V 章. 技術補題

IV 章で使われる補題はこの章に集めた. 2 節 2 項 – 5 項および 3 節 2 項は重要な役割をはたす.

§1. D 型領域 (domain)

各領域 (domain: 連結開集合) にはその面・体積比を特徴づける数を付随させる.

1. Ω は空間 ω 内の領域であって, 区分的に滑らかな曲面によって限られているとする. 次の性質は簡単に示すことができる.

I. 定数 $D > 0$ があって, 任意の $d_2 > d_1 > 0$ に対して

$$\text{mes } [(\Omega - d_1)\backslash(\Omega - d_2)] \leq D(d_2 - d_1) \text{ mes } \Omega. \tag{5.1.1}$$

この場合, Ω を D **型領域**と呼ぶ. Ω に同形な領域 $\varepsilon\Omega$ は D/ε 型領域である.

2. IV 章 9 節において, 特殊な仕方で構成された型の領域の見積もりを使うつもりだ. $0 < \varepsilon < \varepsilon_0, 0 < \mu < \mu_0$ と置く.

G_0 は p_0 空間内の領域で, 区分的に滑らかな境界を持つ.

G は p 空間内の領域で, 区分的に滑らかな境界を持つ.

$p = p_0, p_1$.

$G_1(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2}$ は p_1 空間の点の近傍である.

$G^*(\varepsilon) = G_0 \times G_1(\varepsilon)$ は空間 $p : p_0 \in G_0, p_1 \in G_1(\varepsilon)$ 内の領域である.

A_0 は G_0 から Ω の上への微分同相写像 $A_0 p_0 = \omega_0 \in \Omega$ である.

A は G から Ξ の上への微分同相写像 $Ap = \xi = \xi_0, \xi_1 \in \Xi$ であって, μ に依存する. その依存性はといえば, $\mu \to 0$ のとき, $p \in G$ に関して, またその微分に関して (?) 一様に $|A_0 p_0 - (Ap)_0| = |\omega_0 - \xi_0| \to 0$.

3. 領域 $AG^*(\varepsilon)$ に興味がある. I を以下のように拡張する. 証明は容易である.

II. ε の方向にも, 領域 $G_1(\varepsilon)$ の中心 p_1 にも依存しない定数 $D > 0$ があって, $G^*(\varepsilon) \subset G$ なる領域 $AG^*(\varepsilon)$ はすべて D/ε 型領域である.

III. p_1 にも ε にも依らない定数 $D > 0, \overline{\mu} > 0, r > 0$ があって, $0 < \mu < \overline{\mu}, 0 < d < r$ に対して, 以下に定義される領域 $\Xi^*(\varepsilon, d)$ は D/ε 型である.

ここで, $\Xi^*(\varepsilon, d)$ は, $p \in G^*(\varepsilon) \in G, \xi_0 \subset \Omega - d$ なる点 $\xi = \xi_0, \xi_1 = Ap$ から構成される.

主張 I, II, III の証明は省略する. 証明は初等的であるが, 面倒である.

4. **帯 (strips).** 超曲面の $\dfrac{h}{2}$ 近傍は, 幅 h の帯 Γ とよばれる. たとえば, 不等式 $|(k, \omega)| < a$ は, $k \geq 1$ の場合, ω 空間内に, 幅が $2a$ 以内の帯を定義する. 簡単に計算できるように, 幅 h の帯と ω 空間の n 個の座標軸のひとつとの交わりは nh より長くない. ゆえに, (5.1.1) を考慮すると,

$$\text{mes } (\Omega \cap \Gamma) \leq Dnh \text{ mes } \Omega \tag{5.1.2}$$

が得られる．

$\Omega' \subset \Omega$ とする．Ω' が Ω 内で N 型であるとは，$\Omega' = (\Omega - d)\backslash(\cup\Gamma_i)$ のときである．ただし，$d > 0$ であり，$\cup\Gamma_i$ は N 個以内の帯の和である．$d_2 > d_1 > 0$ に対して明らかに，

$$\begin{aligned}(\Omega' - d_1)\backslash(\Omega' - d_2) \subseteq \;& [(\Omega - d - d_1)\backslash(\Omega - d - d_2)]\cup \\ & \cup\{[(\cup\Gamma_i + d_2)\backslash(\cup\Gamma_i + d_i)] \cap \Omega\}\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，(5.1.1) および (5.1.2) より

$$\text{mes}\ [(\Omega' - d_1)\backslash(\Omega' - d_2)] \leq D(1 + 2nN)(d_2 - d_1)\ \text{mes}\ \Omega. \tag{5.1.3}$$

がしたがう．

§2. 算術補題

以下の補題は，無作為に取った数の非尽数性を表現する．

1. 整数点． 整数 $k_i = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ を成分とするベクトルを $k = k_1, k_2, \ldots, k_n$ と書き，数 $|k_1| + \ldots + |k_n|$ を $|k|$ と書く．簡単に計算できるように，$|k| = m \geq 1$ なる異なるベクトルの数は $2^n m^{n-1}$ を越えない．また $|k| \leq m$ のとき，数は $2^n m^n$ を越えない．

2. Ω を D 型の領域とする．$\Omega_{KN}(K > 0, N > 0)$ は Ω の点 ω のうち，任意の整数ベクトル $k, 0 < |k| < N$ に対して

$$|(k, \omega)| > K|k|^{-\nu} \quad (\nu = n + 1) \tag{5.2.1}$$

なるものの集合を表す．$d_1, d_2, \ldots > 0$ および $0 < N_1 < N_2 < \ldots$ とする．領域 $\Omega^{(s)}$ を関係式 $\Omega^{(0)} = \Omega,\ \Omega^{(s)} = \Omega^{(s-1)}_{KN_s} - d_s$ で導入する．

補題． 任意の $s \geq 1$ および任意の $d > 0$ に対して，不等式

$$\text{mes}\ [\Omega^{(s-1)}\backslash(\Omega^{(s-1)}_{KN_s} - d)] \leq LD[K\sigma_s + dN_s^n]\ \text{mes}\ \Omega, \tag{5.2.2}$$

が成り立つ．ただし

$$\sigma_s = \sum_{N_{s-1} \leq m < N_s} m^{-2}, \quad N_0 = 1, \quad L = n2^{n+2}.$$

3. 証明．まず

$$\text{mes}\ [\Omega^{(s-1)}\backslash\Omega^{(s-1)}_{KN_s}] \leq LDK\sigma_s\ \text{mes}\ \Omega. \tag{5.2.3}$$

満たすことにする．事実，(5.2.1) は幅 $2K|k|^{-\nu}$ 以内の帯 Γ_k においては成り立たない．$|k| = m$ を満たすような異なる k の数は $2^n m^{n-1}$ 以内である．したがって，(5.1.2) より

$$\sum_{|k|=m} \text{mes}\ (\Omega \cap \Gamma_k) \leq \frac{LDK}{m^2}\ \text{mes}\ \Omega$$

が出る．これを $N_{s-1} \leq m < N_s$ なる m に関して和を取れば，(5.2.3) が得られる．

さて, $|k| \leq m$ を満たす異なる k の数は $2^n m^n$ 以内であることに注意しよう. これより, $\Omega^{(s-1)}$ は Ω 内で $2^n N_s^n$ 型である (1 節 4 項参照). (5.1.3) より

$$\text{mes } [\Omega_{KN_s}^{(s-1)} \backslash (\Omega_{KN_s}^{(s-1)} - d)] \leq d(1 + 2n2^n N_s^n) D \text{ mes } \Omega \tag{5.2.4}$$

を得る.

(5.2.2) は (5.2.3) および (5.2.4) よりただちにしたがう.

4. 領域 Ξ. Ξ は点 $\xi = \xi_0, \xi_1$ の $n = n_0 + n_1$ 次元空間内の D 型領域であるとする. $\Xi_{\mu KN}$(ただし $0 < \mu < 1$, $K > 0, N > 0$) は Ξ の点集合であって, すべての整数ベクトル $k, 0 < |k| < N$ に対して

$$|(k_0, \xi_0) + \mu(k_1, \xi_1)| \geq \begin{cases} K|k|^{-\nu}, & \text{if} \quad |k_0| \neq 0, \\ \mu K|k|^{-\nu}, & \text{if} \quad |k| \neq 0, \end{cases} \quad (\nu = n + 1) \tag{5.2.5}$$

を満たすものとする. $d_1, d_2, \ldots > 0$ および $0 < N_1 < N_2 < \ldots$ と置く. 領域 $\Xi^{(s)}$ を

$$\Xi^{(0)} = \Xi, \quad \Xi^{(s)} = \Xi_{\mu KN_s}^{(s-1)} - d_s \tag{5.2.6}$$

で導入する.

補題. 任意の $s \geq 1$ および任意の $d > 0$ に対して, 不等式

$$\text{mes } [\Xi^{(s-1)} \backslash (\Xi_{\mu KN_s}^{(s-1)} - d_s)] \leq LD[K\sigma_s + dN_s^n] \text{ mes } \Xi$$

が成り立つ. ただし,

$$\sigma_s = \sum_{N_{s-1} \leq m < N_s} m^{-2}, \quad N_0 = 1, \quad L = n2^{n+2}.$$

証明は, (5.2.5) が成り立たないのは幅が $2K|k|^{-\nu}$ 以下の帯 Γ_k においてのみであるという事実に基づく. 事実, $|k_0| \neq 0$ なら, 始めの n_0 方向に沿っての Γ_k の幅は $2K|k|^{-\nu}$ を越えない. しかし, $k_0 = 0$ のとき, (5.2.5) において μ はキャンセルされ, 残り (latter) の方向のひとつに沿っての Γ_k の幅は $2K|k|^{-\nu}$ を越えない. 以後の証明は 3 項と同様である.

5. 領域 $\Xi_{K_0 N_0 d_0}$. 4 項の領域 Ξ からその一部 $\Xi_{K_0 N_0 d_0}$(ただし $K_0 \geq K, 0 < N_0 \leq N_1, d_0 \geq 0$) を以下のように取り出す. 点 $\xi_0, \xi_1 = \xi \in \Xi$ が $\Xi_{K_0 N_0 d_0}$ に属すのは, $|\xi_0 - \omega_0| \leq d_0$ なる任意の ω_0 に対して,

$$|(k_0, \omega_0)| > K_0 |k_0|^{-\nu} \quad (\nu = n + 1)$$

がすべての整数ベクトル $k_0, 0 < |k_0| < N_0$ に対して成り立つときである.

簡単に示せるように, (5.2.6) において $\Xi^{(0)} = \Xi$ の代わりに $\Xi^{(0)} = \Xi_{K_0 N_0 d_0}$ を入れても 4 項の補題は成り立つ.

§3. 解析補題

ここでの補題により, 解析関数のフーリエ係数や微分を関数自身を用いて評価したり, その逆を行なったりすることができる.

1. 不等式. 任意の $m>0, \nu>0, \delta>0$ に対して

$$m^{\nu} \leq \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\nu} \frac{e^{m\delta}}{\delta^{\nu}}, \quad \ln\frac{1}{\delta} \leq \frac{\nu}{e}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{\nu}}. \tag{5.3.1}$$

<u>証明</u>. $f(x)=x-\nu\ln x$ は $x=\nu$ において極小になる. したがって, $\dfrac{e^x}{x^{\nu}} \geq \dfrac{e^{\nu}}{\nu^{\nu}}$. $x=m\delta, x=|\ln\delta|$ と置いて (5.3.1) を得る. □

さらに, $s\geq 1$ に対して $\delta_{s+1}=\delta_s^{1+\alpha}, \alpha>0$ および $\delta_1 \leq 2^{-\frac{1}{\alpha}}$ とする. すると

$$\delta_{s+1} \leq 2^{-s}\delta_1, \quad \sum_{s=1}^{\infty}\delta_s < 2\delta_1. \tag{5.3.2}$$

<u>証明</u>. $\delta_1 \leq 2^{-\frac{1}{\alpha}}$ に対して $\delta_{s+1}=\delta_s^{\alpha}\delta_s \leq \delta_1^{\alpha}\delta_s \leq 2^{-1}\delta_s$ である. これから (5.3.2) は容易に出る.

2. フーリエ係数. $f(q)=\sum_k f_k e^{i(k,q)}$ $(q=q_1,\ldots,q_n)$ とする. このとき,

1) $|\mathrm{Im}\ q| \leq \rho$ に対して $|f(q)| \leq M$ が常に成り立つなら, $|f_k| \leq Me^{-|k|\rho}$ である.

2) $|f_k| \leq Me^{-|k|\rho}$ なら $|\mathrm{Im}\ q| \leq \rho-\delta$ に対して $|f|<4^n\delta^{-n}M$ を得る (ただし, $0<\delta\leq\rho\leq 1$ として).

第一の結果は, 公式 $f_k=(2\pi)^{-n}\int f(q)e^{-i(k,q)}dq$ において積分経路を $\pm i\rho$ だけずらすことにより得られる. $\delta \leq 1$ の場合, $(1+e^{-\delta})(1-e^{-\delta})^{-1}<4\delta^{-1}$ である. したがって

$$|f| \leq \sum Me^{-|k|\delta} = M(1+2\sum_{m>0}e^{-m\delta})^n = M(1+e^{-\delta})^n(1-e^{-\delta})^{-n} < 4^n\delta^{-n}M.$$

記法 $R_N f=\sum_{|k|\geq N} f_k e^{i(k,q)}$ を導入する.

3) $|f_k| \leq M^{-|k|\rho}$ なら, $|\mathrm{Im}\ q| \leq \rho-\delta-\gamma$ に対して $|R_N f| < \left(\dfrac{2n}{e}\right)^n \dfrac{M}{\delta^{n+1}}e^{-N\gamma}$ を得る (ただし, $4\delta \leq 2\gamma \leq \rho \leq 1$ として).

実際, 2 節 1 項と (5.3.1) を考慮すると,

$$\begin{aligned}|R_N f| \leq\ & M\sum_{m\geq N}(2m)^n e^{-m(\delta+\gamma)} \leq M\left(\frac{2n}{e\delta}\right)^n\sum_{m\geq N}e^{-m\gamma} \\ \leq\ & \left(\frac{2n}{e}\right)^n\frac{M}{\delta^n}\frac{e^{-N\gamma}}{1-e^{-\gamma}} < \left(\frac{2n}{e}\right)^n\frac{M}{\delta^{n+1}}e^{-N\gamma},\end{aligned}$$

となる. $4\delta \leq 2\gamma \leq 1$ のとき $1-e^{-\gamma}>\delta$ だからである.

3. コーシーの見積もり. $x\in U$ に対して, 関数 $f(x)$ が解析的であって $|f(x)| \leq M$ であれば, $x\in U-\delta$ に対して

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq \frac{M}{\delta}, \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right| \leq \frac{2M}{\delta^2}, \tag{5.3.3}$$

が成り立つ．証明はコーシー積分 $f(x)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint\dfrac{f(\xi)d\xi}{\xi-x}$ から得られる．

4. ラグランジュおよびテイラーの公式. $f(x_1,\ldots,x_n)$ が x 空間の線分 (a,b) の近傍において連続微分可能な (一般にベクトル関数, $f=f_1,\ldots,f_m$) 関数であって, ab 上で $|df|\le C|dx|$ であれば, $|f(b)-f(a)|\le C|b-a|$ である．とくに, $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|\le C$ なら $|df|\le Cn|dx|$ かつ

$$|f(b)-f(a)|\le Cn|b-a| \tag{5.3.4}$$

である．

関数 $f(x)$ が領域 $|x_i-a_i|<|b_i-a_i|$ において 2 回連続微分可能であって, $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right|\le\Theta$ ならば, 以下の不等式が成り立つ．

$$\left|f(b)-f(a)-\left(\frac{\partial f}{\partial x}|_a,(b-a)\right)\right|\le\frac{\Theta n^2}{2}|b-a|^2. \tag{5.3.5}$$

不等式 (5.3.4) および (5.3.5) は実領域でも複素領域でも等しく成り立つ．証明は, 微分の積分の形に増分を書けば十分である．

§4. 幾何学補題

ここでの補題は変数変換の一価可逆性を保証する．

1. ε-変位 (displacement). U をユークリッド空間 R の閉領域 (closed domain), A を U から R 内への連続写像とし, $|Ax-x|\le\varepsilon$ とする．すると, 像 AU は $U-\varepsilon$ を含む．

証明. $x_0\in(U-\varepsilon)\backslash AU$ と置く．このとき写像 $A^*x=x_0+\varepsilon\dfrac{Ax-x_0}{|Ax-x_0|}$ は $|x-x_0|\le\varepsilon$ に対して連続である．したがって, 球 $S_{t\varepsilon}:|x-x_0|=t\varepsilon\ (0<t\le 1)$ [21] から球 S_ε の上への写像 A^* の写像度 $d(t)$([55] 参照) は t に依らない．ところが $d(1)=1$ であり, $t\to 0$ のとき $d\to 0$ である．すなわち, $x\in AU$.

2. ε-変位の inversion. 1 項の条件において, $|dx|\neq 0$ のとき $|dA|\neq 0$ であるとする．このとき A は領域 $U-4\varepsilon$ の微分同相写像である．

証明. $x,y\in U-4\varepsilon$, $Ax=Ay=z$ と置く．中心が区間 xy の中点にある半径 2ε の球は $U-\varepsilon$ に含まれる．区間 xy の像 $A_{xy}\subseteq D$ は空間 x の閉弧であり, D 内で点 z に収縮する．1 項および $|dA|\neq 0$ より, 区間 xy は端点をそのままに 1 点に収縮し得る．したがって $x=y$ である．

3. 正準変換. G および U は n 次元空間 P および q の領域とする．$G\times U$ 内の関数 $S(P,q)$ が解析的で $|S|\le M\le 16^{-1}n^{-1}\beta^2$ を満たせば, 関係 $p=P+S_q$, $Q=q+S_p$ は領域 $P\in G-2\beta$, $Q\in U-3\beta$ の正準微分同相写像 $B:P,Q\to p,q$ を定義する．ただし $|B-E|\le M\beta^{-1}$, $|dB|<2|dX|(X=P,Q)$ である．また $Q\in U-3\beta-\delta$ に対して $|P-p|\le M\delta^{-1}$ を得る．

[21] 原文では $S_{t\varepsilon}:|x-\varepsilon|=t\varepsilon\ (0<t\le 1)$ となっている．

証明. 写像 $B : q \to q + S_p = Q$ において各 $P \in G - \beta$ に対して, コーシーにより (3 節 3 項), $|S_p, S_q| \leq M\beta^{-1} < 0.2\beta$, $|S_{PP}, S_{Pq}, S_{qq}| \leq 2M\beta^{-2} < 4^{-1}n^{-1}$ が成り立つ. したがって, $|Bp - E| \leq M\beta^{-1} < 0.2\beta$ および $|dBp| \neq 0$ である. 2 項に応じて, Bp は領域 $q \in U - 1.8\beta$ の微分同相写像であり, 1 項により, その像は領域 $Q \in U - 2\beta$ を含む. したがって, $P \in G - \beta$, $Q \in U - 2\beta$ に対して, 以下の写像 B が決まる. すなわち, $P, Q \to p, q = P + S_q, B_p^{-1}(Q)$(ただし, S_q には微分のあとで $q = B_p^{-1}(Q)$ を代入する). $P \in G - 2\beta$, $Q \in U - 3\beta$ に対しては, $|B - E| < M\beta^{-1} < 0.2\beta$ および $|dB - dx| < 0.5|dx|$ を得る. そこで, 3 項は 2 項とコーシーの見積りからしたがう.

4. A は球 $U_\varepsilon(x_0) : |x - x_0| \leq \varepsilon$ の写像であって, $\theta|dx| \leq |dA| \leq \Theta|dx|$ であるとする. このとき,

$$U_{\theta\varepsilon}(Ax_0) \subseteq AU_\varepsilon(x_0) \subseteq U_{\varepsilon\Theta}(Ax_0).$$

証明. 第二の不等式はラグランジュの公式 (2 節 4 項) からしたがう. $y(t) = y_0 + ty$ と置く. ただし, $y_0 = Ax_0, 0 \leq t < \infty$ である. t が小さいとき, 連続な分枝 $A^{-1}(y(t)) \subset U_\varepsilon x_0$ がある. ただし, $A^{-1}y_0 = x_0$. $\bar{t}$ はこれが成り立つ最大の t であるとする. すると, $\bar{y} = y(\bar{t})$ に対して, $|A^{-1}(\bar{y}) - x_0| = \varepsilon$ となるはずである. ところが, ラグランジュの公式より, $|A^{-1}(\bar{y}) - A^{-1}(y_0)| \leq \theta^{-1}|\bar{y} - y_0|$, つまり, $|\bar{y} - y_0| \geq \theta\varepsilon$ となる. これが示すべき結果であった.

5. 周波数の変動に関する補題 A は p 空間の領域 G から ω 空間の領域 Ω の上への微分同相写像であるとし, $\theta|dp| \leq |dA| \leq \Theta|dp|$ とする. また A' は領域 $G - \beta$ の写像 $p \to Ap + \Delta(p)$ である. ただし, $|\Delta(p)| < \beta$ および $|d\Delta| < \delta\theta|dp|$. Ω_0 は Ω の部分領域, また $\beta > 0, b > 0, 0 < \delta < 1$ とする. このとき領域 G_1 と G' があって, 以下を満たす.

1) $G \supseteq G - \beta \supseteq G_1 \supseteq G' + b \supseteq G'$.

2) A' は G_1 の微分同相写像であり, $\theta'|dp| < |dA'| < \Theta'|dp|$ である. ただし, $\theta' = \theta(1 - \delta)$, $\Theta' = \Theta(1 + \delta)$.

3) $A'G' = \Omega' = \Omega_0 - d$. ただし, $d = 2\Theta b + (5 + \Theta)\beta$; $A'(G' + b) \subset \Omega_0$.

4) $\mathrm{mes}\ (G \backslash G') \leq \theta^{-n}\ \mathrm{mes}\ \Omega \backslash \overline{\Omega}'$. ただし, $\overline{\Omega}' = \Omega_0 - \bar{d}$, $\bar{d} = 2\Theta b + (6 + \Theta)\beta$.

証明. $\omega \in A(G - \beta)$ に対して, $|A'A^{-1} - E| < \beta$ および $|dA'A^{-1}| > (1 - \delta)|d\omega|$ が成り立つことははっきりしている. 2 項に応じて, $\omega \in A(G - \beta) - 4\beta$ に対して, 写像 $A'A^{-1}$ は微分同相写像であり, 1 項に応じて, $A'A^{-1}(A(G - \beta) - 4\beta) \supseteq A(G - \beta) - 5\beta$ である. したがって, A' は $G'' = A^{-1}(A(G - \beta) - 4\beta)$ の微分同相写像であり, $A'G'' \supseteq A(G - \beta) - 5\beta$ を満たす. ところが, 4 項に応じて, $A(G - \beta) \supseteq \Omega - \Theta\beta$ であり, したがって $A'G'' \supseteq \Omega = \Omega - (5 + \Theta)\beta$ を満たす[22]. そこで $G_1 = A'^{-1}\Omega_1$, $G' = A'^{-1}\Omega'$ と置く. ここで $\Omega' = \Omega_1 - d$, $d = 2\Theta b + (5 + \Theta)\beta$ である. このとき, $\Omega' + 2\Theta b \subseteq \Omega_1$ であり, 4 項に応じて, $G' + b \subseteq G_1$ を得る. 1), 2), 3) の正しさは明らかである. また 1 項に応じて $AG' = AA'^{-1}\Omega' \supseteq \Omega' - \beta = \overline{\Omega}'$ である. したがって,

$$\mathrm{mes}\ (G \backslash G') = \int_{\Omega \backslash AG'} \left(\det \left|\frac{\partial A}{\partial p}\right|\right)^{-1} d\omega \leq \theta^{-n}\ \mathrm{mes}\ (\Omega \backslash AG') \leq \theta^{-n}\ \mathrm{mes}\ (\Omega \backslash \overline{\Omega}').$$

6. 変形 (distortion) に関する補題

[22] この不等式おかしくないか?

線形変換 D

$$z = x,\ y \to x',\ y' = z,\quad \text{ただし}\quad x' = Ax,\ y' = Bx + Cy,\ z' = Dz$$

は変換 A, B, C の合成であって,

$$\theta_A|x| \le |Ax| \le \Theta_A|x|,\quad |Bx| \le \Theta_B|x|,\quad \theta_C|x| \le |Cx| \le \Theta_C|x|.$$

が成り立つとする. このとき

$$\theta_D|z| \le |Dz| \le \Theta_D|z|, \tag{5.4.1}$$

である. ただし, $\Theta_D = \Theta_A + \Theta_B + \Theta_C$ および $\theta_D^{-1} = \theta_A^{-1} + \theta_C^{-1} + \theta_A^{-1}\theta_C^{-1}\Theta_B$.

<u>証明</u>. (5.4.1) の第二の不等式はあきらかであり, 第一の不等式は D^{-1} が

$$\begin{aligned}&z' = x',\ y' \to x,\ y = z,\\ &\qquad \text{ただし } x = A^{-1}x',\ y = C^{-1}y' - C^{-1}BA^{-1}x',\ z = D^{-1}z'\end{aligned}$$

なる形をしていることからしたがう.

7. 極座標に関する補題

$$p = \sqrt{2\tau}\cos\varphi,\quad q = \sqrt{2\tau}\sin\varphi, \tag{5.4.2}$$

と置く. $f(p, q)$ が $|x| \le R$ ($x = p, q$; $|x| = \max\{|p|, |q|\}$) に対して解析的であるなら, $f[p(\tau,\varphi), q(\tau,\varphi)]$ は

$$|\tau - \tau_0| < \tau_0,\quad |\mathrm{Im}\ \varphi| \le 1\quad \left(\tau_0 = \left(\frac{R}{4}\right)^2\right) \tag{5.4.3}$$

に対して解析的である. またさらに, $|\mathrm{Im}\ \varphi| \le 1$ なら

$$\sqrt{\tau} \le |x| \le \sqrt{8|\tau|} \tag{5.4.4}$$

が成り立つ.

<u>証明</u>. 領域 (5.4.3) において, 関数 (5.4.2) は一価であり, $|x|\sqrt{|2\tau|}\cosh 1(?) < \sqrt{8|\tau|} \le \sqrt{16\tau_0} = R$. さらに, $2\tau = p^2 + q^2$. したがって $\sqrt{|\tau|} \le |x|$.

8. 極座標に関する注意. 実領域において,

$$p_i = \sqrt{2\tau_i}\cos\varphi_i,\quad q_i = \sqrt{2\tau_i}\sin\varphi_i,$$

$$x_i = p_i,\ q_i (i = 1, 2),\quad \Delta z = z_1 - z_2\ (z = p,\ q,\ \tau,\ \varphi,\ \text{or } x)$$

を仮定する. $|x_i| \le \dfrac{1}{2}$, $|\Delta x| \le \sqrt{\tau_i}$ なら, $|\Delta\tau| \le |\Delta x|$, $|\Delta\varphi| \le \dfrac{2|\Delta x|}{\sqrt{\tau_1}}$ である.

<u>証明</u>. $r_i = \sqrt{2\tau_i}$ と置く. $|x_i| \le \dfrac{1}{2}$ のとき, 明らかに $|r_i| \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ および $|\Delta\tau| = \left|\Delta\dfrac{r^2}{2}\right| \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}|\Delta r| \le |\Delta x|$ である. また, $\sqrt{2}|\Delta x| \le \sqrt{2\tau_1} \le r_1$ のとき $|\Delta\varphi| \le \arcsin\dfrac{\sqrt{2}|\Delta x|}{r_1} \le \dfrac{2|\Delta x|}{\sqrt{\tau_1}}$ であり, 要求どおりである.

§5. 収束性補題

1. 領域列 $F^{(s)}$ および微分同相写像列 $B_s : F^{(s)} \to F^{(s-1)}$ $(s = 1, 2, \ldots)$ が与えられたとする．以下を仮定する:

1) $|B_s - E| < d_s$,
2) $F^{(s)} \subseteq F^{(s-1)} - d_s$,
3) $|dB_s| < 2|dx|$,
4) $d_s < C4^{-s}$.

このとき列 $S_s = B_1 B_2 \ldots B_s$ $(s = 1, 2, \ldots)$ は $F^{(\infty)} = \cap F^{(s)}$ 上，$|S_\infty - E| < C$ を満たす連続写像 S_∞ へと一様収束する．

証明．$x \in F_s$ とする．1) より，$|B_s x - x| < d_s$ である．2) より，ラグランジュの公式 (3 節 4 項) が区間 $x, B_s x$ および写像 S_{s-1} に適用できる．3) より，$|dS_{s-1}| < 2^s |dx|$ が出る．4) に応じて，$|S_s x - S_{s-1} x| = |S_{s-1} B_s x - S_{s-1} x| < 2^s d_s < C2^{-s}$. が成り立つ．これが証明すべきことであった．

2. $F = d$ を区間 $x = x_0 + vt,\ 0 \leq t \leq \dfrac{d}{\varepsilon}$ の近傍とする．$Y(x)$ は F 内の滑らかなベクトル場であって，$|Y - v| \leq \varepsilon$ を満たすとする．$x(t)$ は方程式 $\dfrac{dx}{dt} = Y(x)$ の解で，初期条件 $x(0) = x_0$ を満たすものとする．このとき，$0 \leq t \leq \dfrac{d}{\varepsilon}$ に対して $|x(t) - (x_0 + vt)| \leq d$ である．

証明．$y(t) = x(t) - (x_0 + vt)$ を考える．$t < t_0$ に対して，$|y(t)| < d$ および $|y(t_0)| = d$ が常に成り立つとする．$t < t_0$ に対して $\left|\dfrac{dy}{dt}\right| \leq \varepsilon$ および $y(0) = 0$ であるから，ラグランジュ公式より $|y(t_0)| \leq \varepsilon t_0$ であり，これより $t_0 \geq \dfrac{d}{\varepsilon}$ が得られ，証明すべきことが得られた．

3. $F^{(0)}$ に関する 1 項の条件において，滑らかなベクトル場 $Y^{(0)}$ が与えられて運動 $S^t_{(0)}(x)$: $\dfrac{d}{dt} S^t_0(x) = Y^{(0)}(S^t_0(x))$, $S^0_0 x = x$ を定義するとする．自然に運動 $S^t_s = S_s^{-1} S^t_0 S_s$ が生じ，対応して $F^{(s)} : Y^{(s)}(X^{(s)}) = \dfrac{d}{dt}(S^t_s X^{(s)})|_{t=0}$ 上に場 $Y^{(s)}$ が生じる．

以下を仮定する:

5) 列 $Y^{(s)}(X)$ は $s \to \infty$ のとき収束する．$X \in F^{(\infty)}$ から $Y^{(\infty)}(X)$ へ[23]，また $F^{(\infty)}$ 上で $|Y^{(s)} - Y^{(\infty)}| < d_{s+1}$;

6) 区間 $x = x_0 + vt$, $0 \leq t \leq 1$ は $F^{(\infty)}$ に属し，この区間上で $Y^{(\infty)} = v$;

7) $F^{(s)}$ 上で $\left|\dfrac{\partial Y^{(s)}}{\partial X^{(s)}}\right| \leq \Theta$ が成り立つ．ただし，Θ は s に依らない．

このとき $0 \leq t \leq \dfrac{1}{1+\Theta}$ に対して，$S^t_0(S_\infty x_0) = S_\infty(x_0 + vt) \in F^{(0)}$ である．

[23] 何かおかしい．

証明.

$$|S_s^t x_0 - (x_0+vt)| \le d_{s+1} \quad \text{for} \quad 0 \le t \le \frac{1}{1+\theta} \tag{5.5.1}$$

であることを示す. 区間 $x_0+vt\left(0 \le t \le \dfrac{1}{1+\Theta}\right)$ 上で, 5) および 6) に応じて, $|Y^{(s)}-v| \le d_{s+1}$ である. この区間 (1 項の 2) よりこれは $F^{(s)}$ に属する) の d_{s+1} 近傍において, ラグランジュの公式を使うと, 7) より, $|Y^{(s)}-v| \le (1+\Theta)d_{s+1}$ が成り立つ. 2 項において $d=d_{s+1}$ および $\varepsilon=(1+\Theta)d_{s+1}$ と置けば, (5.5.1) が得られる.

(5.5.1) および 2) からすると, x_0+vt, $S_s^t x_0$ を端点とする区間は領域 $F^{(s)}$ に属する. ラグランジュの公式より, 3) と 4) を考慮すると, $s\to\infty$, $0 \le t \le \dfrac{1}{1+\Theta}$ のとき $|S_sS_s^t - S_s(x_0+vt)| \to 0$ を得る. これが証明すべきことであった.

4. 極限の測度. F をユークリッド空間の有界連続体 (compactum) とし, $S_s(s=1,2,\ldots)$ は $F^{(s)} \subset R$ 上の F の連続写像列であって, $F^{(\infty)}$ 上の写像 S_∞ に一様収束するとする. このとき mes $F^{(\infty)} \ge \overline{\lim}$ mes $F^{(s)}$ である.

証明. $\delta < \delta(\varepsilon)$ および任意の $\varepsilon > 0$ に対して, mes $(F^{(\infty)}+\delta) <$ mes $F^{(\infty)}+\varepsilon$ である. 一様収束性より, 十分大きな $s(\delta)F^{(s)} \subseteq F^{(\infty)}+\delta$ に対して

$$\text{mes } F^{(s)} < \text{mes } (F^{(\infty)}+\delta) < \text{mes } F^{(\infty)}+\varepsilon,$$

を得る. これが要請されたことである.

§6. 記法

IV 章および V 章で系統的に使う記法を以下に記載する.

1. 関数. ここで考える関数はすべて複素解析的であり, 実変数の場合は実数を取るとする. 正準共役変数 $p=p_1,\ldots,p_n$ と $q=q_1,\ldots,q_n$ の n 次元複素空間を考える. 変数は $x=p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n=x_1,\ldots,x_{2n}$ とも書く. これらの変数は 2 つのグループに別れる. n_0 個の「高速」変数 $p_1,\ldots,p_{n_0}$ はベクトル p_0 を構成し, 残りの n_1 個の「低速」変数 $p_{n_0+1},\ldots,p_n$ はベクトル p_1 を構成する. 同様に, q_0,q_1 および $x=p_0,q_0$; $x_1=p_1,q_1$ を定義する (p_1 をベクトルとして扱ったり成分として扱ったりしても混乱は生じない. 成分としてはほとんど使用しないからだ). また, 周波数 $\omega=\omega_0,\omega_1$ の n 次元空間と還元周波数 $\xi=\xi_0,\xi_1$ を使う. ここで $\omega_0=\xi_0$, $\omega_1=\mu\xi_1$ であり, μ は微小パラメータである. 座標の絶対値の最大値 $|x|=\max_j\ |x_j|$ はこれらすべての空間でノルムの役をする.

考える関数は変数 q(または q_0) に関し周期 2π であり, フーリエ級数の形で以下のように表現される:

$$f(q)=\sum_k f_k e^{i(k,q)} = f_0 + \sum{}' f_k e^{i(k,q)} = \overline{f}+\widetilde{f}(q) = [f(q)]_N + R_N f(q).$$

ここで, $\overline{f}=f_0$; $(k,q)=\sum_{j=1}^n k_jq_j$, $\Sigma'=\sum_{k\ne 0}$, $[\ ]_N=\sum_{|k|<N}$ であり, k は整数座標 k_j を持つベクトルである. q に共役な, k のハーモニクスの数の空間において, 絶対値 $|k|=\sum_{j=1}^n |k_j|$ はノルムの

役をする．省略形

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{\partial f}{\partial x_1},\ \ \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots,\ \frac{\partial f}{\partial x_m},$$

を使う．ここで, f は数関数あるいはベクトル関数 $f(x_1, \dots, x_m)$ である．

2. 領域. U をコンパクト複素領域, すなわち, 複素数空間の有界領域であって, その境界も含むものとする．$d > 0$ のとき, $U + d$ および $U - d$ は U の d 近傍および d 近傍が U に入る集合である．U_1 と U_2 が領域のとき, $U_1 \cup U_2$ はその和, $U_1 \cap U_2$ は共通部分, $U_1 \backslash U_2$ は U_1 のうち U_2 に含まれない部分である．$U_1 \subseteq U_2$ は U_1 が U_2 に含まれることを表し, $u \in U$ は点 u が U に属することを意味する．$U_1 \times U_2$ は $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ なる組 u_1, u_2 の集合のことである．

$\mathrm{Re}\, U$ は U と実空間の交わりを表す．Im は虚部であり, $\mathrm{mes}\, U$ は, たとえ複素数集合であったとしても, $\mathrm{Re}\, U$ のリュベーグ測度のことである．

文字 $G,\ G_0,\ G_1;\ \Omega,\ \Xi,\ \Xi_0,\ \Xi_1$ は複素空間 $p,\ p_0,\ p_1;\ \omega,\ \xi,\ \xi_0,\ \xi_1$ のコンパクト領域である．文字 F は $p \in G,\ |\mathrm{Im}\, q| \le \rho$ の形の条件によって指定される x 空間の領域を表す．そこで点 q と $q + 2\pi k$ は同一視されるので, $\mathrm{mes}\, F = (2\pi)^n\ \mathrm{mes}\, G$ である．

領域の特殊な記法のリストは IV 章 12 節 2 項にある (V 章 1 節 2 項も見よ).

3. 写像. 考える写像は解析関数によって与えられる．各点において, 1 対 1 であって, 連続微分可能, 逆も同様な写像は, U_1 から U_2 の上への微分同相な写像あるいは微分同相写像とよばれる．写像 A の点 x における微分 (differential) とは, 線形作用素 $dx \to dA = \dfrac{\partial A}{\partial x} dx$ のことである．

$p \to \omega$ および $p \to \xi$ の形の領域 G の微分同相写像は文字 A で表す．文字 B と S は領域 F の微分同相写像であって, 正準変換でもある (たとえば [14] を見よ)．E は恒等写像を表す．$A \le E$ は任意の x に対して $|Ax| \le |x|$ のことである．

変換 B と S によって x 空間に $X,\ x^*,\ X^*,\ X^{(s)}$ 等々の新変数を導入する．このとき, 変数 $X_0,\ X_1;\ P_0,\ P_1;\ Q_0,\ Q_1$ などは $x_0,\ x_1;\ p_0,\ p_1;\ q_0,\ q_1$ などに対応する．

4. 定数. 数 $\rho,\ \theta,\ \Theta,\ C,\ \kappa$ は正定数である．数 $\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \mu$ は上の正定数に比べてずっと小さく, $\gamma \gg \delta \gg \varepsilon \gg \beta \gg \mu$ を満たす．数 N は大きな正数である．

L と ν は大きな正数であって, (自由度 n にのみ依存する) 絶対定数である．

添字 s は近似の次数を数える．