IV 章. 基本定理

この章では, II 章および III 章の議論の基になっている定理の正確な定式化と完全な証明を行う. 定式化にあたっては (1 節), 天体力学への応用の都合の良いようにしたので, 結果の一般性や最終性には気を配らなかった.

証明 (9 節-14 節) はかなり面倒である. I 章で数え上げた発想以外に, 証明は多数のほぼ自明な不等式に基づく. この章の最も大事な部分は 6 節である. そこでは 4 節で定式化した基本補題を証明する. V 章の終りに挙げた記号リストは読者の助けになるだろう. 不等式は V 章の補題を基礎とする. これらの不等式を導くにあたって, 定数を見積り際のエレガンスや精度には注意を払わなかった. 必要以上に厳しい条件を課すことがしばしばであった (たとえば 1 節の $\mu < \varepsilon^4$). 読者は容易に結果を強めることができる.

§1. 基本定理

ハミルトン関数 $H(p_0, p_1, q_0, q_1)$, 領域 G_0, 正数 ρ, R, C を考える. 以下の 4 つの条件が満たされると仮定する.

1) 関数 $H(p,q)$ (ただし $p = p_0, p_1$; $q = q_0, q_1$ であり, p_0 は n_0 次元ベクトル, p_1 は n_1 次元ベクトル. ここで $n_0 + n_1 = n$ である. q_0 は角度変数で, $H(p_1, p_1, q_0 + 2\pi, q_1) = H(p_1, p_1, q_0, q_1)$) は領域 $F : p_0 \in G_0, |\mathrm{Im}\ q_0| \leq \rho, |x_1| \leq R\ (x_1 = p_1, q_1)$ において解析的で, パラメータ $\mu, 0 < \mu \leq \mu_0$ に依存する.

2) H は次の形をしている.

$$H = H_0(p_0) + \mu H_1(p,q) + (\mu^2) H_2(p,q) \tag{4.1.1}$$

ここで

$$H_1(p,q) = \overline{H}_1(p_0, p_1, q_1) + \widetilde{H}_1(p_0, q_0, p_1, q_1), \quad \int \widetilde{H}_1 dq_0 = 0, \tag{4.1.2}$$

ただし

$$\overline{H}_1(p_0, p_1, q_1) = \overline{\overline{H}}_1(p_0, \tau) + \widetilde{\overline{H}}_1(p_0, p_1, q_1) \tag{4.1.3}$$

および

$$\overline{\overline{H}}_1(p_0, \tau) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i \tau_i + \sum_{i,j=1}^{n_1} \lambda_{ij} \tau_i \tau_j + \sum_{i,j,k=1}^{n_1} \lambda_{ijk} \tau_i \tau_j \tau_k. \tag{4.1.4}$$

ここで $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ および λ_{ijk} は p_0 の関数であり,

$$2\tau_i = p_{n_0+i}^2 + q_{n_0+i}^2 \quad (i = 1, \ldots, n_1) \tag{4.1.5}$$

3) F 内で以下の不等式が (ある $C \geq 1$ に対して) 満たされる.

$$|(\mu^2) H_2| \leq \mu^2 C, \tag{4.1.6}$$

$$|\widetilde{H}_1| \leq C, \quad |\overline{H}_1| \leq C, \quad \overline{\overline{H_1}} \leq C \tag{4.1.7}$$

[16]

$$|\widetilde{\overline{\overline{H}}}_1| \leq C|x_1|^7. \tag{4.1.8}$$

4) G_0 内では

$$\det\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_0^2}\right| \not\equiv 0, \tag{4.1.9}$$

$$\det|\lambda_{ij}(p_0)| \not\equiv 0. \tag{4.1.10}$$

仮定 1) - 4) の下で, 任意の $\kappa > 0$ に対して, $\varepsilon_0(\kappa; H_0, \overline{\overline{H}}_1, G_0; \rho, R, C; \mu_0) > 0$ を見つけることができ, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ かつ $0 < \mu < \varepsilon^4$ のときに以下の 4 つの条件が成り立つようにできる.

I. 領域 Re F_ε:

$$p_0 \in \mathrm{Re}\ G_0, \quad |\mathrm{Im}\ q_0| = 0, \quad 0 < \tau_i < \varepsilon,$$

が 2 つの集合 $\mathbf{F}_\varepsilon$ と f_ε から成り, そのうちのひとつ $\mathbf{F}_\varepsilon$ はハミルトン関数を (4.1.1) とする正準方程式に関して不変であり, もうひとつ f_ε は小さい, すなわち

$$\mathrm{mes} f_\varepsilon < \kappa\ \mathrm{mes} F_\varepsilon.$$

II. $\mathbf{F}_\varepsilon$ は 不変な n 次元解析的トーラス T_ω から成る. これらはパラメータを使って次のように表される.

$$\left.\begin{aligned} &p_0 = p_{0_\omega} + f_{0_\omega}(Q),\ q_0 = Q_0 + g_{0_\omega}(Q), \\ &p_1 = \sqrt{2(\tau_\omega + f_{1_\omega}(Q))}\cos[Q_1 + g_{1_\omega}(Q)] \\ &q_1 = \sqrt{2(\tau_\omega + f_{1_\omega}(Q))}\sin[Q_1 + g_{1_\omega}(Q)] \end{aligned}\right\} \tag{4.1.12}$$

ここで $Q = Q_0, Q_1$ は角度パラメータであり, p_{0_ω} と τ_ω はトーラス ω の番号に依存する定数である.

III. 不変トーラス T_ω はトーラス

$$\begin{aligned} &p_0 = p_{0_\omega} = \text{一定}, \quad && \tau = \tau_\omega = \text{一定} \\ &|f_{i_\omega}(Q)| < \kappa\varepsilon, && |g_{i_\omega}(Q)| < \kappa\varepsilon, \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

と少ししか違わない.

IV. ハミルトン関数 (4.1.1) によって決まるトーラス T_ω 上の運動は n 個の周波数 ω を持って準周期的 (conditionally periodic) である. つまり,

$$\dot{Q}_0 = \omega_0, \quad \dot{Q}_1 = \omega_1 \quad \left(\text{ただし}\quad \omega_0 = \frac{\partial H_0}{\partial p_{0_\omega}},\ \omega_1 = \mu\frac{\partial \overline{\overline{H}}_1}{\partial \tau_\omega}\right) \tag{4.1.14}$$

[16] 原論文では (4.1.7) の中央の式の H_1 に上線がない.

基本定理は以下の定理で与えられる帰納過程に基づいて 9 節-14 節で証明する.

§2. 帰納定理

関数 $H(p,q)$, 領域 G, Ξ および正数 $d, \Theta, \theta, \rho, \kappa; \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \mu, M, K$ が以下の性質を持つとする.

1) 領域 $F = \{(p,q) : p \in G,\ |\mathrm{Im}\, q| \le \rho\}$ において, 関数

$$H(p,q) = H_0(p_0) + H_1(p) + H_2(p,q) \tag{4.2.1}$$

は解析的である. ただし, $p = (p_0, p_1)$ であり, $q = (q_0, q_1)$ は角変数[17], $\dim p_0 = n_0, \dim p_1 = n_1$, $n_0 + n_1 = n$.

2) 領域 G から領域 Ξ の上への写像 A:

$$p \to Ap = \frac{\partial}{\partial p_0}(H_0 + H_1), \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial H_1}{\partial p_1} \tag{4.2.2}$$

は微分同相である. ただし,

$$\theta|dp| \le |dA| \le \Theta|dp|, \quad \left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_0^2}\right| \le \Theta, \quad \left|\frac{\partial^2 H_1}{\partial p^2}\right| \le \mu\Theta, \quad (0 \le \theta \le 1 \le \Theta < \infty) \tag{4.2.3}$$

3) F 内で

$$|H_2(p,q)| \le \mu M. \tag{4.2.4}$$

4) 次の不等式が満たされる.

$$\begin{aligned} \delta \ &\le \delta^{(4)}(n, \Theta, \theta, \rho, \kappa, D) \\ &= \min\left\{\delta^{(1)}\left(n, 2\Theta, \frac{\theta}{2}\right); \delta^{(2)}(\rho, n); \delta^{(3)}(n, \Theta, \theta, D, \kappa)\right\} \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

$$\mu \le K, \tag{4.2.6}$$

ここで, $\delta^{(1)}$ は 3 節で定義する. また

$$\begin{aligned} \delta^{(2)} &= \min\{10^{-4n}\rho^{4n}, 2^{-55n}\} \\ \delta^{(3)} &= \min\{e^{2n}[2^8 n(n+4)]^{-2n}; (6+14\Theta)^{-1}; 4^{-n-3}\theta^n\Theta^{-n}D^{-1}n^{-1}\kappa\} \end{aligned}$$

5) 次のように置く.

$$\beta = \delta^3\varepsilon, \quad \gamma = \delta^{\frac{1}{4n}}, \quad \varepsilon = \delta^T, \quad K = \delta\varepsilon, \quad M = \varepsilon^{7/2}\delta^{-1}, \quad T = 16(n+4). \tag{4.2.7}$$

[17] [註] 基本定理では q_0 だけが角変数と書かれていた.

6) 領域 Ξ は, 5 章 2 節 5 項の記法により, 次の形をしている.

$$\Xi = \Xi^*_{K_0 N_0 d_0}, \quad N_0 < \frac{1}{\gamma}\ln\frac{1}{2M}, \quad K_0 \geq K, \tag{4.2.8}$$

ただし Ξ^* は $\dfrac{D}{\varepsilon}$ 型の領域である.

数 δ_s $(s \geq 1)$ を $\delta_1 = \delta,\ \delta_{s+1} = \delta_s^{15/14}$ により導入する. $s \geq 1$ に対して

$$\beta_s = \delta_s^3 \varepsilon_s, \quad \gamma_s = \delta_s^{\frac{1}{4n}}, \quad \varepsilon_s = \delta_s^T, \quad M_s = \varepsilon_s^{7/2}\delta_s^{-1} \quad (\text{このとき } M_{s+1} = M_s^{15/14}), \tag{4.2.9}$$

と置く.

仮定 1)-6) の下に, $P^{(s)}, Q^{(s)} = X^{(s)} \in F^{(s)} : P^{(s)} \in G^{(s)}, |\mathrm{Im}\ Q^{(s)}| \leq \rho_s$ の形の領域列 $F^{(0)} = F, F^{(1)}, \ldots$ および領域 $F^{(s)}$ から $F^{(s-1)}$ の中への正準微分同相写像の列 $B_s : P^{(s)}, Q^{(s)} \to P^{(s-1)}, Q^{(s-1)}$ があって以下を満たす.

I. すべての $s \geq 1$ に対して

$$|B_s - E| < \beta_s, \quad |dB_s| < 2|dX^{(s)}|, \quad F^{(s)} \subseteq F^{(s-1)} - 2\beta_s, \quad \rho_s > \frac{\rho}{3}. \tag{4.2.10}$$

II. $P^{(s)}, Q^{(s)} = X^{(s)} \in F^{(s)}, p^{(s)} = P_0^{(s)}, P_1^{(s)}$ のとき, $p, q = B_1 B_2 \ldots B_s(P^{(s)}, Q^{(s)})$ に対して次が成り立つ.

$$H(p,q) = H^{(s)}(P^{(s)}, Q^{(s)}) = H_0(P^{(s)}) + H_1^{(s)}(P^{(s)}) + H_2^{(s)}(P^{(s)}, Q^{(s)}), \tag{4.2.11}$$

$$|H_2^{(s)}(P^{(s)}, Q^{(s)})| < \mu M_{s+1}, \quad \left|\frac{\partial H_2^{(s)}}{\partial X^{(s)}}\right| < \delta_s \beta_{s+1}, \quad \left|\frac{\partial^2 H_2^{(s)}}{\partial {X^{(s)}}^2}\right| < \delta_s, \tag{4.2.12}$$

III. 写像 $A^{(s)}$

$$P^{(s)} \to A^{(s)} P^{(s)} = \frac{\partial}{\partial P_0^{(s)}}\left[H_0(P_0^{(s)}) + H_1^{(s)}(P^{(s)})\right],\ \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial P_1^{(s)}} H_1^{(s)}(P^{(s)}) \tag{4.2.13}$$

は領域 $G^{(s)}$ の微分同相写像であって, 次を満たす.

$$\underline{\theta}|dP^{(s)}| < |dA^{(s)}| < \overline{\Theta}|dP^{(s)}|, \quad |A^{(s)} - A^{(s-1)}| < \beta_s \delta_s, \quad \underline{\theta} = \frac{1}{2}\theta, \quad \overline{\Theta} = 2\Theta. \tag{4.2.14}$$

IV. 各 $s \geq 1$ に対して, 次が成り立つ.

$$\mathrm{mes}(G - G^{(s)}) \leq \frac{\kappa}{2}\Theta^{-n}\mathrm{mes}\ \Xi^*. \tag{4.2.15}$$

この帰納定理は帰納法により 8 節で証明する.
証明の各段階は次節の補題に基づく.

§3. 帰納補題

関数 $H(p,q)$, 領域 G, Ξ および正数 $\Theta, \theta, \rho; \beta, \gamma, \delta, M; K, \mu$ が以下の性質を持つとする[18].

1) 領域 $F: p \in G, |\mathrm{Im}\ q| \le \rho$ において, 関数

$$H(p,q) = H_0(p_0) + H_1(p_1) + H_2(p,q) \tag{4.3.1}$$

は解析的である (ただし, $p = p_0, p_1$ であり; $q = q_0, q_1$ は角変数, $\dim p_0 = n_0$, $\dim p_1 = n_1$; $n_0 + n_1 = n$).

2) G から Ξ の上への写像 A

$$p \to Ap = \frac{\partial}{\partial p_0}(H_0 + H_1), \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial H_1}{\partial p_1}, \tag{4.3.2}$$

は微分同相であり, 次を満たす.

$$\theta|dp| \le |dA| \le \Theta|dp|, \quad \left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_0^2}\right| \le \Theta, \quad \left|\frac{\partial^2 H_1}{\partial p^2}\right| \le \mu\Theta, \quad (0 < \theta \le 1 \le \Theta < \infty). \tag{4.3.3}$$

3) F において

$$|H_2(p,q)| \le \mu M, \quad M \le \delta^{2n+3} K \beta^2 \tag{4.3.4}$$

4) 以下の不等式が満たされる.

$$15\delta \le 3\gamma \le \rho \le 1, \quad 3\beta \le 2\delta, \quad \mu \le K \le 1, \tag{4.3.5}$$

$$\delta \le \delta^{(1)}(n, \Theta, \theta) = \min\{\delta^{(0)}(n, \Theta); \frac{\theta}{2n}\}. \tag{4.3.6}$$

ただし, $\delta^{(0)}(n,\Theta)$ は基本補題で定義される (4 節).

仮定 1)-4) の下に, 領域 F'(ここで $X = (P,Q) \in F' : P \in G' \subset G, |\mathrm{Im}\ Q| \le \rho' < \rho - 3\gamma$), および F' を F の中に写す正準微分同相 $B : P,Q \to p,q$ が存在して次を満たす.

I. $|B - E| < \beta$, $|dB| < 2|dX|$, $F' \subset F - 2\beta$.

II. $(p,q) = x = BX; X = (P, Q \in F'); P = (P_0, P_1)$ に対して次が成り立つ.

$$H(p,q) = H_0(P_0) + H_1'(P) + H_2'(P,Q), \tag{4.3.7}$$

$$|H_2'(P,Q)| < \mu M', \quad \left|\frac{\partial H_2'}{\partial X}\right| < \mu\frac{M'}{\beta}, \quad \left|\frac{\partial^2 H_2'}{\partial X^2}\right| < 2\mu\frac{M'}{\beta^2}, \tag{4.3.8}$$

$$M' = \frac{M^2}{K\beta^2}\delta^{-\nu}, \quad \nu = 4n + 7 \tag{4.3.9}$$

[18] (註) 以下で H_1 が p_1 だけの関数となっている. すると, (4.3.2) の最初の式で p_0 による偏微分のとき H_1 が入っているのは無意味. また (4.3.3) で p による偏微分は p_1 による偏微分と書くべき. もしかして H_1 は p の関数ではないのか? それなら (4.3.2) も (4.3.3) も意味がある.

III. 写像 A'

$$P \to A'P = \frac{\partial}{\partial P_0}(H_0 + H_1'), \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial H_1'}{\partial P_1} \tag{4.3.10}$$

は G' から Ξ' の上への微分同相写像であり, 次を満たす.

$$\theta'|dp| < |dA'| < \Theta'|dp|, \quad \left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial P_0^2}\right| < \Theta, \quad \left|\frac{\partial^2 H_1'}{\partial P_1^2}\right| < \mu\Theta', \tag{4.3.11}$$

ただし $\theta' = (1-\delta)\theta, \Theta' = (1+\delta)\Theta$ である.

ここで, 5 章 2 節の記法によれば,

$$\Xi' = \Xi_{\mu KN} - d, \quad d = (5+7\Theta)\beta, \quad N = \frac{1}{\gamma}\ln\frac{1}{2M} \tag{4.3.12}$$

IV. mes $(G - G') < \theta^{-n}$ mes $(\Xi - \overline{\Xi'})$ である. ただし, $\overline{\Xi'} = \Xi' - \beta = \Xi_{\mu KN} - \overline{d}$ および $\overline{d} = (6+7\Theta)\beta$ である.

帰納補題は 7 節で証明する. 証明の鍵は次節の補題を使うところである.

§4. 基本補題

関数 $H(p,q)$, 領域 G, Ξ, および正数 $\theta, \Theta, \rho; \beta, \gamma, \delta; \mu, M, K$ が以下の性質を持つとする.

1) 領域 $F : p \in G$, $|\mathrm{Im}\, q| \le \rho$ ($p = p_0, p_1$ であり; $q = q_0, q_1$ は角変数, $\dim p_0 = n_0$, $\dim p_1 = n_1$, $n_0 + n_1 = n$) において, 関数

$$H(p,q) = H_0(p_0) + H_1(p) + \widetilde{H}_2(p,q) \quad \left(\oint \widetilde{H}_2 dq_0 \equiv 0\right) \tag{4.4.1}$$

は解析的である.

2) G から Ξ の上への写像 A

$$p \to Ap = \frac{\partial}{\partial p_0}(H_0 + H_1), \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial H_1}{\partial p_1}, \tag{4.4.2}$$

は微分同相である. ただし,

$$\theta|dp| \le |dA| \le \Theta|dp|, \quad \left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_0^2}\right| \le \Theta, \quad \left|\frac{\partial^2 H_1}{\partial p^2}\right| \le \mu\Theta, \quad (0 < \theta \le 1 \le \Theta < \infty). \tag{4.4.3}$$

3) F において

$$|\widetilde{H}_2(p,q)| \le \mu M, \quad M \le \delta^\nu K\beta^2, \quad (\nu = 2n+3). \tag{4.4.4}$$

4) 以下の不等式が満たされる.

$$10\delta \le 2\gamma \le \rho \le 1, \quad 3\beta \le 2\delta, \quad \mu \le K \le 1, \tag{4.4.5}$$

$$\delta \le \delta^{(0)}(n,\Theta) = 4^{-2n} n^{-1}(n+1)^{-(2n+2)} e^{2n+2}\Theta^{-1}. \tag{4.4.6}$$

$N = \dfrac{1}{\gamma}\ln\dfrac{1}{M}$ および $G_{\mu KN} = A^{-1}\Xi_{\mu KN}$ と置く. ただし, $\Xi_{\mu KN}$ は $\xi \in \Xi, \xi = \xi_0, \xi_1$ のうち, すべての整数ベクトル $k, 0 < |k| < N$ に対して

$$|(\xi_0, k_0) + \mu(\xi_1, k_1)| \geq \begin{cases} K|k|^{-(n+1)}, & \text{if} \quad k_0 \neq 0 \\ \mu K|k|^{-(n+1)} & \text{if} \quad k \neq 0 \end{cases} \tag{4.4.7}$$

を満たすものから成る.

仮定 1)-4) の下で, 領域 $P \in G_{\mu KN} - 2\beta$, $|\mathrm{Im}\ Q| \leq \rho - 2\gamma$ から F の中への微分同相写像 $B : P, Q \to p, q$ が存在して以下を満たす.

I. $|B - E| < \beta$, $|dB| < 2|dX|$ $(X = P, Q)$.

II. $(p, q) = x = BX$ および $P \in G_{\mu KN} - 2\beta$, $|\mathrm{Im}\ Q| \leq \rho - 2\gamma$ に対して

$$H(p, q) = H_0(P_0) + H_1(P) + H_2'(P, Q), \tag{4.4.8}$$

が成り立つ. ただし

$$|H_2'| < \mu M', \quad M' = \frac{M^2}{K\beta}\delta^{-2\nu} \quad (2\nu = 4n + 6). \tag{4.4.9}$$

基本定理の証明の第一段 (10 節参照) は以下の補題を使う.

§5. 短周期変数の平均化に関する補題

関数 $H(p, q)$, 領域 G_0, F_1, Ω, および正数 $\theta, \Theta, \rho; \beta, \gamma, \delta; K, M, \overline{M}$ が以下の性質を持つとする.

1) 領域 $F : p_0 \in G_0$, $|\mathrm{Im}\ q_0| \leq \rho$, $x_1 \in F_1$ $(p = p_0, p_1; q = q_0, q_1; x_1 = p_1, q_1$; 変数 q_0 は角変数[19]; $\dim p_0 = n_0$, $\dim p_1 = n_1$, $n_0 + n_1 = n)$ において, 関数

$$H(p, q) = H_0(p_0) + \overline{H}_1(p_0, p_1, q_1) + \widetilde{H}(p_0, p_1; q_0, q_1) \quad (\oint \widetilde{H}_1 dq_0 \equiv 0) \tag{4.5.1}$$

は解析的である.

2) G_0 から Ω の上への写像 A_0

$$p_0 \to A_0 p_0 = \omega_0 = \frac{\partial H_0}{\partial p_0} \tag{4.5.2}$$

は微分同相である. ただし,

$$\theta|dp_0| \leq |dA_0| \leq \Theta|dp_0|, \quad \left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_0^2}\right| \leq \Theta \quad (0 < \theta \leq 1 \leq \Theta < \infty). \tag{4.5.3}$$

3) F において,

$$|\overline{H}_1| \leq M, \quad |\widetilde{H}_1| \leq M, \quad M \leq \delta^\nu \beta^2 \quad (\nu = 2n + 3). \tag{4.5.4}$$

[19] この補題においては, 他のすべての場合と違って, q_1 が角変数であることは保証されていない.

4) 以下の不等式が成り立つ.

$$10\delta \le 2\gamma \le \rho \le 1, \quad 3\beta \le \delta, \quad \delta \le K, \quad M \le \bar{M}, \tag{4.5.5}$$

$$\delta \le \delta^{(0)}(n, \Theta) = 4^{-2n} n^{-2} (n+1)^{-(2n+2)} e^{2n+2} \Theta^{-1}. \tag{4.5.6}$$

$N = \dfrac{1}{\gamma} \ln \dfrac{1}{M}$ と置き, $(G_0)_{KN} = A_0^{-1} \Omega_{KN}$ なる記法を導入する. ただし, Ω_{KN} は, すべての整数ベクトル $k_0, 0 < |k_0| < N$ に対して

$$|(\omega_0, k_0)| \ge K |k_0|^{-(n+1)} \tag{4.5.7}$$

が成り立つような $\omega_0 \in \Omega$ からなっている.

仮定 1)-4) の下に, 領域 F' :

$$P_0 \in G_0', \quad |\mathrm{Im}\ Q_0| \le \rho - 2\gamma, \quad X_1 \in F_1 - 3\beta \quad (X_1 = P_1, Q_1)$$

から F の中への微分同相写像 $B : P, Q \to p, q$ があって以下を満たす.

I. $|B - E| < \dfrac{M}{K\beta\delta^{2n+2}}, \ \ |dB| < 2|dX| \quad (X = P, Q)$

II. $p, q = x = BX, X \in F'$ に対して

$$H(p, q) = H_0(P_0) + \overline{H}_1(P_0, P_1, Q_1) + H_2'(P_0, P_1, Q_0, Q_1), \tag{4.5.8}$$

ただし

$$|H_2'| < M', \quad M' = \frac{M\overline{M}}{\beta^2} \delta^{-2\nu}, \quad 2\nu = 4n + 6. \tag{4.5.9}$$

III. $G_0' = (G_0)_{KN} - 2\beta = A_0^{-1} \Omega_{KN} - 2\beta$.

この補題の証明は基本補題の証明と同様である (6, 8 節参照).

§6. 基本補題の証明

1. 構成. 母関数を $Pq + S(P, q)$, $S = \sum_{|k|>0} S_k(P) e^{i(k,q)}$ とする正準変換

$$p = P + \frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q = q + \frac{\partial S}{\partial P} \tag{4.6.1}$$

により, ハミルトン関数 $H(p, q)$ は次の形になる.

$$H(p, q) = H_0(P_0) + H_1(P) + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5(P, Q), \tag{4.6.2}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \left[\left(\omega(P)\frac{\partial S}{\partial q}\right) + [\widetilde{H}_2(P,q)]_N\right],\\
\Sigma_2 &= \left[H_0(P_0+\Delta P_0) - H_0(P_0) - \left(\frac{\partial H_0}{\partial P_0}\right)\Delta P_0\right],\\
\Sigma_3 &= \left[H_1(P+\Delta P) - H_1(P) - \left(\frac{\partial H_1}{\partial P}\Delta P\right)\right],\\
\Sigma_4 &= \left[\widetilde{H}_2(P+\Delta P,q) - \widetilde{H}_2(P,q)\right],\\
\Sigma_5 &= \left[\widetilde{H}_2(P,q) - [\widetilde{H_2}(P,q)]_N\right],
\end{aligned}$$

および

$$\widetilde{H}_2(P,q) = \textstyle\sum_{|k|>0} h_k(P)e^{i(k,q)}, \quad [\widetilde{H}_2(P,q)]_N = \textstyle\sum_{0<|k|<N} h_k(P)e^{i(k,q)}.$$

$$\omega(P) = \frac{\partial}{\partial P}[H_0(P_0) + H_1(P)],$$

$$\Delta P = p - P = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad \Delta P_0 = p_0 - P_0 = \frac{\partial S}{\partial q_0},$$

(4.6.2) 式で, 微分をすべて行ったあと, 変数 p, q は (4.6.1) を使って P, Q による表式で表される.

S は $\Sigma_1 \equiv 0$ となるように定義する. そのために

$$S_k(P) = \frac{ih_k(P)}{(k,\omega(P))} \quad (0<|k|<N), \quad S_k = 0 \quad (|k| \geq N) \tag{4.6.3}$$

と置く.

2. S **の見積もり.** $p \in G_{\mu KN}$ に対して

$$|(\omega(P),k)| = |(\xi_0,k_0) + \mu(\xi_1,k_1)| \geq \begin{cases} K|k|^{-(n+1)}, & \text{if} \quad k_0 \neq 0, \\ \mu K|k|^{-(n+1)}, & \text{if} \quad k \neq 0, \end{cases} \tag{4.6.4}$$

を得る. ここで $\xi = \xi_0, \xi_1$ は, 周波数ベクトル $\omega = \omega_0, \omega_1$ と $\omega_0 = \xi_0, \omega_1 = \mu\xi_1$ と関係するように導入された周波数ベクトルである.

V 章 3 節 2 項の 1) に応じ, 条件 3) から $|h_k| \leq \mu M e^{-|k|\rho}$ が出る. (4.6.3) と (4.6.4) の比較より, (5.3.10) を考慮すると,

$$\left.\begin{aligned}
|S_k| &< \frac{\mu M}{\mu K}\frac{L_1}{\delta^{\nu_1}}e^{-|k|(\rho-\delta)} \quad (k \neq 0),\\
|S_k| &< \frac{\mu M}{K}\frac{L_1}{\delta^{\nu_1}}e^{-k(\rho-\delta)} \quad (k_0 \neq 0),
\end{aligned}\right\} \tag{4.6.5}$$

が成り立つことがわかる. ここで $L_1 = \left(\dfrac{\nu_1}{e}\right)^{\nu_1}$ および $\nu_1 = n+1$ である.

したがって, 5 章 3 節 2 項の 2) に応じて, $|\mathrm{Im}\, q| \leq \rho - 2\delta$ のとき

$$|S| < \frac{M}{K}\frac{L_2}{\delta^{\nu_2}} \quad (L_2 = 4^n L_1, \nu_2 = 2n+1), \tag{4.6.6}$$

を得る.

3. B **の見積もり.** 条件 3) に応じて, (4.6.6) より,

$$|S| < \frac{\beta^2}{16n} \quad \text{for} \quad \delta \le L_3^{-1}, \quad L_3 = 16nL_2 \tag{4.6.7}$$

がしたがう.

したがって, 正準変換に関するV章, 4節3項の補題が適用できる. この補題によれば, 式 (4.6.1) は正準微分同相写像 $B: P, Q \to p, q$ を定義する. この写像は, 領域 $P \in G_{\mu KN} - 2\beta$, $|\mathrm{Im}\ Q| \le \rho - 5\delta(\le \rho - 2\delta - 3\beta$. なぜなら, (4.4.5) より $3\beta \le 2\delta$ であるから) を F 内へと写す. ただし, (4.6.7) および (4.6.5) からすると,

$$\left.\begin{array}{ll} |B - E| < \beta, \quad |dB| < 2|dX|, & |\Delta P| < \dfrac{M}{K}\dfrac{L_2}{\delta^{\nu_2+1}}, \\ \qquad |\Delta P_0| < \mu\dfrac{M}{K}\dfrac{L_2}{\delta^{\nu_2+1}} & \end{array}\right\} \tag{4.6.8}$$

4. Σ_2, Σ_3 **の見積もり.** テイラーの公式 (5.3.4) [20] をあてはめよう. $P \in G_{\mu KN} - 2\beta$, $|\mathrm{Im}\ Q| \le \rho - 5\delta$ とすると, $|\lambda| \le 1$ に対して, (4.6.8) より, $P + \lambda\Delta P \in G_{\mu KN} - \beta$ が成り立つ. だから (4.6.8), 条件 2), および $\delta \le L_4^{-1}\Theta^{-1}$ より,

$$|\Sigma_2| < \mu^2\frac{M^2}{K^2}\frac{\Theta n^2 L_2^2}{2\delta^{2\nu_2+2}} < \mu^2\frac{M^2}{K^2}\frac{1}{\delta^{\nu_3}} \quad (\nu_3 = 2\nu_2 + 3, L_1 = n^2 L_2^2). \tag{4.6.9}$$

がしたがう. 同じ論拠により, 同じ領域で

$$|\Sigma_3| < \frac{M^2}{K^2}\mu\frac{\Theta n^2 L_2^2}{2\delta^{2\nu_2+2}} < \mu\frac{M^2}{K^2}\frac{1}{\delta^{\nu_3}}. \tag{4.6.10}$$

が成り立つ.

5. Σ_4 **の見積もり.** 公式 (5.3.4) を使う. $P \in G_{\mu KN} - 2\beta$, $|\mathrm{Im}\ Q| \le \rho - 5\delta$, $|\lambda| < 1$ に対して, $P + \lambda\Delta P \in G_{\mu KN} - \beta$ が成立ち, またコーシーの公式 (5.3.3) より, $\left|\dfrac{\partial\widetilde{H}}{\partial P}\right| < \dfrac{\mu M}{\beta}$ が成り立つ. したがって, $\delta \le L_3^{-1} < L_2^{-1}n^{-1}$ に対して,

$$|\Sigma_4| < \mu\frac{M^2}{K\beta}\frac{L_2 n}{\delta^{\nu_2+1}} \le \mu\frac{M^2}{K\beta}\frac{1}{\delta^{\nu_4}} \quad (\nu_4 = \nu_2 + 2). \tag{4.6.11}$$

であることがわかる.

6. Σ_5 **の見積もり.** V章3節2項の 3) を応用しよう. $P \in G_{\mu KN} - 2\beta$, $|\mathrm{Im} Q| \le \rho - 5\delta - \gamma$ に対して, (4.6.8) に応じて $P \in G$, $|\mathrm{Im}\ q| \le \rho - \gamma - \delta$ が成り立つ. $N = \dfrac{1}{\gamma}ln\dfrac{1}{M}$, $\delta \le L_5^{-1}$ に対して, (4.4.5) を考慮すると, V章3節2項の 3) より,

$$|\Sigma_5| < \mu\frac{M^2 L_5}{\delta^{n+1}} < \mu\frac{M^2}{\delta^{\nu_5}} \quad \left(\nu_5 = n + 2, L_5 = 2\left(\frac{2n}{e}\right)^n\right). \tag{4.6.12}$$

[20] 原論文には (5.3.14) とあるが, 対応する式番号はばい.

が成り立つ.

7. H' の見積もり. 条件 4) より, $\delta \leq \delta^{(0)}(n,\theta) = L_4^{-1}\Theta^{-1}$ を得る. $L_3 \leq L_4, L_5 \leq L_4$ は容易にわかる. $\Theta > 1$ であるから, $\delta < \delta^{(0)}(n,\Theta)$ に対して, $\delta \leq L_3^{-1}$, $\delta \leq L_5^{-1}$ が成り立つはずであり, 見積り (4.6.9)-(4.6.12) は $P \in G_{\mu KN} - 2\beta$, $|\mathrm{Im}\ Q| \leq \rho - 2\gamma \leq \rho - \gamma - 5\delta$ に対して成り立つ. この領域において (4.6.2) は $H(p,q) = H_0(P_0) + H_1(P) + H_2'(P,Q)$ の形を取る. ここで, 4–6 項および条件 4) を考慮すると,

$$|H_2'(P,Q)| \leq \left(\mu^2\frac{M^2}{K^2} + \mu\frac{M^2}{K^2} + \mu\frac{M^2}{K\beta} + \mu M^2\right)\delta^{-\nu_3} < \mu\frac{M^2}{K\beta}\delta^{-(4n+6)},$$

が成り立つ. これで基本補題が証明された.

8. 平均化補題の証明. 証明は上で述べたものに似ているので, 必要な変更点のみを指摘しよう.

1 項における母関数は $P_0q_0 + P_1q_1 + S$ の形にとる. ただし,

$$S(P_0,P_1,q_0,q_1) = \sum_{k_0\neq 0} S_{k_0}(P_0,P_1,q_1)e^{i(k_0,q_0)}.$$

また, (4.6.3) の代わりに

$$S_{k_0}(P_0,P_1,q_1) = \frac{ih_{k_0}(P_0,P_1,q_1)}{(\omega_0(P_0),k_0)} \quad (0 < |k_0| < N),$$

を得る.

この結果, Σ_3 は

$$\Sigma_3 = \overline{H}_1(p_0,p_1,q_1) - \overline{H}_1(P_0,P_1,Q_1), \tag{4.6.13}$$

の形になる.

$X \in F'$ については, (4.6.8) の代わりに

$$|\Delta P_0| < \frac{ML_2}{K\delta^{\nu_2+1}}, \quad |\Delta Q_0| < \frac{ML_2}{K\beta\delta^{\nu_2}}, \quad |\Delta X_1| < \frac{ML_2}{K\beta\delta^{\nu_2}} \quad (\nu_2 = 2n+1), \tag{4.6.14}$$

を得る. 量 $|\Sigma_3|$ はラグランジュ公式 (5.3.4) から見積もられる.

(4.6.13) および (4.6.14) より, 見積もり

$$|\Sigma_3| < \frac{M^2 2nL_2}{K\beta^2\delta^{\nu_2}} \leq \frac{M^2}{\beta^2\delta^{\nu_4}}, \tag{4.6.15}$$

を得る. さらに, $N = \dfrac{1}{\gamma}\ln\dfrac{1}{M}$ として, Σ_5 の見積もりを

$$|\Sigma_5| \leq \frac{M\overline{M}}{\delta^{\nu_5}} \tag{4.6.16}$$

と得る.

$M \le \overline{M}$ であるから, 見積もり (4.6.15) と (4.6.16) は

$$|H_2'| < \frac{M\overline{M}}{\beta^2}\delta^{-2\nu},$$

に帰着する. これで 5 節の補題が証明された.

§7. 帰納補題の証明

1. $H_2(p,q) = \overline{H}_2(p) + \widetilde{H}_2(p,q)$ と置く. ここで $\oint \widetilde{H}_2(p,q)dq \equiv 0$ である. このとき, $H(p,q) = H_0(p_0) + H_1'(p) + \widetilde{H}_2(p,q)$ である. ただし, $H_1' = H_1(p) + \overline{H}_2(p)$ である. 写像 A' :

$$p \to A'p = \frac{\partial}{\partial p_0}(H_0 + H_1'), \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial H_1'}{\partial p_1} = Ap + \Delta(p); \quad \Delta = \frac{\partial \overline{H}_2}{\partial p_0}, \ \frac{1}{\mu}\frac{\partial \overline{H}_2}{\partial p_1},$$

を考える. 周波数の変分に関する補題 (V 章 4 節 5 項) を適用する. 条件 3), 4) より, $M < \dfrac{\delta\theta}{2n}\beta^2$ が従う. したがって, コーシーの公式 (5.3.3) より, $p \in G - \beta$ に対して $|\Delta| < \dfrac{M}{\beta} < \delta\beta$, $|d\Delta| < \delta\theta|dp|$ が成り立つ. V 章 4 節 5 項の補題において $\Omega_0 = \Xi_{\mu KN}$, $b = 3\mu$ と置くと, A' が領域 $G' = A'^{-1}$ を微分同相的に $\Xi' = \Xi_{\mu KN} - d$, $d = (5 + 7\Theta)\beta$ の上に写すこと, また $G' + 3\beta$ を $\Xi_{\mu KN}$ の中に写すことがわかる. これにより, 帰納補題の結論 III と IV が満たされる.

2. 基本補題を領域 F 内の関数

$$H(p,q) = H_0(p_0) + H_1'(p) + \widetilde{H}_2(p,q)$$

に適用する. 1 項に応じて, $|\widetilde{H}_2| < 2\mu M$, $\theta'|dp| < |dA'| < \Theta'|dp|$ であり, また数 $\theta', \Theta', \rho, \beta, \gamma, \delta, \mu, 2M, K$ は基本補題の条件を満たす (帰納補題の条件 1)-4) を考慮せよ) から, 基本定理が適用可能である. これにより, 領域 $P \in G_{\mu KN} - 2\beta$, $|\mathrm{Im}\ Q| \le \rho - 2\gamma$ 内に微分同相写像 $B : P, Q \to p, q$ と不等式 $|H_2'(P,Q)| < \mu M'$ が用意される. ゆえにコーシーの公式より, $P \in G_{\mu KN} - 3\beta$, $|\mathrm{Im}\ Q| \le \rho - 3\gamma$ に対して帰納補題の結論 II の見積もりを得る.

3. 1 項に応じて, $P, Q \in F'$; $P \in G'$, $|\mathrm{Im}\ Q| \le \rho - 3\gamma$ であることより, $P \in G_{\mu KN} - 3\beta$ が出る. ところがそのとき, 2 項に応じて帰納補題の結論 I と II が成り立つから, これによって帰納補題は完全に証明された.

§8. 帰納定理の証明

1. 帰納定理の条件の下で, 帰納補題が適用できること を示そう. そのためにまず, 2 節および 3 節の条件 1), 2) が共通であることに注意する. $\delta \le \delta^{(4)}$ より, $\delta \le \delta^{(1)}(n, \Theta, \theta)$ が 3 節の 4) からしたがう. $\delta \le \delta^{(2)}$ より, $\gamma \le 0.1\rho$; $\gamma \le 2^{-14}$ が出る. また, $\delta \le \delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$ に対して

$$15\delta < 15\delta^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{4n}} \le 3\delta^{\frac{1}{4n}} = 3\gamma, \quad 3\beta = 3\delta^3\varepsilon < 2\delta^2\varepsilon < 2\delta$$

が成り立つ。 だから, 3 節の 4) は 2 節の 4) および 5) よりしたがう. 最後に, 3 節の条件 3) において, $M < \delta^{2n+3}K\beta^2$ は不等式 $-3T-1 > 3T+2n+10$(実は $T = 16n+24$) からしたがう. こうして帰納補題の条件はすべて満たされる.

2. $\delta \le \delta^{(2)}$ であることより, (5.3.2) に応じて, $s \ge 1$ に対して

$$\delta_s + \delta_{s+1} + \ldots < 2\delta_s, \quad 3(\gamma_s + \gamma_{s+1} + \ldots) < 6\gamma_s \le 6\gamma_1 < 2\frac{\rho}{3} \tag{4.8.1}$$

が成り立つ.

(4.8.1) より, $s \ge 1$ に対して

$$\theta_s = \theta_{s-1}(1-\delta_s), \quad \Theta_s = \Theta_{s-1}(1+\delta_s), \quad \rho_s = \rho_{s-1} - 3\gamma_s,$$
$$(\theta_0 = \theta, \Theta_0 = \Theta, \rho_0 = \rho)$$

と置けば, 次の不等式が満たされることがわかる.

$$\theta_s > \underline{\theta} = \frac{\theta}{2}, \quad \Theta_s < \overline{\Theta} = 2\Theta, \quad \rho_s > \rho_\infty = \frac{1}{3}\rho. \tag{4.8.2}$$

簡単に確認できるように, 任意の $s \ge 1$ に対して, 数 $\beta_s, \gamma_s, \delta_s, \varepsilon_s, M_s; K, \mu$ は帰納補題の条件 3), 4) の不等式を定数 $\theta_{s-1}, \Theta_{s-1}, \rho_{s-1}$ で満たす. $s = 1$ のとき, これは段落 4 で確かめる.

3. $\delta \le \delta^{(3)}$ であるから, 不等式 (5.3.10) を考慮すると, $N_s = \dfrac{1}{\gamma_s}\ln\dfrac{1}{2M_s} < \dfrac{1}{\gamma_s}\ln\dfrac{1}{\delta_s^{4T}}$ に対して不等式

$$\delta_s N_s^n = \delta_s\left(\delta_s^{-\frac{1}{4n}}\ln\delta_s^{-4T}\right)^n \le \delta_s\left(\frac{16nT}{e}\delta_s^{-\frac{1}{2n}}\right)^n \le \delta_s^{\frac{1}{2}}\left(\frac{16nT}{e}\right)^n < 1 \tag{4.8.3}$$

が成り立つ. さらに, $\sigma_1 = \sum_{1 \le m < N_1} m^{-2}$ および $s > 1$ に対して $\sigma_s = \sum_{N_{s-1} \le m < N_s} m^{-2}$ と置く. $\sum_{s=1}^{\infty}\sigma_s < 2$ であるから, $\delta < \delta^{(3)}$, (4.8.1) および (4.8.3) より, 次の不等式を導くことができる.

$$\sum_{s=1}^{\infty}[K\sigma_s + (6+7\Theta_s)\beta_s N_s^n] \le \sum_{s=1}^{\infty}[\delta_1\sigma_s + \delta_s]\varepsilon < 4\delta_1\varepsilon < \frac{\kappa\varepsilon}{2\overline{D}}, \tag{4.8.4}$$

ただし

$$\overline{D} = \left(\frac{2\Theta}{\theta}\right)^n LD, \quad L = n2^{n+2}.$$

4. 項

$$A^{(s-1)}; \quad F^{(s-1)}, G^{(s-1)}; \quad H^{(s-1)}(P^{(s-1)}, Q^{(s-1)}); \quad \Xi^{(s-1)} \quad (s \ge 1) \tag*{$(4.8.5)_{s-1}$}$$

が帰納補題の条件を満たすとする. ただし, その際, 定数

$$\theta_{s-1}, \Theta_{s-1}; \quad \rho_{s-1}; \quad \beta_s, \gamma_s, \delta_s, M_s; \quad K, \mu, \tag*{$(4.8.6)_{s-1}$}$$

は上で定義されたものとする．このとき帰納補題は

$$A', B;\quad F', G';\quad H_1'(P), H_2'(P, Q);\quad \Xi', \overline{\Xi}';\quad \theta', \Theta', \rho'$$

を定義する．これらを

$$A^{(s)}, B_s;\quad F^{(s)}, G^{(s)};\quad H_1^{(s)}(P^{(s)}), H_2^{(s)}(P^{(s)}, Q^{(s)});\quad \Xi^{(s)}, \overline{\Xi}^{(s)};\quad \theta_s, \Theta_s, \rho_s. \tag{4.8.7$_s$}$$

と書くことにする．帰納補題の結論 II より, $T = 16(n+4)$ であることより, $F^{(s)}$ 内で

$$|H_2^{(s)}| \le \mu \frac{M_s^2}{K\beta_s^2}\delta_s^{-\nu} < \mu\delta^{7T-3T-4n-16} < \mu\delta_s^{1\frac{1}{14}(3\frac{1}{2}T-1)} = \mu M_{s+1} \tag{4.8.8}$$

を得る．帰納補題の結論 I, II, III より, 2 項と (4.8.8) に注意すると, $(4.8.5)_{s-1}$ の項が帰納補題の条件を, 定数 $(4.8.6)_{s-1}$ で満たすならば, $(4.8.5)_s$ の項は帰納補題の条件を定数 $(4.8.6)_s$ で満たすという結論に達する．

5.　ところが 1 項に応じて, $(4.8.5)_0$ の項 $(A^{(0)} = A, F^{(0)} = F, G^{(0)} = G, H^{(0)} = H, P^{(0)} = p, Q^{(0)} = q, \Xi^{(0)} = \Xi)$ は帰納補題の条件を定数 $(4.8.6)_0$ で満たす．ゆえに, 帰納補題は無限回適用できる．その結果, $(4.8.7)_s$ の項を $s = 1, 2, \ldots$ に対して得る．

(4.8.2) および (4.8.8) からすると, 帰納定理の結論 I, II, III は帰納補題の結論 I, II, III からしたがう．$F^{(s)}$ が空でないことをまだ証明していない．これは帰納定理の結論 IV からしたがう．結論 IV をこれから証明しよう．

6. 帰納補題の結論 III および IV より,

$$\text{mes }(G^{(s-1)} \backslash G^{(s)}) \le \underline{\theta}^{-n}\text{mes }(\Xi^{(s-1)} \backslash \overline{\Xi}^{(s)}), \tag{4.8.9}$$

であることがわかる．ここで, $\overline{\Xi}^{(s)} = \xi^{(s-1)}_{\mu K N_s} - \overline{d}_s$, $\overline{d}_s = (6+7\Theta_s)\beta_s$ であり, $\Xi^{(s-1)}$ は $\Xi^{(0)}$ から公式

$$\Xi^{(k)} = \Xi^{(k-1)}_{\mu K N_k} - d_k,\quad d_k = (5+7\Theta_k)\beta_k,\quad N_k = \frac{1}{\gamma_k}\ln\frac{1}{2M_k}\quad (k = 1, \ldots, s-1)$$

によって得られる．ここで $d_k > 0, N_1 < N_2 < \ldots$ であり, 領域 $\Xi = \Xi^{(0)}$ は帰納定理の条件 6) に応じて

$$\Xi^{(0)} = \Xi^*_{K_0 N_0 d_0},\quad N_0 < N_1, K_0 > K, d_0 > 0,$$

なる形をしている．ただし, Ξ^* は $\dfrac{D}{\varepsilon}$ 型の領域である．

V 章 2 節 5 項の算術補題より,

$$\text{mes }(\Xi^{(s-1)} \backslash \Xi^{(s)}) \le \frac{DL}{\varepsilon}[K\sigma_s + (6+7\Theta_s)\beta_s N_s^n]\text{mes }\Xi^*, \tag{4.8.10}$$

であることがわかる. (4.8.9), (4.8.10) および (4.8.4) より,

$$
\begin{aligned}
&\text{mes } (G\backslash G^{(s)}) = \sum_{k=1}^{s} \text{mes } (G^{(k-1)} - G^{(k)}) \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{s} [K\sigma_k + (6 + 7\Theta_k)\beta_k N_k^n] \frac{DL}{\varepsilon \underline{\theta}^n} \text{mes } \Xi^* \leq \frac{\kappa\varepsilon}{2} \frac{DL\underline{\theta}^n}{DL\Theta^n \varepsilon \underline{\theta}^n} \text{mes } \Xi^* \\
&= \frac{\kappa}{2} \Theta^{-n} \text{mes } \Xi^*
\end{aligned}
\tag{4.8.11}
$$

が出る. だから, 帰納定理の結論 IV が成り立ち, 定理は完全に証明された.

§9. 微分同相写像の非退化に関する補題

基本定理の証明のために, ある種の写像の非退化を表現する 1 節の条件 4) をもっと精密にしよう.

1. 補題. 基本定理の条件において, 任意の $\kappa > 0$ に対して, $\kappa, G_0, \rho, R, H_0$ および $\overline{\overline{H}}_1$ のみに依存する正数 $\theta, \Theta, D, m, r, \overline{\mu}$ が存在し, 領域 G_0 は $m+1$ 個の部分に分かれる. すなわち,

$$G_0 = G_{01} \cup G_{02} \cup \ldots \cup G_{0m} \cup \overline{G}_0,$$

ただし,

$$\text{mes } \overline{G}_0 \leq \frac{\kappa}{2} \text{mes } G_0. \tag{4.9.1}$$

また, 任意の $0 < \mu < \overline{\mu}$ に対して, 領域 G_{0i} の各々は以下の 3 つの性質を持つ.

1) 写像 $A_0 : p_0 \to Ap_0 = \omega_0 = \dfrac{\partial H_0}{\partial p_0}$ は G_{0i} から D 型領域 Ω_i(V 章 1 節の記法) の上への微分同相写像であり, G_{0i} の各点において

$$\theta |dp_0| \leq |dA_0| \leq \Theta |dp_0|, \quad \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_0^2} \right| \leq \Theta, \tag{4.9.2}$$

を満たす.

2) 写像 $A : p \to Ap = \xi$ を考える. ただし,

$$p = p_0, \tau; \quad \xi = \xi_0, \xi_1; \quad \xi_0 = \frac{\partial}{\partial p_0}(H_0 + \mu \overline{\overline{H}}_1), \quad \xi_1 = \frac{\partial \overline{\overline{H}}_1}{\partial \tau}.$$

写像 A は領域 $G_i(r)(p_0 \in G_{0i},\ |\tau| \leq r)$ から領域 $\Xi_i(r)$ の上への微分同相写像であり, $G_i(r)$ の各点において

$$\theta |dp| \leq |dA| \leq \Theta |dp|; \quad \left| \frac{\partial \overline{\overline{H}}_1}{\partial p} \right|, \left| \frac{\partial^2 \overline{\overline{H}}_1}{\partial p^2} \right| \leq \Theta, \tag{4.9.3}$$

を満たす.

3) 点 $p = p_0, \tau$ の領域

$$p_0 \in G_{0i}, \quad \left| \tau_j - \frac{\varepsilon}{2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

を $G_i^*(\varepsilon)$ と記す.

$\xi_0 \in \Omega_i - d$ なる点 $Ap, p \in G_i^*(\varepsilon)$ の集合を $\Xi_i^*(\varepsilon, d)$ と記す.

性質 3) は, 任意の $0 < \varepsilon < r,\ 0 < d < r$ に対して, 領域 $\Xi_i^*(\varepsilon, d)$ が $\dfrac{D}{\varepsilon}$ 型であることを言っている (V 章 1 節 3 項参照).

2. 補題の証明. $\overline{G}_0$ としては, 行列式 (4.1.9), (4.1.10) がゼロとなる解析多様体の十分小さな近傍を取る必要がある. このとき, $\overline{G}_0$ の外では, 不等式

$$\theta^* E < \left\|\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_0^2}\right\| < \Theta^* E, \quad \theta^* E < ||\lambda_{ij}|| < \Theta^* E, \quad \left|\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j}\right| \leq \Theta^*$$

が, 十分小さな θ^* および大きな Θ^* に対して成り立つ. これらの不等式より, 変形に関する補題 (V 章 4 節 6 項) の助けを借りて容易に示せるように, ある $\theta, \Theta, 0 < \theta \leq 1 \leq \Theta < \infty$ および十分小さな $r, \overline{\mu}$ に対して不等式 (4.9.2) および (4.9.3) が導ける. このとき, $r, \overline{\mu}$ および G_{0i} は A_0 と A が微分同相写像になるように選ばれる. 最後に, 十分小さな $r, \overline{\mu}$ および十分大きな D に対して, 条件 3) も満たされる (V 章 1 節 3 項の III に応じて). D をこのように選んで補題の証明が完了する.

3. 注意. 各領域 G_{0i} に関してそれぞれ別々に基本定理が証明されたとする. つまり,

$$\varepsilon_{0i} = \varepsilon_0(\kappa;\ H_0, \overline{\overline{H}}_1;\ G_{0i}, R_0, C, \rho).$$

が見つかったとする.

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\kappa;\ H_0, \overline{\overline{H}}_1;\ G_0, R_0, C, \rho) = \min_{1 \leq i \leq m} \varepsilon_0\left(\frac{\kappa}{2m};\ H_0, \overline{\overline{H}}_1;\ G_{0i}, R_0, C, \rho\right)$$

と置く. (4.9.1) からすると, この値 ε_0 は基本定理の要請をすべて満足する.

上の注意を心に留めて, 以後は領域

$$p_0 \in G_0; \quad p \in G(r) \quad (\text{i.e. } p_0 \in G_0,\ |\tau| \leq r); \quad p \in G^*(\varepsilon)$$
$$\left(\text{i.e. } p_0 \in G_0, \left|\tau - \frac{\varepsilon}{2}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right)\ (0 < \varepsilon < r)$$

において 1 項の条件 1), 2), 3) が満たされると仮定する.

§10. 高速変数に関する平均

基本定理の証明は 5 節の補題を関数

$$H_0(p_0) + \mu \overline{H}_1(p_0, p_1, q_1) + \mu \tilde{H}_1(p_0, q_0, p_1, q_1) \tag{4.10.1}$$

に適用することから始まる. 証明のこの第一段階を以下で遂行する.

1. 仮定. 関数 $H(p, q)$, 領域 F, G_0 および正数 $\rho,\ R = \sqrt{r}, C;\ \theta, \Theta, D, m, r;\ \kappa$ が基本定理の条件 1)-4) を満たし, 9 節 1 項の条件 1)-3) を満たすことを仮定する. 加えて,

$$\mu \leq \varepsilon^4, \quad \varepsilon = \delta^T, \quad T > n + 2, \quad \rho \leq 1, \quad D > 1 \tag{4.10.2}$$

を仮定し, 量

$$\beta=\delta^3,\quad \gamma=2\delta^{\frac{1}{4n}},\quad K_0=\delta,\quad M=\mu\delta^{-1},\quad \overline{M}=\varepsilon^4\delta^{-1} \tag{4.10.3}$$

を導入する.

最後に δ が十分小さいことを仮定する. すなわち,

$$\delta\le\delta^{(5)}(n,\theta,\Theta,C,T,R,\rho,\kappa,D). \tag{4.10.4}$$

ただし,

$$\delta^{(5)}=\min\{\delta^{(0)}(n,\Theta);\ \delta^{(6)}(n,\rho,R,C);\ \delta^{(7)}(n,\theta,\Theta,T,\kappa,D)\}.$$

ここで $\delta^{(0)}$ は 5 節で定義されたものであり, $\delta^{(6)}=\min\left\{0.04;\rho^n8^{-4n};\dfrac{R}{2};\dfrac{1}{C}\right\}$ であり, また

$$\delta^{(7)}=\min\{\frac{1}{4\Theta},\left(\frac{e}{16nT}\right)^{2n},\frac{\kappa\theta^n}{6\Theta^nDn2^{2n+2}}\}$$

である.

2. 主張. 1 項の仮定の下で, P,Q 空間の領域 F'

$$P_0\in G_0',\quad |\mathrm{Im}\ Q_0|\le\rho-2\gamma\le\rho'=0.5\rho,\quad |X_1|\le R-3\beta\le R'=0.5R, \tag{4.10.5}$$

において, 以下の条件を満たす正準微分同相写像 $B:P,Q\to p,q$ が存在する.

I. $|B-E|<\mu\delta^{-(2n+7)}$, $|dB|<2|dX|$.

II. $p,q=BX$(ただし, $X\in F'$) に対して, (4.1.1) の関数 $H(p,q)$ は

$$H(p,q)=H_0(P_0)+\mu\overline{H}_1(P_0,P_1,Q_1)+H_2(P_0,P_1,Q_0,Q_1) \tag{4.10.6}$$

の形をしている. ここで H_0 と $\overline{H}_1$ は (4.1.1)-(4.1.3) のものと同じであり, また

$$|H_2|<\mu\varepsilon^4\delta^{-(4n+15)} \tag{4.10.7}$$

である.

III. $G_0'=A_0^{-1}\Omega_{K_0N_0}-2\delta^3\ \left(\text{ただし}, N_0=\dfrac{1}{2}\delta^{-\frac{1}{4n}}\ln\dfrac{\delta}{\varepsilon^4}\right).$

IV. G_0'' が P_0 空間の領域であって, $A_0G_0''\supseteq\Omega_{K_0N_0}-4\Theta\delta^3$ であれば, $\mathrm{mes}\ (G_0\backslash G_0'')\le\dfrac{\kappa}{2}\mathrm{mes}\ G_0$ である.

3. 証明. $\delta\le\delta^{(6)}$, (4.10.3) および (4.10.2) より,

$$10\delta\le2\gamma\le\frac{\rho}{2}\le\frac{1}{2},\quad 3\beta\le\delta\le\frac{R}{2},\quad \delta\le K,\quad \mu C\le M\le\overline{M}\le\delta^{2n+3}\beta^2 \tag{4.10.8}$$

がしたがう.

(4.1.7), (4.10.8), および (4.9.2) および条件 (4.10.4) と (4.10.2) に応じて, 関数 (4.10.1), 領域 F, G_0, $G_1 : |x_1| \le R$ および数 θ, Θ, ρ; β, γ, δ; $K_0, M, \overline{M}$ は 5 節の平均化補題の条件 1)-4) を満たす. この補題により, 領域 F' と写像 B が用意される.

不等式 (4.10.5) は (4.10.8) よりしたがう. (4.10.3) からすると, 主張 I は 5 節 1 項からしたがう. 主張 II は 5 節 II および 1 節の (4.1.6) からしたがう. というのは, $H_2 = (\mu^2)H_2 + H_2'$ であり, ゆえに, (4.10.3) および (4.10.2) より

$$|H_2| \le \mu^2\delta^{-1} + \mu\varepsilon^4\delta^{-(4n+14)} \le \mu\varepsilon^4\delta^{-(4n+15)}$$

であるからである. 主張 III は 5 節 III と同じである.

主張 IV を証明しよう. (4.10.4) において $\delta \le \delta^{(7)}$ であることを考えると

$$\begin{aligned}&\text{mes } (G_0 \backslash G_0'') \le \theta^{-n} \text{ mes } [\Omega \backslash (\Omega_{K_0 N_0} - 4\Theta\delta^3)] \le \theta^{-n}(2K_0 + \delta^2 N_0^n) DL \text{ mes } \Omega \\ &\le \theta^{-n} 3\delta DL \text{ mes } \Omega \le 3\delta\Theta^n\theta^{-n} DL \text{ mes } G_0 \le \frac{\kappa}{2} \text{ mes } G_0\end{aligned}$$

である.

ここで算術補題 (V 章 2 節 2 項) と不等式 $\delta \le \left\{\frac{1}{4\Theta}, \frac{1}{N_0^n}, \frac{\kappa\theta^n}{6\Theta^n LD}\right\}$ を逐次使った.

不等式 $\delta < N_0^{-n}$ は $\delta < \left(\frac{e}{16nT}\right)^{2n}$, $N_0 < \delta^{-\frac{1}{4n}} \ln \frac{1}{\delta^{4T}}$ からしたがう. 事実, (5.3.1) からすると, $\ln \frac{1}{\delta^{4T}} \le 4T \frac{4n}{e} \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{4n}}$ であり, ゆえに $N_n^0 \le \delta^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{16nT}{e}\right)^n < \delta^{-1}$ である. 主張 I-IV は証明された.

§11. 極座標

1. 記法. 2 次およびそれ以後の近似を実行するために, 10 節の直交座標 P_1, Q_1 から極座標 τ, φ へ正準変換

$$P_1 = \sqrt{2\tau}\cos\varphi, \quad Q_1 = \sqrt{2\tau}\sin\varphi \tag{4.11.1}$$

で移ろう.

変数 P_0, Q_0, τ, φ を文字 $P_0^*, Q_0^*, P_1^*, Q_1^*$ で表し, 変換 (4.11.1) を文字 $B^* : B^*X^* = X$ で表す. ここで, $X^* = P_0^*, P_1^*, Q_0^*, Q_1^* = P_0, \tau, Q_0, \varphi$; $X = P_0, P_1, Q_0, Q_1$ である. 変数 Q^* はすべて角度の意味を持つことを注意しておく.

2. 補題. 10 節 1 項の条件において, 不等式

$$T > 8n + 30, \quad \delta \le \delta^{(8)} = 2^{-15}C^{-1} \tag{4.11.2}$$

が成り立つとする. 領域 $X^* \in F^{*'}(\varepsilon)$ を考える. ただし, $P_0^* \in G_0'$ は 10 節 2 項のとおりであり, $P_1^* \in G_1(\varepsilon)$, $\left[\left|P_1^* - \frac{\varepsilon}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right]$, $|\text{Im } Q^*| \le 0.5\rho$. この領域では, $p, q = x = BX = BB^*X^*$ の関数 (4.1.1) は

$$H(p, q) = H_0(P_0^*) + \overline{\mu}H_1(P_0^*, P_1^*) + H_3(P_0^*, P_1^*, Q_0^*, Q_1^*) = H^*(P^*, Q^*), \tag{4.11.3}$$

なる形を取る. ここで H_0 および $\overline{\overline{H}}_1$ は (4.1.1)-(4.1.4) の関数と同じであり, H_3 は Q^* について周期 2π の解析関数であって, ${F^*}'(\varepsilon)$ 内で

$$|H_3| < \frac{\mu\varepsilon^{3.5}}{\delta} \tag{4.11.4}$$

を満たす.

3. 証明. $\delta < \delta^{(6)}$ であるから, $\dfrac{\varepsilon}{2} < 2^{-6}R^2 = \left(\dfrac{R'}{4}\right)^2$ を得る. したがって, 極座標に関する補題 (V 章 4 節 7 項) が適用でき, これに応じて, (4.10.6) は

$$H(p,q) = H_0(P_0^*) + \mu\overline{\overline{H}}_1(P_0^*, P_1^*) + \mu\widetilde{\overline{H}}_1 + H_2, \tag{4.11.5}$$

なる形を取る. ここで, (4.1.8), (5.4.4) および (4.10.7) に応じて

$$|\widetilde{\overline{H}}_1| \leq C|8P_1^*|^{3.5}, \quad |H_2| < \mu\varepsilon^4\delta^{-(4n+15)}$$

である. (4.11.2) の $\delta < \delta^{(6)}$ より, 領域 ${F^*}'(\varepsilon)$ において

$$|\mu|\widetilde{\overline{H}}_1| \leq \mu C 8^{3.5}\varepsilon^{3.5} < \frac{\mu}{2\delta}\varepsilon^{3.5}, \tag{4.11.6}$$

が成り立ち, (4.11.2) の $T > 8n+30$ より,

$$|H_2| < \mu\varepsilon^{3.5}\varepsilon^{0.5}\delta^{-(4n+15)} < \frac{\mu\varepsilon^{3.5}}{2\delta} \tag{4.11.7}$$

であることがわかる. (4.11.5)-(4.11.7) を比較して, 関係式 (4.11.3) および (4.11.4) を得る.

§12. 帰納定理の適用性

以下では, δ が十分小さいとき関数 (4.11.3) が 2 節の帰納定理の条件 1)-6) を満たすことを示そう.

1. 仮定.

$$\delta \leq \delta^{(9)}(n, \theta, \Theta, C, R, \rho, \kappa, D)$$

と置く. ただし,

$$\delta^{(9)} = \min\left\{\delta^{(4)}(n, \Theta, \theta, \frac{\rho}{2}, \frac{\kappa}{2}, D);\ \delta^{(5)}(n, \Theta, \theta, C, 16(n+4), \rho, \kappa, D);\ \delta^{(8)}(C)\right\}.$$

$\delta^{(4)}$ は 2 節で定義され, $\delta^{(5)}$ は 10 節で, $\delta^{(8)}$ は 11 節で定義された.

基本定理の条件 1)-4) と 9 節 1 項の条件 1)-3) が満たされていると仮定する. 加えて,

$$\mu \leq \varepsilon^4, \quad \rho \leq 1$$

を仮定する. このとき, $T = 16(n+4)$ に対して, 10 節および 11 節の仮定が満たされる. だから (4.1.1) は変数 $P^*, Q^* \in {F^*}'$ に関して (4.11.3) の形を取る.

2. 領域 Ξ, G**.** 上で導入したいくつかの領域の記法を思い起こそう.

G_0 は p_0 空間の元の領域である (9 節参照).

$\Omega = A_0 G_0$ は ω_0 空間の領域.

$G_1(\varepsilon)$ は $\left|p_1 - \dfrac{\varepsilon}{2}\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ を満たす p_1 からなる.

$G^*(\varepsilon) = G_0 \times G_1(\varepsilon)$ は, $p_0 \in G_0$, $p_1 \in G_1(\varepsilon)$ を満たす $p = p_0, p_1$ からなる.

$\Xi^*(\varepsilon, d_0)$ は $\xi = Ap$ を満たす $\xi = \xi_0, \xi_1$ からなる. ただし, $p \in G^*(\varepsilon), \xi_0 \in \Omega - d_0$ である.

新しい領域 Ξ を導入する. これは $\xi = Ap$ を満たす $\xi = \xi_0, \xi_1$ からなる. ただし, $p \in G^*(\varepsilon)$ および

$$\xi_0 \in \Omega_{K_0 N_0} - d_0$$

である. ここで $K_0 = \delta$, $N_0 = \dfrac{1}{2}\delta^{-\dfrac{1}{4n}} \ln \dfrac{\delta}{\varepsilon^4}$, $d_0 = 3\Theta\delta^3$ である (記法 $\Omega K_0 N_0$ については V 章 2 節 2 項参照). また領域

$$G = A^{-1}\Xi.$$

を導入する.

3. 領域 Ξ, G **の性質.** 以下の主張を証明する (V 章 1 節および 2 節を見よ).

I. 領域 $\Xi^*(\varepsilon, d_0)$ は $\dfrac{D}{\varepsilon}$ 型であり, 次を満たす.

$$\text{mes } \Xi^*(\varepsilon, d_0) \leq \Theta^n \text{mes } G^*(\varepsilon).$$

II. $\Xi^*(\varepsilon, d_0)$ において, 領域 Ξ は $[\Xi^*(\varepsilon, d_0)]_{K_0 N_0 d_0}$ の形をしている.

III. $G \subseteq G_0' \times G_1(\varepsilon)$, ただし $G_0' = A_0^{-1}\Omega_{K_0 N_0} - 2\delta^3$.

IV. $G \supseteq G_0'' \times G_1(\varepsilon)$, ただし $G_0'' = A_0^{-1}(\Omega_{K_0 N_0} - 4\Theta\delta^3)$.

I は (4.9.3) および 9 節の 3) からしたがう. というのは, (4.10.4) および (4.10.2) に応じて

$$0 < \varepsilon < r = R^2, \quad 0 < d_0 < r = R^2,$$

だからである.

II は Ξ の定義から明白である (2 参照).

III と IV の証明は次の事実に基づく. すなわち, (4.9.3) を考慮すると, $p = p_0, p_1$; $\xi = \xi_0, \xi_1$; $\omega_0 = A_0 p_0, \xi = Ap$ のとき, $|\xi_0 - \omega_0| < \mu\Theta < \delta^3\Theta$ が成り立つ.

G の定義より, $p \in G$ から $\xi_0 \in \Omega_{K_0 N_0} - 3\Theta\delta^3$ が出る. つまり, $\omega_0 \in \Omega_{K_0 N_0} - 2\Theta\delta^3$ および $p \in A_0^{-1}(\Omega_{K_0 N_0} - 2\Theta\delta^3)$ を意味する. したがって, V 章 4 節 4 項に応じて, $p_0 \in G_0'$ である. これで III が証明された.

しかし $p_0 \in G_0''$, つまり, $\omega_0 \in \Omega_{K_0 N_0} - 4\Theta\delta^3$ のとき, $\xi_0 \in \Omega_{K_0 N_0} - 3\Theta\delta^3$ であり, $p_1 \in G_1(\varepsilon)$ に対して $p \in G$ を得る. これで IV が証明された.

4. 帰納定理の条件 1)-6) の確認. 1 項の仮定の下で, (4.11.3) 式の関数 $H^*(p^*, q^*)$, 3 項で構成された領域 G, Ξ, および 10 節の数 $D, \Theta, \theta, \dfrac{\rho'}{2}, \kappa$ が

$$\begin{aligned} &\beta = \delta^3\varepsilon, \quad \varepsilon = \delta^T, \quad T = 16(n+4), \quad \gamma = \delta^{\dfrac{1}{4n}}, \\ &\mu \leq \varepsilon^4, \quad M = \varepsilon^{3.5}\delta^{-1}, \quad K = \delta\varepsilon \end{aligned} \tag{4.12.1}$$

と共に帰納補題の条件 1)-6) を満たすことを示そう.

条件 1)(ただし $\overline{\overline{H}}_1(P^*)$ は $H_1(p)$ の役割を果たし, $H_3(P^*,Q^*)$ は $H_2(p,q)$ の役割を果たす) は 11 節 2 項および 3 項の III からしたがう.

条件 2) は 9 節 2) からしたがう.

条件 3) は (4.11.4) および (4.12.1) からしたがう.

条件 4) は 1 項において $\delta \le \delta^{(4)}$ であることよりしたがう.

条件 5) は (4.12.1) よりしたがう.

条件 6) は 3 項の I および II からしたがう. その際, $\Xi^*(\varepsilon, d_0)$ が Ξ^* の役割を果たす.

事実, $K_0 = \delta > \varepsilon\delta = K$, $N_0 = \dfrac{1}{2}\delta^{-\dfrac{1}{4n}}\ln\dfrac{\delta}{2\varepsilon^{3.5}} = \dfrac{1}{\gamma}\ln\dfrac{1}{2M}$ が成り立つ.

こうして, 帰納定理の条件はすべて満たされる. だからその結論 I − IV は正しい.

§13. 極限への移行

ここでは (4.11.3) 式のハミルトン関数 $H^*(P^*,Q^*)$ から得られる正準方程式の不変トーラスを構成する.

1. 収束性. 空間 P^*,Q^* 内の領域 $P_0^* \in G = G^{(0)}$, $|\mathrm{Im}\ Q^*| \le \dfrac{\rho}{2}$ を $F = F^{(0)}$ と表す (領域 G は 12 節 2 項で定義した). 12 節 4 項に応じて, 2 節の帰納定理により領域列 $F^{(s)}$ および $P^{(s)},Q^{(s)}$ を $P^*,Q^* = S_s(P^{(s)},Q^{(s)})$: $S_s = B_1B_2\ldots B_s$ につなぐ微分同相写像列 B_s が用意される. 座標 $P^{(s)},Q^{(s)}$ において, $F^{(s)}$ 内のハミルトン関数 $H^*(P^*,Q^*)$ (4.11.3) は 2 節の形 $H^{(s)}(P^{(s)},Q^{(s)})$ を取る.

2 節 I に応じて, V 章 5 節 1 項の収束性補題は, $d_s = \beta_s < 4^{-s}$ として列 B_s および $F^{(s)}$ に適用できる. この補題のおかげで, 集合 $F^{(\infty)} = \cap_{s\ge0}F^{(s)}$ 上の微分同相写像の列 S_s は一様にある写像 S_∞:

$$|S_\infty - E| < 2\beta_1 \tag{4.13.1}$$

に収束する. 集合 $F^{(\infty)}$ は $P^{(\infty)} \in G^{(\infty)}$, $|\mathrm{Im}\ Q^{(\infty)}| \le \rho_\infty$

$$\left(\rho_\infty \ge \frac{\rho}{6}, \quad G^{(\infty)} = \cap_{s\ge0}G^{(s)}\right).$$

の形をしている.

2. 不変性. この節の変数はすべて実数とする.

集合 $S_\infty F^{(\infty)}$ が, $H^*(P^*,Q^*)$ によって決まる運動に関して不変であることを示そう. ハミルトン関数を $H^{(s)}(P^{(s)},Q^{(s)}) = H^*(P^*,Q^*)$ とする正準方程式を

$$\dot{X} = Y^{(s)}(X^{(s)}) \quad (\text{ただし}\quad X^{(s)} = P^{(s)},Q^{(s)};\ \ Y^{(s)} = -H^{(s)}_{Q^{(s)}}, H^{(s)}_{P^{(s)}}) \tag{4.13.2}$$

の形に書く.

変換 S_s は正準である. したがって, $X^{(s)}(t)$ が $(4.13.2)_s$ を満たせば, $X^*(t) = S_sX^s(t)$ も $(4.13.2)_*$ を満足する.

まったく同じやり方で, ハミルトン関数を $H_0(P_0^{(s)})+H_1^{(s)}(P^{(s)})$ とする方程式はベクトル場 $\overline{Y}^{(s)}=(0;A_0^{(s)},\mu A_1^{(s)})$ を定義する. ただし, $A_0^{(s)},A_1^{(s)}$ は 2 節 III のベクトル $A^{(s)}(P^{(s)})$ の最初の n_0 個および最後の n_1 個の成分である.

2 節 III に応じて, $s\to\infty$ のとき, $G^{(\infty)}$ 上の微分同相写像列 $A^{(s)}$ は極限 $A^{(\infty)}$ に収束する. ただし ((4.8.1) 参照)

$$|A^{(s)}-A^{(\infty)}|\leq\sum_{k=s+1}^{\infty}\beta_k\delta_k<\frac{1}{2}\beta_{s+1}$$

である.

$A^{(\infty)}$ が $A_0^{(\infty)},A_1^{(\infty)}$ の形に書かれているとき, $F^{(\infty)}$ 上のベクトル場 $(0;A_0^{(\infty)},\mu A_1^{(\infty)})$ を $\overline{Y}^{(\infty)}=Y^{(\infty)}$ と記し, 方程式 $(4.13.2)_\infty$ の解 (直線) を $X^{(\infty)}(t)$ と記す. 2 節 II より, $F^{(s)}$ 内で $|Y^{(s)}-\overline{Y}^{(s)}|<\frac{1}{2}\beta_{s+1}$ が成り立つ. (4.13.3) からすると, $F^{(\infty)}$ 内で $|Y^{(s)}-Y^{(\infty)}|<\beta_{s+1}$ を得る. 2 節 II より, $\left|\frac{\partial Y^{(s)}}{\partial X^{(s)}}\right|<2n\delta_s+2\Theta<3\Theta$ を得る. したがって, V 章 5 節 3 項の補題が適用でき, $X^{(\infty)}(0)\in F^{(\infty)}$ に対して点 $X^*(t)=S_\infty(X^{(\infty)}(t))$ が F に属し $(4.13.2)_*$ を満たすことがわかる.

だから集合 $F^*=S_\infty F^{(\infty)}$ は不変である.

§14. 基本定理の証明

10 節に始まった基本定理の証明をここで完成させよう. 変数はすべて実数に取る. 構成法と記法は 10 節-13 節のものを使う.

1. $\mathbf{F}_\varepsilon$ の構築.

$$\mathbf{F}_\varepsilon=BB^*\mathbf{F}^*=BB^*S_\infty F^{(\infty)} \tag{4.14.1}$$

と置く. B は 10 節で定義され, B^* は 11 節, S_∞ と $F^{(\infty)}$ は 13 節で定義された. 基本定理の主張 I-IV を証明する.

まず

$$\mathbf{F}^*\subseteq F^{*'}(\varepsilon)-\beta_1 \tag{4.14.2}$$

を証明する. ここで $P^*,Q^*\in F^{*'}(\varepsilon)$ は $P^*\in G_0'\times G_1(\varepsilon)$ のことである (11 節 2 項参照). 2 節 I より, $\mathbf{F}^*\subseteq B_1F^{(1)}\subseteq F-\beta_1$ であること, また 12 節 3 項 III より, $G\subseteq G_0'\times G_1(\varepsilon)$ が出る. したがって, (4.14.2) が成り立ち, BB^* は F^* 上で定義され, (4.14.1) は意味を持つ.

さらに

$$\begin{array}{llll}
x^*=V^{*-1}x, & x=BX, & X=B^*X^*, & X^*\in F^* \\
x^*=p_0^*,p_1^*,q_0^*,q_1^*, & x=p_0,p_1,q_0,q_1, & X=P_0,P_1,Q_0,Q_1, & X^*=P_0^*,P_1^*,Q_0^*,Q_1^* \\
x_0^*=p_0^*,q_0^*, & x_0=p_0,q_0, & X_0=P_0,Q_0, & X_0^*=P_0^*,Q_0^*, \\
x_1^*=p_1^*,q_1^*, & x_1=p_1,q_1, & X_1=P_1,Q_1, & X_1^*=P_1^*,Q_1^*
\end{array}$$

と置く. B^* の定義より, $x_0^*=x_0,X_0^*=X_0$ を得る. 10 節 I からすると,

$$|x_0^*-X_0^*|<\mu\delta_1^{-(2n+7)}<\varepsilon^3<\beta_1,\quad |x_1-X_1|<\varepsilon^3<\sqrt{\delta_1^3\varepsilon} \tag{4.14.3}$$

である．また，$|X_1| < \sqrt{2\varepsilon},\ |x_1| < \dfrac{1}{2}$ であることも明らかである．(4.14.2) からすると，$|P_1^*| \geq \beta_1 = \delta_1^3\varepsilon$ が成り立ち，(4.13.3) に応じて $|x_1 - X_1| < \sqrt{P_1^*}$ である．したがって，V 章 4 節 8 項の補題により，$|x_1^* - X_1^*| \leq \max\left\{\varepsilon^3, 2\dfrac{\varepsilon^3}{\sqrt{\delta_1^3\varepsilon}}\right\} < \varepsilon^2$ である．(4.13.3) および (4.14.2) と併せると，これから

$$|x^* - X^*| < \varepsilon^2 \tag{4.14.4}$$

が得られる．

2. 不変トーラス． $P^{(\infty)} \in G^{(\infty)}$ を固定し，x 空間においてトーラス

$$x = BB^*S_\infty(P^{(\infty)}, Q^{(\infty)}) \tag{4.14.5}$$

を考える．座標は $Q^{(\infty)}$ である．13 節 2 項に応じ，また変換 B, B^* が正準であることから，ハミルトン関数を (4.1.1) とするこのトーラス上の方程式は

$$\dot{Q}^{(\infty)} = \omega \quad (\text{ここで} \quad \omega = \omega_0,\ \omega_1 \quad \text{および} \quad \xi = \omega_0,\ \mu\omega_1 = A^{(\infty)}(P^{(\infty)})) \tag{4.14.6}$$

なる形を取る．

記法

$$p_\omega^* = A^{-1}\xi = A^{-1}A^{(\infty)}(P^{(\infty)}), \tag{4.14.7}$$

を導入する．ここで A は 9 節の微分同相写像である．(4.13.3) に応じて $|A - A^{(\infty)}| < \beta_1$ である．したがって，$|AP^{(\infty)} - Ap_\omega^*| < \beta_1$ であり，V 章 4 節 4 項の補題より

$$|P^{(\infty)} - p_\omega^*| < \theta^{-1}\beta_1 \tag{4.14.8}$$

である．

トーラス (4.14.5) を T_ω と書き，$p_\omega^* = p_{0\omega},\ \tau_\omega,\ Q^{(\infty)} = Q$ と置き，基本定理の主張 II-IV を証明しよう．

主張 IV は (4.14.6) および (4.14.7) から直ちにしたがう．

主張 II は $x = B^*x^*$ であることに注意し，

$$\begin{aligned} f_{0_\omega} &= p_0 - p_{0_\omega}, & g_{0_\omega} &= q_0 - Q_0^{(\infty)}, \\ f_{1_\omega} &= p_1 - \tau_\omega, & g_{1_\omega} &= q_1^* - Q_1^{(\infty)}, \end{aligned}$$

と置けば，(4.14.5) から得られる．

$f_{i_\omega}(Q), g_{i_\omega}(Q)$ の解析性は複素領域 $F^{(\infty)}$ における S_s の収束性 (13 節 1 項) からしたがう．

次に主張 III を証明しよう．(4.14.4), (4.13.1), (4.14.8) に応じ，また $\delta < \delta^{(7)}$(10 節 1 項) であるから

$$\begin{aligned} &|p^* - p_\omega^*| \leq |p^* - P^*| + |P^* - P^{(\infty)}| + |P^{(\infty)} - p_\omega^*| \leq \varepsilon^2 + 2\beta_1 + \theta^{-1}\beta_1 < \kappa\varepsilon, \\ &|q^* - Q^{(\infty)}| \leq |q^* - Q^*| + |Q^* - Q^{(\infty)}| < \varepsilon^2 + 2\beta_1 < \kappa\varepsilon, \end{aligned}$$

を得る．

3. $\mathbf{F}_\varepsilon$ の測度の見積もり. 2 節 IV および 12 節 I からすると,

$$\text{mes}\,(G\backslash G^{(\infty)}) \le \frac{\kappa}{2}\Theta^{-n}\text{mes}\,\Xi^*(\varepsilon, d_0) \le \frac{\kappa}{2}\text{mes}\,G^*(\varepsilon) \tag{4.14.9}$$

が成り立つ. さらに, 2 節 3 項 IV および 10 節 2 項 IV に応じて

$$\begin{aligned}&\text{mes}\,[G^*(\varepsilon)\backslash G] = \text{mes}\,[(G_0 \times G_1(\varepsilon))\backslash G] \\ &\le \text{mes}\,[(G_0\backslash G_0'') \times G_1(\varepsilon)] \le \frac{\kappa}{2}\text{mes}\,[G_0 \times G_1(\varepsilon)] = \frac{\kappa}{2}\text{mes}\,G^*(\varepsilon)\end{aligned} \tag{4.14.10}$$

を得る.

V 章 5 節 4 項の補題より, (4.14.9) および (4.14.10) を考慮すると,

$$\begin{aligned}\text{mes}\,S_\infty^{(\infty)} \ge \text{mes}\,F^{(\infty)} = &\ (2\pi)^n\text{mes}\,G^{(\infty)} \\ \ge &\ (2\pi)^n(1-\kappa)\text{mes}\,G^*(\varepsilon) = (1-\kappa)\text{mes}\,F(\varepsilon)\end{aligned}$$

が成り立つ.

ところが, 正準変換 BB^* は測度保存であるから, 1 節 I を得る. すなわち,

$$\text{mes}\,F_\varepsilon = \text{mes}\,BB^*S_\infty F^{(\infty)} = \text{mes}\,S_\infty F^{(\infty)} \ge (1-\kappa)\text{mes}\,F(\varepsilon). \tag{4.14.11}$$

見積もり (4.14.11) の示すところによると, われわれの構成した不変トーラスの集合 $\mathbf{F}_\varepsilon$ は空でない. これで基本定理の証明が完了した.