\
&(1^0) + (2^0)\left(\frac{e_1}{2}\right)^2 + (3^0)\left(\frac{e_2}{2}\right)^2 + (4^0)\left(\frac{e_1}{2}\right)^4 + (5^0)\left(\frac{e_1}{2}\right)^2\left(\frac{e_2}{2}\right)^2 + (6^0)\left(\frac{e_2}{2}\right)^4\\
&+\left[(21^{-1})\left(\frac{e_1}{2}\right)\left(\frac{e_2}{2}\right) + (22^{-1})\left(\frac{e_1}{2}\right)^3\left(\frac{e_2}{2}\right) + (23^{-1})\left(\frac{e_1}{2}\right)\left(\frac{e_2}{2}\right)^3\right]\cos(\gamma_1 - \gamma_2)\\
&+(31^{-2})\left(\frac{e_1}{2}\right)^2\left(\frac{e_2}{2}\right)^2\cos 2(\gamma_1 - \gamma_2) + R_5^0,
\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

であることがわかる．ここで R_5^0 は $e\cos\gamma, e\sin\gamma$ に関して 5 次以上の項から始まる級数である．以下の記法を採用した．

$$
\left.\begin{array}{l}
(1^0) = \dfrac{1}{2}A_0^0,\ \ (2^0) = A_1^0 + A_2^0,\ \ (3^0) = A_1^0 + A_2^0,\ \ (4^0) = 3A_3^0 + A_4^0,\\
(5^0) = 2A_1^0 + 14A_2^0 + 24A_3^0 + 12A_4^0,\ \ (6^0) = 3A_1^0 + 9A_2^0 + 9A_3^0 + 3A_4^0,\\
(21^{-1}) = 2A_0^{-1} - 2A_1^{-1} - 2A_2^{-1},\ \ (22^{-1}) = -4A_2^{-1} - 18A_3^{-1} - 12A_4^{-1},\\
(23^{-1}) = 2A_0^{-1} - 2A_1^{-1} - 22A_2^{-1} - 30A_3^{-1} - 12A_4^{-1},\\
(31^{-2}) = 3A_0^{-2} - 3A_1^{-2} + 3A_2^{-2} + 12A_3^{-2} + 6A_4^{-2},
\end{array}\right\} \tag{3.4.5}
$$

公式 (3.4.5) において, 係数 A_k^i は

$$
A_k^i = \frac{a^k}{k!}\frac{d^k b^i}{da^k},\quad \text{ただし}\quad (1+\alpha^2-2\alpha\cos\varphi)^{-1/2} = \frac{1}{2}\sum_{t=-\infty}^{+\infty} b^i\cos i\varphi,\quad b^i = b^{-i}, \tag{3.4.6}
$$

で与えられる．だから α のべき級数で表した A_k^i の展開は

$$
\left.\begin{array}{lll}
A_0^0 = 2 + \dfrac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^4), & A_0^{-1} = \alpha + O(\alpha^3), & A_0^{-2} = \dfrac{3}{4}\alpha^2 + O(\alpha^4),\\
A_1^0 = \alpha^2 + O(\alpha^4), & A_1^{-1} = \alpha + O(\alpha^3), & A_1^{-2} = \dfrac{3}{2}\alpha^2 + O(\alpha^4),\\
A_2^0 = \dfrac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^4), & A_2^{-1} = O(\alpha^3), & A_2^{-2} = \dfrac{3}{4}\alpha^2 + O(\alpha^4),\\
A_3^0 = O(\alpha^3), & A_3^{-1} = O(\alpha^3), & A_3^{-2} = O(\alpha^3),\\
A_4^0 = O(\alpha^3), & A_4^{-1} = O(\alpha^3), & A_4^{-2} = O(\alpha^3),
\end{array}\right\} \tag{3.4.7}
$$

なる形をとる．

3. ξ, η の巾による展開. (3.2.18) に応じて,

$$
\frac{e}{2} = \sqrt{\frac{\Gamma}{2\Lambda}}\left(1 - \frac{\Gamma}{4\Lambda} + \dots\right), \tag{3.4.8}
$$

である．(3.4.8) を (3.4.4) に代入すると

$$
\begin{aligned}
&|q_1 - q_2|^{-1}\\
&= \nu_0 + \nu_1\Gamma_1 + \nu_2\Gamma_2 + 2\nu\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\cos(\gamma_1-\gamma_2) + \nu_{11}\Gamma_1^2 + \nu_{12}\Gamma_1\Gamma_2\\
&+\nu_{22}\Gamma_2^2 + \left[\kappa_{13}\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2^3} + \kappa_{31}\sqrt{\Gamma_1^3\Gamma_2}\right]\cos(\gamma_1-\gamma_2)\\
&+\kappa_{22}\Gamma_1\Gamma_2\cos 2(\gamma_1-\gamma_2) + R_5,
\end{aligned} \tag{3.4.9}
$$

が得られる．ここで, 以下の記法を用いた:

$$
\left.\begin{array}{lll}
\nu_0 = (1^0),\ \nu_1 = \dfrac{(2^0)}{2\Lambda_1}, & \nu_2 = \dfrac{(3^0)}{2\Lambda_2}, & \nu = \dfrac{(21^{-1})}{2\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}},\\
\nu_{11} = \dfrac{(4^0)-(2^0)}{4\Lambda_1^2}, & 2\nu_{12} = \dfrac{(5^0)}{4\Lambda_1\Lambda_2}, & \nu_{22} = \dfrac{(6^0)-(3^0)}{4\Lambda_2^2},\\
\kappa_{13} = \dfrac{2(23^{-1})-(21^{-1})}{8\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2^3}}, & \kappa_{31} = \dfrac{2(22^{-1})-(21^{-1})}{8\sqrt{\Lambda_1^3\Lambda_2}}, & \kappa_{22} = \dfrac{(31^{-2})}{4\Lambda_1\Lambda_2},
\end{array}\right\} \tag{3.4.10}
$$

また R_5 は ξ,η に関して 5 次 (degree) 以上の項から始まる級数である.

$\Lambda_1 = \beta\sqrt{\alpha}, \Lambda_2 = \beta_2$ であることからすると, 展開 (3.4.9) 内の係数は, 表式 (3.4.5) および (3.4.7) を公式 (3.4.10) に代入すると,

$$\nu_0 = 1 + O(\alpha^4), \quad \nu_1 = \frac{3}{4\beta_1}\alpha^{3/2} + O(\alpha^{7/2}), \quad \nu_2 = \frac{3}{4\beta_2}\alpha^2 + O(\alpha^4), \quad \nu = O(\alpha^{11/4}) \tag{3.4.11}$$

$$\nu_{11} = -\frac{3}{8\beta_1^2}\alpha + O(\alpha^3), \quad \nu_{12} = \frac{9}{8\beta_1\beta_2}\alpha^{3/2} + O(\alpha^{7/2}), \quad \nu_{22} = \frac{3}{2\beta_2^2}\alpha^2 + O(\alpha^4), \tag{3.4.12}$$

$$\kappa_{13} = O(\alpha^{11/4}), \quad \kappa_{31} = O(\alpha^{9/4}), \quad \kappa_{22} = O(\alpha^{7/2}), \tag{3.4.13}$$

なる形を取る.

4. ξ', η' **の巾による展開.** 6 項の補題 2 は関数

$$H_2 = \nu_1\Gamma_1 + \nu_2\Gamma_2 + \nu\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\cos(\gamma_1 - \gamma_2)$$

に適用される. これより,

$$H_2 = \nu_1'\Gamma_1' + \nu_2'\Gamma_2', \quad 2\Gamma' = \xi'^2 + \eta'^2, \tag{3.4.14}$$

がしたがう. ここで, $x = \xi, \eta, p$ または q に対し, 条件

$$(\nu_1 - \nu_2)\sin 2\varphi + \nu\cos 2\varphi = 0$$

によって φ を決めて,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1'\cos\varphi + x_2'\sin\varphi, \\ x_2 &= -x_1'\sin\varphi + x_2'\cos\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{3.4.15}$$

を得る. ここで, (3.4.11) および 6 項の (3.4.27), (3.4.29) に応じて,

$$\varphi = O(\alpha^{5/4}), \quad \nu_1' = \nu_1 + O(\alpha^{7/2}), \quad \nu_2' = \nu_2 + O(\alpha^{7/2}), \tag{3.4.16}$$

が成り立つ.

(3.4.15) を (3.4.9) に代入して, x' のべきによる (3.4.2) の展開を得る:

$$\overline{|q_1 - q_2|^{-1}} = \nu_0' + \nu_1'\Gamma_1' + \nu_2'\Gamma_2' + \nu_{11}'\Gamma_1'^2 + 2\nu_{12}'\Gamma_1'\Gamma_2' + \nu_{22}'\Gamma_2'^2 + R_4 + R_5, \tag{3.4.17}$$

ここで, (3.4.11), (3.4.14) および (3.4.15) に応じて,

$$\nu_1' = \frac{3}{4\beta_1}\alpha^{3/2} + O(\alpha^{7/2}), \quad \nu_2' = \frac{3}{4\beta_2}\alpha^2 + O(\alpha^4), \tag{3.4.18}$$

である. ここで R_4 は, $(k-l)^2 + (m-n)^2 \neq 0$ として $p_1'^k q_1'^l p_2'^m q_2'^n$ の形の 4 次 (degree) の項からなり, R_5 は 4 次より高い次数の項からなる. 項 5 において, 係数 ${\nu'}_{ij}$ を (3.4.17) から持ってきて, 表現 (3.4.3) を得る.

5. ν_{ij}' **の計算.** x に表式 (3.4.15) を代入すると, x の各関数は x' に関する級数として展開できる. 直接計算によると, これらの展開の係数として, (3.4.19)–(3.4.21) なる表式が, 相対誤差 $O(\varphi^2)$ 程度で得られる.

coefficient of $\rightarrow$ in the expansion of $\downarrow$	x_1'	x_2'
x_1	1	φ
x_2	$-\varphi$	1

(3.4.19)

(3.4.19) より, $x = p$ または q と置いて, 次を得る.

	$2\Gamma_1' = p_1'q_1'$	$p_1'q_2'$	$p_2'q_1'$	$p_2'q_2' = 2\Gamma_2'$
$2\Gamma_1 = p_1q_1$	1	φ	φ	φ^2
p_1q_2	$-\varphi$	1	$-\varphi^2$	φ
p_2q_1	$-\varphi$	$-\varphi^2$	1	φ
$2\Gamma_2 = p_2q_2$	φ^2	$-\varphi$	$-\varphi$	1

(3.4.20)

(3.4.20) を使って p', q' のべき級数による展開係数を計算して次を得る.

	$(2\Gamma_1')^2$	$(2\Gamma_1')(2\Gamma_2')$	$(2\Gamma_2')^2$
$(2\Gamma_1)^2$	1	$4\varphi^2$	φ^4
$(2\Gamma_1)(2\Gamma_2)$	φ^2	1	φ^2
$(2\Gamma_2)^2$	φ^4	$4\varphi^2$	1

(3.4.21)

したがって, 係数の正確な行列 (3.4.21) は単位行列と $O(\varphi^2)$ だけ異なる.

6 項の補題 1 の (3.4.23), (3.4.24), (3.4.25), および公式 (3.4.20) より簡単に計算できるように, 量

$$8\sqrt{\Gamma_1^3\Gamma_2}\cos(\gamma_1 - \Gamma_2), \quad 8\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2^3}\cos(\gamma_1 - \Gamma_2), \quad 8\Gamma_1\Gamma_2\cos 2(\gamma_1 - \Gamma_2),$$

の p', q' のべきによる展開の $(2\Gamma_1')^2$, $(2\Gamma_1')(2\Gamma_2')$ および $(2\Gamma_2')^2$ の係数はすべて $O(\varphi)$ である.

ところが, (3.4.16) より, $\varphi = O(\alpha^{5/4})$ である. (3.4.12) によると $\nu_{ij} = O(\alpha)$ であり, (3.4.13) により $\kappa_{ij} = O(\alpha^{9/4})$ であるから, 展開 (3.4.17) の係数は

$$\nu_{ij} = \nu_{ij} + O(\alpha)O(\varphi^2) + O(\alpha\ 9/4)O(\varphi) = \nu_{ij} + O(\alpha^{7/2})$$

であり, (3.4.12) の結果, ν_{ij}' は漸近的に (3.4.3) のようにふるまう.

6. 2 つの補題. 以下の記法を用いる.

$$\left.\begin{array}{ll} \xi_k = \sqrt{2\Gamma_k}\cos\gamma_k, & p_k = \xi_k + i\eta_k, \\ \eta_k = \sqrt{2\Gamma_k}\sin\gamma_k, & q_k = \xi_k - i\eta_k, \end{array}\right\} \quad (k = 1, 2) \tag{3.4.22}$$

補題 1. 以下の等式が成り立つ:

$$2\Gamma_k = \xi_k^2 + \eta_k^2 = p_kq_k, \tag{3.4.23}$$

$$4\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\cos(\gamma_1 - \gamma_2) = 2(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2) = p_1q_2 + p_2q_1, \tag{3.4.24}$$

$$8\Gamma_1\Gamma_2\cos^2(\gamma_1-\gamma_2)=2\left[(\xi_1^2-\eta_1^2)(\xi_2^2-\eta_2^2)+4\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2\right]=p_1^2q_2^2+p_2^2q_1^2, \tag{3.4.25}$$

証明は明らかである．補題 1 より, 次が簡単に証明できる．

補題 2. (3.4.22) の記法を使って, x_k は ξ_k および η_k または p_k および q_k を表すとして, 公式

$$\left.\begin{aligned} x_1&=x_1'\cos\varphi+x_2'\sin\varphi,\\ x_2&=-x_1'\sin\varphi+x_2'\cos\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{3.4.26}$$

は正準変換 $\xi,\eta\to\xi',\eta'$ を定義する．φ が関係式

$$\nu'=(\nu_1-\nu_2)\sin 2\varphi+\nu\cos 2\varphi=0, \tag{3.4.27}$$

を満たせば, 関数 $H_2=\nu\Gamma_1+\nu_2\Gamma_2+\nu\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\cos(\gamma_1-\gamma_2)$ は, 新しい変数 x' を使って, 公式

$$H_2=\nu_1'\Gamma_1'+\nu_2'\Gamma_2',\quad (2\Gamma_k'=\xi_k'^2+\eta_k'^2=p_k'q_k'), \tag{3.4.28}$$

により表される．ここで

$$\nu_1'=\nu_1-\frac{\nu}{2}\sin 2\varphi-(\nu_1-\nu_2)\sin^2\varphi,\quad \nu_2'=\nu_2+\frac{\nu}{2}\sin 2\varphi+(\nu_1-\nu_2)\sin^2\varphi, \tag{3.4.29}$$

である．

7. 行列式 (3.3.10), (3.3.12) の漸近的ふるまい. (3.4.1) と (3.3.8) の帰結として, 係数 $v'=\overline{v}$ は

$$\overline{v}_0=-\beta_1\beta_2a_2^{-1}\nu_0',\quad \overline{v}_k=-\beta_1\beta_2a_2^{-3/2}\nu_k',\quad \overline{v}_{kl}=-\beta_1\beta_2a_2^{-2}\nu_{kl}', \tag{3.4.30}$$

なる形を持つ．したがって, (3.4.3) より,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\overline{v}_{11}&\overline{v}_{12}\\ \overline{v}_{21}&\overline{v}_{22}\end{vmatrix}&=a_2^{-4}\beta_1^2\beta_2^2\begin{vmatrix}v_{11}'&v_{12}'\\ v_{21}'&v_{22}'\end{vmatrix}\\ &=a_2^{-4}\beta_1^2\beta_2^2\begin{vmatrix}-\dfrac{3}{8\beta_1^2}\alpha+O(\alpha^{5/2}) & \dfrac{9}{8\beta_1\beta_2}\alpha^{3/2}+O(\alpha^{5/2})\\ \dfrac{9}{8\beta_1\beta_2}\alpha^{3/2}+O(\alpha^{5/2}) & \dfrac{3}{2\beta_2^2}\alpha^2+O(\alpha^{5/2})\end{vmatrix}\\ &=-\frac{117}{64}\frac{\alpha^3}{a_2^4}+O(\alpha^{7/2})\not\equiv 0\end{aligned} \tag{3.4.31}$$

が成り立つ．さらに

$$\frac{\partial(v_1',v_2')}{\partial(\Lambda_1,\Lambda_2)}=\frac{\partial(v_1',v_2')}{\partial(\alpha,a_2)}\bigg/\frac{\partial(\Lambda_1,\Lambda_2)}{\partial(\alpha,a_2)}=\frac{27}{16}\frac{\alpha^3}{a_2^4}+O(\alpha^{9/2})\not\equiv 0. \tag{3.4.32}$$

であることを示そう．(3.2.18) に応じて, $a_1=\alpha a_2$ に対して

$$\Lambda_1=\beta_1\sqrt{a_1}=\beta_1\sqrt{\alpha a_2},\quad \Lambda_2=\beta_2\sqrt{a_2}. \tag{3.4.33}$$

である. したがって,

$$\frac{\partial(\Lambda_1,\Lambda_2)}{\partial(\alpha,a_2)}=\frac{\beta_1\beta_2}{4\sqrt{\alpha}}. \tag{3.4.34}$$

が成り立つ. (3.4.30) および (3.4.3) より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial(v_1',v_2')}{\partial(\alpha,a_2)} &= \beta_1^2\beta_2^2\begin{vmatrix}\dfrac{9}{8\beta_1^2}\dfrac{\alpha^{1/2}}{a_2^{3/2}}+O(\alpha^{5/2}) & -\dfrac{9}{8\beta_1}\dfrac{\alpha^{3/2}}{a_2^{5/2}}+O(\alpha^{7/2})\\ \dfrac{3}{8\beta_2}\dfrac{\alpha}{a_2^{3/2}}+O(\alpha^{5/2}) & -\dfrac{9}{8\beta_2}\dfrac{\alpha^2}{a_2^{5/2}}+O(\alpha^{7/2})\end{vmatrix}\\ &= -\frac{27}{64}\frac{\beta_1\beta_2\alpha^{5/2}}{a_2^4}+O(\alpha^4)\end{aligned} \tag{3.4.35}$$

である. (3.4.35) と (3.4.34) を比較すれば, (3.4.32) が得られる.

§5. 多体問題

平面および 3 次元の三体および多体問題の性質のうち, 角運動量の保存に関連したものを以下で議論する.

1. $n_0>2$ 個の惑星の平面問題. 2 節と 3 節の議論は 3 つ以上の惑星の場合へ簡単にもって行ける. 惑星数を n_0 で表すと, 自由度の数は $n=2n_0$ である (全物体の重心は固定して考える). 2 節および 3 節で使った文字 $\Lambda,\lambda,\Gamma,\gamma,\xi,\eta$ は n_0 次元のベクトルを表す. 不等式 (3.3.10), (3.3.12) は $n_0=2$ の場合の 4 節と同じ方法で確かめる (verify) ことができる. 1 節の 4 項の結果へと至る計算の詳細には立ち入らない.

2. 平面三体問題のモーメント積分. 2 節〜4 節の議論は角運動量の保存則をまったく考慮しなかった. これは 2 節の記法では

$$\sum G_k=C.$$

という形を取る.

n 体問題のこの第一積分はハミルトン関数を F_1 とする正準方程式の「平均系」の第一積分に対応する:

$$\sum \Gamma_k=C.$$

この第一積分の存在のおかげで, 平均系は $n_0=2$ の場合は可積分であり, したがって変数 p_1,q_1 を適当に選ぶことにより, $\overline{F}_1$ を

$$\overline{F}_1(\Lambda,\lambda;\xi,\eta)=\overline{\overline{F}}(p_0;p_1,q_1)\quad(p_0=\Lambda) \tag{3.5.1}$$

なる形に還元できる. その際, 余計な項 $\widetilde{\overline{F}}_1$ (IV 章, 1 節参照) は必要ない. ξ,η から p_1,q_1 への移行は正準解析変換である. $|\xi|,|\eta|$ が小さいとき, p_1,q_1 の表式はバーコフ級数によって与えられる (I 章, 9 節を見よ). この場合, 平均系は可積分であるから級数は収束する.

(3.5.1) に応じると, $|\xi|,|\eta|$ が小さい場合に話を限定することはできないが, IV 章, 1 節の基本定理の代りに, I 章, 8 節の結果を使うことができる (この結果は基本定理より簡単であって,

基本定理から容易に導出できる). 衝突の場合を排除するために Λ, e に条件を課さねばならない ((3.1.5) 参照):

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 < \varepsilon_0(\Lambda_{1\max}, \Lambda_{2\min}). \tag{3.5.2}$$

条件 (3.5.2) は, I 章, 8 節の条件を満たす空間 Γ, Λ 内の領域 G を区別する (??). これらの条件を使って, 1 節, 6 項の結論に到達する.

3. 空間問題におけるドローネーおよびポアンカレ変数. n_0 個の惑星の空間問題の自由度は $3n_0$ である (前と同様, 重心を固定する). 各惑星は 6 個の楕円要素を持つ (2 節, 2 項を見よ). すなわち, $a, e, i; l, g, h$ である. ここで角度 h, 交点経度, は交線の方向を決める. 交線とは, ケプラー楕円と p_1, q_1 面との交わり線のことである. 角度 i, 軌道傾斜角, はこれら 2 つの面の間の角度である. 最後に, g, 近点経度, は交線と軌道半長径方向との間の角度である. ドローネー要素 L, G, H は角度 l, g, h に対応する. ここで, $H = \cos i$ は $q^{(3)}$ 軸への角運動量の射影である (2 節と違って, ここでは H はハミルトン関数ではない).

空間 (3 次元) 問題において, 角運動量は保存される. これより, 3 個の積分が得られる.

$$\sum G_k \sin i_k \cos h_k = \sum \sqrt{G_k^2 - H_k^2} \cos h_k = C_1, \tag{3.5.3}$$

$$\sum G_k \sin i_k \sin h_k = \sum \sqrt{G_k^2 - H_k^2} \sin h_k = C_2, \tag{3.5.4}$$

$$\textstyle\sum G_k \cos i_k \quad = \sum H_k^2 \quad = C_2, \tag{3.5.5}$$

ポアンカレ要素 $\Lambda, \Gamma, Z; \lambda, \gamma, \zeta$ および $\Lambda, \xi, p; \lambda, \eta, q$ は公式

$$\begin{array}{lllll} \mu\Lambda = L, & \mu\Gamma = L - G, & \mu Z = G - H, & \xi = \sqrt{2\Gamma}\cos\gamma, & p = \sqrt{2Z}\cos\zeta \\ \lambda = l + g + h, & \gamma = -g - h, & \zeta = -h, & \eta = \sqrt{2\Gamma}\sin\gamma, & q = \sqrt{2Z}\sin\zeta \end{array}$$

によって決まる. λ に関して平均したハミルトン関数

$$\overline{F}_1(\Lambda; \xi, \eta; p, q) = \overline{F}_{10} + \overline{F}_{12} + \overline{F}_{14} + \dots$$

は ξ, η, p, q に関して偶で, 平衡点 $\xi = \eta = p = q = 0$ を持つ. 2 次の項は $\overline{F}_{12} = \overline{F}'_{12}(\xi, eta) + \overline{F}''_{12}(p, q)$ であり (ここで $\overline{F}'_{12}(\xi, \eta)$ は (3.3.3) の $\overline{F}_{12}$ である), 2 次形式 $\overline{F}''_{12}$ は

$$\overline{F''}_{12} = v''_1 Z_1 + \dots + v''_{n_0} Z_{n_0} \quad (v''_1 \equiv 0, v''_2, \dots, v''_{n_0} > 0). \tag{3.5.6}$$

に還元される. 周波数 v''_1 が消えるのは, 積分 (3.5.3), (3.5.4) の効果であると説明される.

4. 三体問題における交点の消去. 知られているように ([1] を見よ), 積分 (3.5.3)–(3.5.5) により, 系の自由度の数は 2 だけ減る. 三体問題の場合, ヤコビによれば, 変数 H, h を完全に消去することが可能である.

座標面 $q^{(1)}, q^{(2)}$ が系の角運動量ベクトルに垂直であるとする. すると, (3.5.3)–(3.5.5) において, $C_1 = C_2 = 0, C_3 = C$ であり,

$$\left.\begin{aligned} G_1 \cos i_1 + G_2 \cos i_2 = C, \\ G_1 \sin i_1 = -G_2 \sin i_2 = \varepsilon, \\ h_1 - h_2 = \pi \end{aligned}\right\} \tag{3.5.7}$$

が成り立つ. ここで $C=$ 一定で, ε も軌道傾斜角も小さい. (3.5.7) より,

$$H_1+H_2=C,\quad H_1^2-H_2^2=G_1^2-G_2^2,$$

が成り立ち, したがって

$$H_1=\frac{C}{2}+\frac{1}{2C}(G_1^2-G_2^2),\quad H_2=\frac{C}{2}-\frac{1}{2C}(G_1^2-G_2^2), \tag{3.5.8}$$

である. 座標 h_1 と h_2 はハミルトン関数に含まれないことははっきりしている. ハミルトン関数はしたがって平面問題の変数 $L,G;l,g$ で表現される (H_1,H_2 を表式 (3.5.8) で置き換える). ε^2 のべきによる展開

$$C=G_1+G_2-\frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{1}{G}+\frac{1}{G_2}\right),\quad G_1-H_1=\frac{\varepsilon^2}{2G_1}+\dots,\quad G_2-H_2=\frac{\varepsilon^2}{2G_2}+\dots,$$

より, 得られた $L,G;l,g$ の関数 (まだパラメータ C には依存する) が平面三体問題のハミルトン関数から ε^2 と同じように小さい (G_1+G_2-C と同様) 解析項だけ違うことを導き出すことはむずかしくない.

だから 3 次元三体問題は, 軌道傾斜角がゼロに向かったときに平面三体問題になるようなある平面問題に還元される. 2 項との比較, および I 章, 8 節を使って, 1 節, 7 項の結果に到達する.

5. 空間多体問題. 三体よりも物体が多い場合, 自由度の数を減らすエレガントな方法はない. ここでは, 自由度を 1 だけ消去する方法について述べよう. 消すのは (3.5.6) のゼロ周波数 ν_1'' である.

知られているように, 角運動量の成分 C_1,C_2,C_3 のポアッソン括弧は式

$$-(C_1,C_2)=C_3,\quad -(C_2,C_3)=C_1,\quad -(C_3,C_1)=C_2,$$

で与えられる. C_1,C_2,C_3 の 2 つの関数 Φ_1,Φ_2 が正準共役変数と見なせるのは, そのポアッソン括弧が $(\Phi_1,\Phi_2)\equiv 1$ のときである. 次の形

$$\begin{aligned}\Phi_1&=y+\varphi_1(x,y,z), & \Phi_2&=z+\varphi_2(x,y,z),\\ \varphi_1(x,y,z)&=\varphi(x,y,z), & \varphi_2(x,y,z)&=\varphi(x,y,z),\end{aligned}$$

の関数 Φ_1,Φ_2 を探そう. ただし, $-C_3=1+x,\ -C_1=y,\ -C_2=z$ である.

関数 $\varphi(x,y,z)$ に対しては, 方程式

$$(\Phi_1,\Phi_2)=\begin{vmatrix}1+x & y & z\\ \varphi_{1x} & 1+\varphi_{1y} & \varphi_{1z}\\ \varphi_{2x} & \varphi_{2y} & 1+\varphi_{2z}\end{vmatrix}\equiv 1. \tag{3.5.9}$$

が得られる. (3.5.9) より, たとえば, φ を級数 $\varphi=ax+by+cz+\dots$ のように展開して, 対称な解 $\varphi(x,y,z)=\varphi(x,z,y)$ を見つけることも可能である.

n_0 個の惑星の問題に戻ろう. (3.5.9) からすると, $3n_0$ 個の正準変数の組を選んで以下を満たすことが可能である.

1) Λ_k と λ_k は n_0 個のペアからなる.
2) n_0 個のペアは離心率に対応する (G と g や Γ と γ, ξ と η のように).
3) n_0 個のペアは軌道傾斜角に対応する (H と h や Z と ζ, p と q のように).
4) Φ_1 と Φ_2 は上記後者のペアのひとつからなる.

Φ_1 と Φ_2 は第一積分であるから, ハミルトン関数の中には決して入らない. そして自由度 $3n_0 - 1$ の系が得られる. (3.5.6) に対応する展開において, $n_0 - 1$ 個の周波数と $n_0 - 1$ 個の変数の組が得られる. 3 節の手法により, ハミルトン関数を (4.1.1) の形に還元でき ($n = 3n_0 - 1$, $n_1 = 2n_0 - 1$ である. ただし, n_0 は惑星の個数である), 基本定理より, 1 節, 5 項の結果が得られる.

(3.5.9) を解くためのかなり長い計算が必要である, 条件 1)–4) を満たす変数の構築, 4 節の議論に似た非縮退条件の確認などは, ここでは議論しない.