VI 章．補遺

この章は, 多数の解決および未解決問題に関する注意 (remarks) からなる．5 つの節はそれぞれ独立である．

1 節では, 力学の可積分問題においてどうして運動が準周期的であるかを示す．

ある種の未解決問題を 2 節で考察する．多次元系の位相的不安定性の可能性 (不安定ゾーン) を議論し, 摂動の大きなモデル問題を 2 つ議論する (円から円の上ねの写像の問題と準周期係数を持つ方程式の還元可能性)．C.L.Siegel と E.G.Belaga の結果によると, 平衡位置, 周期解, あるいは準周期解の近傍の微分方程式系は線形正規形に還元できる．これについて 3 節で報告する．

混合 (intermixing) を引き起こすある機構について 4 節で議論する．最後に 5 節でハミルトン関数が解析的であるべしという要請を緩めた J.Moser の平滑化技術を簡単に記述する．

§1．可積分系

力学の可積分問題に準周期運動がなぜいつも現われるのかを説明する．

J. Liouville([4] を見よ) の証明によると, n 自由度の系

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (p = p_1, \ldots, p_n; q = q_1, \ldots, q_n) \tag{6.1.1}$$

において, 包合関係 (1 項参照) にある n 個の積分

$$H = F_1, F_2, \ldots, F_n, \quad (F_i, F_j) = 0 \tag{6.1.2}$$

が知られると, 系は求積によって積分可能である．可積分問題は多数知られている．これらの例すべてにおいて積分 (6.1.2) を見つけることができる．

ずっと以前に, これらの例において, 方程式 $F_i = f_i =$ 一定 によって指定される多様体がトーラスであること, またその上の運動が準周期的であることが知れた．[20] にしたがって, 一価の積分 (6.1.2) を持つ任意の問題において, このような状況が不可避であることをこれから証明する．証明は単純な位相幾何学的議論に基づく．

1．記法. $2n$ 次元ユークリッド空間の点 p, q を $x = x_1, \ldots, x_{2n}$ と表す．関数 $F(x)$ の勾配ベクトル $F_{x_1}, \ldots, F_{x_{2n}}$ を grad F で表す．すると, ハミルトン方程式 (6.1.1) は

$$\dot{x} = I \text{ grad } H, \quad \text{ただし} \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \tag{6.1.3}$$

の形を取る．ここで E は階数 n の単位行列である．

2 つのベクトル x, y の skew–scalar 積を導入する:

$$[x, y] = (Ix, y) = -[y, x], \tag{6.1.4}$$

これは簡単に示すことができるように, 辺を x, y とする平行四辺形を座標平面 $p_i q_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ に射影したときの面積の和を表現する．

skew–scalar 積を保存する線形変換 S(したがって, すべての x, y に対して $[Sx, Sy] = [x, y]$) はシンプレクティックとよばれる．たとえば, 行列 I による変換はシンプレクティックである．

グラジエントの skew–scalar 積 $[\mathrm{grad}\ F, \mathrm{grad}\ G]$ は関数 F と G の**ポアッソン括弧** (F, G) と呼ばれる．あきらかに, F が系 (6.1.3) の第一積分であるための必要十分条件はハミルトン関数とのポアッソン括弧 (F, H) が恒等的にゼロになることである．2 つの関数のポアッソン括弧が恒等的にゼロのとき, これらの関数は**包合関係にある**という．

2. 定理. n 自由度のハミルトン系 (6.1.3) が互いに包合関係にある n 個の一価第一積分 (6.1.2) を持つとする．方程式 $F_i = f_i =$ 一定 $(i = 1, \ldots, n)$ は $2n$ 次元 x 空間内に, n 次元コンパクト多様体を定義し, その多様体の各点において勾配 $\mathrm{grad}\ F_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ は線形独立であるとする．

このとき M は n 次元トーラスであり, 方程式 (6.1.3) の解を表現する点 $x(t)$ はトーラスに沿って準周期的である．

証明. A) M は平行化可能である．すなわち, 各点において線形独立な n 個の接線ベクトル場を持つ．

これを示すために, ハミルトン関数を F_i とする系 (6.1.3) を考える．$(F_i, F_j) = 0$ であるから, 関数 F_j はすべて第一積分であり, どの軌跡も全部 M 上にある．したがって, 速度場 $I\ \mathrm{grad}\ F_i$ は M に接する (図 17)．I が非縮退であるから, ベクトル $I\ \mathrm{grad}\ F_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ は各点において線形独立である．

図 17

B) D は M 内の面であり, Γ はその境界であるとする．このとき $\oint pdq$ (すなわち座標面 p_i, q_i $(i = 1, \ldots, n)$ への D の射影の面積の和) はゼロである．

これの証明は M 内の無限小平行四辺形に関して行なえば十分である．Γ は辺を ξ, η とする平行四辺形であるとする．このとき, 射影した面積の和は ξ と η の skew-scalar 積である．すなわち,

$$\oint_\Gamma pdq = [\xi, \eta].$$

そこで, ξ と η がある点で M に接するとする．A) に応じて, M に接する任意のベクトルは n 個のベクトル $I\ \mathrm{grad}\ F_i$ の線形結合である．ところがこれらのベクトルは skew–orthogonal である．というのは, (6.1.2) に応じて

$$[\mathrm{grad}\ F_i, \mathrm{grad}\ F_j] = 0,$$

であり, ゆえに, I がシンプレクティックであることより,

$$[I\ \mathrm{grad}\ F_i, I\ \mathrm{grad}\ F_j] = 0,$$

が成り立つ. したがって, 要請どおり, $[\xi, \eta] = 0$ である.

C) ベクトル場 I grad F_i は非回転的 (irrotational, つまり多価関数の勾配) である.

B) の $\int_{q_0}^{q} pdq$ は M_F 内の積分路に依存しない. したがって, 積分は多価関数 $S(q; f)$ とみなすことができる. 方程式 $p = \dfrac{\partial S}{\partial q}$, $g = \dfrac{\partial S}{\partial f}$ は各近傍において, 母関数を S とする正準変換 $f, g \to p, q$ を定義する ([4] を見よ). 変数 f, g において, ハミルトン関数 F_i は f_i であり, ハミルトン方程式は

$$g_1 = 1, \quad g_j = f = 0 \quad (j \neq i) \tag{6.1.5}$$

に還元する.

速度場 I grad F_i は線形独立であるから, 微分 dg_i は M の各点において線形独立である. g_i を M 上の局所座標と考えよう. 2 つの近傍の交わりにおいて, これらは定数だけ違う. だから, 微分 dg_i は大域的に定義できる. しかし, 関数 g_i は M 上で多価である.

g 座標において M 上のベクトル場 I grad F_i は g_i の勾配と同様非回転である. だから多様体 M は非回転場によって平行化可能である. ゆえに, M がトーラスであることは簡単に言える.

D) 補題. n 次元多様体 M 上に n 個の微分 dg_i があって各点において線形独立であるとする (1 次 (degree) の閉微分形式). このとき, この多様体は n 個の円と直線の直積である.

これを証明する. O を M の点とし, N を M の普遍被覆とする. M 上の各道 OA に N 上の道 $O'A'$ が対応する. 関数 $g_i(A') = \int_{O'A'} dg_i$ は N をユークリッド空間 $g_1, \ldots, g_n$ へと変換する. 簡単に確認できるとおり ([60] 参照), dg_i の独立性の結果として,

α) この写像は空間 g 全体の上への写像である.

β) g の各点は N の唯一の点 A' に対応する.

γ) N の O' と O'' が O を被覆し, かつ $g(O''') = g(O') + g(O'')$ なら, O''' は O を被覆する.

α) と β) からすると, N はユークリッド空間 $g_1, \ldots, g_n$ と同一視でき, γ) からすると, O を被覆する点は N 内で格子をなす (k 個の線形独立ベクトルの整数線形結合の総体). 明らかに, N の点 A' と A'' が点 A を被覆するのは $A' - A''$ が格子ベクトルのとき, そしてそのときのみである. ユークリッド空間 N においてこれらの点を同一視すると, k 個の円と $n - k$ 本の直線の直積を得る. これで補題が証明された.

E) 定理の証明の完結. C) に応じて, 多様体 M_f は補題の条件を満たす. コンパクトであるから n 次元トーラスである. (6.3.5) に応じて座標 g は運動 (6.3.3) の間に一様に変化するから, この運動は準周期的である. これで定理が証明された.

3. 注意. A) 作用–角変数. n 個のベクトル grad F_i が線形独立でない $2n$ 次元空間 x の点集合の次元は一般に $n - 1$ である. したがって grad F_i が線形独立でない n 次元多様体 M_f は例外である ($2n$ 次元空間内の n 次元および $(n-1)$ 次元多様体は一般には交わらない). だから, 「一般の場合」, $(2n-1)$ 次元特異集合は可積分系の $2n$ 次元相空間を n 次元トーラスと n 次元ユー

クリッド空間の部分との直積領域へと分割する. 知られているとおり, 作用–角変数 $I-\omega$(I 章 1 節では p, q と書いた) をこのような領域には容易に導入できる.

それを示そう. トーラス M_f を選び, M_f の基本サイクル γ_i の上の n 個の積分

$$\Delta_i S(f) = \oint_{\gamma_i} pdq \quad (i = 1, \ldots, n)$$

を考えよう. 明らかに, 量

$$I_i(x) = \frac{1}{2\pi}\Delta_i S(F_1(x), \ldots, F_n(x)) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

は F_j の関数であって, それ自身が包合関係にある第一積分である.

$I_i(x)$ は関数的に独立であると仮定する. このとき, 2 項の議論が適用できる. 2 項の C) において, 正準変換 $p, q \to I, w$ を構築した (2 項では変数 I, w は f, g と書いた). サイクル γ_i のひと回りから変数 w_j の増加

$$\Delta_i w_j = \Delta_i \frac{\partial S}{\partial I_j} = \frac{\partial}{\partial I_j}\Delta_i S = \frac{\partial 2\pi I_i}{\partial I_j} = 2\pi\delta_{ij}$$

が得られる. したがって, 変数 W はトーラス上の角変数である.

B) 正準構造. 簡単のため, 1 項および 2 項において, 相空間 p, q がユークリッド空間である場合に話を限ろう. しかし, 相空間が正準構造の与えられた可微分多様体 (非縮退 2–形式を選んで $dp \wedge dq$ の役割をさせる) である一般の場合にも結論のすべてが成り立つことを確認するのは容易である.

C) 「力学系」と古典力学. 2 項の定理は単純な群論的基礎を持つ. ポアッソン括弧はリー代数を構成し, ハミルトン方程式で記述される運動は対応するリー群を構成する. ハミルトン関数を F_i とする運動の可換性は (6.4.2) からしたがう. リー可換群が遷移的に作用するコンパクト一様空間はトーラスである.

この観点からして, もっと一般の場合, すなわち包合関係にない m 個の一価第一積分 $F_1, \ldots, F_m$

$$(F_i, F_j) = \varphi_{ij}(F_1, \ldots, F_m)$$

がある場合を考えるのは面白そうだ. 関数 φ_{ij} はリー代数を定義する. これはどのような代数か, そして不変多様体 M_f ($F_i = f_i =$ 一定) のトポロジーに, またその上の運動 (6.3.3) にどのような制限を課すのであろうか? これらの運動は M_f 上にある種の測度を保存する. 測度を保存する多様体の滑らかな変換の 1–パラメータ群は「力学系」とよばれる.

滑らかな多様体上に定義された「力学系」としてどんなものが力学の問題から生じるのであろうか?

測地流 (たとえば [3], [33] を見よ) と準周期運動が得られることを知っている. ほかの多数の力学系 ([34] を見よ) もまた最近調べられている. これらに力学の中で出会うことは可能か? とくにハミルトン関数を $H = T + U$(T は運動エネルギー, U はポテンシャルエネルギー) とする「自然系」で出会うことがあるか?

§2. 未解決問題

すでに仕上げた手法が適用できる問題はたくさんある．たとえば, G.D. Birkhoff の「ビリヤード問題」[3], 凸解析多様体上の測地流の非エルゴード性の確立, 「磁気面」の問題 ([35], [36]), 剛体力学のさまざまな問題 [37], 天体力学の数多くの問題がこれである．これらの問題にかかわることなく, もっと基本的な疑問を考察する．

1. 不安定ゾーン. これまでの節の内容との関係で生じる基本的かつ主要な問題は次のようなものである．

問題 I. 不変トーラスが相空間を分割しないとき, 摂動論の多次元問題には本当の不安定性はあるのか?

すでに指摘したとおり (I 章 10 節), 最初の未挑戦問題は, 4 次元空間からそれ自身の上への正準写像の不動点の安定性問題である．多次元問題において, 不変トーラスは相空間より次元が少なくとも 2 つ低い．トーラスは相空間の中に, 3 次元空間の線のように存在する (図 18).

図 18

位相不安定性が典型的であろうと推察される．不変トーラスの間隙を出発するある種の軌跡は遠くまで行き得る．というのは, 間隙はすべて連結集合になっており, 無限遠にまで広がっているからである (図 18 を見よ)．惑星運動の位相不安定性はとくにこの前提の妥当性からしたがう．III 章の結果からは, 初期条件の任意に小さな違いによって, 無限時間の間に運動の性質がまったく異なってしまう可能性を排除できない．III 章においてわれわれが証明したのは単に初期条件のこのような違いが高度に特殊な形をとるべきことである．すなわち, 初期条件の大多数にとって運動は準周期的のままである．言えるのは, 運動の「測度論的」安定性, つまり小さな測度の集合を除いてほかのすべての初期条件に対しての安定性である．われわれの前提を以下のように定式化しよう．

摂動理論の多次元問題において典型的なのは, 位相不安定性と準周期運動の測度論的安定性の組合せである．

この前提の確認のためには, 共鳴に適応させた漸近法をもっと詳しく考察する必要がある．

2. 不変トーラスが相空間を分割する.

これによって不安定ゾーンの詳しい研究をも利する．はっきりさせるため, Birkhoff の問題 (図 6) を考えよう．ポアンカレの時代以来知られているように, 隣り合う 2 つの双曲点セパラトリックスのふるまいは一般に図 19 に示すとおりの複雑なネットワーク[1] である．厳密に言え

[1] これを発見してポアンカレは次のように述べた．「交差は一種の格子, 蜘蛛の巣, あるいはネットワークを形成し, 無限に巻いたループを作る．どの 2 つの曲線も自分自身とは交わらず, 複雑に折り畳まれて, ネットワークのループのすべてと無限回交わる

この図の複雑さに打たれて, 図を書く気にもならない．三体問題ばかりでなく動力学のすべての問題の複雑さ

ば, 第一積分の非存在と摂動論の級数の発散 [10], [38] はこの発想を基にしている. ただ, 解析系において O の任意の近傍に一般型の双曲型非特異点が存在することはまだ厳密には証明されていない. 不安定ゾーンの存在はしたがって証明されておらず, 一般の場合にセパラトリックスが交わる事実も証明されていない. 交わるであろうと信じているが, 文献には厳密な証明がないことを強調しておく.

図 19

不安定ゾーン内の典型的軌跡のふるまいのエルゴード理論的観点からの研究は面白そうだ. 簡単なモデルとして, 区間 $[0,1)$ の部分 $\Delta_1=[0,a)$, $\Delta_2=[a,b)$, $\delta_3=[b,1)$ を $\Delta_3,\Delta_2,\Delta_1$ の順への並べ替えを考えることができる.

3. 大摂動

不変トーラスの運命は, 摂動パラメータ μ が非常に小さい場合に以前の章で追いかけた. 摂動が大きいときにも準周期運動は保たれるのであろうか?

問題 II. 任意の質量比で互いの距離が同じ程度の三体 (n 体) 問題において正測度を占める有界運動はあるか? 不変トーラスが壊れてしまう質量比 μ の臨界値はあるか?

モデル問題においても, この問題への答えは出されていない. このうちの 2 つをここで手短かに考えてみよう.

4. 円からそれ自身の上への解析写像

円上に角度座標 φ (mod 2π) を導入する. このとき, $2\pi\omega$ の回転は

$$T_0:\varphi\to\varphi+2\pi\omega. \tag{6.2.1}$$

なる形に書かれる. 円からそれ自身の上へのもっと一般の写像を考えよう. 変動する角度 $f(\varphi)$ の回転

$$T:\varphi\to\varphi+f(\varphi). \tag{6.2.2}$$

である. ここで $f(\varphi)$ は周期 2π の関数である. $\varphi_1<\varphi_2$ に対してつねに $\varphi_1+f(\varphi_1)<\varphi_2+f(\varphi_2)$ が成り立つなら, 変換 (6.2.2) は 1 対 1 である.

に関してよい描像を与えてくれるものはなにひとつない. 正則な積分はないしボーリン級数は発散する.」([1], III 巻, p.369).

図 19 は V.K. Melnikov の仕事から転載した.

φ から変換を逐次作用させて得られる円上の点列 $\varphi, T\varphi, T^2\varphi, \ldots$ に興味がある. ポアンカレ [2] の証明によると, 回転各の時間平均がつねに存在する. いわゆる**回転数** (rotation number) である:

$$2\pi\omega = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\varphi)+f(T\varphi)+\ldots+f(T^{n-1}\varphi)}{n}$$

数 ω の算術的性質は点 $T^n\varphi$ のふるまいに本質的な影響を持つ. ω が通常の無理数性の要請を満たすとする. すなわち, ある $K>0$ に対して

$$|n\omega+m| \geq K|n|^{-2}. \tag{6.2.3}$$

問題 III. 写像 T は解析的であるとする. 解析的な変数変換 S を行なうことにより, この T を角度 $2\pi\omega$ の回転 T_0 に持っていくことは可能か? すなわち,

$$STS^{-1} = T_0\ ? \tag{6.2.4}$$

(6.2.4) において, S は写像 $\varphi \to \varphi + g(\varphi)$ であり, 関数 $g(\varphi)$ は解析的で周期 2π かつ $|g'|<1$ である. Denjoy[39] は, (6.2.4) を満たす変数変換 S が存在し連続であることを示した. A. Finzi[40] は, S が連続微分可能であることを確立した. S の解析性が証明できるのは, T が回転から少しだけ違うときのみである. これに関しては [18] を見よ.

5. Floquet 理論の一般化. k 次元トーラスの点 $q=q_1,\ldots,q_k$ に解析的に依存する行列 $A(q)$ が与えられたとする ($A(q+2\pi)=A(q)$ に注意). 点 $q(t)$ はトーラス上で準周期運動であるとし, 周波数は $\dot{q}=\omega$ ($\omega=\omega_1,\ldots,\omega_k$) であるとする.

準周期係数を持つ線形分方程式系

$$\dot{x} = A[q(t)]x \quad (x = x_1,\ldots,x_n) \tag{6.2.5}$$

を考える. 系 (6.2.5) が定数係数の系

$$\dot{y} = By \quad (y = y_1,\ldots,y_n) \tag{6.2.6}$$

へと**可約**であるのは, 行列 $C(q)$ があって, トーラス上で解析的かつ変換 $x=C(q)y$ が (6.2.5) を (6.2.6) に変えるときである.

周期係数 ($k=1$) の場合, 任意の系は可約である. これは Floquet-Lyapunov の定理による (複素数の場合は任意の rate でいい (?). 実数の場合, $C(q)$ は周期 4π でいい).

$k\geq 2$ なら, (6.2.5) の係数は準周期的であり, 系は $n=1$ の場合でも既約となることもある (小分母のために). ところが, 周波数 ω が (6.2.3) 型の通常の算術的要請を満たせば, 系 (6.2.5) は $n=1$ の場合でも可約である. 算術的要塞が満たされるものと仮定する.

問題 IV[2] **.** $k,n>1$ のとき系はつねに可約であるか?

A.E. Gelman[41] は $n=2$ のとき可約な $A(q)$ はトーラス上の行列全体の空間のある領域を満たすことを証明した. L.Ya. Adrianova[42] はこの結果を $n>2$ へと拡張した. 既約な $A(q)$

[2] D.G.Mackle の指摘によると, A.M. Gleason の例では $A(q)$ の滑らかさを仮定しないと否定的な答えにいたる. われわれに興味があるのは $A(q)$ が q に解析的に依存する場合である.

の領域が存在すれば, それらの正規形の問題が生じる. $q = q(t)$ がある力学系の相点であるような線形系 (6.2.5) の正規形のもっと一般の問題を調べるのが面白い. このような問題は, 以下で見るように, 不変多様体の近傍の研究から自然に生じる.

§3. 不変多様体の近傍

常微分方程式系の解のふるまいの定性的研究は特定の単純な解を見つけることから始まる. すなわち, 平衡位置および周期軌跡がそれである. そのあとで, これらの解の近傍の積分曲線の分布を調べる. その結果, ときには解全体のふるまいに関して重要な結論が得られることもある.

不動点や周期軌跡のものより複雑な構造を持つ不変多様体の近傍の積分曲線のふるまいを考察するのも面白い. 複雑さで次に位置するのは準周期運動で満たされたトーラスである. このようなトーラスの近傍の研究において E.G. Belaga[22] が得た結果をここで示そう. 不動点や周期軌跡に関する同様の結果はそれ以前に C.L. Siegel[9] によって得られている.

1. 平衡位置の近傍

点 O を平衡位置とする解析的常微分方程式系を考えよう. 第一次近似で, 方程式は線形である:

$$\dot{x} = Ax + O(x^2) \quad (x = x_1, \ldots, x_n). \tag{6.3.1}$$

ここで A は定数行列である. 行列 A の固有値 λ_i が異なるなら, 線形変換 $y = Bx$ により, 行列 A は対角形

$$\dot{y} = \Lambda y + O(y^2) \quad (y = y_1, \ldots, y_n) \tag{6.3.2}$$

に還元される. ここで Λ は固有値からなる対角行列である.

線形系

$$\dot{z} = \Lambda z \tag{6.3.3}$$

の場合, O の近傍の構造を調べるには何の困難もない. だが, (6.3.2) の項 $O(y^2)$ は得られる描像を変えてしまうのではないか?

ポアンカレは学位論文において以下の仮定を行なうならばそれが起こらないことを示した.

1) 複素平面の点 λ_i の凸包は O を含まない.

2) 数 λ_i のどれひとつも, 他の λ の正整数係数線形結合で書けない.

仮定 1), 2) に基づいて, ポアンカレは非線形変数変換

$$z = y + O(y^2), \tag{6.3.4}$$

によって, O のある近傍で (6.3.2) を (6.3.3) の形に還元しようとした. 置き換え (6.3.4) によって O の近傍を構成する問題は解ける. すなわち, 系 (6.3.1) と (6.3.3) の積分曲線は同じにふふまう.

条件 1) は Λ 空間の積分領域満たされない. しかし, (6.3.3) の形に還元できない系は例外的であることがわかった. つまり, ほとんどすべての λ に対して (リュベーグ測度ゼロの集合を除いて), (6.3.2) の解析成分 $O(y^2)$ が何であろうと, (6.3.4) から (6.3.3) の形への解析的変換がある. この結果は C.L. Siegel[9] による.

置き換え (6.3.4) は y に関するテーラー級数展開の形で求めることができる．係数は小分母 (6.3.5) を含む公式によって逐次計算することができる．Siegel が与えた収束性の証明は, 分母のうち, 小分母に出会うのはほんのたまにであるという議論に基づいている．

置き換え (6.3.4) を決めるにあたってニュートン法を用いれば, 上の議論を使わずに同じ結果を得ることができる．

ニュートン近似は収束するなかりでなく, 安定になる．テーラー級数の各係数は有限回の近似をすれば正確に決まる (s 次近似のあとで, $2^{s-1}+1$ 階の項が安定になる)．

置き換え (6.3.4) が存在するためには, 生じる小分母が, ある $K>0$ に対して, 非負の整数成分 k_j を持つベクトル K を使って,

$$|\lambda_i-(\lambda,k)|\geq K|k|^{-(n+1)}\quad (|k|=\sum_{j=1}^{n}|k_j|>1; i=1,\ldots,n) \tag{6.3.5}$$

と見積もることができれば十分である．条件 (6.3.5) は, 条件 1) と 2) が成り立つと自動的に満たされる (上を見よ)．これはほとんどすべての λ に対して満たされる．ただ正準系では満たされない (?)．

2．周期運動の近傍

任意の点における軌跡に垂直な面積をそれ自身の上に写す写像は周期運動に自然に結びつく．最も単純な場合にこのような写像の構築を扱った Siegel[8] の結果 (いわゆる「中心問題」, [53] を見よ) を定式化しよう．

$$z\to Tz=e^{2\pi i\omega}z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots \tag{6.3.6}$$

は複素面 z の O の近傍をそれ自身の上に写す等角写像であるとし, ω は条件 (6.2.3) を満たすとする．このとき負動転 O は安定である．さらに, 解析的置き換え

$$w=z+b_2z^2+b_3z^3+\ldots$$

が存在して, T を角度 $2\pi\omega$ の回転

$$w\to e^{2\pi i\omega}w.$$

へと変換する．

したがって, z 面の O の近傍は解析不変曲線 $|w|=$ 一定 によって分割される． 軌跡 T^nz $(n=1,2,\ldots)$ はこの曲線をいたるところ稠密に満たす．

等角写像を正準写像と比較するのは教育的である (序 4 節を見よ)．

多次元の場合も同様の結果が得られる．Floquet 理論 (2 節 3 項) をこの結果と結びつけると,「一般の場合」の周期軌跡の近傍の研究が定数係数の線形系の研究に還元されると納得できる．この結果には長くとどまるつもりはない．というのは, この結果は次の節のもっと一般の定理に含まれるからである．

3．準周期運動の近傍 $n+m$ 個の微分方程式の系が, 周波数 $\omega_, \ldots,\omega_m$ の準周期運動の軌跡で満たされた m 次元不変トーラス T を持つとする．座標 $q_1,\ldots,q_m; x_1,\ldots,x_n$ がこのトーラスの近

傍に導入できるとする. ここで q はトーラス T 上の角度変数であり, トーラス上で $x=0$ である (?). わが微分方程式は

$$\left.\begin{array}{ll}\dot{x}=A(q)x+f(x,q) & (x=x_1,\ldots,x_n),\\ \dot{q}=\omega+g(x,q) & (q=q_1,\ldots,q_m),\end{array}\right\} \tag{6.3.7}$$

なる形を取る. ここで $f=O(x^2)$, $g=O(x)$ である.

行列 $A(q)$ を持つ線形系が可約 (5 項を見よ) であるとする. したがって, (6.3.7) の代りに, 系

$$\dot{y}=\Lambda y+f(y,g),\quad \dot{q}=\omega+g(y,g) \tag{6.3.8}$$

を考える. ここで Λ は固有値 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ の定数対角行列であり, $f=O(y^2)$, $g=O(y)$ は解析的で, q に関し周期 2π である.

同じニュートン法を使って, E.G. Belaga[22] が証明するところによると, 仮定 (6.3.11) の下で, 解析的変数変換

$$Y=y+\varphi(y,q),\quad Q=q+\psi(y,g) \tag{6.3.9}$$

があって, (6.3.8) を線形系

$$\dot{Y}=\Lambda Y,\quad \dot{Q}=\omega \tag{6.3.10}$$

に還元する. (6.3.9) の変数 ($\varphi=O(y^2)$, $\psi=O(y)$ は q に関し周期 2π) が導入できるのは, 以下の算術条件が満たされるときである. すなわち, ある $K>0$ に対して

$$\begin{gathered}|(k,\lambda)-\varepsilon\lambda_j+i(l,\omega)|\geq K(|k|+|l|)^{-(m+n+1)}\\ (\varepsilon=0,1;j=1,\ldots,n;i^2=-1)\end{gathered} \tag{6.3.11}$$

が, すべての整数ベクトル $k=k_1,\ldots,k_n$; $l=l_1,\ldots,l_m$ に対して成り立つ. また (6.3.11) において

$$|k|=\sum_{\alpha=1}^{n}k_\alpha>1+\varepsilon,\quad k_\alpha\geq 0,\quad |l|=\sum_{\beta=1}^{m}|l_\beta|.$$

非線形系 (6.3.8) はこうして容易に積分可能な線形系 (6.3.10) に還元される. 条件 (6.3.11) は, (6.3.7) の行列 A によって定義される固有値および準周期運動の周波数 ω に制限を課すのみであることを指摘しておく. また (6.3.7) の関数 f と g は任意である. 条件 (6.3.11) が破れるのは λ, ω 空間のリュベーグ測度ゼロの集合の上でのみである. 残念ながら, 正準系はこの例外的な集合に含まれる.

正準系の準周期運動の近傍に関する理論を, Birkhoff(I 章 9 節) が平衡位置の近傍および周期軌跡の近傍に関して構築した理論に似せてつくるのは面白いことだ. このような理論ができれば, 多次元の場合の不安定ゾーン (2 節 1 項) の構造理解の手助けになろう. だが, いまのところわれわれの手の内にない線形理論に基づいて作らねばならない.

4. もっと複雑な場合準周期運動よりも複雑な運動の近傍の構造はまったく研究されていない[3]. 複素時間の場合に系を線形系に還元する問題もわたしには面白く思える. 時間が複素数で

[3] 校正中に書いた注意: 散逸系における不変多様体の存在に関する面白い結果が最近 N.N. Bogolyubov および J. Moser によってニュートン法を使って得られた.

あると,「積分曲線」は 2 次元曲面 (実数の意味で) である. これらの曲面の大域的ふるまいの研究は始まったばかりである [43], [44].

§4. Intermixing

統計力学の「エルゴード仮説」は,「一般形の」力学系において等エネルギー面 $H = h$ 上のがエルゴード性と混合性 (intermixing) を持つという発想に関係する. いままでの章の結果によれば, エルゴード性と混合性は一般現象ではなく, 特殊な条件と結びついている. ここでは, 混合性を引き起こし得るある機構を考察する.

1. 衝突最も簡単なモデルとして, ユークリッド計量を持つ 2 次元トーラス面上の完全弾性球粒子 2 個の運動を考える. 簡単のため, はじめに粒子のひとつが固定されているとする. 第二の粒子 (これを点とみなす) は「トーラスビリヤードテーブル」上を,「入射角は反射角に等しい」という法則にしたがって固定面に反射されながら動く (図 20).

図 20, 21

同時に, 楕円ビリヤードテーブル (図 21) も考える. 楕円は偏平 (oblate) な楕円体と考えることができ, 点は測地線に沿って動き, 反射の法則にもしたがう. まったく同じようにして, トーラスビリヤードテーブルは穴のあいた両面 (two-sided) トーラスであり, 粒子はその上を測地線に沿って動くと考えることができる. ところが, 両面楕円が偏平楕円体なら, 穴あき両面トーラスは (種数 2 の) 偏平「巻きパン」(Kringel) である. だから, わがトーラスビリヤードテーブル上の運動は結び目型曲面 (knotted shaped surface) 上の測地線に沿っての運動の極限になったいる.

よく知られているとおり, 測地線に沿っての運動の特徴は, その曲面のガウス曲率に強く依存する. 負曲率曲面上では測地線は強く不安定である. この場合, エルゴード性, 非常に強い混合性, その他が証明されている ([33], [46], [47]).

最初のビリヤードテーブルに戻り, 図 20 と図 21 の図形の曲率を考えよう. 楕円体は正の曲率を持ち, 積分すると 4π に等しい (ガウス・ボンネの定理). 楕円体をどんどん偏平にすると, 曲率は楕円の境界に沿って集積する.「巻きパン」の場合, 曲率の積分は -4π に等しい. だから, 両面トーラスビリヤードテーブルは, いたるところ負曲率の偏平曲面とみなすことができる. 偏平にすることにより, 曲率はすべて周に沿って集積する.

上の議論は, もちろんわがモデルのエルゴード性の証明ではない. だが, 負曲率の曲面上の測地線を調べる方法を適用して, エルゴード仮説を証明する試みをすることが可能であること

を示している[4].

2.　特異スペクトル混合に関して別の場合がある． 非常にゆっくりした混合である． A.N. Kolmogorov が与えた例 d である:

$$\dot{x} = \omega_1 A(x,y), \quad \dot{y} = \omega_2 A(x,y) \tag{6.4.1}$$

$(x, y(\mathrm{mod}\ 2\pi)$ はトーラスの点の角度座標, $A > 0$ はトーラス上の解析関数, $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ は無理数).

有理数によって異常なほどよく近似できる $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ のある値に対して, $A(x,y)$ をうまく選ぶと, (6.4.1) は混合系になる. 力学系 (6.4.1) のスペクトルの性質を明らかにするのが面白そうだ (スペクトルは特異であると予想される).

もうひとつ永年運動に関連して混合機構がある. 最も簡単なモデルとして, 低摩擦の 1 次元系を取る. だが, 類似の現象は保存系にも存在する ([49] 参照).

3. 進化. ポテンシャルエネルギー $U(q)$(図 22) を持ち, 低摩擦 $\mu F(p,q)$, $\mu \ll 1$ の働く 1 次元系を考えよう. 明らかに, M のほとんどすべての点は時間が経つにつれてポテンシャル極小 A または B のどちらかに到達する. だが, どちらに行く?

[4] この方向への最初の試みは N.S. Krylov[48] が行なった. 校正中の注意: Ya.G. Sinai はつい最近ここで考えたビリヤードテーブル問題および統計力学のさまざまな問題においてエルゴード性を証明した.

図 22, 23

初期エネルギー $h > 0$ のとき, A または B に到達する確率 p_A または p_B が確定する. これらの確率は公式 (図 23 を見よ)

$$\frac{p_A}{p_B} = \frac{\oint_a F dq}{\oint_b F dq}, \quad p_a + p_B = 1. \tag{6.4.2}$$

によって与えられる.

運動は初期条件で決まるから, x から A へ動く確率を定義する必要がある. $\Omega(d) = d$ を相空間の点 x の近傍とし, $\Omega_A(d, \mu)$ は $\Omega(d)$ を出発する初期条件のうち, 摩擦が μF のときに A に到達する集合であるとする. 定義により

$$p_A = \lim_{d \to 0} \lim_{\mu \to 0} \frac{\text{mes } \Omega_A(d, \mu)}{\text{mes } \Omega(d)}$$

である. 公式 (6.4.2) によると, p_A は x に依存せず ($H(x) > 0$ なら), 臨界エネルギーレベル $H(p, q) = 0$ における $F(p, q)$ の値によって決定される. (6.4.2) の証明は読者に任せる.

縮退の場合, 保存系でも決定性を失う場合があり得る (I 章 5 節). 不変トーラスによる非摂動相空間の層状分割が特異点を持つ場合がある. n_0 次元不変トーラスが永年変化して, このような特異多様体へと還元されるとき決定性を失う.

もうひとつゆっくりした混合過程は共鳴を通した系の進化にに関係する (II 章 5 節). これらの現象はすべて厳密な数学的取扱いを待っている. 厳密でない取扱いは B.V. Chirikov の学位論文 (Novosibirsk, 1959) で記述されている.

A.M. Molchanov は [21, pp.42-49] において, 間違った「運動の分割に関する定理」を定式化した. 弱い方の主張 (ゆっくりした運動に周期性があるとき変数の変化は多価である) は正しい. だが, A.M. Molchanov はこの主張については証明していないと述べている.

§5. 平滑技術

この節では, J. Nash[50] にまで遡る平滑化技術の基本的発想を説明しよう. J. Moser はこれを使ってハミルトン関数が解析的であるべしとの要請を 333 階の微分が滑らかであるべしとの要請で置き換えた. Moser のすばらしい論文 [24], [25] に詳しい証明があるので参照して欲しい. しかし, その論文の中で, 重要な発想のひとつ (不等式 (6.5.6) の使用) がやや隠されている. J. Moser が 1962 年の夏にモスクワ大学で行なった証明を追ってみよう.

1. 技術補題. 周期関数

$$f(x) = \sum_{k \neq 0} f_k e^{i(k,x)} \quad (x = x_1, \ldots, x_n; k = k_1, \ldots, k_n) \tag{6.5.1}$$

を考える. 記法

$$\sum_{|k| \leq N} f_k e^{i(k,x)} = f_N(x), \quad \sum_{|k| > N} f_k e^{i(k,x)} = R_N f \quad (|k| = |k_1| + \ldots + |k_n|) \tag{6.5.2}$$

を導入する. 微分

$$|f^{(l)}| = |f^{(l)}(x)| = \max_{0 \leq l_1 + \ldots + l_n \leq l} \left| \frac{\partial^{l_1 + \ldots + l_n}}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l}} f \right| \tag{6.5.3}$$

の見積もりを見つけよう.

$0 \leq \lambda \leq l$ を整数とする. 以下の主張は知られており, 証明も簡単である:

$$|f^{(l)}| \leq M \quad のとき \quad |R_N f^\lambda| \leq CMN^{-(l-\lambda-\delta)}. \tag{6.5.4}$$

$$|f| \leq M_0 \quad のとき \quad |f_N^\lambda(x)| \leq CM_0 N^{\lambda+\delta}. \tag{6.5.5}$$

$$|f| \leq M_0, \quad |f^{(l)}| \leq M \quad のとき \quad |f^\lambda| \leq CM_0 \left(\frac{M}{M_0}\right)^{\lambda/l}. \tag{6.5.6}$$

ここで $\delta > 0$ は f, M_0, M, N, l, λ に依らない定数であり, $C > 0$ は f, M_0, M, N に依らない定数である ([59] を見よ).

2. 平滑化つきニュートン近似. I 章で記述したのに似たニュートン型逐次近似過程が存在すると仮定する. 「摂動」 $f(x)$ に関して, 「変数変換」 $x \to x + g(x)$ が構築されると仮定する. ここで関数 $g(x)$ は, たとえば, 級数

$$g(x) = \sum_{k \neq 0} \frac{i f_k}{(k, \omega)} e^{i(k,x)} \tag{6.5.7}$$

によって定義される. (ω の通常の算術的性質により)

$$|g(x)| \leq K|f^{(\nu)}(x)|. \tag{6.5.8}$$

を仮定する. さらに, 次の近似では摂動の役割をするのは関数 f', すなわち

$$\Sigma_1 = f(x)\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \Sigma_2 = f(x) - f(x + g(x)), \quad ほか \tag{6.5.9}$$

の形の数個の量の和であると仮定する．g 自身や f と g の微分が f と同じ程度の小さな量であるとすれば, (6.5.9) 内の量は f^2 程度の大きさである．この仮定は, $f(x)$ が解析的なら成り立つ (I 章およびIV 章を見よ).

だが, $f(x)$ が有限回のみ可微分であると,「滑らかさの喪失」(6.5.8) により, 有限回しか近似を進めることができない．この困難は平滑化によって避けることができることがわかった．$f(x)$ を無限回微分可能な関数 $F_N(x)$((6.5.2) を見よ) に置き換え, 残余 $R_N f$ を次の近似 (6.5.9) に渡す．十分大きな (しかし有限の) 数の $f(x)$ の微分と十分小さな $|f|$ に対して, 量 N_s (s は近似の数, $N_s \to \infty$) は近似が収束するように扱うことができる．

(6.5.6) に応じて, 関数とその最高次の微分を見積もれば十分である．$f(x)$ が不等式

$$|f^{(0)}| < M_0, \quad |f^{(l)}| < M, \quad (M_0 \ll 1 \ll M), \tag{6.5.10}$$

を満たせば, 次の近似において, 摂動 f' に対して, 見積もり

$$|f'^{(0)}| < M_0' \leq M_0^{1+\alpha}, \quad |f'^{(l)}| < M \leq M^{1+\alpha} \tag{6.5.11}$$

を, f, M_0, M に依存しないある $0 < \alpha < 1$ $\left(\text{たとえば}\alpha = \dfrac{1}{2}\right)$ に対して, 得る．見積もり (6.5.11) より, 近似の収束性が容易に導ける．不等式 (6.5.11) の導出は以下で概説する．式の氾濫にしないため, 定数 δ, K, C などは書かないことにする．たとえば, (6.5.5) は

$$|f_N^{(\lambda)}(x)| \leq M_0 N^{\lambda}.$$

と書く．

3. $|f'|$ **の見積もり．** 2 項に応じて, 有限三角関数和 $g(x)$ は公式 (6.5.7) から決まる．ただし, $0 < |k| \leq N$ である．(6.5.6) の助けを借りて (6.5.8) の $|f^{(\nu)}(x)|$ を見積もるにあたって, (6.5.10) より, $1 \leq \nu \leq l$ に対して

$$|g^{(0)}| \leq M_0 \left(\frac{M}{M_0}\right)^{\dfrac{\nu}{l}}, \quad |g^{(l)}| \leq M N^{\nu} \tag{6.5.12}$$

が成り立つ ($g^{(l)} = g_N^{(l)}(x)$ の見積もりは (6.5.5) からしたがう)．(6.5.6) を使って (6.5.10) と (6.5.12) を補間すれば, $0 \leq \nu$, $\lambda \leq l$ に対して

$$|f^{(\lambda)}| \leq M_0 \left(\frac{M}{M_0}\right)^{\dfrac{\lambda}{l}}, \quad |g^{(\lambda)}| \leq M_0 \left(\frac{M}{M_0}\right)^{\dfrac{\nu}{l} + \dfrac{\lambda}{l}} N^{\dfrac{\nu\lambda}{l}}, \tag{6.5.13}$$

であることがわかる．

$0 \leq \lambda \leq l$ 回だけ積 $f\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を微分して, (6.5.13) よりあらっぽい見積もり

$$\left|\left(f\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{(\lambda)}\right| \leq M_0^2 \left(\frac{M}{M_0}\right)^{\dfrac{\lambda}{l} + \dfrac{2\nu}{l}} N^{2\nu} \tag{6.5.14}$$

を得る.

(6.5.4) に応じて,

$$|R_N f^{(0)}| \le M_0 N^{-1}, \quad |R_N f^{(l)}| \le M \tag{6.5.15}$$

を得る. ところが, 2 項に応じて f' は $f\dfrac{\partial g}{\partial x}$((6.5.9) 参照) と $R_N f$ の形の量からできている. したがって, (6.5.14), (6.5.15) より,

$$\begin{aligned} |f'^{(0)}| &\le M_0' = M_0^2 \left(\frac{M}{M_0}\right)^{\frac{2\nu}{l}} N^{\frac{\nu}{l}} + MN^{-1}, \\ |f'^{(l)}| &\le M' = M_0^2 \left(\frac{M}{M_0}\right)^{1+\frac{2\nu}{l}} N^{2\nu} + M, \end{aligned} \tag{6.5.16}$$

が得られる.

4. 収束性. さて N を選び, 十分大きな l および十分小さな M_0 に対して不等式 (6.5.11) が (6.5.16) から出ることを示そう. $M < M_0^{-\kappa}$, $N = M_0^{-\beta}$ とする. ただし, $\kappa > 0$ および $\beta > 0$ は以下で選ぶ. (6.5.16) に応じて,

$$\begin{aligned} &2 - \frac{2\nu}{l}(1+\kappa) - \frac{\beta\nu}{l} > 1 + \alpha, \\ &\beta l - \kappa > 1 + \alpha, \\ &\left(1 + \frac{2\nu}{l}\right)(1+\kappa) + 2\beta\nu < \kappa(1+\alpha) + 2. \end{aligned} \tag{6.5.17}$$

が成り立てば, 不等式 (6.5.11) は満たされる.

これらの不等式中の量は, ν を除いて, すべてわれわれが制御できる. 最初に $0 < \alpha < 1$ を選ぶ. (6.5.17) の不等式が両立することを示そう. $l \gg \nu,\ \beta\nu,\ \kappa\nu$ に対して, 不等式 $(6.5.17)_1$ が満たされる. $l \gg \dfrac{\kappa}{\beta}$ に対して $(6.5.17)_2$ が満たされる. また, $\left(\alpha - \dfrac{2\nu}{l}\right)\kappa \gg \beta\nu$ に対して $(6.5.17)_3$ も満たされる. 次に $\beta > 0$ を選び, 次に κ を十分大きく選んで $\alpha\kappa \gg \beta\nu$ となるようにし, 次に l を十分大きく選んで $l \gg \dfrac{\kappa}{\beta}$, $\dfrac{\nu}{l} \ll \alpha$, $\dfrac{\nu\kappa}{l} \ll 1$, $\dfrac{\beta\nu}{l} \ll 1$ となるようにする. M_0 は十分小さいとする.

このようにして選んだパラメータ α, β, κ, l を使うと, (6.5.11) は (6.5.10) からしたがう. まったく同じやり方で, $(s+1)$ 近似で $N_{s+1} = N_s^{1+\alpha} = (M_0^{(s)})^{-\beta}$ と置けば, (6.5.11) タイプの見積もりを

$$M_0^{s+1} \le (M_0^{(s)})^{1+\alpha}, \quad M^{(s+1)} \le (M^{(s)})^{1+\alpha} \le (M_0^{(s+1)})^{-\kappa}.$$

なる関係と同時に得ることができる.

$M_0 \ll 1$ であるから, 近似の収束性は (6.5.18) から容易に出る.

5. 注意. 1) $l \gg \kappa \gg \delta$ が成り立ち, 不等式 (6.5.17) が余裕をもって成り立ち, また $M_0 \ll (1, K, C^{-1})$ が十分小さい限り定数 δ, C, K を書かないという 2 項の最後の約束は危険でない.

2) ニュートン法はしばしば x に関してではなく, $y = x + g(x)$ に対して微分 f' を見積もることを要請する. けれども, この場合もまた, (6.5.16) の型の不等式を得ることは難しくない.

3) l を十分大きく取るにあたって, r 階微分 $(r \ll l)$ を使った (?) 近似の収束性を得ることができる.

4) $f(x)$ または $g(x)$ に三角関数和を代入する代りにもっと精密な平滑化を採用する方がときに有用である.

参考文献

[1] H. Poincare, *Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Vol.I – III, Paris, 1892, 1893, 1899.

[2] H. Poincare, *Sur les courbes définies par lres équations différentielles* (Translated into Russian, O krivykh, oppredelyaemykh differentsialnymi uravneniami, Moscow-Leningrad, Gostekhisdat, 1947.)

[3] G.D. Birkhoff, *Dynamical Systems*

[4] E.T. Whittaker, *Analytical Dynamics*, 3rd edition, Cambridge, 1927.

[5] M. Born, *Vorlesungen uber Atommechanik*, Springer, berlin, 1925.

[6] L.D. Landau and E.M. Lifshits, *Mekhanika*, Moscow, Fizmatgiz, 1956.

[7] N.N. Bogolyubov and Yu. Mitropol'skii, *Asimptoticheskie metody v teorii nelineinyx kolebanii*, 2nd edition, Moscow, Fizmatgiz, 1958.

[8] C.L. Siegel, *Vorlesugen uber Himmelsmechanik*, Springer, berlin, 1956.

[9] C.L. Siegel, Uber die Normalform analytoscher Differentialgleichungen in der Nahe einer Gleicgewichtslosung, *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen*

Math.-Phys. Kl. IIa, Jahrg. 1952, 21-30

[10] C.L. Siegel, Uber die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nahe einer Gleichgewichtsloseng, *Math. Ann.* **128**(1954), 144-170.

[11] A.N. Kolmogorov, Dynamical systems with an integral invariant on a torus, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **93**(1953), 763-766.

[12] A.N. Kolmogorov, The conservation of conditionally periodic motions with a small variation in the Hamiltonian, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **98** (1954), 527-530.

[13] A.N. Kolmogorov, The general theory of dynamical systems and classical mechanics, *International mathematical Congress in Amsterdam*, 1954.

[14] V.I. Arnold, The stability of the equilibrium position of a Hamiltonian system of ordinary differential equations in the general elliptic case, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **137** (1961), 255-257.

[15] V.I. Arnold, Generation of conditionally periodic motion from a family of periodic motions, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **138** (1961), 13-15.

[16] V.I. Arnold, On the behaviour of the adiabatic invariant with a slow periodic variation of the Hamiltonian, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **142** (1962), 758-761.

[17] V.I. Arnold, On the classical perturbation theory and the stability problem of planetary systems, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **145** (1962), 487-490.

[18] V.I. Arnold, Small denominators. I. Mapping the circle onto itself, *Izv. Akad. Nauk SSSR* Ser. Math. **25** (1961), 21-86.

[19] V.I. Arnold, Small denominators. II. Proof of A.N. Kolmogorov's theorem on the preservation of conditionally periodic motions with a small variation in the Hamiltonian, *Uspekhi Mat. Nauk SSSR* **18** (1963), 13-39.

[20] V.I. Arnold, A theorem of Liouville concerning integrable problems of dynamics, *Sibirsk. Mat. Zh.* **4** (1963), 471-474.

[21] Problemy dvizheniya iskusstvennykh nebesnykh tel, Moscow, Izd. AN SSSR, 1963.

[22] E.G. Belaga, The reducibility of a system of ordinary differential equations in the neightbourhood of a conditionally periodic motion, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **143** (1962), 255-258.

[23] An.M. Leontovich, On the stability of Lagrangian periodic solutions of the restricted three-body problem, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **143** (1962), 525-528.

[24] J. Moser, A new technique for the construction of solutions of non-linear differential equations, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **47** (1961), 1824-1831.

[25] J. Moser, On the invariant curves of area-preserving mappings of an annulus, *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math.-Phys.* Kl. II 1962, 1-20.

[26] A.A. Andronov, M.A. Leontovich, L.I. mandelshtam, A contribution to the theory of adiabatic invariants, *Zhurnal Russkogo Khimicheskogo Obshchestva* **60** (1928), 413; L.I. Mandelshtam, *Sobranye sochinenii*, Vol. I, 1948, and Vol. II, 1954.

[27] M. Kruskal, *Adiabatic invariants*, Princeton, 1961.

[28] L.A. Artsimovich, *Upravlyaemye termoyardernye reaktsii*, Fizmtgiz, 1961.

[29] V.M. Volosov, Averaging in systems of ordinary differential equations, *Uspekhi Mat. Nauk SSSR* **17** (1962), 3-126.

[30] T. Kasuga, On the adiabatic theorem for the hamiltonian system of differential equations in classical mechanics I, II, III, *Proc. Japan Acad.* **37** (1961), 366-371; 372-376; 377-382.

[31] C.V.L. Charlier, *Die Mechanik des Himmels*, I-II, Leipzig, 1902-1907.

[32] U.J. le Verrier, *Annales de l'pbservatoire Imperial de Paris* Vo. I (1855).

[33] E. Hopf, The statistics of geodesics on manifolds of negative curvature, *Uspekhi Mat. Nauk SSSR* **4** (1949), 129-170.

[34] L. Auslander, F. Hahn, L. Markus and L.W. Green, Flows on nil-manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.* **67** (1961), 298-299; 414-415.

[35] V.K. Melnikov, On lines of force in a magnetic field, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **144** (1962), 747-750.

[36] I.M. Gelfand, M.I. Graev, N.M. Zueva, M.S. Mikhailova and A.I. Morozov, An example of a toroidal magnetic field not having magnetic surfaces, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **143** (1962), 81-83.

[37] R.I. Chertkov, *Metod Yakobi v dinamike tverdogo tela*, Sudpromgiz, 1960

[38] G.A. Merman, Almost-periodic solutions and the divergence of Lindstedt's series in the plane bounded three-body problem, *Trudy Inst. Teoret. Astronam.* **8** (1961), 1-134.

[39] A. Denjoy, Sur les courbes définies par les équations différentielles á la surface de tore, *J. Math. Pures Appl.* **11** (1932), 333-375.

[40] A. Finzi, Sur le probleme de la génération d'une transformation donnée d'une courbe fermée par une transformation infinitésimal, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **67** (1950), 273-305; **69** (1952), 371-430.

[41] A.E. Gelman, On the reducibility of a class of systems of differential equations with quasi-periodic coefficients, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **116** (1957), 535-537.

[42] L.Ya. Adrianova, Reducibility of systems of n linear differential equations with quasi-periodic coefficients, *Vestnik Leningrad. Univ.* **17** (1962), 14-24.

[43] I.G. Petrovskii and E.M. Landis, On the number of limiting cycles of the equation $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, where P and Q are polynomials of the second degree, *Mat. Sb. (N.S.)* **37**(79) (1955), 209-250.

[44] M.B. Khudai-Verenov, A property of the solutions of a differential equations, *Mat. Sb. (N.S.)* **56**(98) (1962), 301-308.

[45] V.I. Arnold and A.L. Krylov, Uniform distribution of points on a sphere and certain ergodic properties of solutions of linear differential equations in a comlex domain, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **148** (1963), 9-12.

[46] Ya.G. Sinai, Geodesic flows on compact surfaces of negative curvature, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **136** (1961), 549-552.

[47] D.V. Anosov, Roughness of geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **145** (1962), 707-709.

[48] N.S. Krylov, *Raboty po obosnovaniyu statisticheskoi fiziki*, Moscow, Izd. AN SSSR, 1950.

[49] I.M. Lifshits, A.A. Slutskii and V.M. Nabutovskii, On the phenomenon of the "scattering" of charged quasi-particles at singular points in p-space, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **137** (1961), 553-556.

[50] J. Nash, The imbedding problem for Riemannian manifolds, *Ann. Math.* **63** (1956), 20-63.

[51] L.V. Kantorovich, Functional analysis and applied mathematics, *Uspekhi Mat. Nauk* **3** (1948), 89-185.

[52] B. Jessen, Some aspects of the theory of almost-periodic function, *International mathematical Congress in Amsterdam*, 1954.

[53] N.G. Chebotarev, *teoriya gruppu Li*, Moscow-Leningrad, Gostekhizdat., 1940.

[54] A.Ya. Khinchin, *Tsepnye drobi*, Moscow-Leningrad, ONTI, 1935.

[55] H. Seifert and W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig-Berlin, Teubner, 1934.

[56] A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin, *Elementy teorii funktsii i funktsionalnogo analiza* Part 2, Moscow, Fizmatgiz, 1960.

[57] V.F. Kagan, *Osnovy teorii poverkhnostei* Vol.I, Gostekhizdat., Moscoe-Leningrad, 1947.

[58] G. Polya and G. Szego, *Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis*, Berlin, Springer, 1925.

[59] G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*, Cambridge, 1934.

[60] E. Cartan, *Lecons sur la géométrie des espaces de riemann*, Paris, 1928.