谷川清隆 訳

Russian Mathematical Survey (1962), 85-191

古典力学および天体力学における小分母および運動の安定性の問題

Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics

V.I. Arnold

目次

序章 86
§1. 結果 86
§2. 力学からの予備的結果 87
§3. 数学からの予備的結果 89
§4. もっとも単純な安定性問題 91
§5. 論文の内容 94

I 章. 摂動論 94
§1. 力学の可積分および非可積分問題 95
§2. 古典的摂動論 96
§3. 小分母 98
§4. ニュートン法 99
§5. 固有縮退 101
§6. 注意 1 103
§7. 注意 2 104
§8. 固有縮退の問題への応用 106
§9. 極限縮退. バーコフ変換 107
§10. ハミルトン系の平衡位置の安定性 109

II 章. 断熱不変量 111
§1. 断熱不変量の概念 112
§2. ハミルトン関数がゆっくり周期的変化する場合の作用の永劫断熱不変量 114
§3. 保存系の断熱不変量 118
§4. 磁気トラップ 121
§5. 多次元の場合 124

III 章. 惑星運動の安定性 125
§1. 運動の様子 125
§2. ヤコビ, ドローネー, およびポアンカレ変数 129
§3. バーコフ変換 131
§4. $\overline{F}_1$ の展開係数の漸近的ふるまいの計算 134
§5. 多体問題 139

IV 章. 基本定理 142
§1. 基本定理 143
§2. 帰納定理 144
§3. 帰納補題 145
§4. 基本補題 146
§5. 短周期変数の平均に関する補題 147
§6. 基本補題の証明 149
§7. 帰納補題の証明 151
§8. 帰納定理の証明 152
§9. 微分同相写像の非縮退性に関する補題 154
§10. 高速変数に関する平均 156
§11. 極座標 157
§12. 帰納補題の適用性 158
§13. 極限への移行 160
§14. 基本定理の証明 161

V 章. 技術補題 163
§1. D 型の領域 163
§2. 算術補題 164
§3. 解析補題 166
§4. 幾何学補題 167
§5. 収束補題 169
§6. 記法 171

VI 章. 補遺 172
§1. 可積分系 173
§2. 未解決問題 177
§3. 不変多様体の近傍 180

§4. **混合** (intermixing) 183
§5. **平滑化の技術** 186

参考文献
[1] ~ [60]

序 章

§1. 結果

古典力学の定性的問題の困難さはよく知られている. 長期にわたる多くの数学者の努力にも拘らず, これら多くの問題は未解決である. ほんのごく最近, C.L.Siegel の仕事 (1942) および A.N.Kolmogorov の仕事 (1954) によって力学系の運動の安定性に関する問題を解くにあたってある程度の進展が見られた. とくに

1) 自由度 2 の保存系の平衡点および周期解の安定性はいわゆる一般楕円ケースで証明された.

2) 作用変数の永劫断熱不変性が自由度 1 の非線形振動系においてパラメータがゆっくり周期変化する場合に証明された. 軸対称磁場の「磁気トラップ」が荷電粒子を永遠に閉じ込め得ることが確立された.

3) 多体問題において準周期運動が発見された. n 惑星の質量が中心天体の質量に比べて十分小さければ, ケプラー楕円の離心率と軌道傾斜角が小さいような大多数の初期条件に対して運動は準周期的である. さらに, 軌道半長径は永遠に元の値の近くにとどまり, 離心率と軌道傾斜角は小さいままとどまる.

本論文は, これらの結果に関して完全な証明を与える. いままで, ノートの形でこれらは発表してきた [14]–[17].

小分母に対する著者の興味は A.N.Kolmogorov の 1957 年の講義によって刺激された. この機会を借りて, この論文への関心に対して A.N.Kolmogorov に深い感謝の意を表する.

著者は, 天体力学に関する仕事の部分に関しては V.M.Alekseev の助言を受けた. 1958 年夏の L.A.Artsimovich および M.A.Leontovich の論文から, 著者の注意は磁気モーメントの永劫断熱不変性の問題に向けられた. B.V.Chirikov との多くの議論はこの疑問への研究を可能にするのに役立った. G.A.Merman は原稿を注意深く読み, いくつもの所見を述べてくれた. L.Yu.Pius は III 章 4 節の計算を確認してくれた. 上に掲げた諸氏に感謝の意を捧げる.

数学者にはあまりよく知られていない力学の結果が必要であるとともに, 力学分野の研究者にほとんど知られていない数学的発想が必要である. 以下の 2 つの節で, これらについて述べる.

§2. 力学からの予備結果

1. 小分母とは何か? 天文学者は長い間, 相互作用する運動の周期の尽数関係に結び付いた共鳴現象が「小分母」をもたらし, 数学的困難を引き起こすことに気づいていた.

例 **1.** 一日の間に木星は軌道上を $\omega_1 = 299''.1$ だけ, 土星は $\omega_2 = 120''.5$ だけ動く.
周波数 ω_1, ω_2 はほぼ尽数関係

$$2\omega_1 - 5\omega_2 \approx 0.$$

にある. 表現 $m\omega_1 + n\omega_2$ は摂動論に現れる級数の分母として

$$\sum_{m,n\neq 0} a_{mn} \frac{e^{i(m\omega_1+n\omega_2)t}}{m\omega_1 + n\omega_2} \tag{0.2.1}$$

の形で出てくる.
ラプラスの時代以来, この小分母 $2\omega_1 - 5\omega_2$ に関係する太陽まわりの惑星運動の大きな周期的摂動の存在が知られていた.

2. 安定性問題とは何か. この型の問題 (今日も未解決の問題) のうち, 第一でかつ高度に刺激的なのが惑星軌道の安定性への疑問である. 惑星同士の小さな摂動は十分長い時間の後では, 衝突や無限遠への逃散を引き起こすのであろうか.
H. Poincaré および A.M. Lyapunov の有名な仕事で展開された運動の安定性理論により漸近安定が可能であることが発見された. だが古典力学の安定性問題はいつも特性指数が純虚数という「中立」の場合に対応しており, 相空間体積の保存 (リュービルの定理) のために漸近安定な運動は可能でない. だから彼らのこの方法は非線形保存系の運動の安定性の研究にはなんの役にも立たない.
これらの研究が直面する基本的な困難は摂動論の級数 (0.2.1) が小分母 $m\omega_1 + n\omega_2$ によって発散するかどうかに結びついている. H. Poincaré は平面制限三体問題を調べ, 発散の困難が実に簡単な定式化のできるモデル問題にももちあがることを示した. G.D. Birkhoff はこれらの問題のひとつを詳しく調べた ([3] 参照).

例 **2**(バーコフの問題). p, q 平面の原点の近傍からそれ自身の上への面積保存解析写像 T が与えられたとする. 原点は不動点であるとする. この点は安定か?

T の線形部分は原点において p, q 面の回転であることが仮定されている.
最近この疑問への答えが肯定的であることがわかった. これについては 4 節で議論する.

3. 以下の章では,「力学の恐るべき形式的道具」を使う. 運動方程式の正準形式はいま問題にしている方法を適用する場合本質的ではない (たとえば [18] を見よ). だが計算が容易になる. 配位空間, 相空間, ラグランジュ方程式, ハミルトン方程式, 循環座標, 保存則, 正準変換, ポアッソン括弧, 積分不変量, 作用-角変数などに慣れておくと便利である. これらは文献 [4] や [3], [5], あるいは [6] に記載されている. 制御用に次の問題を解いておくと都合がよい.

問題. 曲面 S の上を慣性によって (重力の作用なしに) 点が動いているとする. 相空間内に 2 次元不変多様体を見つけ, その上での相軌跡の運動を調べよ. S が a) トーラス, b) 回転楕円体, 3) 三軸楕円体, の場合を考えよ ([57] 参照).

§3. 数学からの予備結果

1. 準周期軌道 quasi-periodic(条件付き周期軌道 conditionally periodic) とは何か. トーラス (タイヤのチューブあるいは浮き輪) の表面を考えて見よう (図 1 参照).

図 1, 図 2.

表面に「地理」座標: 経度 q_1 と緯度 q_2 を導入する. 角度 q_1 と q_2 をラジアンで表し, 2π の不定性を無視する. q_1, q_2 面の四角 $0 \le q_{1,2} \le 2\pi$ はトーラスの地図として使える. また q_1, q_2 面全体を辺の長さ 2π の四角に分割して使うのも便利である. トーラスの各点はこのような地図の各々に代表点を持つ (図 2).

トーラスに沿って等速で動く点 $q_1(t), q_2(t)$ を考えよう:

$$\frac{dq_1}{dt} = \omega_1, \quad \frac{dq_2}{dt} = \omega_2. \tag{0.3.1}$$

q_1, q_2 図上で, この運動は直線で表される.

m, n を整数として $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{m}{n}$ なら, 時刻 $t = 2\pi\dfrac{m}{\omega_1} = 2\pi\dfrac{n}{\omega_2}$ に軌道は元の位置に戻ってくる. その間, 緯度方向に m 回転, 経度方向に n 回転する (図 2 では $m = 2, n = 3$ である).

しかし $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ が無理数なら, 動点は決して元の位置には戻らない. この場合, 運動 $(0.3.1)$ は 2 周波数 ω_1, ω_2 で準周期的 (conditionally periodic) といわれる. 軌跡 $q_1(t), q_2(t)$ はトーラスを巻く (a winding of the torus) といわれる.

準周期運動には準周期関数が密接に関係している. $F(q_1, q_2)$ がトーラス上の関数であってフーリエ級数で

$$F(q_1, q_2) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} f_{mn} e^{i(mq_1 + nq_2)},$$

と展開されるなら, 運動 $(0.3.1)$ の場合のこの関数の時間変化は

$$f(t) = F[q_1(t), q_2(t)] = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} f_{mn} e^{i[(m\omega_1 + n\omega_2)t + \varphi m_n]}, \tag{0.3.2}$$

の形をしている. 関数 $(0.3.2)$ は準周期的といわれる. 例として $f(t) = \cos t + \cos\sqrt{2}t$ を挙げることができる. どんな問題においても, $(0.3.2)$ の形の級数が現れるなら, それは $(0.3.1)$ の形の

運動が現れたことを意味する.

図 3 と図 4

2. 準周期軌道のある種の性質**.**
性質 **1.** 準周期運動の軌跡はトーラス上いたるところ稠密である.

これはつまり, 任意の領域 $(\mathrm{domain})\Delta$ が与えられたとき, 動点 $p(t), q(t)$ が遅かれ早かれそこに入ることを意味する. 性質 1 は次の事実からただちに出る.

1a) α を無理数とし, Δ を円 $|z| = 1$ の任意の弧とする. すると, 点 $e^{2\pi i n\alpha}(n = 1, 2, 3, \ldots)$ の中に Δ の点がある[1] .

また, 準周期運動の軌跡は一様分布であることを指摘しておく ([58] 参照). 時刻 $t = 0$ から $t = T$ までの間で, 動点が Δ に滞在する時間は, T が大きいときは領域 Δ(図 3 参照) の面積に比例する[2] .

性質 **2.** 任意のリーマン積分可能な関数 $F(q_1, q_2)$ に対して, 時間平均は空間平均と等しい. すなわち,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(\omega_1 t, \omega_2 t)dt = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F(q_1, q_2)dq_1 dq_2.$$

以下では, 性質 2 をよく説明する別の例を示そう (読者は読み飛ばしてもよい).

3. 近日点の平均運動に関するラグランジュの問題**.** x, y 平面のベクトルが 3 つのベクトルの和

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_1(t) + \mathbf{a}_2(t) + \mathbf{a}_3(t),$$

で与えられるとする. ただし, 長さはそれぞれ a_1, a_2, a_3 であり, 独立な[3] 角速度 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ で一様回転しているとする. $\varphi(t)$ はベクトル $\mathbf{a}(t)$ が x 軸となす角であるとする.

[1] 数 2^n は 7 から始まり得るか? 1a) によれば, 2^n は任意の数のコンビネーションで始まり得る
[2] 2^n は 7 から始まるのと 8 から始まるのとどちらが多いか?
[3] 数 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ が独立であるのは, $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_3\omega_3 = 0$ から $k_i = 0$ が言えるときである. ただし, k_i は整数である.

問題. ベクトル $\mathbf{a}$ の平均角速度を求めること.

$$\omega = \lim_{T\to\infty} \frac{\varphi(T)}{T}.$$

解. $\omega = \dfrac{\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$ ただし, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は辺が a_1, a_2, a_3 の三角形の角度である.

近日点の運動との関連は III 章 1.2 節から理解することができる. この問題の歴史と文献については [52] 参照. この問題は Bol.Sierpenski と H.Weyl によって解かれた.

4. 以下の章では, 読者が可微分多様体の概念 ([55] 参照) に親しんでいることを仮定する. とくに, n 次元トーラスの点は n 個の角座標 $q_1, \dots, q_n$ で与えられる. 上記 1 項と 2 項を n 次元トーラスに一般化して考えることは読者にとって有用である. また測度論の初歩 ([56] 参照) を使う (読者は有理数の集合が測度ゼロであることを知っている必要がある).

一般論に行く前に, これから調べる現象の基本的性質がはっきりと見える非常に簡単な例について考察しておく.

§4. 安定性のもっとも単純な問題

2 節の例 2 に戻ろう. p, q 平面の原点の近傍からそれ自身の上への面積保存解析写像 T が与えられている. 不動点 O は安定か?

一般的方法 (I 章) をこの場合に適用した結果から始めよう.

1. 3 つの例. 線形変換の場合, 固有値 λ_1, λ_2 を計算すれば問題は解ける. 面積保存性より $\lambda_1\lambda_2 = 1$ である. λ_1 と λ_2 が実数でなければ, $\overline{\lambda_1} = \lambda_2$, $|\lambda_{1,2}| = 1$, $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\omega}$ である.

例 A. p, q 面の点 O を中心として角度 ω の通常の回転 A を考えよう. 各円 $p^2 + q^2 =$ 一定 は不変である. つまりそれ自身の中へと変換される. 円を全体として ω だけ回転する. $\omega \neq 2\pi\dfrac{m}{n}$ である限り, 軌跡は円上いたるところ稠密である.

$\lambda_{1,2} = e^{\pm i\omega}$ なるどの線形変換も, 座標の線形変化 (change)S によって A の形にもって行ける. すなわち

$$\begin{array}{ccc} p, q & \to^T & p, q \\ \downarrow S & & \downarrow S \\ p', q' & \to^A & p'q' \end{array}$$

このような写像 T は楕円回転とよばれる.

図 5

非線形写像に移ろう. 与えられた写像のゼロにおける線形部分が楕円回転であるとき, T は楕円型写像とよばれる.

例 B. 円 $p^2 + q^2 = 2\tau$ を角度

$$\omega(\tau) = \omega_0 + \omega_1\tau + \dots \tag{0.4.1}$$

だけ回転する写像 B を考えよう (図 5).

この写像は楕円型であり, 安定である.

p, q と解析的変換 S で結び付いている座標系 p', q' を考えよう. ただし変換 S は面積保存であって, 原点 O をもとの場所から動かさないとする. p', q' 平面において例 B の写像 B を考えよう.

例 C. 写像 B を座標 p, q で書こう. すると写像 $C = S^{-1}BS$ を得る.

この写像は楕円型であり安定である. というのは, 変数変換 S によって安定な写像 B に変換できるからである.

例 C の構成法によって任意の楕円型写像を得ることができるか? もしそうなら, これによって安定性の問題に肯定的な解が得られることになる.

2. 形式解. Birkhoff の時代以来 [3], 級数の収束性を無視すれば, 条件

$$\omega \neq 2\pi\frac{m}{n} \quad (m = 0, \pm1, \pm2, \ldots; n = 1, 2, \ldots) \tag{0.4.2}$$

の下で, 楕円型の写像 T はいつでも例 B の $STS^{-1} = B$ の形へと形式的な変数変換 S によって還元できる. S は摂動論の級数に似た「バーコフ級数」によって決定できる. 一般の場合, これらの級数は発散する. 写像 T の安定性は形式級数 S の存在からは出ない.

とは言え, 級数 S を途中で切ることは可能であり, 収束する変数変換 $S^{(s)}$ によって, B と任意に高い次数の量 $O(\tau^s)$ だけしか違わないように T を変形することが可能である. この際に得られる (0.4.1) の係数 $\omega_0, \omega_1, \ldots$ は T を B へ還元する方法 $S^{(s)}$ に依らない. これらは面積保存解析変換に関する T の不変量である. $\omega_1 \neq 0$ なら, 写像 T は一般楕円型とよばれる.

この場合, 写像 B を作用させたときに円 $\tau =$ 一定 が回転する角度 $\omega(\tau)$ は τ とともに変化する ((0.4.1) 参照). したがって, ある円は 2π と尽数関係にある角度で回転し, 別の円は尽数関係にない角度で回転する.

適当な変数が与えられると, O の近くで, 写像 T は非常に小さな追加項を摂動された, 角度 $\omega(\tau)$ の回転 B と見ることができる. したがって, われわれの問題は, τ^s に比べて小さな摂動分だけ B と異なる写像 T の研究へと還元される.

3. 不変曲線. Birkhoff 級数が収束すれば, O の近傍全体は円 $\tau =$ 一定 に近い T の不変曲線から成っているはずである.

事実は, 写像 B の不変円のうち, 回転角度 $\omega(\tau)$ が 2π と尽数関係にないものは全体の大多数を占めるが, これらは B の小さな摂動のもとで消えず, 少し変形するだけであることがわかった. したがって, 不動点 O は任意に小さな解析的な閉 T 不変曲線によって囲まれ, よって安定である. これらの曲線は O を集積点とする正測度の集合を満たすことが証明できる (I 章および IV 章を見よ).

ところが, これらの曲線は O の近傍を完全には満たさないし, 一般に, 任意の領域 (domain) を満たさない. これらの中間には「不安定ゾーン」(zones of instability) が残る. これらは $\omega(\tau)$ が 2π と尽数関係にあるような円 $\tau =$ 一定 から摂動で生じる. O からの各半径線を, 不変曲線はカントール完全集合のように切る. しかも正測度で切る.

図 6.

4. 不安定ゾーン. 角度 $\omega(\tau) = 2\pi\dfrac{m}{n}$ だけ回転する「無摂動」変換 B の不変円を考えよう. B の n 回の繰り返しにより, 円の各点は元の場所に戻る. B のこの性質は, 一般的に言えば, 小さな摂動の下では保持されず, 不変円はちぎれてばらばらになる. G.D.Birkhoff が証明したところによると, B^n に関して不変な完全な円の代りに, T^n は一般にこの円の近くに有限個偶数の不動点を持つ. このうちの半分の点は楕円型であり, 残りは「双曲的」である.

3 で示したように, 楕円型の点は一般的に言えば安定であり, O を囲まない不変曲線によって囲まれている (図 6). したがって, 一般の場合, O の近傍は不変閉曲線によって層状に区分けされていない. 上で指摘した Birkhoff 級数の. 発散はこのことから従う (項目 2 参照).

双曲点のセパラトリックスは互いに交差し, 「不安定ゾーン」に複雑な網目をつくり出す. 各楕円点の近傍には同じ描像が成り立つ. すなわち不変曲線と不安定ゾーンその他.

5. 安定性の条件. 不変曲線の存在 (3 項参照) および T の安定性を証明するための仮定を述べよう.

著者が [14] で使った条件は, $\dfrac{\omega_0}{2\pi}$ が無理数であること, $\omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots \neq 0$, および T が解析的であること, であった. すると, J. Moser[25] が, $\dfrac{\omega_0}{2\pi}$ の無理数性の代りに, $\omega_0 \neq 2\pi\dfrac{m}{3}, 2\pi\dfrac{m}{4}$ であること, T の解析性の代りに 333 階の偏微分の連続性を要請するだけで十分なことを示した. $\omega_0 = 2\pi\dfrac{m}{3}$ のときは, T. Levi-Civita がすでに示したように ([8] 参照, 同じ主題で G.A.Merman が論文を書いている [21, pp.18-41]), 不安定性が起こり得る.

§5. 結果

この論文は 6 つの章から成る. 基本的なアイデアと方法は I 章に書いた. 記述は厳密さを犠牲にして発見的性格にした. しかし、聡明な読者は I 章を見ただけで厳密な数学的基礎を述べる IV 章 V 章を見ることなく基本結果の証明を再構成できるであろう.

II 章および III 章は I 章の一般論の応用を述べる. 「磁気トラップ」に応用した断熱不変量の概念を II 章で詳しく吟味する. III 章では, 多惑星の問題にかかわる. 離心率が小さく, 質量が小さい場合の平面三体問題を詳しく考察する.

IV 章と V 章, および III 章の 1 節,5 節を除いた部分は形式的に書いた. V 章の最後に記号をまとめて書いておいたので参考にして欲しい.

結論章はさまざまな覚書からなる. 中には未解決問題への言及もある.

I 章. 摂動論

この章では, 発想と構成法を記述する. これを用いて, II 章および III 章で力学の特定の問題を解く.

使うのは,

1) 19 世紀の天体力学者によって発展させられ, H. Poincare[1](1, 2, 3, 4 節参照) の研究で完成した手法;

2) 平衡点および周期点の位置の安定性に関する G.D. Birkhoff の研究 [3](9 節参照);

3) A.N. Kolmogorov の示唆したニュートン型の逐次近似法 (4 節参照).

著者の研究 [14]-[17] はいわゆる縮退に関するものである. 6 節と 7 節の注意により, 固有縮退 (proper degeneracy?) は 8 節で扱うことができる. 極限縮退のある種の場合は 10 節で吟味される[4] .

この章では, 精密な定式化と厳密な証明を避ける. 複雑な構成法と厳密な証明のよって来る結縁のみを述べる.

§1. 力学の可積分および非可積分問題

解析的ハミルトン関数 $H(p,q)$ を持つ正準運動方程式

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (p = p_1, \ldots, p_n;\ q = q_1, \ldots, q_n) \tag{1.1.1}$$

で定義される自由度 n の保存力学系を考える. 力学の古典的方法によれば, いわゆる可積分の系だけしか調べることができない.

例 1. 相空間 p, q が n 次元トーラスと n 次元ユークリッド空間のある開領域 (domain) との直積であるとする. $q_i (\mathrm{mod}\ 2\pi)$ をトーラス上の角度変数とし, p_i を空間座標とする. そしてハミルトン関数は p のみに依存すると仮定する. すなわち, $H = H(p)$. ハミルトン方程式 (1.1.1) は

$$\dot{p} = 0, \quad \dot{q} = \omega(p), \quad (\omega = \frac{\partial H}{\partial p} = \omega_1 \ldots, \omega_n)$$

なる形をとる. しかもただちに積分可能である. 各トーラス $p =$ 一定 は不変である. 周波数 ω が尽数関係になければ (つまり, 整数 k_i に関する式 $\omega_1 k_1 + \ldots + \omega_n k_n = 0$ から $k_i = 0$ がしたがう) なら, 運動は n 個の周波数 $\omega_1, \ldots, \omega_n$ に関して準周期的 (conditionally periodic, quasi-periodic) とよばれる. このとき簡単に証明できるように, 軌跡 $p(t), q(t)$ はトーラスをいたるところ稠密に埋める. 変数 p, q は作用–角変数とよばれる.

今日, かなり多くの可積分問題が知られている. 自由度 n のこれらの問題の解は包合 (involution) 関係にある[5] n 個の一価第一積分が存在する (そして見つけることができる) という事実に基づいている.

[4] われわれの短論文 [14-17] が印刷されたのと同時に, J.Moser の 2 編の論文 [24,25] の最初のものが出た. それによると, [12] の解析性の代りに, 数百回微分可能性で十分である. われわれは J.Moser の結果も技術も使わない. というのは, この論文の主要部分は [24-25] の出版の前にできていた. ただ 10 節では, J.Moser が [14] の結果を強めているのでそれを考慮した (VI 章 6 節も見よ)

[5] 関数 $f(p,q)$ と $g(p,q)$ が包合関係にあるとは, これらのポアッソン括弧 $\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}$ が恒等的にゼロのときである.

これらの積分の存在が, $2n$ 次元相空間 p, q における以下のような軌跡のふるまいを意味することを示すことができる ([20], VI 章 1 節). ある特定の $(2n-1)$ 次元集合が相空間を不変領域 (domain) に分割する. 各領域は不変な n 次元多様体に成層化されている. 領域が有界なら, これらの多様体はトーラスであって, 準周期運動の台となっている. 例 1 の作用–角変数がこのような領域に導入できる. 包合関係にある n 個の第一積分が見つかれば, 作用–角変数を導入する正準変換は求積で求めることができる.

例 **2.** 以下は可積分問題である: 二体問題, 二中心問題, 三軸不等楕円体の表面の測地線に沿う自由点の運動, 対称剛体がその対称軸上の点で固定されたときの運動, 重心で固定された非対称剛体の運動.

非可積分[6] の問題は: いわゆる平面円制限三体問題を含む n 体問題, 凸曲面上の測地線に沿っての自由点の運動, 対称剛体, 自由度 $n > 1$ の非線形振動.

可積分系の探索は主として 19 世紀に行われた (Jacobi, Liouville, Kovalevska 他). だが, ポアンカレの仕事によって明らかになったとおり, 力学系はその一般形においては非可積分である. 積分は知られていないばかりでなく, 存在しないのである. なぜなら, 軌跡全体は不変 n 次元多様体に乗っていないからである.

§2. 古典的摂動論

系が可積分系から小さな「摂動」だけ違うと仮定する. 例 1 の記法を使って

$$H(p,q) = H_0(p) + \mu H_1(p,q) + \dots, \tag{1.2.1}$$

と書く. ここで μ は小さく, $\mu H_1 + \dots$ は q に関して周期 2π である. ポアンカレ [1] によると, このケースを調べることは力学の基本問題である. 摂動 μH_1 は $t \to \infty$ での軌跡のふるまいにどんな影響を持つのか? 不変トーラスは保存されるのか? 軌跡はトーラス $p =$ 一定 の近くに留まることができるのか?

例 2 の可積分および非可積分問題の比較からすると, これらの疑問が力学において重要であることがわかる. これらに完全に答えるならば, とくに, 惑星系の安定性の問題への答えも得られるであろう.

t が大きい場合の軌跡の近似的な研究のために, 天文学の摂動論において, 以前から特別な道具が発展してきた. 正準変換 $p, q \to p', q'$ が H を

$$H(p,q) = H'_0(p') + \mu^2 H'_1(p',q') + \dots, \tag{1.2.2}$$

の形に還元したとすると, 時間 $t \sim \dfrac{1}{\mu}$ の間に, 運動 $p'(t), q'(t)$ は $H'_0(p')$ で記述される準周期運動から量 $\sim \mu$ だけ異なる. p, q に戻ると, $p(t), q(t)$ に対して, $t \sim \dfrac{1}{\mu}$ の間 μ 程度の誤差の近似表式を得る. もっと精度が必要なら, 以下のような近似を行えばよい. すなわち, $p', q' \to p'', q''$ で, H を

$$H(p,q) = H''_0(p'') + \mu^3 H''_1(p'',q'') + \dots,$$

[6] もっと注意深くいうと, 積分が完遂できない問題, である. というのは非可積分性の証明は複雑であり, 個々の場合に限って厳密に行うことができるからである.

の形に還元する. この場合の誤差は$\sim \mu^3 t$である. 逐次近似が収束すれば, 極限として, $H(p,q) = H_0^{(\infty)}(p^{(\infty)})$ が得られ, 系は可積分である. トーラス $p^{(\infty)} =$ 一定 は不変であり, 準周期軌道で満たされる.

このプログラムを実行するにあたって 2 つの困難に遭遇する.

1. 小分母. 正準変換 $p, q \to p', q'$ で, $p = p' + \mu\dfrac{\partial S}{\partial q}$, $q' = q + \mu\dfrac{\partial S}{\partial p'}$, $S(p',q) = \sum_{k\neq 0} S_k(p')e^{i(k,q)}$ なる形のものを探そう. 座標 p', q' で関数 $H(p,q)$ を書くと[7]

$$H_0(p) + \mu\overline{H}_1(p) + \mu\widetilde{H}_1(p,q) + \ldots = H_0(p') + \mu\overline{H}_1(p') + \mu\left[\frac{\partial H_0}{\partial p}\frac{\partial S}{\partial q} + \widetilde{H}_1\right] + \mu^2\ldots$$

となる. (1.2.2) を得るためには, q に依存するオーダー μ の項を消去する必要がある. つまり, $(\omega, \dfrac{\partial S}{\partial q}) + \widetilde{H}_1 = 0$ となること, すなわち,

$$S_k(p') = \frac{ih_k(p')}{(\omega,k)}, \quad \text{ただし} \quad \widetilde{H}_1 = \sum_{k\neq 0} h_k e^{i(k,q)}. \tag{1.2.3}$$

が必要である. 分母 (ω, k) は k の「共鳴」値においてゼロになり, すべての ω に対して適当に k を選ぶといくらでも小さくなる. この小分母 (ω,k) のために, $n > 1$ に対して形式変換の正当性が疑わしくなる.

2. 近似の発散. 各近似の級数が途中で切れ, したがって収束する場合がある. このような場合を Birkhoff[3](9 節参照) は詳しく調べた. しかし, Siegel[10] が示したところによると, 一般に, Birkhoff が調べた場合も含めて, 全近似を合わせると発散する. 収束の結果として, 軌跡の構造は例 1 で記述したような様子になるべきである. しかし, 事実は, 摂動系の軌跡は不変トーラスの上にはない.

$\det\left|\dfrac{\partial\omega}{\partial p}\right| \neq 0$ と仮定する. このとき, 非摂動系の不変トーラスの任意の近傍に n 次元トーラスがあって, その上ですべての軌跡はある時間の後に閉じる. 小さな摂動を受けると, 閉軌跡からなるこの n 次元多様体は一般に壊れる. その結果, 摂動論の級数は, 一般的に言って, 相空間のどの領域においても収束しない.

上記考察は, 必ずしも $(\omega,k) \neq 0$ であるような不変トーラスが摂動系に存在する可能性を排除するわけではない. ただし, これらのトーラスは決して領域を満たさない.

§3. 小分母

小分母 (ω,k) の影響を調べるために, 天文学者は長い間算術的な議論を使ってきた ([1],[5] を見よ). そのうちもっとも単純な議論は, 数の中にはより無理数的なものがある, というものである.

さらに, でたらめに選ばれたベクトル ω の成分同士は尽数関係にない. したがって, ほとんどすべての[8] ベクトル ω に対して, 整数 $k \neq 0$ をどう選んでも $(\omega,k) \neq 0$ が成り立つ.

[7] H_1 の上の線は q に関する平均を意味する. すなわち, $\overline{H}_1(p) = (2\pi)^{-n}\int H_1(p,q)dq$.

[8] リュベーグ測度ゼロの集合を除いて, すべて

ディオファンタス近似理論からの以下の定理 ([54] 参照) はこのアイデアをもっと正確に表現する.

定理. ほとんどすべてのベクトル $\omega = \omega_1, \ldots, \omega_n$ はすべての整数 $k \neq 0$ およびある $K(\omega) > 0$ に対して不等式

$$|(\omega, k)| \geq K|k|^{-\nu}, \quad (|k| = |k_1| + \ldots + |k_n|; \nu = n + 1) \tag{1.3.1}$$

を満たす.

証明. 有界な領域 (domain)Ω, 固定した $K > 0$, および整数 k を考える. このとき, 不等式 (1.3.1) は幅が $2K|k|^{-\nu}$ より狭い「共鳴ゾーン」においてのみ成り立たない. Ω にのみ依存する定数を $D > 0$ として, このゾーンの体積は $K|k|^{-\nu}D$ を越えない.

$|k| = m$ を満たす k の数は Lm^{n-1} を越えない (定数 $L > 0$ は n にのみ依存する). したがって, $|k| = m$ を満たす共鳴ゾーンの測度は $Km^{-2}DL$ を越えず, $|k| > 0$ なるゾーンすべての測度は $\sum_{m=1}^{\infty} Km^{-2}DL \leq K\overline{D}(\Omega)$, $\overline{D} = 2LD$, を越えない. $K \to 0$ のとき, 共鳴ゾーンの全測度はゼロに向かい, ゆえに主張の証明がただちにしたがう. □

だから大多数のベクトル ω に対して, 小分母 (ω, k) はゼロにならないばかりでなく, $|k|$ の巾で下から抑えることができる. このことから, 摂動論の級数 (1.2.3) が大多数のベクトル ω に対して収束するという望みが発生する ([1],[5],[7] を見よ). 事実, 解析関数 H_1 のフーリエ係数 h_k は幾何級数的に (in geometric progression) 減少する.

H_1 が $|\mathrm{Im}\, q| \leq \rho$ において解析的であり, $|H_1(p, q)| \leq M$ であるとする. すると $|h_k| \leq Me^{-|k|\rho}$ である (V 章 3.2 節参照). 条件 (1.3.1) を満たすと, 係数 $S_k = \dfrac{ih_k}{(\omega, k)}$ は h_k と同じようなスピードで幾何級数的にに減少する. 任意の $\delta > 0$ に対して

$$|S_k| \leq \frac{ML}{K\delta^{\nu}} e^{-|k|(\rho-\delta)}$$

が成り立つ. ただし, ν, L は絶対定数である (IV 章の (4.6.5) 式). したがって, 級数 S は $|\mathrm{Im}q| < \rho$ において収束し, 若干小さな領域 $|\mathrm{Im}q| < \rho - 2\delta$ において

$$|S_k| \leq \frac{ML}{K\delta^{\nu}} \tag{1.3.2}$$

が成り立つ (IV 章 (4.6.6) 式).

こうして, (1.2.3) 式はほとんどすべての ω に対して収束する. しかし, 1) このようにして得られた関数は p に関していたるところ不連続に依存する. 2) $s \to \infty$ の際のすべての近似 $p^{(s)}, q^{(s)}$ の収束は疑わしい.

§4. ニュートン法

上記 1) と 2) を克服するために, A.N.Kolmogorov[12] は以下のように示唆した.

示唆 1) 周波数 ω^* で準周期的な運動が乗っている摂動系の不変トーラス T_{ω^*} のみを探す. (1.3.1) を満たす周波数 ω^* の集合ははじめに決めておく. 対応する非摂動系: $p : p^* + \mu...$; $\dfrac{\partial H_0}{\partial p^*} = \omega^*$ の不変トーラスの近傍内にトーラス T_{ω^*} を探す.

式 (1.2.3) において, $\omega(p) = \dfrac{\partial H_0}{\partial p}$ の代りに ω^* を入れる. すると, 新しい変数で表された $H(p,q)$ は付加的な項 $\mu\left[(\omega-\omega^*)\dfrac{\partial S}{\partial q}\right]$ を含む. $|p-p^*| \sim \mu$ に対して, この項の大きさは $\sim \mu^2$ 程度である.

示唆 2) トーラス $p = p^*$ の指定した近傍において, 新しい変数 p', q' を解析的正準変換 $p, q \to p', q'$ によって導入する. これにより, ハミルトン関数 $H(p,q) = H_0(p) + H_1(p,q)$ は

$$H(p,q) \equiv H^{(1)}(p',q') = H_0^{(1)}(p') + H_1^{(1)}(p',q'),$$

なる形になる. ここで, $|H_1^{(1)}| \sim |H_1|^2$ である.

このようにして得られる 2 次 (quadratic) 収束は, ニュートン法 ([51] を見よ) に典型的であるが, これによって不変トーラス T_{ω^*} を見つけることができる. もう少し正確に言うと, 上記示唆 2) が以下のように関係する. すなわち, $|\mathrm{Im}\ q| \le \rho$ に対して $|H_1| \le M_1$ であるとする. (1.2.3), (1.3.1), (1.3.2) および上記 1) により, 変数 p', q' をうまく選んで, $|\mathrm{Im}\ q'| \le \rho - L\delta$, $|p'-p'^*| \le M_1$ に対して

$$|H_1^{(1)}(p',q')| \le M_2 = \frac{M_1^2}{\delta^{2\nu}}, \tag{1.4.1}$$

が成り立つようにできる. ここで $L > 0, \nu > 0$ は自由度の数 n にのみ依存する定数である. 点 p'^* において $\dfrac{\partial H_0^{(1)}}{\partial p'} = \omega^*$ が成り立ち, $\delta > 0$ は, H_0, ω^*, ρ にのみに依存するある定数を越えない限り自由に選ぶことができる.

そこで, 出発時に (1.4.1) が成り立つことを仮定して, 不変トーラス T_{ω^*} に収束する逐次近似をどうやって構成するかを示そう. $H^{(1)}(p',q')$ は $H(p,q)$ と同じ形をしているから, (1.2.3) を使うと, 正準変換

$$p', q' \to p'', q'' \to \ldots \to p^{(s)}, q^{(s)} \to \ldots$$

$$H(p,q) = H^{(s)}(p^{(s)}, q^{(s)}) = H_0^{(s)}(p^{(s)}) + H_1^{(s)}(p^{(s)}, q^{(s)})$$

を構成することができる. 不等式

$$|p^{(s)} - p^{*(s)}| \le M_s, \quad |\mathrm{Im}\ q^{(s)}| \le \rho_s \quad (\rho_0 = \rho, M_1 = M),$$

および

$$M_{s+1} = \frac{M_s^2}{\delta_s^{2\nu}}, \quad \rho_{s+1} = \rho_s - L\delta_{s+1}, \quad \frac{\partial H_0^{(s)}}{\partial p^{(s)}}\Big|_{p^{*(s)}} = \omega^* \quad (s = 1, 2, \ldots)$$

で定義された収縮する領域において, (1.4.1) より

$$|H_1^{(s)}| \le M_{s+1} = \frac{M_s^2}{\delta_s^{2\nu}}. \tag{1.4.2}$$

が成り立つ.

これ以後, δ_s を扱う. $\delta_{s+1} = \delta_s^{3/2}$ $(s = 1, 2, \ldots)$ と置く. $M_s < \delta_s^T$ で T が十分大きければ, (1.4.2) により

$$M_{s+1} \le \delta_s^{2T-2\nu} \le \delta_s^{3/2} = \delta_{s+1}^T \tag{1.4.3}$$

である. T を大きくとって固定する. たとえば $T = 4\nu + 1$ と取る. また $|\mathrm{Im}\ q| \le \rho$ に対して $|H_1(p, q)| \le M_1 = \delta_1^T$ が成り立つとする. ただし, δ_1 は十分小さい. このとき, すべての $s = 1, 2, \ldots$ に対して, 領域 $|\mathrm{Im}\ q^{(s)}| \le \rho_s$, $|p^{(s)} - p^{*(s)}| \le M_s$ において $|H_1^{(s)}(p^{(s)}, q^{(s)})| \le \delta_s^T$ が成り立つ. 加えて, 十分小さな δ_1 に対して, $\delta_s > \dfrac{\rho}{2} > 0$ $(s = 1, 2, \ldots)$ が成り立つ. 簡単に示せるように, (1.4.2) および (1.4.3) より, 上のように構成した領域は不変解析トーラス T_{ω^*} へと縮んでいく.

こうして, 摂動運動に関して以下のような描像に達した ([13] 参照). $\det \left| \dfrac{\partial \omega}{\partial p} \right| = \det \left| \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial p^2} \right| \ne 0$ を仮定する. このとき、 任意の点 p の小さな近傍に, 周波数 ω が尽数関係を満たす点があり, また $\omega(p) = \omega^*$ が (1.3.1) を満たすような点もある. これに応じて, ハミルトン関数 $H_0(p)$ を持つ正準方程式は, あるトーラス $p =$ 一定 上でいたるところ稠密な準周期運動を決める. 他のトーラスについては何も決めない.

わかったのは次のことである. 小さな摂動 $H = H_0(p) + \mu H_1(p, q)$ $(\mu \ll 1)$ に対して, 尽数関係になく, 固定した K に対して (1.3.1) を満たす周波数 ω^* を持つたいていの (most) 不変トーラスは消えずに残り, 変形するだけである. 変形したトーラス T_{ω^*} を出発する摂動系の軌跡はそのトーラスをいたるところ稠密に準周期的に埋める. トーラス T_{ω^*} はいたるところ疎な閉集合 (nowhere dense set) をなす (これらの間は破壊された尽数関係トーラスの残骸で占められる). ただし, これら不変でいたるところ疎な集合は正の測度を持つ. この測度は $K \to 0$, $\mu \to 0$ のとき, 相空間の全測度に向かう (7 節を見よ).

$n = 2$ の場合, 2 次元トーラス T_{ω^*} は 3 次元不変「エネルギーレベル」$H =$ 一定 を分割する (7 図). したがって, 2 つのトーラス T_{ω^*} の間隙から出発した軌跡はこの間隙から抜け出すことはできない. こうして, $n = 2$ の場合, 不変トーラスが存在すれば運動の安定性に関して結論を出すことができる.

$n > 2$ の場合, n 次元トーラス T_{ω^*} は $(2n - 1)$ 次元多様体 $H =$ 一定 を分割せず, 「間隙」は無限遠にまで達している. この場合, 初期条件の majority に対してのみ運動の情報を得ることができる.

図 7.

§5. 固有縮退

4 節の議論において, 周波数 $\omega(p) = \dfrac{\partial H}{\partial p}$ が独立であること, つまり, $\det \left| \dfrac{\partial \omega_i}{\partial p_j} \right| \neq 0$ を仮定した. しかし,「固有縮退」の場合がそれほど稀でなく生じ得る. 非摂動系において運動が, 自由度の数 n より少ない数の周波数 n_0 によって記述される場合がこれである ([5] を見よ). 磁気トラップの問題 $(n_0 = 1,\ n = 2)$ や天体力学の多体問題がまさにこれである. とくに多体問題では, 二体問題 $(n_0 = 1,\ n = 3)$ が非摂動系の役割を果たす. これらの場合, 行列式

$$\det \left| \frac{\partial \omega_j}{\partial p_j} \right| = \det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j} \right|$$

は恒等的にゼロである. 本節では, 古典摂動論の立場 (2 節参照) から固有縮退を考える.

例. 例 1(1 節) の作用・角変数 $p_1, \ldots, q_n$ において

$$H = H_0(p_1, \ldots, p_{n_0}),$$

が成り立つとする. ただし, $n_0 < n$ である.「高速変数」$p_1, \ldots, p_{n_0}$ のベクトルを p_0 と書き,「低速変数」$p_{n_0+1}, \ldots, p_n$ を p_1 と書くことにする. q_0 と q_1 は対応する座標である.

正準方程式

$$\dot{q}_0 = \omega_0(p_0), \quad \dot{p}_0 = 0, \quad \dot{q}_1 = 0, \quad \dot{p}_1 = 0$$

$\left(\text{ここで} \omega_0(p_0) = \dfrac{\partial H_0}{\partial p_0} \right)$ は n_0 個の周波数 $\omega_0 = \omega_1, \ldots, \omega_{n_0}$ を持つ準周期運動の n_0 次元の不変トーラス $p_0 = $ 一定$, p_1 = $ 一定$, q_1 = $ 一定 上でのようすを記述する.

そこで, 摂動

$$H(p, q) = H_0(p_0) + \mu H_1(p, q) + \ldots \tag{1.5.1}$$

があると仮定する. すると, 古典摂動論[9] から次のような運動の描像が得られる $\left(\text{精度は} t \sim \dfrac{1}{\mu} \text{に対して} \sim \mu \right)$.

H_1 を「永年部分」

$$\overline{H}_1(p, q_1) = \overline{H}_1(p_1, \ldots, p_n; q_{n_0+1}, \ldots, q_n) = (2\pi)^{-n_0} \int H_1 dq_0$$

と「周期部分」$\widetilde{H}_1(p, q)$ に分ける:

$$H_1(p, q) = \overline{H}_1 + \widetilde{H}_1$$

摂動の永年部分と周期部分がまったく異なる役割を果たすことがわかる. ハミルトン関数を $\mu \overline{H}_1$ とする正準方程式

$$\dot{p}_1 = -\mu \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial q_1} + \ldots, \quad \dot{q}_1 = \mu \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial p_1} + \ldots,$$

[9] いまの場合,「平均法」ともよばれる ([5],[7] 参照).

は不変トーラスを定義するパラメータ p_1, q_1 のゆっくりとした永年変化を決める. ハミルトン関数 $H_0 + \mu\overline{H}_1$ によって記述される, パラメータのゆっくり変化する準周期運動のまわりの摂動軌道のそれ以外の振動だけを記述するのが周期部分 $\widetilde{H}_1$ である.

上で指し示した運動の描像は, p_1, q_1 をパラメータとみなすならば, 2 節の変換 $p_0, q_0 \to p_0', q_0'$ によって得ることができる.

摂動運動の性質に関してもっと精密な結論を得るためには, ハミルトン関数を $\overline{H}_1(p_1, q_1)$(パラメータ p_0 に依存する) とする「平均」正準方程式を調べる必要がある. 以下では, これらの方程式が可積分あるいは近可積分である場合を考察する. これは, たとえば, 小質量の平面三体問題や, 一般 n 体問題において小質量, 小離心率, 小軌道傾斜角の場合に生じる.

可積分の場合, 適当に変数 p_1, q_1 を選ぶと, 永年部分 $\overline{H}_1 = \overline{H}_1(p_1, \ldots, p_n)$ は角変数 q_1 に依存せず, 第一近似では, n_0 個の高速周波数 $\omega_0 = \xi_0$ と $n_1 = n - n_0$ 個の低速周波数 $\omega_1 = \mu\xi_1$ からなる準周期運動

$$\dot{q}_0 = \omega_0(p_0), \quad \dot{p}_0 = 0, \quad \dot{q}_1 = \omega_1(p), \quad \dot{p}_1 = 0$$

が得られる. $\mu\widetilde{H}_1$ に起因する摂動は平均がゼロであり, この運動に重ね合わさっている.

われわれの基本的な結果は, 固有縮退の場合に 4 節で記述したものに似た厳密な摂動論を構成したことにある. 以下で示すことは, μ が十分小さいとき, 大多数の初期条件に対して, 摂動運動が実際準周期的であり, またすべての時間 $-\infty < t < +\infty$ のすべてにわたって, 上で記述した第一近似に近いことである (8 節を見よ).

4 節の技術を適用するにあたって, いくつもの困難に出会う. 最初で最大のものは, 小分母 (ω, k) の中で, ゼロがあることである. というのは, $\mu = 0$ の場合, たったの n_0 個の周波数 ω_0 しかないからである. さらに, 以後の近似において, n 個の周波数 ω_0, ω_1 は小分母 $[(\xi_0, k_0) + \mu(\xi_1, k_1)]$ を決めるが, それらのうちいくつかは, 周波数 ω の近似的尽数関係により小さく, 残りは縮退のために小さい. $k_0 = 0$ の場合, μ のオーダーの分母が確かに得られる.

§6. 注意 I

縮退に結び付いた困難は [15], [16] および [17] によって克服された. まず, モデル問題で $n_0 = 1$ の場合 [15], 次に断熱不変量の問題 [16] において, そして一般の場合 [17] に. われわれの構成法は 2 つの remarks に基づいている. 本節では, 最初の remark について考察する. $n_0 = 1$ の場合を調べればそれがわかる.

5 節において注意したように, 分母 $[(\xi_0, k_0) + \mu(\xi_1, k_1)]$ のいくつかは周波数 ω が尽数関係に近いことに起因して小さく, 他のもの $(k_0 = 0)$ は μ が小さいことにより小さい. 典型的な小分母 $(\xi_0, k_0) + \mu(\xi_1, k_1)$ は

$$|(\xi_0, k_0) + \mu(\xi_1, k_1)| \geq \begin{cases} K|k|^{-\nu}, & \text{if} \quad k_0 \neq 0, \\ \mu K|k|^{-\nu}, & \text{if} \quad k \neq 0 \end{cases} \quad (\nu = n + 1) \tag{1.6.1}$$

の形で下から大きさを見積もることができることがわかる.

というのは, 簡単に確かめられるように, ξ_0, ξ_1 空間では, K, μ, k を固定したとき, 条件 (1.6.1) は $2K|k|^{-\nu}$ より幅の広くない「共鳴帯」(resonance strip) においてのみ破られる. それ以後の議論は 3 節と同様に進む.

この簡単な remark からすると, ハミルトン関数が

$$H = H_0(p_0) + \mu H_1(p) + H_2(p,q) + \ldots, \quad H_2 \sim \mu^2 \tag{1.6.2}$$

の形の場合に, 不変トーラスへと収束する近似を構成することができる.

なぜなら, $H_0 + \mu H_1$ を非摂動ハミルトン関数と見ることができるからである. 新しい変数 p', q' を 2 節, 4 節で定義した正準変換によって導入する. $|H_2| \le M$ と仮定する. すると, (1.6.1) および (1.2.3) より, (1.4.1)–(1.4.3) を導くときと同様,

$$|S| \sim \frac{M}{\mu}, \quad |p_0 - p_0'| \sim M^2, \quad |p - p'| \sim \frac{M}{\mu}, \quad |q - q'| \sim \frac{M}{\mu}. \tag{1.6.3}$$

であることがわかる. 新しい変数では

$$H = H_0(p_0') + \mu H_1(p') + H_3(p', q'),$$

である. ただし,

$$|H_3| \sim \frac{M^2}{\mu}. \tag{1.6.4}$$

(記号 $\sim$ は非常にあらっぽい意味で「程度の大きさ」を表す. ここでは M と μ を $K\delta^\nu$ よりかなり小さく取ることにより, 因子 $K\delta^\nu$ を無視している.)

さて, (1.6.4) より, $|H_2| \le M \sim \mu^2$ に対して $|H_3| \sim M^{3/2}$ を得る. このことから, $M_{s+1} = M_s^{3/2-\Delta}$, $\Delta > 0$ として (たとえば $M_{s+1} = M_s^{4/3}$) ニュートン逐次近似を導入することができる.

残っているのは, ハミルトン関数 (1.5.1) を (1.6.2) の形にすることである. この操作は高速変数に関して平均することであるが, $n_0 = 1, n = 2$ に場合, 新しいアイデアは必要としない.

事実, $n_0 = 1$ に対して, (1.2.3) には小分母はなく, 正準変換 $p, q \to p', q'$ の母関数は単純に公式

$$S(p_0', p_1', q_0, q_1) = \frac{1}{\omega}(p_0', p_1', q_1) \int_0^{q_0} \tilde{H}_1(p_0', p_1', q_0, q_1) dq_0. \tag{1.6.5}$$

によって決まる. 簡単に示せるように, 新しい変数 p', q' において (2 節を見よ), ハミルトン関数 (1.5.1) は

$$H_0(p_0') + \mu \overline{H}_1(p', q_1') + H_2(p', q') + \ldots, \quad H_2 \sim \mu^2 \tag{1.6.6}$$

なる形を取る.

さらに, $n_0 = 1, n = 2$ なら $n - n_0 = 1$ であり, ハミルトン関数を $\overline{H}_1$ とする平均系 (p_0' はパラメータであり, p_1' と q_1' は正準共役変数である) は自由度 1 であって可積分である. p_1', q_1' の代りに作用・角変数 p_1'', q_1'' を導入して, $\overline{H}_1(p_0', p_1'; q_1')$ を $\overline{H}_1''(p_0', p_1'')$ の形に還元し, これによって (1.6.6) を (1.6.2) の形にもっていく.

$n_0 = 1, n = 2$ の場合に帰着できる問題は, ハミルトン関数がゆっくり周期的に変動する自由度 1 の振動系の断熱不変量のふるまいの問題や, 軸対称磁気トラップにおける磁気モーメントの断熱不変性の問題 (II 章を見よ) である.

$n > 2$ のとき, (1.6.2) への還元が可能なのは, 平均系が可積分かあるいは近可積分のときである.

$n_0 > 1$ の場合, ハミルトン関数 (1.5.1) を (1.6.2) の形へ還元すること, 譲歩して (1.6.6) の形へと還元することは新たな実質的困難を伴う. 困難は以下のようなものである. 高速変数で平

均するときに, 見積もり $|H_2| \sim \mu^2$ が 4 節にしたがって得られるのは, 選んだ p_0^* のまわりの領域 $\sim \mu$ においてのみなのである.

ところが, このとき, 以後の近似へと進むことができない. 実際, $|H_2| < M$ に対して公式 (1.6.3) において, コーシーの公式によって微分を見積もると, $|q_0 - q_0'| \sim \dfrac{M}{\mu^2}$ を得る. したがって, (1.6.4) において, $|H_3| \sim \dfrac{M^2}{\mu^2}$ であり, $M \sim \mu^2$ の場合には $H_3 \sim H_2$ となってしまい, ニュートン近似が得られない.

§7. 注意 II

上記の困難を克服するには次のようにすればよい. 非縮退の場合 (2 節, 4 節) をあらためて考えよう. 領域 $|p - p^*| \sim \mu$ に関する制限は 4 節の示唆 1) に結び付いている. これにより, $H_1^{(1)}$ に $|p - p^*|^2$ 程度の大きさの項が導入される.

摂動論の古典的手法 (2 節) に戻ると, 4 節の示唆 1) を捨てて, 2 節 (1.2.3) 式内の ω を関数 $\omega(p) = \dfrac{\partial H_0}{\partial p}$ と取る. ところがそのとき, p のいたるところ不連続な関数を扱わなくて済むようにするために,

$$S = \sum_{0<|k|<N} S_k e^{i(k,q)}$$

と置いて, 摂動論の級数を有限個のハーモニクスに制限する.

すると, $H_1^{(1)}$ の中に $\mu\widetilde{H}_1 - \mu[\widetilde{H}_1]_N = \mu \sum_{|k|\geq N} h_k e^{i(k,q)}$ なる形の項が現われる. この項が μ^2 程度の大きさであるためには, N を $\ln \dfrac{1}{\mu}$ 程度に取れば十分である (解析関数 $\widetilde{H}_1$ のフーリエ係数は幾何級数的に減少する).

得られた関数 S は正準変換 $p, q \to p', q'$ を定義する. この変換は, p' がある領域 G_{KN} に属していれば小さい. 領域 G_{KN} は H の定義されている領域 G から有限個 ($\sim N^n$) の共鳴ゾーンを除いて得られる. 領域 G_{KN} 内では

$$|(\omega(p), k)| \geq K|k|^{-\nu} \quad (0 < |k| < N; \nu = n + 1). \tag{1.7.1}$$

が成り立つ.

(1.7.1) より判るとおり, 領域 G_{KN} の成分の大きさ (magnitude) は $\left(\ln \dfrac{1}{\mu}\right)^{-n}$ 程度, つまり ~ 1 程度である. したがって, 6 節の最後に言及した困難はもう生じない. 高速変数に関して平均を取るにあたって remark 2 を利用すれば, ~ 1 程度の大きさの領域において (1.6.2) を得, したがって (1.6.3) を得る.

remark 2 は非縮退の場合にも有用である. これを使えば, 不変集合の測度を見積もるのに, ボレル (Borel) の monogenic 関数の道具立て [18] を使う必要がない. 論文 [19] にはこのアイデアの形式的な説明を与えておいた. ここでは, Remark 2 の応用の基礎的な技術的様相を若干述べる.

$|\mathrm{Im}\ q| \leq \rho$ に対して $|f(q)| \leq M$ が成り立つなら, フーリエ級数の残余を

$$|f(q) - [f(q)]_N| \leq M^2 \quad \text{for} \quad |\mathrm{Im}\ q| \leq \rho - \gamma \quad \text{if} \quad N = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{M}.$$

の形で見積もることができる (詳しくは V 章 3.2 節の 3) 項を見よ).

さて, ハミルトン関数 $H_0(p)+H_1(p,q)$ が領域 G の $|\mathrm{Im}\ q|\le\rho$ に対して不等式 $|H_1|\le M$ を満たすと仮定する. われわれの構成法はパラメータ β,γ,δ,K に依存する. これ以後, これらの値を十分小さく選び, $\gamma\gg\delta\gg\beta\gg M$ を満たすとする.

remark 2 を考慮して, 2 節や 4 節の議論から, 新しい変数 p',q' を導入して $H=H_0^{(1)}(p')+H_1^{(1)}(p',q')$ とし, 以下で条件で定義される領域内で $|H_1^{(1)}|\sim M^2$ が満たされるようにできる. すなわち, 1) p' はその β 近傍とともに G_{KN} に属す ((1.7.1) を見よ. $p'\in G_{KN}-\beta$ と書く); 2) $|\mathrm{Im}\ q|<\rho-\delta-\gamma$. ここで $N=\dfrac{1}{\gamma}\ln\dfrac{1}{M}$ であり, $|H_1^{(1)}|\sim M^2$ は

$$|H_1^{(1)}<\frac{M^2}{\beta^2\delta^{2\nu}} \tag{1.7.2}$$

のことである (詳しくは, [19] の基本補題を見よ).

量 $\beta,\gamma,\delta>0$ は, H_0,ρ,K に依存する定数によって上から限られる以外は任意に選ぶことができる. ただし, K は任意である. $\kappa>0$ が与えられたとき, 量 K,β,γ,δ,M を取って, $|H_1|\le M$ に対して, 不変トーラスの補集合が全相空間の κ 程度の部分を占めるようにする.

簡単に判るように (V 章の算術補題を見よ), 許される (admissible)p' の領域 $G_{KN}-\beta$ は G とは共鳴帯だけ異なる. 共鳴帯の全測度は

$$K\sigma+\beta N^n\quad(\sigma=\sum_{1\le m<N}m^{-2},\ N=\frac{1}{\gamma}\ln\frac{1}{M}). \tag{1.7.3}$$

の形の上限を持つ. 同様な上限は以後に続く近似においても得られる. ただし, σ の代りに, s 次近似では $\sigma_s=\sum_{N_{s-1}\le m<N_1}m^{-2}$ を使う. したがって $\sum_s\sigma_s<2$ である.

量 $K,\beta_s,\gamma_s,\delta_s,M_s$ は次のように選ぶ:

1) $\sum_s(\gamma_s+\delta_s)<\dfrac{\rho}{2}$(こうするとすべての近似が可能になる),

2) $M_{s+1}=M_s^2\beta_s^{-2}\delta_s^{-2\nu}<M_s^{3/2}$(こうすると近似は収束する. (1.7.2) を見よ),

3) $\sum_s(K\sigma_s+\beta_sN_s^n)<\kappa$(こうすると, (1.7.3) により, 不変集合の補集合の測度が $\sim\kappa$ になる).

次のように置く.

$$\gamma_s=\delta_s^\alpha,\quad\beta_s=\delta_s^3,\quad M_s=\delta_s^T,\quad N_s=\frac{1}{\gamma_s}\ln\frac{1}{M_s},\quad\delta_{s+1}=\delta_s^{3/2}$$
$$(0<\alpha\ll1,\ T\gg1)$$

T を十分大きく取って 2) が満たされるようにする. α を十分小さく取って $\beta_sN_s^n<\delta_s$ となるようにする (δ_1 が十分小さいなら). このとき, 十分小さな δ_1 に対して, 1) が満たされる. さらに, 十分小さな K と δ_1 に対して, 3) が満たされる. K をこのように選び, 次に δ_1 を十分小さく選んで上の要請がすべて満たされるようにする.

$M=\delta_1^T$ に対して, 不変トーラスに収束する近似を得, これらのトーラスの補集合の測度は 3) からすると κ 程度の大きさである.

§8. 固有縮退問題への適用

Remark 1 と 2 を結び付けて, 固有縮退の困難がすべて克服できる (5 節を見よ). そこで, 次の定理へと移ろう (この定理の前提は, たとえば三体問題において 2 つの惑星の質量が小さく, そのケプラー楕円の軌道傾斜角も小さい場合なら満たされる).

ハミルトン関数が解析的であって, 相空間 p, q(ただし, $p = p_0, p_1$; p_0 は n_0 次元のベクトル, p_1 は $n_1 = n - n_0$ 次元のベクトル; $q = q_0, q_1$ はそれぞれ高速および低速角変数 $(\mathrm{mod}\ 2\pi)$ である) 内の領域 F において

$$H(p, q) = H_0(p_0) + \mu H_1(p, q) + \ldots, \tag{1.8.1}$$

なる形をしている.

以下の 2 つを仮定する.

1) 摂動の永年部分

$$\overline{H}_1 = (2\pi)^{-n_0} \oint H_1 dq_0$$

は低速運動の位相 q_1 に依存しない. すなわち $\overline{H}_1 = \overline{H}_1(p)$ である.

2) 次数 n_0 および n_1 の運動量に関する周波数の微分係数の行列式

$$\left|\frac{\partial \omega_0}{\partial p_0}\right| = \left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_0^2}\right| \not\equiv 0, \quad \left|\frac{\partial \xi_1}{\partial p_1}\right| = \left|\frac{\partial^2 \overline{H}_1}{\partial p_1^2}\right| \not\equiv 0$$

は恒等的にはゼロにならない.

このとき, 十分小さな $|\mu|$ および F 内の大多数の[10] 初期条件に対して, ハミルトン関数 (1.8.1) を持つ正準方程式で定義される運動は準周期的である. これらの初期条件を持つ運動は, すべての $-\infty < t < +\infty$ に対して, n_0 個の高速周波数 ω_0 および n_1 個の低速周波数 $\omega_1 = \mu\xi_1$ を持つ準周期運動 (1.8.2)

$$\dot{p}_0 = 0, \quad \dot{q}_0 = \omega_0(p_0) = \frac{\partial H_0}{\partial p_0}, \quad \dot{p}_1 = 0, \quad \dot{q}_1 = \mu\xi_1(p) = \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial p_1} \tag{1.8.2}$$

に近い (系 (1.8.2) で適当な初期条件をとって).

証明には, まず Remark 2(7 節) を使って高速変数に関して平均化を行う (変数 p_0, q_0 に関して 7 節の変換 $p, q \to p', q'$ を行う. ただし, p_1, q_1 はパラメータとみなす). 次に, 第二近似, 第三近似以下を行う. その際, Remark 1 を利用する (6 節).

証明の詳細にわたることは避ける. というのは, n 体問題 ($n > 3$ に適用するためにはもっと一般の結果 (IV 章参照) が必要だからである. この一般結果は, ここで考察した非特異縮退の場合をいわゆる極限縮退と結びつけて引用するからである.

§9. 極限縮退. バーコフの変換

[10] リュベーグ測度の意味で

可積分系の相空間を層状に分割する n 次元トーラス $p =$ 一定 の間で「極限的な場合」として, 個々のトーラスの次元 $k < n$ の場合がしばしばある. 例として, ハミルトン関数を $H = \dfrac{x^2 + \dot{x}^2}{2}$ とする振動系を考えよう. 軌跡は $x, \dot{x}$ 平面の同心円 $(n = 1)$ である. 平衡点の位置は $x = \dot{x} = 0 (k = 0)$ で与えられる.

このような場合, 「極限縮退」という ([5] を見よ). 極限縮退として 2 つの場合が殊にしばしば現われる (振動論!): 平衡点の位置 $(k = 0)$ と周期運動 $(k = 1)$ である. これらの場合は Birkhoff[3] が詳しく研究した. 彼の結果は以下の議論で利用する. 証明は [3] および [8] を見よ.

点 $p = q = 0$ がハミルトン関数 $H(p, q)$ を持つ系の平衡点の位置であるとする. ハミルトン関数は原点の近傍で, $p = p_1, \ldots, p_n, q = q_1, \ldots, q_n$ の巾級数

$$H = H_2(p, q) + H_3(p, q) + H_4 + \ldots, \tag{1.9.1}$$

として展開される (H_m は次数 m の項である).

ハミルトン関数を H_2 とする正準方程式は線形であるから可積分である. ハミルトン関数を H_2 とする線形系の平衡点は安定であると仮定する (いわゆる 楕円型). このとき, 線形正準変換 $p, q \to p', q'$ があって, H_2 を

$$H_2(p, q) = (\lambda, \tau), \quad \text{ただし} \quad \tau = \tau_1 \ldots, \tau_n, \ 2\tau_1 = {p'_i}^2 + {q'_i}^2;$$

の形に還元する. ここで $\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ はハミルトン関数を H_2 とする線形振動系の基本周波数の組である. この系では, 不変 n 次元トーラスは方程式 $\tau =$ 一定 > 0 で与えられる. 周波数 λ が算術的に独立なら, 運動は準周期的であり, 軌跡はこれらのトーラスをいたるところ稠密に埋める. 周波数 λ はどのトーラス上でも同じである. 作用・角変数 τ, φ は p', q' と式

$$p = \sqrt{2\tau} \cos \varphi, \quad q = \sqrt{2\tau} \sin \varphi. \tag{1.9.2}$$

で結ばれる正準極座標である.

原点の小さな近傍において, (1.9.1) 式の項 $H_3, H_4, \ldots$ は H_2 に比べて小さい. 摂動論の発想に従って, 適当な正準変換 $p'' = p' + \ldots, q'' = q' + \ldots$ によって H_3 その他を消去するよう努力してみる. 小分母 (λ, k) が現われるであろう. さらに, 計算によれば, H_3 は消去できるけれども H_4 の一部と残りの偶数次項の一部が残る. こうして, 任意の整数 $2s \geq 3$ に対して, (1.9.1) はいわゆる正規形 (1.9.4) に還元されることがわかる.

$$(\lambda, k) \neq 0 \quad \text{for} \quad |k| = |k_1| + \ldots + |k_n| \leq 2s - 1. \tag{1.9.3}_s$$

を仮定する.

このとき, 原点の近傍で収束する巾級数[11] 正準変換 $p^{(s)} = p' + \ldots, q^{(s)} = q' + \ldots$ が存在して, (1.9.1) は $p^{(s)}, q^{(s)}$ により

$$H(p, q) = \overline{H}^{(s)}(\tau^{(s)}) + \widetilde{H}^{(s)}(p^{(s)}, q^{(s)}), \tag{1.9.4}$$

[11] 多項式かもしれない

なる形に表される. ただし

$$2\tau_i^{(s)} = (p_i^{(s)})^2 + (q_i^{(s)})^2, \quad \overline{H}^{(s)} = (\lambda, \tau^{(s)}) + \sum_{i,j} \lambda_{ij} \tau_i^{(s)} \tau_j^{(s)} + \dots$$

は τ_i^s の多項式 $(\lambda_{ji} = \lambda_{ij})$ であり, $\widetilde{H}^{(s)} = O(|\tau^{(s)}|^s)$ は $p^{(s)}, q^{(s)}$ に関する収束巾級数であって, 次数 $2s$ の項から始まる. 多項式 $\overline{H}^{(s)}$ の係数 $\lambda_i, \lambda_{ij}, \dots$ は s に依存しないし, (1.9.1) を (1.9.4) に還元する方法にも依存しない. これらは, p, q の正準変換に関する関数 (1.9.4) の不変量である.

ハミルトン関数を $\overline{H}^{(s)}$ とする系は可積分である. 作用・角変数は $p^{(s)}, q^{(s)}$ と式 (1.9.2) で結ばれる正準極座標 $\tau^{(s)}, \varphi^{(s)}$ である. 不変トーラスは方程式 $\tau^{(s)} =$ 一定 で与えられる. 対応する周波数 $\lambda_i^{(s)} = \lambda_i + 2\sum_j \lambda_{ij}\tau_j^s$ は一般的に言えば, トーラス毎に異なる. 行列式

$$|2\lambda_{ij}| = \left|\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial \tau^2}\right|_0 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 2\lambda_{ij} & \lambda_i \\ \lambda_j & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \overline{H}}{\partial \tau^2} & \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial \tau} & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (1.9.5)_{1,2}$$

(階数は n または $n+1$) のどれかひとつがゼロでなければ, (1.9.1) は一般楕円型とよばれる.

正規形 (1.9.4) により, 原点の小さな $(\sim \varepsilon)$ 近傍に始まる軌跡のふるまいを調べることができる. $t \sim \varepsilon^{-s}$ に対して, 軌跡は, ハミルトン関数を $\overline{H}^{(s)}$ とする可積分系の軌跡の近くにとどまる. 後者の軌跡は $-\infty < t < +\infty$ すべてに対して原点の近傍にとどまる. だから, $k \neq 0$ に対して $(\lambda, k) \neq 0$ なら, 原点の ε 近傍から出発する軌跡は, 少なくとも時間 $C_s\varepsilon^{-s}$ の間, 原点の近くにとどまる. ここで ε が十分に小さければ, s は任意に大きい.

しかし, 2 節で注意したように, 級数列 $p^{(s)} = p' + \dots, q^{(s)} = q' + \dots$ は $s \to \infty$ のとき発散する. したがって, 点 $0, 0$ の安定性は (1.9.4) からは出ない.

自由度 n の保存系の周期運動の近傍の研究 [3] は, 自由度 $n-1$ の系の平衡点の位置の研究に還元できる. ただし, その場合, ハミルトン関数 (1.9.1) は時間に周期的に依存する. すなわち $H(p, q; t + 2\pi) = H(p, q; t)$. (1.9.3) の代りに, $|k| \leq 2s - 1$ に対して $(\lambda, k) \neq k_0$, $k_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ を要求すると, バーコフ変換 $p, q \to p^{(s)}, q^{(s)}$ があって, $H(p, q; t)$ を (1.9.4) の形に還元する. 関数 $p^{(s)}(p, q), q^{(s)}(p, q)$ と $\tilde{H}^{(s)}(p^{(s)}, q^{(s)})$ はこの場合やはり t に依存する (周期 2π).

§10. ハミルトン系の平衡点の安定性

一般楕円型の保存系の平衡点の安定性ははじめて著者の論文 [14] によって, 自由度 2 の場合に, 仮定 $(1.9.3)_\infty$ および $(1.9.5)_2$ の下に証明された. A.M. Leontovich[23] はこの結果を有界三体問題に適用し, ラグランジュの周期解が安定であることを証明した.

次に J.Moser は, λ_1/λ_2 の無理数性 (条件 $(1.9.3)_\infty$) の代りに条件 $(1.9.3)_{2\frac{1}{2}}$ を取れば十分であること, すなわち, $|k_1| + |k_2| \leq 4$ に対して $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 \neq 0$ を取ればいいことを観察した. 自由度が 2 より大きいなら, 安定性は未解決である. 証明されているのは大多数の初期条件に対してのみである.

同様な結果は非自励系の場合に (著者によって [14], そして Moser によって [25]) 得られている. 2 周波数問題, すなわち, 自由度 2 の自励系の周期運動の場合や自由度 1 でハミルトン関数が周期変化する系の平衡点の場合, では安定性が証明された.

ここでは一般楕円型のハミルトン系の平衡点の安定性の証明を, $|k_1| + |k_2| \leq 4$ に対して $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 \neq 0$ ($(1.9.3)_{2\frac{1}{2}}$ を見よ) という仮定の下で述べる.

9 節に応じて, ハミルトン関数が

$$H = H_0(\tau) + H_1(\tau, \varphi), \quad \text{ただし} \quad H_0(\tau) = (\lambda, \tau) + \sum \lambda_{ij}\tau_i\tau_j, \quad |H_1| \leq C|\tau|^{2\frac{1}{2}}. \tag{1.10.1}$$

なる形をしていることを正当化できる ($(1.9.4)$ を見よ). ここで $H_1(\tau, \varphi)$ は τ, φ に関し領域 $|\tau_i - \varepsilon| < \varepsilon$, $|\mathrm{Im}\ \varphi| < 1$ において解析的である. 条件 $(1.9.5)_1$ が成り立つことをなによりも先ず仮定する. 次に領域 $|\tau - \varepsilon| < \varepsilon$ 内で τ を動かすと, 周波数 $\lambda(\tau) = \dfrac{\partial H_0}{\partial \tau}$ は点 $\lambda = \lambda(0)$ のまわりの ε 程度の大きさの領域を走り回る.

ところが簡単に気づくように, ε 程度の大きさの領域内の点 λ の大多数は

$$|(\lambda, k)| \geq K\varepsilon|k|^{-\nu} \quad (|k| > 0,\ \nu = n + 1) \tag{1.10.2}$$

の形の分母 (λ, k) に対して, 適当な $K > 0$ を取ると下限を見積もることができる.

というのは, 簡単にわかるように, 数 k の共鳴帯の測度は, いま考えている領域の測度の $K|k|^{-\nu}$ 程度の部分を構成するからである. 以下の議論は 3 節と同じ道筋で進む.

この remark より, 十分小さな (ε に依存しない)$K > 0$ に対して, 小分母 $(\lambda(\tau), k)$ は, 領域 $G : |\tau_i - \varepsilon| < \varepsilon$ 内の大多数の τ に対して下限 $(1.10.2)$ を持つ. われわれの結論は $\lambda = \lambda(0)$ の算術的な性質には依らない.

そこで 7 節の構成法を領域 G 内の関数 $(1.10.1)$ に適用しよう. $\beta = \delta^3\varepsilon$ と置く. $|H_1| \leq M$ としよう. 十分小さな δ に対して, 領域 $G_{\varepsilon K,N} - \beta$ 内で $(1.7.2)$ より

$$|H_1^{(1)}(\tau', \varphi')| < \frac{M^2}{\varepsilon^2\delta^{2\nu+6}}.$$

を得る. $M < C\varepsilon^{5/2}, M < \delta^T$ なら, 十分大きな T および十分小さな δ に対して, すぐ上の公式より,

$$|H_1^{(1)}(\tau', \varphi')| < M^{11/10} \quad (\text{一般に } < \mathrm{M}^{6/5-\Delta},\ \Delta > 0)$$

がしたがう. したがって,

$$\gamma_s = \delta_s^{\alpha}, \quad \beta_s = \delta_s^3\varepsilon, \quad M_s = \delta_s^T, \quad N_s = \frac{1}{\gamma_s}\ln\frac{1}{M_s}, \quad \delta_{s+1} = \delta_s^{11/10}$$

と置く. 十分小さな α, 十分小さな K, 十分大きな T, 十分小さな δ_1 および $\varepsilon < \delta_1^R = \delta_1^{2/5T}$ に対して, 7 節で構成した近似は収束する. 原点の ε 近傍において準周期運動の乗る不変トーラスを得る.

この時点まで, われわれの議論は任意の自由度 n に対して正しかった. しかし, $n = 2$ ならば, 見つけた 2 次元トーラスはそれを含む 3 次元多様体 $H =$ 一定 を分割する. 原点近傍のこれら各多様体上に不変トーラスがあるなら, 原点はもちろん安定平衡点である.

われわれの構成法で $H =$ 一定 上に与えられたトーラスが存在するのは比 $\dfrac{\lambda_1(\tau)}{\lambda_2(\tau)}$ が線 $H_0(\tau) = 0$ に沿って変化するときである. 自由度 n の場合, これは条件

$$\frac{D\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n}, \ldots, \dfrac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)}{D(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})} \neq 0 \tag{1.10.3}$$

によって表される (ここで τ_n は式 $H_0(\tau) = 0$ より, $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ によって表される).

式 (1.10.3) は対称な形にすると $(1.9.5)_2$ の形になる. だから, $n = 2$ の場合は仮定 $(1.9.5)_2$ および $(1.9.3)_{2\frac{1}{2}}$ から安定性が出る. 仮定 $(1.9.5)_2$ はもっと弱めることができる ([14] を見よ) [12] .

$n \geq 2$ の場合, 得られたトーラスは平衡点の ε 近傍の大きな部分を占める. このことは (1.7.3) の型の見積もりを使って証明される. この見積もりは共鳴ゾーン $G \backslash (G_{\varepsilon K,N} - \beta)$ と領域 G 全体の測度の比を表現する. 詳しい証明は IV 章で述べる (そこでは $n_0 = 0$ と置くべき). 技術的な便宜のために, 証明は仮定 $(1.9.3)_{3\frac{1}{2}}$ (つまり $|k| \leq 6$ に対して $(\lambda, k) \neq 0$) および $(1.9.5)_1$ の下で行う.

一般の多次元楕円の場合の安定性は未解決である. 一番単純な未解決問題は, 4 次元空間からそれ自身の中への正準写像の不動点の安定性を決定することである.

[12] (1.9.3) を完全に捨て去ることができない例が知られている ([4] を見よ).

II 章. 断熱不変量

この章では, 断熱不変量の概念 (これは重要かつ興味深いにもかかわらず数学者がほとんど調べてこなかった) について考える. 自由度 1 の振動系のパラメータが小さく周期変動する場合の無限時間にわたる断熱不変量の変化を調べる. 系が非線形なら, この変動はすべての $-\infty < t < +\infty$ にわたって小さい, ことがわかった ([16] を見よ).

1 節では断熱不変量と永劫断熱不変量を定義する. 2 節では, 作用が永劫不変であることの証明を I 章 8 節の型の一般定理へ還元する. 3 節では自由度 2 の保存系に対しての類似の手続きを概観する. 得られた結果を 4 節において軸対称磁場中の荷電粒子の運動の研究に応用する. 断熱磁場トラップは粒子を永遠に引き留めて置くことができる ことを示そう. 最終節は多次元の場合のいくつかの注意を述べる.

§1. 断熱不変量の概念

この節では, 断熱不変量の概念の数学的定義のうちの可能なひとつを与える. 自由度 1 の線形および非線形振動系における断熱不変量の変動の蓄積の問題を議論する.

1. 断熱変化. パラメータが変化し得る力学系, たとえば可変長の振り子を考えよう. (系の運動に比べて) 非常にゆっくりパラメータが変わるとき, 異なる漸近的現象が現われる. 振り子の例では, 振動振幅は (極限では) 長さの関数であることがわかる. 長さがある適当な法則にしたがって十分ゆっくり変化するなら, 長さが元の長さに戻るたびに, 振動の振幅も初期の値に戻る.

パラメータのこのような緩慢な変化は断熱的とよばれる. 断熱変化の概念は物理学者によってやや曖昧な形で導入された. 系のパラメータを変えている人物にはその変化が見えない (さもなければ, パラメータを系の運動と同期するように変えて系を揺らせることができる) と想定された. この要請に対する数学的な定式化は非常に微妙である.

[26] にしたがって, この困難を避け, $\lambda = f(\mu t)$ の形のパラメータ λ の低速変化を考える. ここで $f(x)$ は固定した滑らかな関数であり, μ は非常に小さな数である. 一般性を失うことなく, いわゆる「遅い時間」λt をゆっくり変化するパラメータと考えることができ, ハミルトン関数 $H(p, q; \lambda)$ を固定する. 非常に小さな μ を考え, 大きいけれども有限な時間間隔 $t \sim \dfrac{1}{\mu}$ の間の系の運動を問題にしよう.

2. 断熱不変量. ハミルトン関数を

$$H(p, q; \lambda) \quad (p = p_1, \ldots, p_n;\ q = q_1, \ldots, q_n;\ \lambda = \mu t)$$

とする力学系を考える.

定義. 関数 $J(p, q; \lambda)$ が系の断熱不変量と言われるのは, 小さな μ に対して

$$J(t) = J[p(t), q(t); \lambda(t)]$$

が $t \sim \dfrac{1}{\mu}$ の間に少ししか変化しないときである (ここで, λ や H の変化は 1 程度である).

もう少し詳しく言うと, J が 断熱不変量 であるのは, 任意の $\kappa > 0$ に対して $\mu_0 > 0$ を見つけることができ, $0 < \mu < \mu_0$ ならば区間 $0 < t < \dfrac{1}{\mu}$ のすべての t に対して

$$|J(t) - J(0)| < \kappa.$$

にできるときである.

明らかに, 自己保存 (不変) 量はどれも断熱不変量である. 自明でない例を以下に示す.

I. 自由度 1 でハミルトン関数を $H(p, q; \lambda)$ とする振動系を考えよう. パラメータ λ の値を固定すれば相平面 p, q 上で, エネルギーのレベル曲線族 $H(p, q; \lambda) =$ 一定 が書ける. 点 p_0, q_0 を通る曲線はある領域を囲む. その面積を $2\pi I(p_0, q_0; \lambda)$ と書く. I が断熱不変量であることを示すことができる [5],[6]. 量 I は 作用変数 あるいは 作用 とよばれる.

数学振り子

$$H = \frac{p^2 + \omega^2 q^2}{2}, \qquad \text{図 } 8$$

の場合, $I = \dfrac{H}{\omega}$ である. ただし, $\omega = \omega(\lambda)$ は振動周波数である.

II. 第二の例としてゆっくり動く 2 枚の平行平面の間の完全弾性球の運動を考える (8 図). 平面間の距離と球の速度の積は断熱不変量である. これは初等的なやり方でも示すことができる ([26] を見よ). 例 II は例 I の極限的な場合と考えることもできる.

III. もうひとつの例は, 磁場の中の荷電粒子の運動を考えて得られる. 場 B の強さが時間的にも空間的にも一定なら, 粒子は力線のまわりの渦巻に沿って動く. 粒子の速度 v を場に平行な成分と垂直な成分に分ける:

$$v = v_{||} + v_{\perp}.$$

場 $B(\lambda)$ がゆっくり変化するとき, 「磁気モーメント」

$$I = \frac{W_{\perp}}{B},$$

の大きさが断熱不変量であることを示すことができる ([28] を見よ). ここで $W_{\perp} = \dfrac{v_{\perp}^2}{2}$ は横断的方向の運動エネルギーである.

3. 永劫断熱不変量**.** 断熱不変量 I は時間 $t \sim \dfrac{1}{\mu}$ の間, 少ししか変化しない. しかし, 無限時間経てば, 大きく変化し得る. これは I の小さな変化が集積する可能性と関係する. たとえば, 線形振動系 (ぶらんこ)

$$\ddot{x} = -\omega^2(1 + \alpha \cos \mu t)x \quad (\alpha \ll 1)$$

を考えてみよう. 知られているように ([6]), ある値 (すなわち, $\mu \approx \dfrac{2\omega}{k},\ k = 1, 2, \ldots$) のときにパラメトリック共鳴が可能である. つまり, $t \to \infty$ のとき $I(t) \to \infty$ となる. このようなぶらんこは, パラメータ μ の変化が任意に小さい場合でも生じ得る.

しかし, 自由度 1 の非線形振動系のハミルトン関数 $H(p, q; \lambda)$ がゆっくり周期的に変動したとき, 断熱不変量は永遠に保存される. すなわち, 任意の $\kappa > 0$ に対して, $\mu_0(\kappa) > 0$ を見つけることができて, $|\mu| < \mu_0$ なら, すべての $-\infty < t < +\infty$ に対して

$$|I(t) - I(0)| < \kappa,$$

とすることができる. この主張は 2 節で証明する.

線形系は例外である. というのは, その振動の周波数が振幅に依らないからである. 非線形系ではこれと違って, 振幅が増すと周波数が変わり, 振動は増大することができなくなる. なぜなら, 共鳴条件 $\mu \approx \dfrac{2\omega}{k}$ が破れるからである.

§2. ハミルトン関数の緩慢な周期変化にともなう永劫断熱不変性

この節では, 自由度 1 であって, 遅い時間 λt に周期的に依存する解析的なハミルトン関数 $H(p,q;\lambda)$:

$$H(p,q;\lambda+2\pi)=H(p,q;\lambda).$$

を持つ非線形振動系を考える. 作用 I が永劫断熱不変量であることを証明する.

1. 保存近似. まずあらっぽいゼロ次近似を考える. $\lambda=$ 一定 で系は自励であるとする. 自由度 1 の保存系として, この系は可積分である. 系の周期運動を記述するのに, 作用・角変数 I,ω を使うのが都合よい. これらの変数は正準変換

$$p=\frac{\partial S}{\partial q},\quad w=\frac{\partial S}{\partial I} \tag{2.2.1}$$

によって導入される. 母関数は

$$S(I,q)=\int_{H=h}^{q}pdq, \tag{2.2.2}$$

である. ただし, $h=H_0(I)$ は

$$I(h)=\frac{1}{2\pi}\oint_{H-h}pdq, \tag{2.2.3}$$

の逆関数であり, $(2.2.2)$ および $(2.2.3)$ 内の p は, 方程式 $H(p,q)=h$ から得られる量 $p(h,q)$ を表す.

式 $(2.2.1)$ は, 各固定した λ の値に対して, 正準変換 $p,q\to I,w$ を定義する. I,w の時間変化はハミルトン関数を $H_0(I)$ とする正準方程式により決定される. したがって, 量 I は保存され, 円周 $I=$ 一定 上の角度座標 w は周波数

$$\dot{w}=\omega(I)=\frac{\partial H_0}{\partial I}. \tag{2.2.4}$$

で一様に変化する. すべての関数 $H(p,q;\lambda),\ S(I,q;\lambda),\ H_0(I;\lambda),w(I;\lambda)$ はパラメータ λ に依存する. その依存性は $(2.2.1)$–$(2.2.4)$ ではあからさまに書かなかった. 保存近似では, パラメータ λ の値は固定される. 近似は $t\sim 1$ の間適用可能である.

2. 断熱近似. 1 項で導入した作用・角座標はパラメータ λ が時間変化する場合に便利である. 変換 $p,q\to I,w$ は正準であるが, パラメータ λ に依存するから, 時間 t に依存する. だから, I,w の時間変化はハミルトン関数を

$$H(I,w;\lambda)=H_0(I)+\mu H_1(I,w;\lambda), \tag{2.2.5}$$

とする正準方程式によって決定される. ここで $H_1=\dfrac{\partial S}{\partial\lambda}$ は 1 価関数であって, w と λ に関し周期 2π である.

古典摂動論 (I 章を見よ) によれば, 相空間 $p,q;\lambda$ に
おいて以下のような描像が得られる.
座標 λ が 2π 異なる点を同一視する.
すると, 方程式 $I=$ 一定 は 2 次元

トーラスを決める. このトーラス
上の角度座標 w と λ を
緯度, 経度と呼ぶことにする (図 9).

保存近似 ($\mu = 0$) においては,
トーラスの各点は子午線 $\lambda =$ 一定 に
沿って, 経度に依存する角速度 $\omega(I;\lambda)$
で動く. $\mu \neq 0$ では, 子午線を横切る
ゆっくりした運動 ($\lambda = \mu$) が加わって, 運動は 2 周波数になる. しかし, 摂動論の近似内では, 相点は不変トーラス $I =$ 一定 の上にとどまる. この近似は断熱とよばれる. 困難なくわかるように, 真の運動は時間 $t \sim \dfrac{1}{\mu}$ の間断熱近似に近い. これで I の断熱不変性が証明された.

次に非線形系にける I の 永劫 断熱不変性の証明に移ろう.

3. 不変トーラス. 線形系においては, $\omega(I) =$ 一定 かつ $H_0(I) = I\omega$ である. 振動は非線形であると仮定する. $\overline{\omega}(I)$ は平均周波数

$$\overline{\omega}(I) = \frac{1}{\omega}\oint \omega(I;\lambda)d\lambda = \frac{d\overline{H}_0}{dI}, \quad \text{ここで} \quad \overline{H}_0(I) = \frac{1}{2\pi}\oint H_0(I;\lambda)d\lambda.$$

を表すとする. また

$$\frac{d^2\overline{H}_0}{dI^2} = \frac{d\overline{\omega}}{dI} \neq 0. \tag{2.2.6}$$

を仮定する. 条件 (2.2.6) の下で, I の 永劫 断熱不変性を証明しよう. このことを頭に入れておいて, ハミルトン関数を (2.2.5) とする系の 真の(近似的でない) 不変トーラスをたくさん探そう. これらのトーラスは μ が小さければトーラス $I =$ 一定 に近い. これらは 2 次元であり, 3 次元相空間 $p, q; \lambda$ を薄い層に分ける. 初期点 $p_0, q_0; \lambda_0$ が 2 つのトーラス λ_1 と λ_2 の間にあれば, 軌跡 $p(t), q(t); \lambda(t)$ は全体が λ_1 と λ_2 の間に含まれる. 次の命題を証明する.

1. 任意の $\kappa > 0$ に対して, μ_0 を見つけることができて, $|\mu| < \mu_0$ なら任意の点 $p_0, q_0; \lambda_0$ は 2 つの不変トーラス T_1 と T_2 の間に挟まれるようにできる. ただし,

$$|I(p_1, q_1; \lambda_1) - I(p_2, q_2; \lambda_2)| < \kappa,$$

であり, $p_1, q_1; \lambda_1$ は T_1 に属し, $p_2, q_2; \lambda_1$ は T_2 に属するとする.

この命題 1 から作用の永劫不変性がただちに従う.

定理 1. 振動系が作用–角変数に関するハミルトン関数 (2.2.5) を持つとし, $\dfrac{\partial H_0}{\partial I} \neq 0$, $\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \neq 0$ が領域 $|I - I_0| \leq r$ 内いたるところ成り立つとする. このとき任意の $\kappa > 0$ に対して μ_0 を見つけることができて, $|\mu| < \mu_0$ かつ $|I(0) - I_0| \leq r - \kappa$ なら, すべての $-\infty < t < +\infty$ に対して $|I(t) - I(0)| \leq \kappa$ が成り立つようにできる.

定理 1 の前提のもとで命題 1 を証明しよう.

4. 予備正準変換. ハミルトン関数 (2.2.5) を (1.8.1) の形に還元したい. このためには, 高速運動 w の位相を独立変数にとると都合がいい.

補題. 周波数 $\omega(I;\lambda) = \dfrac{\partial H_0}{\partial I}$ がいま問題にしている領域でゼロにならないとする. このとき, 変数 I, w, λ の解析関数 P, Q, T で, μ に依存しないものが存在して, 以下の 3 つの性質を満たす.

1) $P, Q - \lambda$ および $T - w$ は w および λ に関し周期 2π である.

2) ハミルトン関数を (2.2.5) とする正準方程式は正準方程式

$$\frac{dP}{dT} = -\frac{\partial k}{\partial Q}, \quad \frac{dQ}{dT} = \frac{\partial k}{\partial P}$$

と等価である. ただし, この方程式のハミルトン関数は

$$k(P, Q; T) = \mu k_0(P) + \mu^2 k_1(P, Q; T) + \ldots, \tag{2.2.7}$$

であり, Q, T に関して周期 2π であって, トーラス層 $|P - I_0| \leq r$ の複素近傍において解析的である.

3) (2.2.7) において, 関数 $k_0(P)$ は $\overline{H}_0(I)$ の逆である. したがって $\overline{H}_0(k_0(P)) = P$ である.

まず何をおいても新しい時間 $T = w$ を導入する. 知られているように [4], $I, w; \lambda$ 空間におけるハミルトン系の積分曲線は微分形式

$$Idw - H(I, w, \mu t)dt = -\frac{1}{\mu}(Hd\lambda - \varepsilon Idw). \tag{2.2.8}$$

につねに結び付いている. この形式に定数を乗じても関係式を変えない. (2.2.8) において, $I, w; t$ ではなくて $H, \lambda; w$ を独立変数とみなす. (2.2.5) を I に関して解いて

$$I(H, \lambda; w) = I_0(H, \lambda) + \mu I_1(H, \lambda; w) + \ldots$$

を得る. 記法

$$p' = H, \quad q' = \lambda, \quad T = w, \quad K = \mu I.$$

を導入する. すると,

$$K(p', q'; T) = \mu I_0(p', q') + \mu^2 I_1(p', q'; T) + \ldots \tag{2.2.9}$$

および

$$Hd\lambda - \mu Idw = p'dq' - K(p', q'; T)dT,$$

が成り立つ. だからハミルトン関数を (2.2.5) とする系と, (2.2.9) とする系は等価である ([4] を見よ).

2. における周波数 $\omega(I;\lambda)$ は時間変化することに注意しよう. 正準変換 $p', q' \to P, Q$ によって, 座標 $q' = \lambda(\text{slow time})$ を変え, 新しい時間 Q に関する周波数が一定値 $\overline{\omega}(I)$ となるようにする. このことを頭に入れておいて, ハミルトン関数を $I_0(p', q')$ とする系に, 正準変換

$$p' = \frac{\partial S}{\partial q'}, \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P}$$

によって作用–角変数を導入する. この変換の母関数は

$$S(P,q') = \int^{q'} H_0(I,\lambda)d\lambda,$$

である. ここで, $I = k_0(P)$ は $H_0(I)$ の逆関数である. 明らかに, 量 $P, Q; T$ は 4. の補題の要請をすべて満たす.

この補題に応じて, ハミルトン関数を (2.2.7) とする系に関する類似の主張から 3. の命題 1 がしたがう.

5. ハミルトン関数 (2.2.7) を持つ系の研究. 関数 (2.2.7) は形式的には I 章 8 節の記述範囲には入らない. というのは, (2.2.7) は「時間」T を明示的に含んでいるからである. ところが, I 章 8 節の結論は正しく, I 章で概説された方法で容易に得ることができるし, IV 章ではもっと込み入った問題で詳しく実行する. ここでは証明の詳細にはこれ以上立ち入らない. ここでは別の方法により, 系 (2.2.7) を自由度 2 の保存系に還元できることを示す. このために, 正準方程式

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = -\frac{\partial k}{\partial Q}, \quad \frac{\partial R}{\partial \tau} = -\frac{\partial k}{\partial T}, \quad \frac{\partial Q}{\partial \tau} = \frac{\partial k}{\partial P}, \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} = 1$$

で, ハミルトン関数を

$$R + k(P,Q,T) = R + \mu k_0(P) + \mu^2 \ldots \tag{2.2.10}$$

とし, 角度座標を Q, T とするものが, ハミルトン関数を (2.2.7) とする正準方程式を含むことに注意する. 関数 (2.2.10) は (1.8.1) の形をしている.

(1.9.5) に類似で I 章 8 節の結果の正当性を保証する不等式は (2.2.6) からしたがう.

これらの方法のどちらを使っても, 次の命題を証明することができる.

命題 II. (2.2.7) 式が $|\mu| < \overline{\mu}$ に対して, 領域 $|\mathrm{Im} Q, T| \le \rho$, $|P - P_0| \le r$ において解析的であるとする. ただし, $|k_0| \le M$, $|k_1 + (\mu)\ldots| \le M$, $\left|\dfrac{d^2 k_0}{dP_0^2}\right| \ge \theta > 0$ とする. このとき, どの $\kappa > 0$ に対しても, $\mu_0(\kappa, \overline{\mu}, r, \rho, M, \theta) > 0$ を見つけることができて, $|\mu| < \mu_0$ なら, 実トーラス層 F(ただし $|P - P_0| \le r$) は, κ mes$F$ 未満の測度の残余不定性の精度で不変トーラスで満たされており, あるトーラス $P =$ 一定 からこれらの不変トーラスの距離は κ 未満である.

命題 I, および 3. の定理 1 も, 4. により命題 II から簡単に出る.

§3. 保存系の断熱不変量

この節では, 自由度 2 の保存系において, 作用変数が永劫不変量であることを証明する.

1. 断熱近似. 自由度 2 の保存力学系 (X, Y) を考えよう. この座標のうちのひとつ, たとえば X が少し変化しても系の状態にほとんど影響しないと仮定する. このとき, ゆっくり変化するパラメータ μX に依存する 1 自由度系 Y が近似的に存在すると仮定できる. 作用変数 I_Y は以下の意味で断熱不変であることを示すことができる.

4 変数の関数 $H(\ldots)$ を固定しよう. X, Y, P_X, P_Y を正準共役変数とする. ハミルトン関数 $H(\mu X, Y; P_X, P_Y)$ で定義される力学系を考える. μ が小さければ, X が 1 程度の大きさ変化しても系の状態は少ししか変わらない. X と P_X の値を固定する. このとき, H は関数 $H_Y(Y, P_Y)$

に変換される. ハミルトン関数を $H_Y(Y,P_Y)$ とする系における作用変数を $I_Y(Y,P_Y)$ と書く. したし I_Y の大きさはパラメータ $\mu X, P_X$ に依存する. ハミルトン関数を $H(\mu X, Y; P_X, P_Y)$ とする元の系に対しては, $I_Y[\mu X(t), Y(t), P_X(t), P_Y(t)]$ の変動が $t \sim \dfrac{1}{\mu}$ の間に小さく, μ も小さい, という意味で, 作用 I_Y は断熱不変量である.

関数 $H(\mu X, Y; P_X, P_Y)$ は $H = H_X(\mu X, P_X; I_Y)$ の形に書くことができる. X, P_X の時間変動を近似的に決めるためには, ハミルトン関数を $H_X(\mu X, P_X)$ (一定パラメータ I_Y に依存する) とする正準方程式を作れば十分である. この 1 自由度系において運動が周期的なら, 作用変数 $I_\chi \sim \dfrac{1}{\mu}$ を導入することができる. 断熱近似において, 運動は周波数 ω_Y での Y の高速振動と, μ 程度の大きさの周波数 ω_X での X のゆっくりした振動の合成である. その際, I_Y と μI_X は保存される.

この近似は以下で証明する. エネルギーの値 h を固定したとき, 比 $\dfrac{\omega_Y}{\omega_X}$ の平均値 $\dfrac{\overline{\omega}_Y}{\overline{\omega}_X}$ が I_Y に依存する, という仮定の下で, I_Y と μI_X の永劫断熱不変性を証明しよう.

図 10

2. 例. x 軸に沿って引っ張られる「ポテンシャルディッチ (ditch)」内の運動を考えよう (図 10).

$$H = \frac{P_X^2 + P_Y^2 + U(x,Y)}{2}$$

ただし

$$U = \omega^2 Y^2, \quad \omega = 1 + x^2, \quad x = \mu X, \quad \mu \ll 1$$

1. で導入された量は

$$H_Y = \frac{P_Y^2 + U}{2} + \frac{P_X^2}{2}, \qquad I_Y = \frac{P_Y^2 + U}{2\omega_Y}, \qquad \omega_Y = \omega = 1 + x^2, \quad \overline{\omega} = \frac{2h}{3I_Y} + \frac{1}{3},$$
$$H_X = \frac{P_Y^2 + 2I_Y x^2}{2} + I_Y, \quad \mu I_X = \frac{P_X^2 + 2I_Y x^2}{2\sqrt{2I_Y}}, \quad \omega_X = \mu\sqrt{2I_Y}.$$

なる形を取る. $\dfrac{\overline{\omega}_Y}{\overline{\omega}_X}$ の I_Y への依存性に関する我々の仮定は満たされる. だから $I_Y, \mu I_X$ は永劫断熱不変である.

ディッチの底において, 無限遠へとことがり去ることが可能である $(Y = P_Y = I_Y = 0, P_X - v, X = X_0 + vt)$. ところが, $I_Y \neq 0$ なら, 運動は少なくとも十分小さな μ に対しては, 有界領

域で生じる (図 11). というのは, h と $I_Y \neq 0$ をわれわれの要請する初期条件に対応する値に固定し, そこで μ をゼロに持っていく. μ が十分小さいと

$$|I_Y(t) - I_Y(0)| < O(\mu) \quad \text{for all} \quad -\infty < t < +\infty$$

が成り立つ.

ところが

$$h - I_Y(1 + x^2) = \frac{P_X^2}{2} \geq 0$$

であるから, x 方向の運動は

$$|x_{\max}| = \sqrt{\frac{h}{I_Y} - 1} + O(\mu).$$

によって限られる.

図 11

3. 予備正準変換. 系のハミルトン関数を (2.2.9) の形に還元しよう. I_Y と μI_X の永劫断熱不変性は, 後者の系の 2 次元不変トーラスの存在から簡単に演繹することができる. というのは, これらのトーラスはエネルギー $H = h$ の 3 次元レベル曲面を分割するからである.

補題. ハミルトン関数 $H(x, Y; P_X, P_Y)$ $(x = \mu X)$ は解析的であり, 固定した x, P_X に対して, 作用–角変数を $I_Y(x, P_X; h)$, $w(x, Y, P_X, P_Y)$ とする振動系を定義するとする. このとき, x, Y, P_X, P_Y を新しい変数 x', w', P', I' で表現する解析的変数変換があって次を満たす.

1) 関数 x, Y, P_X, P_Y は w に関して周期 2π である. $\mu \to 0$ のとき, 変数 x', w', P', I' は x, w_Y, P_X, P_Y に移行する.

2) 正準方程式

$$\frac{dP_X}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X}, \quad \frac{dP_Y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Y}, \quad \frac{dX}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_X}, \quad \frac{dY}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_Y}$$

の積分曲線に沿って, パラメータ h に依存するハミルトン関数を $K(P', x'; w'; h)$ とする正準方程式

$$\frac{dP'}{d\omega'} = -\frac{\partial K}{\partial x'}, \quad \frac{dx'}{d\omega'} = \frac{\partial K}{\partial P'} \tag{2.3.1}$$

が満たされる.

3) K は $K = -\mu I'$ なる形をしている. ここで

$$I' = I_0(P', x'; h) + \mu I_1(P', x'; w'; h) + \ldots \tag{2.3.2}$$

は w' に関して周期 2π の解析関数であり, $I_0(P', x'; h) = I_Y(x', P'; h)$ である.

証明. 関係 $H(x, Y; P_X, P_Y)$ より, P_Y を $P_Y(x, P_X, Y; h)$ の形に表すことができる. $2\pi I_Y(x, P_X; h) = \oint P_Y dY$ と置く. この関係は関数 $h(x, P_X; I_Y)$ を定義する. 母関数 $P'X + S(x, P', Y, I')$ で

$$S = \int^Y P_Y[x, P', Y; h(x, P'; I')]dY.$$

なるものが, 正準変換 $X, Y, P_X, P_Y \to X', w', P', I'$ を, 公式

$$X' = X + \frac{\partial S}{\partial P'}, \quad w' = \frac{\partial S}{\partial I'},$$
$$P_X = P' + \mu\frac{\partial S}{\partial x}, \quad P_Y = \frac{\partial S}{\partial Y}.$$

を使って決める. また $x' = \mu X'$ と置く.

$$H\{x, Y; P', P_Y[x, P', Y; h(x, P'; I')]\} = h(x, P'; I')$$

であるから,

$$H\{x, Y; P_X, P_Y[x, P', Y; h(x, P'; I')]\} = h(x, P'; I') + \mu\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial P_X} + \dots$$

が成り立つ. したがって, X, Y を新しい変数で表せば,

$$H(x, Y; P_X, P_Y) = h(x', P'; I') + \mu\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial P_X} - \mu\frac{\partial S}{\partial P'}\frac{\partial H}{\partial x} + \dots \tag{2.3.3}$$

を得る. (2.3.3) は

$$H(x, Y; P_X, P_Y) = H'(x', P', I', w') = h_0(x', P'; I') + \mu h_1(x', P', I', w') + \dots \tag{2.3.4}$$

の形に $(h_0 \equiv h)$ 書くことができる. ここで $\mu h_1 + \dots$ は w' に関して周期 2π の解析関数である.

時間は w' の位相で測る. この目的のために, 表式 $P'dX' + I'dw' - Hdt$ における独立変数として $P', X'; I', w'; t$ の代りに $P', X'; -H, t; w'$ を取る ([4] を見よ). h をパラメータとみなし, w' を時間と見る. ハミルトン関数の役割をするのは $-I'(X', P'; w'; h)$ である. ただし I' は方程式

$$H'(\mu X', P', I', w') = h. \tag{2.3.5}$$

から決まる. 座標 t は巡回的である. 変数 $-H, t$ を捨てれば, 自由度 1 の非自励系を得る. 座標 X' とハミルトン関数 $-I'$ に μ を乗じる. すなわち, $\mu X' = x', -\mu I' = K$. w' に関する x' や P' の微分はハミルトン関数を K とする正準方程式 (2.3.1) によって決まる.

(2.3.5) と (2.3.4) からすると, 関数 I' は (2.3.2) の形をしている. だから補題の証明ができた.

4. 作用が永劫断熱不変性を持つことの証明. (2.3.2) 式に応じて, 関数 K は (2.2.9) の形をしている. (2.2.6) は 1. の最後に定式化した条件からしたがう. したがって 2 節の論拠が適用できる. 不変トーラスが得られ, I_Y と μI_X の永劫断熱不変性の証明も得られる.

§4. 磁気トラップ

この節では, 磁場の中の荷電粒子の運動を考える. 粒子が沿って動くべき磁力線の瞬間ねじれ半径は磁場が有意に変化する距離に比べて小さいと仮定する. この条件が満たされるのは, 場が大きいか, あるいはほぼ一定のときか, あるいは粒子の速度が小さいときである. 最後の場合を考えることにする (だからといって一般性を失うわけではない).

軸対称磁気トラップの中では, 断熱不変量 $\frac{W_\perp}{B}$ は永劫保存であることを示す. したがってこのようなトラップは荷電粒子を永遠に捉えておくことが可能である.

1. 運動方程式. 磁場 $\mathbf{B}$ はベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ から決まるとする. $\mathbf{A}$ は極座標 r, φ, z で唯一の成分 $A\varphi = A(r, z)$ を持つ. すると, 磁場の強さ $\mathbf{B}$ の成分は

$$B_r = -\frac{\partial A}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial rA}{\partial r}$$

である. したがって力線は方程式

$$rA = \text{一定}, \quad \varphi = \text{一定}$$

によって決定される. 適当に選んだ単位系において, 質量 1, 単位電荷のラグランジュ関数は

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \dot{z}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + rA\dot{\varphi}$$

である. これから, 「インパルス」(註: 運動量のこと)

$$p_r = \dot{r}, \quad p_z = \dot{z}, \quad p_\varphi = r^2\dot{\varphi} + rA$$

とハミルトン関数

$$H = \frac{1}{2}\left[p_r^2 + p_z^2 + \frac{(p_\varphi - rA)^2}{r^2}\right]$$

が得られる. φ は巡回座標であるから, $p_\varphi = M$ は保存され, 残るのは, ポテンシャル

$$U(r, z) = \frac{(M - rA)^2}{2r^2} \tag{2.4.1}$$

から決まる場の中での平面運動を求めることである. ここで M は固定した定数である.

関数 (2.4.1) は, 力線 $rA = M$ に沿ってゼロの底を持つ「ポテンシャルディッチ」を定義する. この線の近傍において

$$U(r, z) = \frac{1}{2}B^2y^2 + \ldots, \tag{2.4.2}$$

が成り立つ. ここで y は力線からの距離であり, B は力線上での磁場の強さの絶対値である.

2. 変数変換. 3 節の結果を適用するために, r, z 平面に曲線座標 x, y を導入する. 点 r, z から力線に垂線を下ろし, その基点までの不動点 O からの距離を $rA = M$ に沿って測り, 弧長を x と書く. (2.4.2) におけるように, 垂線の長さを y とする (図 12).

すると

$$dr^2 + dz^2 = [1 + yk(x)]^2 dx^2 + dy^2,$$

が得られる. ここで $k(x)$ は点 $x, 0$ における力線の曲率である. したがって

$$p_x = [1 + yk(x)]^2 \dot{x}, \quad p_y = \dot{y}$$

であり, ゆえに

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{p_x^2}{[1 + yk(x)]^2} + p_y^2\right) + U, \quad \text{ただし} \quad U(x, y) = \frac{1}{2}B(x)y^2 + \dots$$

である.

図 12, 13

われわれに興味があるのは, 荷電粒子の描く力線のまわりのラーマー渦巻の半径が場の特徴的な大きさに比べて非常に小さい場合である. 上で導入した記法を使えば, 定数 M と全エネルギー h の値として, 不等式

$$U \leq h$$

が力線 $rA = M$ のまわりの $\sim \mu$ の幅の帯 (strip) を定義するような値を考えることを意味する (図 13). したがって, 新しい変数 X, Y, P_X, P_Y を関係式

$$x = \mu H, \quad y = \mu Y, \quad p_x = \mu P_X, \quad p_y = \mu P_Y,$$

によって導入するのが便利である. これらの変数が時間変化する仕方はハミルトン関数を $H' = \mu^{-2} H$ とする正準方程式によって記述される.

$$H' = \frac{1}{2}\left(\frac{P_x^2}{[1 + \mu Y k(\mu X)]^2} + P_y^2\right) + U', \quad U'(\mu X, Y) = \frac{1}{2}B(\mu X)Y^2 + \dots$$

このハミルトン関数は

$$H' = \frac{P_x^2 + P_Y^2 + B^2(x^2)Y^2}{2} + \mu H_1(x, Y, P_X, P_Y) + \dots$$

の形に書ける. この関数は $H'(\mu X, Y; P_X, P_Y; \mu)$ の形であって, 3 節で考察した形に似ている. (簡単にわかるように, μ へのもうひとつの依存性は 3 節の議論の適用可能性に本質的ではない.)

3. 磁気モーメントの永劫不変性. これから得るべき結果の定式化を考察するにあたって, どんな漸近挙動にかかわっているのかをもっと正確に定義しておこう. 磁場の強さ $\mathbf{B}$ を固定し, また自己保存量 M を固定する. 次に x の初期値[13] を固定し, 最後に $y, \dot{x}, \dot{y}$ の初期値を選んで $H \sim \mu^2, \mu \ll 1$ となるようにする. このために, $y, \dot{x}, \dot{y}$ を μ 程度の大きさに取る必要がある. $Y, \dot{X}, \dot{Y}$ を固定し, $y = \mu Y, \dot{x} = \mu \dot{X}, \dot{y} = \mu \dot{Y}$ と取り, μ をゼロに向かわせる.

3 節の方法により以下の結果を得る.

I. 磁場が解析的であって, $B(x) > 0$, $|x| \to \infty$ のとき $B(x) \to \infty$ であれば, 任意の $\kappa > 0$ に対して $\mu_0 > 0$ を見つけることができて, $|\mu| < \mu_0$ のとき, すべての $-\infty < T < +\infty$ に対して $|I_Y(t) - I_Y(0)| < \kappa$ にできる. ただし $I_Y = \dfrac{P_Y^2 + B^2 Y^2}{2B}$ である.

これからただちにわかるとおり, $I_Y \neq 0$ なる粒子は, $x \to \infty$ のときに場 B が無限に増大するならば (ストッパー付きのトラップ), 有限領域内に閉じ込められる.

I_Y の物理的意味は, $Y = 0$ のときのモーメントを考えれば明らかになる. このモーメントのとき, $\dot{\varphi} = 0$ および $\dfrac{\dot{y}^2}{2} = W_\perp$ である (1 節, 2.III を見よ). したがって $\mu^2 I_Y = \dfrac{W_\perp}{B}$. である. こうして, 命題 I は次のように定式化できる.

II. 軸対称磁気トラップにおいて, 磁気モーメントの大きさ $\dfrac{W_\perp}{B}$ は永劫断熱不変である.

§5. 多次元の場合

この節では, 2 節および 3 節の結果を多自由度の場合に持っていけるかどうかを簡単に議論する.

1. 多重パラメータ問題. 定理 1 が正しいのは, ハミルトン関数が準周期的に変化するときである. すなわち, $H(p, q; \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ が数個の角パラメータ λ_i に依存し, そのパラメータの各々が独自の周波数 $\dot{\lambda}_i = \mu \xi_i$ で変化するときである.

$\nu = n + 1$ およびある $K > 0$ に対して

$$|(k, \xi)| \geq K |k|^{-\nu}, \quad \text{if} \quad |k| > 0 \tag{2.5.1}$$

を仮定する. すると, 「時間」$T = w$ に移行すると, ハミルトン関数を $K(\pi', q_i', T)$ の形で得る. ただし $\pi' = \sum \xi_i p_i'$ である. (2.5.1) のおかげで, 変換 $p', q' \to P, Q$ ができる. 量 P_i はハミルトン関数 (2.2.7) に組合せ $\Pi = \sum \xi_i P_i$ の形でしか入っていない. 2 節の 5 項と同様, 方程式 $\Pi = F_\mu(Q_i, P_i)$ を満たす不変多様体を見つけることができる. 元の $(n + 2)$ 次元空間 $p, q; \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ の $(n + 1)$ 次元トーラスがこれらに対応する.

2. 多自由度の場合. この時点で, かなりの困難が立ち現われる. すなわち, 断熱不変量が $t \sim \dfrac{1}{\mu}$ の間で保存されることすらいままで研究されて来なかった ([29] を見よ). この場合の特殊性については少ししか時間を割けない.

何が困難であるかというと, 高速運動の周波数間の比が低速運動の位相に依存する可能性が

[13] x の初期値の有界領域を指定するだけで十分である. $Y, \dot{X}, \dot{Y}, M$ を固定するときもおなじことが成り立つ

あるからである. この現象の簡単な例として, 3 次元トーラス上の方程式系

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \omega_1(z) + \mu f(x, y, z), \\ \dot{y} &= \omega_2(z) + \mu g(x, y, x), \\ \dot{z} &= \mu \end{aligned}\right\} \tag{2.5.2}$$

を挙げることができる. (ここで x, y, z はトーラス上の点の角度座標である.) 軌跡 (2.5.2) は変数変換によって平行化できない.

したがって, 準周期運動で満たされた不変トーラスは, ゆっくり周期的に係数が変化する一般の自由度 n で可積分系の場合でもほとんど存在しない. このようなトーラスが実際に発見されたなら, これらは $(n+1)$ 次元であり, $(2n+1)$ 次元空間 $p_i, q_i; \lambda$ を分割しないであろうから, 作用変数の永劫不変性を証明することは依然として不可能である.

多次元の場合のもうひとつのアプローチは [30] に与えられている.

III 章. 惑星運動の安定性

IV 章の基本定理の助けにより, この章では三体問題および多体問題における「惑星」運動の類 (class) を調べる. 惑星の質量が十分小さければ, 惑星の瞬間軌道が同一平面内で円に近いような大多数の初期条件に対して, 惑星同士の相互摂動は, 無限時間の経過中にこれらの運動にほんの少ししか影響を与えない.

とくに, われわれの結果からすると, n 体問題において, 正のリュベーグ測度を持つ初期条件集合があって, 物体の初期位置と速度がこの集合に属すなら, 物体間の相互距離は永遠に有界にとどまる.

このような仮説は天文学者によってずっと以前に提案されたが, 最近 Birkhoff 以来, 数学者は反対の見解への傾向を持ってきた ([3],[8] 参照).

結果の精密な定式化は 1 節で述べる. 平面三体問題だけを詳しく考える. 2 節では適切な座標を導入して 3 節で問題を階数降下させ, IV 章で考察する形にもっていく. 4 節では IV 章の基本定理を適用するのに必要な非退化条件の確認を行う. 最終節では, 基本定理を平面惑星問題および空間多体問題の研究に応用する仕方について手短かに指摘する.

この章を書くにあたってポアンカレの教科書 [1] を広範囲にわたって利用した (とくに 2 節において).

§1. 運動の描像

この節では, 大質量中心天体のまわりの n_0 個の「惑星」の運動問題へと IV 章の基本定理を適用した結果を定式化する (副節 3-5). 副節 1 および 2 では, 古典摂動論の厳密でないある種の結論を説明する.

1. ケプラー運動. n_0 個の質点 (「惑星」) を考える. それらの質量 $m_1, \ldots, m_{n_0}$ は「中心天体」とよばれる質点の質量 M に比べて小さいとする. これらの点はすべてニュートンの法則に従って, すなわち

$$f = \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}$$

に従って互いに引き合っているとする. $m_1, \ldots, m_{n_0}$ が M に比べて十分小さければ, 「ゼロ次近似」において, 惑星同士の引力は無視できて, 中心天体 M は不動であるとみなせる. これらの仮定の下では, 各惑星 m_k はほかの惑星とは無関係に, いわゆる M を焦点とするケプラー楕円に沿って運動する.

こうして, ゼロ次近似において, 系の運動は準周期的であり, M のまわりの惑星回転の n_0 個の周波数で記述される.

以下では, ケプラー楕円の軌道面はみな近く,「惑星」は楕円上を同じ方向に動くと仮定する.

惑星同士の摂動によって真の運動とゼロ次近似の運動の間に違いが生じる. 摂動論は次のような描像を提供する.

2. ラグランジュ運動. 簡単のため, 平面三体問題 ($n_0 = 2$) を考え, 初期にケプラー楕円の離心率 e_k ($k = 1, 2$) が小さいと仮定する. 面内の楕円の位置は, 楕円の長径 $2a_k$ が座標軸となす角度 g_k(g_k は近日点経度とよばれる. 14 図) によって定義される.

図 14.

摂動運動は, 変化するパラメータ a_k, e_k, g_k を持つケプラー運動として記述可能である. 1 次近似では, a_k, e_k, g_k の変動は一定値のまわりの $a_k(t), e_k(t), g_k(t)$ の惑星の質量程度の小さな「震動」に帰着される.

2 次近似は小さいけれども有界でない (永年) 近日点運動が含まれる. e_k および g_k のこの小さな変動は以下のような仕方で記述できる. ケプラー楕円の長軸方向を向き, 長さ $\sqrt{m_k}\sqrt[4]{a_k e_k}$ が離心率に比例するベクトル $\mathbf{e}_k$ でケプラー楕円を特徴づける[14] . 各惑星に対して, このベクトルは 2 つの一様回転するベクトルの和であることがわかる. つまり, $\mathbf{e_k} = \mathbf{e}_{k_1} + \mathbf{e}_{k_2}$. ベクトル $\mathbf{e}_{k_1}$ と $\mathbf{e}_{k_2}$ の角速度は小さく, 両惑星で同じである.

軌道半長径 a_k は永年変化しない. このように変動する楕円に沿っての惑星の運動はラグランジュ運動とよばれる.

摂動論の示すところよれば (証明にはなっていない), 惑星の質量と離心率の初期値が十分小さければ, $\mathbf{e}_{k_l}$ の多数回の回転の間, 真の運動はラグランジュ運動に近い.

n_0 個の周波数 $\nu_1, \ldots, \nu_{n_0}$to n_0^2 個のベクトル $\mathbf{e}_{kl}$ を持つ同様な描像が n_0 個の惑星の平面問題においても得られる.

空間問題において, ケプラー楕円は, 軌道傾斜角 i_k(軌道面と座標平面の間の角度) および交線 (これらふたつの平面の交差線) によりさらに決まる. これらの永年変化は, 交線方向に伸びる長さ $\sqrt{m_k}\ \sqrt[4]{a_k i_k}$ のベクトル i_k によって記述される. i_k は一様回転ベクトルの和でもあるが, この場合, 個数は $n_0 - 1$ である.

こうして, ラグランジュ運動は準周期的であり, ケプラー運動の「高速」周波数に, n_0 個 (平面問題) あるいは $2n_0 - 1$ 個 (空間問題) の永年運動の「低速」周波数が加わる.

2. 真の運動. われわれの基本結果は,

惑星の質量, 離心率, および軌道傾斜角が十分小さければ, 大多数の初期値に対して真の運動は準周期的であり, 無限時間間隔 $-\infty < t < +\infty$ の間中, 適当に選んだラグランジュ運動と少ししか違わない.

というものである.

はじめに平面三体問題を考えよう. 重心を固定すれば, 系は 4 自由度を持ち, 8 次元相空間を持つ. 座標として, たとえば, 第一の惑星のケプラー楕円を定義する 3 つの量 (たとえば a_1, e_1, g_1) とこの楕円上での惑星の位置を取り, 第二の惑星の同様な量を取る.

定数 $\alpha_k, c_k, C_k > 0$ を固定しよう. 天体の質量を

$$m_k = \mu\alpha_k, \quad M = 1, \quad (\mu \ll 1).$$

とする. 相空間内で条件

$$\alpha_1\sqrt{a_1}e_1^2 + \alpha_2\sqrt{a_2}e_2^2 \le \varepsilon, \tag{3.1.1}$$

[14] $\mathbf{e}_k$ はラプラスベクトルとよばれる.

および

$$c_1 \le a_1 \le C_1, \quad c_2 \le a_2 \le C_2, \quad (\text{ただし } c_1 < C_1 < c_2 < C_2). \tag{3.1.2}$$

で定義される領域 (domain) を考える. この有界領域を $F(\varepsilon)$ と表す.

IV 章の結果に基づいて, 2 節 ~ 4 節で次の主張を証明する.

定理. 任意の $\kappa > 0$ に対して, $\varepsilon_0 > 0$ を見つけて,

$$\varepsilon < \varepsilon_0, \quad \mu < \varepsilon^4,$$

のときには $F(\varepsilon)$ を 2 つの部分に分けることができる. すなわち,

$$F(\varepsilon) = \mathbf{F}(\varepsilon) + f(\varepsilon),$$

と書け, そのうちのひとつ $\mathbf{F}(\varepsilon)$ は不変であり, 残りの $f(\varepsilon)$ は小さい. すなわち

$$\mathrm{mes} f(\varepsilon) \le \kappa \ \mathrm{mes} F(\varepsilon).$$

$\mathbf{F}(\varepsilon)$ に属する点は準周期的であり, $\mathbf{F}(\varepsilon)$ 内に 4 次元の解析的不変トーラスをあぶり出す.

初期条件が $\mathbf{F}(\varepsilon)$ に属するなら, 任意の瞬間に惑星の真の位置は, あるラグランジュ運動を遂行する点の位置から κ 未満の違いしかない.

4. n_0 個の惑星の平面問題. 類似の結果を $n_0 > 2$ 個の惑星に対して得ることができる. この場合も IV 章の基本定理へと帰着させることができる. 対応する計算は 5 節で概説した. 非常に扱いにくい場合なので, すべてを述べることはしない.

平面問題では $4n_0$ 次元相空間内の領域 $F(\varepsilon)$ は (3.1.1), (3.1.2) の一般化となる条件

$$\sum_{k=1}^{n_0} a_k \sqrt{a_k} e_k^2 \le \varepsilon, \quad c_k \le a_k \le C_k, \quad (\text{where } C_{k-1} < c_k < C_k). \tag{3.1.3}$$

で与えられる. 3 項の定理における唯一の違いは, 「4 次元」を「$2n_0$ 次元」に置き換えることである.

5. n_0 個の惑星の空間問題. 空間問題では, 相空間は $6n_0$ 次元であり, (3.1.3) の条件に不等式

$$\sum_{k=1}^{n_0} a_k \sqrt{a_k} i_k^2 \le \varepsilon \tag{3.1.4}$$

を加えねばならない. そして, 3 項の定理において「4 次元」を「$3n_0 - 1$ 次元」に置き換える必要がある. このように変更すれば 3 項の定理が成り立つ.

6. 三体問題の場合. この場合, 角運動量保存 (5 節) を使うと 3 項の結果より強いことが言える. 離心率が小さいことを仮定する必要がないことがわかる. 必要なのは, 衝突の可能性を排除するほど離心率が十分小さいことを仮定することだけである (図 15). 3 項の定理の (3.1.1) の代りに,

$$\sum_{k=1}^{2} a_k \sqrt{a_k} (1 - \sqrt{1 - e_k^2}) \le \varepsilon_0(a_k, c_k, C_k), \tag{3.1.5}$$

を要請すれば十分である. ただし,

$$\varepsilon_0 = \min_{e_1,e_2} \sum_{k=1}^{2} a_k\sqrt{a_k}(1-\sqrt{1-e_k^2}),$$

であって, $C_1(1+e_1) = c_2(1-e_2), 0 \le e_1, e_2 \le 1$ なる条件を満たす.

(3.1.5), (3.1.2) で定義される領域を F で表すと, 3 項の定理を強める次の主張が成り立つ.

定理. 任意の $\kappa > 0$ に対して, $\mu_0 > 0$ を見つけて,

$$\mu < \mu_0,$$

ならば F を 2 つの領域

$$F = \mathbf{F} + f,$$

に分けることができる. そのうちのひとつ $\mathbf{F}$ は不変であり, 残りの f は小さい. すなわち,

$$\text{mes } f \le \kappa \text{ mes} F.$$

$\mathbf{F}$ に属する点は準周期運動をし, 4 次元解析的不変トーラスをあぶり出し, $\mathbf{F}$ 内に永劫とどまる. 初期条件が $\mathbf{F}$ に属すれば, 運動の全期間にわたっての軌道半長径の変化は κ を越えない.

7. 類似の定理が空間三体問題でも成り立つ. この場合, $F(\varepsilon)$ は (3.1.5), (3.1.2) および (3.1.4) によって, 十分小さな ε のときに定義される.

§2. ヤコビ, ドローネー, およびポアンカレ変数

ヤコビを記念してつけた正準変数系 (p,q), ドローネー変数 (L,G,l,g) およびポアンカレ変数 $(\Lambda,\Gamma,\lambda,\gamma$ および $\Lambda,\xi,\lambda,\eta)$ をこの節で導入する.

1. ヤコビ座標. 平面三体問題を考えよう. 質量 M_0, m_1, m_2 が直角座標 x_0, x_1, x_2 を持つ. 重力定数が 1 となる単位系を使う. するとラグランジュ関数は

$$L = \frac{1}{2}\left(M_0\dot{x}_0^2 + m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2\right) + \frac{m_1M_0}{|x_1-x_0|} + \frac{m_2M_0}{|x_2-x_0|} + \frac{m_1m_2}{|x_2-x_1|} \tag{3.2.1}$$

の形を取る. 各種重心を定義する. M_0 そのもの, M_0 と m_1 の重心, M_0, m_1, m_2 の重心をそれぞれ X_0, X_1, X_2 と表す. ヤコビの相対座標

$$q_1 = x_1 - X_0, \quad q_2 = x_2 - X_1, \tag{3.2.2}$$

を導入すると

$$L = \frac{1}{2}\left(\mu_1\dot{q}_1^2 + \mu_2\dot{q}_2^2 + M_2\dot{X}_2^2\right) + \frac{m_1M_0}{|q_1|} + \frac{m_2M_0}{|x_2-x_0|} + \frac{m_1m_2}{|x_2-x_1|} \tag{3.2.3}$$

を得る. ここで μ_i は質量であって,

$$\mu_1 = m_1\frac{M_0}{M_1}, \quad \mu_2 = m_2\frac{M_1}{M_2}, \quad (M_1 = M_0+m_1, \quad M_2 = M_0+m_1+m_2) \tag{3.2.4}$$

で与えられる.

図 16

一般性を失うことなく, 全天体の重心が止まっていると見なすことができる. すると系のハミルトン関数は

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{\mu_1} + \frac{p_2^2}{\mu_2}\right) - \frac{m_1 M_0}{|q_1|} - \frac{m_2 M_0}{|q_2|} - \left[\frac{m_1 m_2}{|x_2 - x_1|} + \left(\frac{m_2 M_0}{|x_2 - x_0|} - \frac{m_2 M_0}{|q_2|}\right)\right] \tag{3.2.5}$$

となる. ただし $p_k = \mu_k \dot{q}_k$ である.

2. ドローネー要素. 固定した中心質量 M に引かれる質点 m の平面問題に目を向けよう. この問題では

$$H = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} - \frac{mM}{|q|}$$

である. ここで

$$\begin{array}{ll} p^2 = (p^{(1)})^2 + (p^{(2)})^2, & |q| = \sqrt{(q^{(1)})^2 + (q^{(2)})^2}, \\ p = p^{(1)}, p^{(2)}, & q = q^{(1)}, q^{(2)} \end{array} \tag{3.2.6}$$

である. 天体 m が M を焦点とするケプラー楕円に沿って動くことが知られている. 楕円の形は軌道半長径 a と離心率 e で決まる. 楕円の位置は角度 g (近日点経度) と天体 m の軌道上の位置角 l (平均近点離角) で決まる. 量 a, e, l, g は楕円要素とよばれる.

知られているように ([1] を見よ), 正準変換によって

$$p^{(1)}, p^{(2)}, q^{(1)}, q^{(2)} \to L, G, l, g \tag{3.2.7}$$

ドローネー要素 L, G, l, g が導入される. ただし,

$$L = m\sqrt{M}\sqrt{a}, \quad G = L\sqrt{1 - e^2}, \quad H = -\frac{m^3 M^2}{2L^2}. \tag{3.2.8}$$

である. G は角運動量であることに注意する:

$$G = [mq, q] = p^{(1)} q^{(1)} - p^{(2)} q^{(2)}.$$

$S_{m,M}(L,G;q^{(1)},q^{(2)})$ を変換 (3.2.7) の母関数とする. ただし,

$$p^{(1)}=\frac{\partial S}{\partial q^{(1)}},\quad p^{(2)}=\frac{\partial S}{\partial q^{(2)}},\quad l=\frac{\partial S}{\partial L},\quad g=\frac{\partial S}{\partial G} \tag{3.2.9}$$

である. 平面三体問題において, 変数 L_k,G_k,l_k,g_k $(k=1,2)$ は母関数を

$$S=S_{\mu_1,M_1'}(L_1,G_1;q_1^{(1)},q_1^{(2)})+S_{\mu_2,M_2'}(L_2,G_2;q_2^{(1)},q_2^{(2)}),$$

として, 公式 (3.2.9) により導入される. ここで, $M_1'=M_1$ および $M_2'=M_2\dfrac{M_0}{M_1}$ である.

(3.2.4), (3.2.6), (3.2.8) からすると, ハミルトン関数 (3.2.5) は

$$H=-\frac{\mu_1^3{M_1'}^2}{2L_1^2}-\frac{\mu_2^3{M_2'}^2}{2L_2^2}-\left[\frac{m_1m_2}{|x_2-x_1|}+\left(\frac{m_2M_0}{|x_2-x_0|}-\frac{m_2M_0}{|q_2|}\right)\right] \tag{3.2.10}$$

なる形をとる. ここで x_0,x_1,x_2,q_2 は, 関係式 (3.2.9), (3.2.2) により, L,G,l,g を用いて表現される.

3. 質量の巾級数による展開. 質量 m_1 と m_2 は M_0 に比べて小さいと仮定する. すなわち,

$$M_0=1,\quad m_1=\mu\alpha_1,\quad m_2=\mu\alpha_2 \tag{3.2.11}$$

ここで α_1,α_2 は有限, μ は微小なパラメータである. $\mu^kf_k+\mu^{k+1}f_{k+1}+\ldots$ の形の収束級数を $(\mu^k)\ldots$ と表す. 明らかに

$$\left.\begin{array}{lll} M_1=1+(\mu)+\ldots, & M_2=1+(\mu)+\ldots, & M_2'=1+(\mu)+\ldots,\\ \mu_1=\mu\alpha_1+(\mu^2)+\ldots, & \mu_2=\mu\alpha_2+(\mu^2)+\ldots, & \end{array}\right\} \tag{3.2.12}$$

が成り立つ. L_k,G_k

$$L_k=\mu_k\sqrt{M_k'}\sqrt{a_k},\quad G_k=L_k\sqrt{1-e_k^2}. \tag{3.2.13}$$

に対応する「接触」ケプラー楕円要素を a_k,e_k で表す. 簡単に計算できるように, (3.2.10) 式のかぎ括弧部分は

$$[(3.2.10)\text{のかぎ括弧内}]=\mu^2\alpha_1\alpha_2\left[\frac{1}{|q_1-q_2|}-\frac{|q_1|^s}{|q_2|^2}\right]+(\mu^3)+\ldots, \tag{3.2.14}$$

の形を取る. ただし, q_k は原点のまわりの要素 $a_k,e_k;l_k,q_k$ のケプラー軌道に沿って動く点の動径ベクトルであり, s はベクトル q_1 と q_2 の間の角度の余弦を表す. (3.2.14) により, ハミルトン関数 (3.2.10) は

$$H=-\frac{\mu_1^3{M_1'}^2}{2L_1^2}-\frac{\mu_2^3{M_2'}^2}{2L_2^2}-\mu^2\alpha_1\alpha_2\left[\frac{1}{|q_1-q_2|}-\frac{|q_1|^s}{|q_2|^2}\right]+(\mu^3)+\ldots, \tag{3.2.15}$$

の形に書ける.

4. ポアンカレ変数. H, L と G を定数 μ で割ると, 運動方程式のハミルトン形は保存される. 正準変換

$$\mu^{-1}L_k, \mu^{-1}G_k; l_k, g_k \quad \to \quad \Lambda_k, \Gamma_k; \lambda_k, \gamma_k \quad \to \quad \Lambda_k, \xi_k; \lambda_k, \eta_k \tag{3.2.16}$$

によってポアンカレ変数 $\Lambda, \Gamma, \lambda, \gamma$ および $\Lambda, \xi, \lambda, \eta$

$$\left.\begin{array}{lll} \mu\Lambda_k = L_k, & \mu\Gamma_k = L_k - G_k, & \xi_k = \sqrt{2\Gamma_k}\cos\gamma_k, \\ \lambda_k = l_k + g_k, & \gamma_k = -g_k, & \eta_k = \sqrt{2\Gamma_k}\sin\gamma_k, \end{array}\right\} \tag{3.2.17}$$

を導入する. 変数 Λ, Γ は (3.2.8) および (3.2.17) から出る公式により, 楕円要素で表現される:

$$\Lambda_k = \beta_k\sqrt{a_k}, \quad \Gamma_k = \Lambda_k(1 - \sqrt{1 - e_k^2}), \quad \text{ただし} \quad \beta_k = \frac{\mu_k\sqrt{M'_k}}{\mu} = \alpha_k + (\mu)\ldots \tag{3.2.18}$$

変数 $\Lambda, \Gamma, \lambda, \gamma$ (あるいは $\Lambda, \xi, \lambda, \eta$) の時間変動は, (3.2.5) から得られるハミルトン関数 $F = \dfrac{H}{\mu}$

$$F = -\frac{{\beta'_1}^3}{2\Lambda_1^2} - \frac{{\beta'_2}^3}{2\Lambda_2^2} - \mu^2\beta_1\beta_2\left[\frac{1}{|q_1 - q_2|} - \frac{|q_1|^s}{|q_2|^2}\right] + (\mu^2) + \ldots, \tag{3.2.19}$$

を持つ正準変換によって記述される. ここで $\beta'_k = \dfrac{\mu_k}{\mu}{M'}_k^{2/3} = \beta_k + (\mu)\ldots$ は天体の質量のみに依存する.

§3. バーコフ変換

この節では, 新しい変数 $\overline{\overline{\Lambda}}, \overline{\overline{\lambda}}, \overline{\overline{\xi}}, \overline{\overline{\eta}}$ を選ぶ. 基本定理 (4 章, 1 節) をこれらの変数で表現した三体問題に適用する.

1. ハミルトン関数. (3.2.9) を変数 $\Lambda, \lambda, \xi, \eta$ で表現する. 明らかに,

$$F = F_0(\Lambda) + \mu F_1(\Lambda, \lambda; \xi, \eta) + (\mu^2)\ldots$$

$$F_0 = -\frac{{\beta'_1}^3}{2\Lambda_1^2} - \frac{{\beta'_2}^3}{2\Lambda_2^2}, \quad F_1 = -\beta_1\beta_2\ [\quad] \tag{3.3.1}$$

である. さらに, F は Λ_1, Λ_2 $(\Lambda_1 - \Lambda_2 \neq 0)$ および $|\xi|, |\eta| < R$ (R は Λ に依存する) に対して解析的であり, F は λ_1, λ_2 に関して周期 2π である. F の「永年部分」, すなわち λ に関する F の平均値

$$F_1(\Lambda, \lambda; \xi, \eta) = \overline{F}_1(\Lambda; \xi, \eta) + \widetilde{F}_1(\Lambda, \lambda; \xi, \eta), \tag{3.3.2}$$

を定義する. ここで $\int\int \widetilde{F}_1 d\lambda_1 d\lambda_2 = 0$ である. 簡単にわかるように, $\overline{F}_1$ は ξ, η に関して偶である. $\overline{F}_1$ において, 変数 Λ をパラメータと考える. 点 $\xi = \eta = 0$ はハミルトン関数を (各固定した Λ に対して) $\overline{F}_1(\xi, \eta)$ とする系の平衡点の位置である. バーコフ理論 (I 章, 9 節) を $\overline{F}_1(\xi, \eta)$ に適用する.

2. 座標 ξ', η'**.** ハミルトン方程式に何の影響も持たない定数 $\overline{F}_{10}$ を無視すれば, ξ, η の巾で展開した $\overline{F}_1$

$$\overline{F}_1 = \overline{F}_{10} + \overline{F}_{12} + \overline{F}_{14} + \dots,$$

は負定値の 2 次形式 $\overline{F}_{12}$ から始まる[15] . 線形正準変換 $\xi, \eta \to \xi', \eta'$ により, $\overline{F}_{12}$ を

$$\overline{F}_{12} = v'_1\Gamma'_1 + v'_2\Gamma'_2 \qquad (2\Gamma'_k = \xi'^2_k + \eta'^2_k = p'_k q'_k; \quad p_k = \xi_k + i\eta_k, \quad q_k = \xi_k - i\eta_k) \tag{3.3.3}$$

なる形に還元できる. ここで係数 v'_k は Λ に依存する. $\overline{F}_{14}$ を

$$\overline{F}_{14} = v'_{11}\Gamma'^2_1 + 2v'_{12}\Gamma'_1\Gamma'_2 + v'_{22}\Gamma'^2_2 + \dots, \tag{3.3.4}$$

なる形に書く. ここでドットは ξ', η' に関する 4 次 (degree) の項を表す. p', q' の巾に展開したとき, これは $p'^k_1 q'^l_1 p'^m_2 q'^n_2$ のみを与える. ただし $(k-l)^2 + (m-n)^2 \neq 0$ である. (3.3.4) の係数 v_{ij} は Λ に依存する.

3. 座標 $\xi^{(s)}, \eta^{(s)}$**.** Λ が

$$k_1 v'_1 + k_2 v'_2 \neq 0 \quad \text{for} \quad 0 < |k_1| + |k_2| \leq 6, \tag{3.3.5}$$

を満たすようなものであれば, バーコフ理論 (I 章, 9 節) に応じて, さらなる正準変換

$$\xi, \eta \to \xi'\eta' \to \xi^{(2)}, \eta^{(2)} \to \xi^{\left(2\frac{1}{2}\right)}, \eta^{\left(2\frac{1}{2}\right)} \to \xi^{(3)}, \eta^{(3)} \to \xi^{\left(3\frac{1}{2}\right)}, \eta^{\left(3\frac{1}{2}\right)} \tag{3.3.6}$$

が存在して, $\overline{F}_1$ を

$$\overline{F}_1 = \overline{\overline{F}}^{(s)}_1(\Gamma^{(s)}) + O(|\xi^{(s)}|^{2s}, |\eta^{(s)}|^{2s}) \quad (2\Gamma^{(s)}_k = (\xi^{(s)}_k)^2, (\eta^{(s)}_k)^2) \tag{3.3.7}$$

の形に還元する. $\overline{F}_1$ は偶関数であるから, $\xi^{(2)}, \eta^{(2)} = \xi', \eta'$ がしたがう. 記法

$$\overline{\xi} = \xi^{\left(2\frac{1}{2}\right)}, \quad \overline{\eta} = \eta^{\left(2\frac{1}{2}\right)}, \quad 2\overline{\Gamma} = \overline{\xi}^2 + \overline{\eta}^2,$$
$$\overline{\overline{\xi}} = \xi^{\left(2\frac{1}{2}\right)}, \quad \overline{\overline{\eta}} = \eta^{\left(2\frac{1}{2}\right)}, \quad 2\overline{\overline{\Gamma}} = \overline{\overline{\xi}}^2 + \overline{\overline{\eta}}^2,$$

を導入しよう. 変換 $\xi', \eta' \to \overline{\xi}, \overline{\eta}$([3],[8] を見よ) の公式の形から, $2s = 5$ に対しては, (3.3.7) より,

$$\overline{\overline{F}}_1^{\left(2\frac{1}{2}\right)} = \overline{v}_0 + \overline{v}_1\overline{\Gamma}_1 + \overline{v}_2\overline{\Gamma}_2 + \overline{v}_{11}\overline{\Gamma}^2_1 + 2\overline{v}_{12}\overline{\Gamma}_1\overline{\Gamma}_2 + \overline{v}_{22}\overline{\Gamma}^2_2, \tag{3.3.8}$$

であることがわかる. ここで

$$\overline{v}_0 = \overline{F}_{10}, \quad \overline{v}_k = v'_k, \quad \text{および} \quad \overline{v}_{kl} = v'_{kl}$$

[15] わがハミルトン関数 F は天体力学の摂動関数と符号だけ違う.

である ((3.3.4) を見よ).

したがって, I 章, 9 節に応じて, (3.3.7) 式で $2s = 7$ とすると,

$$\overline{\overline{F}}_1\left(3\frac{1}{2}\right) = \overline{v}_0 + \sum \overline{v}_k \overline{\overline{\Gamma}}_k + \sum \overline{v}_{kl} \overline{\overline{\Gamma}}_k \overline{\overline{\Gamma}}_l + \sum \overline{v}_{klm} \overline{\overline{\Gamma}}_k \overline{\overline{\Gamma}}_l \overline{\overline{\Gamma}}_m, \tag{3.3.9}$$

が成り立つ. ただし, 係数 $\overline{v}_k$ および $\overline{v}_{kl}$ は (3.3.8) 式のものと同じである (しかも $\overline{v}_{kl} = \overline{v}_{lk}$).

4. 正準変換 $\Lambda, \lambda; \xi, \eta \to \overline{\overline{\Lambda}}, \overline{\overline{\lambda}}, \overline{\overline{\xi}}, \overline{\overline{\eta}}$. $S(\overline{\overline{\xi}}, \overline{\overline{\eta}})$ は変換 $\xi, \eta \to \overline{\overline{\xi}}, \overline{\overline{\eta}}$ の母関数を表すとする ((3.3.6) を見よ). これはパラメータ Λ に依存する. すなわち, $S = S(\Lambda; \overline{\overline{\xi}}, \eta)$ である. これは正準変換

$$\Lambda \to \overline{\overline{\Lambda}} = \Lambda, \quad \lambda \to \overline{\overline{\lambda}} = \lambda + \frac{\partial S}{\partial \overline{\overline{\Lambda}}}, \quad \xi, \eta \to \overline{\overline{\xi}}, \overline{\overline{\eta}}$$

を定義する. λ は λ に依存しない項だけ変更されるから, ハミルトン関数 F_1 の永年部分と周期部分への分割 (3.3.2) は保存される. そこで $\overline{\overline{\Lambda}}, \overline{\overline{\lambda}}, \overline{\overline{\xi}}, \overline{\overline{\eta}}; F; \overline{v}$ をそれぞれ $p_0, q_0; p_1, q_1; H; \lambda, \tau$ と表そう. ハミルトン関数 (3.3.1) を, (3.3.1), (3.3.2), (3.3.7), (3.3.8) に応じて $\overline{\overline{\Lambda}}, \overline{\overline{\lambda}}, \overline{\overline{\xi}}, \overline{\overline{\eta}}$ で表すと, IV 章, 1 節の (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3), (4.1.4) の形を取る ($n_0 = 2, n_1 = 2$).

5. 非縮退条件. さて G_0, ρ, R および C を選んで, IV 章, 1 節の基本定理の条件を満たさせる.

変換 (3.3.6) は条件 (3.3.5) が破れる点において特異点を持つ. これらの点は空間 Λ の有限個の部分多様体をなす. というのは

$$\left| \frac{\partial(v_1', v_2')}{\partial(\Lambda_1, \Lambda_2)} \right| \not\equiv 0 \tag{3.3.10}$$

だからである. (3.3.10) の正当性は 4 節, 7 項で証明する.

一般性を失うことなく, 空間 Λ の領域 G_0 が上に指摘した多様体から有限の距離に位置すると仮定することができる. このとき, 表式 $|k_1 v_1' + k_2 v_2'|$ $(0 < |k_1| + |k_2| \leq 6)$ は G_0 内に一様な下限を持つ. この結果, 十分小さな R と ρ に対して, 4 項で定義した関数 H は領域 $|p_1 q_1| \leq R, |\mathrm{Im}\ q_0| \leq \rho, p_0 \in G_0$ において解析的である. C が十分大きければ, 基本定理 (IV 章, 1 節) の条件 3) は満たされる. 条件 4) は

$$\left| \frac{\partial^2 F_0}{\partial \Lambda_k \partial \Lambda_l} \right| \not\equiv 0 \tag{3.3.11}$$

および

$$|\overline{v}_{kl}| \not\equiv 0 \tag{3.3.12}$$

であることを要請する. (3.3.11) の正当性は (3.3.1) からしたがう. 不等式 (3.3.12) は 4 節, 7 項で証明する. こうして, 上で指定したように G_0, ρ, R および C を選ぶと, 基本定理のすべての条件が満たされる. 基本定理の結論 I – IV から本章の 1 節, 1 項の定理が与えられる.

§4. $\overline{F_1}$ の展開係数の漸近的ふるまいの計算

この節では行列式 (3.3.10) および (3.3.12) が恒等的にはゼロにならないことを証明する. 証明は, 軌道半長径の比 $\alpha = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ がゼロに向かうときのこれらの行列式の漸近的ふるまいの計算に基づく.

1. $\overline{|q_1 - q_2|^{-1}}$ **の展開.** (3.2.19) および (3.3.2) より,

$$\overline{F}_1 = -\beta_1\beta_2\overline{\left[|q_1 - q_2|^{-1} + \frac{|q_1|^s}{|q_2|^2}\right]}$$

が出る. しかし簡単にわかるように, λ_1 に関する $|q_1|$ の平均値はゼロに等しい. したがって

$$\overline{F}_1 = -\beta_1\beta_2[\overline{|q_1 - q_2|^{-1}}] \tag{3.4.1}$$

である.

$a_1 = \alpha, a_2 = 1$ と置き, 変数 ξ', η' による収束巾展開における ν' の係数の $\alpha \to 0$ のときの漸近的ふるまい (3.4.3) を決める ((3.3.7) と (3.3.8) を見よ).

$$|q_1 - q_2|^{-1} = \nu'_0 + \nu'_1\Gamma'_1 + \nu'_2\Gamma'_2 + \nu'_{11}\Gamma'^2_1 + 2\nu'_{12}\Gamma'_1\Gamma'_2 + \nu'_{22}\Gamma'^2_2 + R'_4 + R'_5, \tag{3.4.2}$$

ここで, R'_4 は p', q' に関して 4 次 (degree) の項からなり, $(k-l)^2 + (m-n)^2 \neq 0$ として ${p'_1}^k {q'_1}^l {p'_2}^m {q'_2}^n$ なる形をしている. また R'_5 は 5 次以上の項である. 7 項において, (3.4.3) 式から困難なく行列式 (3.3.10) および (3.3.12) の漸近的ふるまいを得るつもりである.

(3.4.2) の係数 ν' が

$$\left.\begin{aligned}
&\nu'_0 = 1 + O(\alpha^2), && \nu'_1 = \frac{3}{4\beta_1}\alpha^{3/2} + O(\alpha^{7/2}), && \nu'_2 = \frac{3}{4\beta_2}\alpha^2 + O(\alpha^{7/2}),\\
&\nu'_{11} = -\frac{3}{8\beta_1}\alpha + O(\alpha^3), && \nu'_{12} = -\frac{9}{8\beta_1\beta_2}\alpha^{3/2} + O(\alpha^{7/2}),\\
& && \nu'_{22} = \frac{3}{2\beta_2^2}\alpha^2 + O(\alpha^{7/2}),
\end{aligned}\right\} \tag{3.4.3}$$

なる形をしていることを証明しよう. 証明は 2 項–7 項において行う. 6 項の補題を使う.

2. e_1, e_2 **の巾による展開. ルベリエの表** [32] **より,**

$$\begin{aligned}
&|q_1 - q_2|^{-1} =\\
&(1^0) + (2^0)\left(\frac{e_1}{2}\right)^2 + (3^0)\left(\frac{e_2}{2}\right)^2 + (4^0)\left(\frac{e_1}{2}\right)^4 + (5^0)\left(\frac{e_1}{2}\right)^2\left(\frac{e_2}{2}\right)^2 + (6^0)\left(\frac{e_2}{2}\right)^4\\
&+\left[(21^{-1})\left(\frac{e_1}{2}\right)\left(\frac{e_2}{2}\right) + (22^{-1})\left(\frac{e_1}{2}\right)^3\left(\frac{e_2}{2}\right) + (23^{-1})\left(\frac{e_1}{2}\right)\left(\frac{e_2}{2}\right)^3\right]\cos(\gamma_1 - \gamma_2)\\
&+(31^{-2})\left(\frac{e_1}{2}\right)^2\left(\frac{e_2}{2}\right)^2\cos 2(\gamma_1 - \gamma_2) + R^0_5,
\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

であることがわかる. ここで R_5^0 は $e\cos\gamma, e\sin\gamma$ に関して 5 次以上の項から始まる級数である. 以下の記法を採用した.

$$\left.\begin{array}{l}(1^0)=\dfrac{1}{2}A_0^0,\quad (2^0)=A_1^0+A_2^0,\quad (3^0)=A_1^0+A_2^0,\quad (4^0)=3A_3^0+A_4^0,\\ (5^0)=2A_1^0+14A_2^0+24A_3^0+12A_4^0,\quad (6^0)=3A_1^0+9A_2^0+9A_3^0+3A_4^0,\\ (21^{-1})=2A_0^{-1}-2A_1^{-1}-2A_2^{-1},\quad (22^{-1})=-4A_2^{-1}-18A_3^{-1}-12A_4^{-1},\\ (23^{-1})=2A_0^{-1}-2A_1^{-1}-22A_2^{-1}-30A_3^{-1}-12A_4^{-1},\\ (31^{-2})=3A_0^{-2}-3A_1^{-2}+3A_2^{-2}+12A_3^{-2}+6A_4^{-2},\end{array}\right\} \tag{3.4.5}$$

公式 (3.4.5) において, 係数 A_k^i は

$$A_k^i=\frac{a^k}{k!}\frac{d^k b^i}{da^k},\quad \text{ただし}\quad (1+\alpha^2-2\alpha\cos\varphi)^{-1/2}=\frac{1}{2}\sum_{t=-\infty}^{+\infty}b^i\cos i\varphi,\quad b^i=b^{-i}, \tag{3.4.6}$$

で与えられる. だから α のべき級数で表した A_k^i の展開は

$$\left.\begin{array}{lll}A_0^0=2+\dfrac{\alpha^2}{2}+O(\alpha^4), & A_0^{-1}=\alpha+O(\alpha^3), & A_0^{-2}=\dfrac{3}{4}\alpha^2+O(\alpha^4),\\ A_1^0=\alpha^2+O(\alpha^4), & A_1^{-1}=\alpha+O(\alpha^3), & A_1^{-2}=\dfrac{3}{2}\alpha^2+O(\alpha^4),\\ A_2^0=\dfrac{\alpha^2}{2}+O(\alpha^4), & A_2^{-1}=O(\alpha^3), & A_2^{-2}=\dfrac{3}{4}\alpha^2+O(\alpha^4),\\ A_3^0=O(\alpha^3), & A_3^{-1}=O(\alpha^3), & A_3^{-2}=O(\alpha^3),\\ A_4^0=O(\alpha^3), & A_4^{-1}=O(\alpha^3), & A_4^{-2}=O(\alpha^3),\end{array}\right\} \tag{3.4.7}$$

なる形をとる.

3. ξ,η の巾による展開. (3.2.18) に応じて,

$$\frac{e}{2}=\sqrt{\frac{\Gamma}{2\Lambda}}\left(1-\frac{\Gamma}{4\Lambda}+\dots\right), \tag{3.4.8}$$

である. (3.4.8) を (3.4.4) に代入すると

$$\begin{array}{l}|q_1-q_2|^{-1}\\ =\nu_0+\nu_1\Gamma_1+\nu_2\Gamma_2+2\nu\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\cos(\gamma_1-\gamma_2)+\nu_{11}\Gamma_1^2+\nu_{12}\Gamma_1\Gamma_2\\ +\nu_{22}\Gamma_2^2+\left[\kappa_{13}\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2^3}+\kappa_{31}\sqrt{\Gamma_1^3\Gamma_2}\right]\cos(\gamma_1-\gamma_2)\\ +\kappa_{22}\Gamma_1\Gamma_2\cos 2(\gamma_1-\gamma_2)+R_5,\end{array} \tag{3.4.9}$$

が得られる. ここで, 以下の記法を用いた:

$$\left.\begin{array}{lll}\nu_0=(1^0),\ \nu_1=\dfrac{(2^0)}{2\Lambda_1}, & \nu_2=\dfrac{(3^0)}{2\Lambda_2}, & \nu=\dfrac{(21^{-1})}{2\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}},\\ \nu_{11}=\dfrac{(4^0)-(2^0)}{4\Lambda_1^2}, & 2\nu_{12}=\dfrac{(5^0)}{4\Lambda_1\Lambda_2}, & \nu_{22}=\dfrac{(6^0)-(3^0)}{4\Lambda_2^2},\\ \kappa_{13}=\dfrac{2(23^{-1})-(21^{-1})}{8\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2^3}}, & \kappa_{31}=\dfrac{2(22^{-1})-(21^{-1})}{8\sqrt{\Lambda_1^3\Lambda_2}}, & \kappa_{22}=\dfrac{(31^{-2})}{4\Lambda_1\Lambda_2},\end{array}\right\} \tag{3.4.10}$$

また R_5 は ξ, η に関して 5 次 (degree) 以上の項から始まる級数である.

$\Lambda_1 = \beta\sqrt{\alpha}, \Lambda_2 = \beta_2$ であることからすると, 展開 (3.4.9) 内の係数は, 表式 (3.4.5) および (3.4.7) を公式 (3.4.10) に代入すると,

$$\nu_0 = 1 + O(\alpha^4), \quad \nu_1 = \frac{3}{4\beta_1}\alpha^{3/2} + O(\alpha^{7/2}), \quad \nu_2 = \frac{3}{4\beta_2}\alpha^2 + O(\alpha^4), \quad \nu = O(\alpha^{11/4}) \tag{3.4.11}$$

$$\nu_{11} = -\frac{3}{8\beta_1^2}\alpha + O(\alpha^3), \quad \nu_{12} = \frac{9}{8\beta_1\beta_2}\alpha^{3/2} + O(\alpha^{7/2}), \quad \nu_{22} = \frac{3}{2\beta_2^2}\alpha^2 + O(\alpha^4), \tag{3.4.12}$$

$$\kappa_{13} = O(\alpha^{11/4}), \quad \kappa_{31} = O(\alpha^{9/4}), \quad \kappa_{22} = O(\alpha^{7/2}), \tag{3.4.13}$$

なる形を取る.

4. ξ', η' の巾による展開. 6 項の補題 2 は関数

$$H_2 = \nu_1\Gamma_1 + \nu_2\Gamma_2 + \nu\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\cos(\gamma_1 - \gamma_2)$$

に適用される. これより,

$$H_2 = \nu_1'\Gamma_1' + \nu_2'\Gamma_2', \quad 2\Gamma' = \xi'^2 + \eta'^2, \tag{3.4.14}$$

がしたがう. ここで, $x = \xi, \eta, p$ または q に対し, 条件

$$(\nu_1 - \nu_2)\sin 2\varphi + \nu\cos 2\varphi = 0$$

によって φ を決めて,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1'\cos\varphi + x_2'\sin\varphi, \\ x_2 &= -x_1'\sin\varphi + x_2'\cos\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{3.4.15}$$

を得る. ここで, (3.4.11) および 6 項の (3.4.27), (3.4.29) に応じて,

$$\varphi = O(\alpha^{5/4}), \quad \nu_1' = \nu_1 + O(\alpha^{7/2}), \quad \nu_2' = \nu_2 + O(\alpha^{7/2}), \tag{3.4.16}$$

が成り立つ.

(3.4.15) を (3.4.9) に代入して, x' のべきによる (3.4.2) の展開を得る:

$$\overline{|q_1 - q_2|^{-1}} = \nu_0' + \nu_1'\Gamma_1' + \nu_2'\Gamma_2' + \nu_{11}'\Gamma_1'^2 + 2\nu_{12}'\Gamma_1'\Gamma_2' + \nu_{22}'\Gamma_2'^2 + R_4 + R_5, \tag{3.4.17}$$

ここで, (3.4.11), (3.4.14) および (3.4.15) に応じて,

$$\nu_1' = \frac{3}{4\beta_1}\alpha^{3/2} + O(\alpha^{7/2}), \quad \nu_2' = \frac{3}{4\beta_2}\alpha^2 + O(\alpha^4), \tag{3.4.18}$$

である. ここで R_4 は, $(k-l)^2 + (m-n)^2 \neq 0$ として ${p'}_1^k {q'}_1^l {p'}_2^m {q'}_2^n$ の形の 4 次 (degree) の項からなり, R_5 は 4 次より高い次数の項からなる. 項 5 において, 係数 ${\nu'}_{ij}$ を (3.4.17) から持ってきて, 表現 (3.4.3) を得る.

5. ν_{ij}' の計算. x に表式 (3.4.15) を代入すると, x の各関数は x' に関する級数として展開できる. 直接計算によると, これらの展開の係数として, (3.4.19)–(3.4.21) なる表式が, 相対誤差 $O(\varphi^2)$ 程度で得られる.

coefficient of $\rightarrow$ in the expansion of $\downarrow$	x_1'	x_2'
x_1	1	φ
x_2	$-\varphi$	1

(3.4.19)

(3.4.19) より, $x = p$ または q と置いて, 次を得る.

	$2\Gamma_1' = p_1'q_1'$	$p_1'q_2'$	$p_2'q_1'$	$p_2'q_2' = 2\Gamma_2'$
$2\Gamma_1 = p_1q_1$	1	φ	φ	φ^2
p_1q_2	$-\varphi$	1	$-\varphi^2$	φ
p_2q_1	$-\varphi$	$-\varphi^2$	1	φ
$2\Gamma_2 = p_2q_2$	φ^2	$-\varphi$	$-\varphi$	1

(3.4.20)

(3.4.20) を使って p', q' のべき級数による展開係数を計算して次を得る.

	$(2\Gamma_1')^2$	$(2\Gamma_1')(2\Gamma_2')$	$(2\Gamma_2')^2$
$(2\Gamma_1)^2$	1	$4\varphi^2$	φ^4
$(2\Gamma_1)(2\Gamma_2)$	φ^2	1	φ^2
$(2\Gamma_2)^2$	φ^4	$4\varphi^2$	1

(3.4.21)

したがって, 係数の正確な行列 (3.4.21) は単位行列と $O(\varphi^2)$ だけ異なる.

6 項の補題 1 の (3.4.23), (3.4.24), (3.4.25), および公式 (3.4.20) より簡単に計算できるように, 量

$$8\sqrt{\Gamma_1^3\Gamma_2}\cos(\gamma_1-\Gamma_2),\quad 8\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2^3}\cos(\gamma_1-\Gamma_2),\quad 8\Gamma_1\Gamma_2\cos 2(\gamma_1-\Gamma_2),$$

の p', q' のべきによる展開の $(2\Gamma_1')^2$, $(2\Gamma_1')(2\Gamma_2')$ および $(2\Gamma_2')^2$ の係数はすべて $O(\varphi)$ である.

ところが, (3.4.16) より, $\varphi = O(\alpha^{5/4})$ である. (3.4.12) によると $\nu_{ij} = O(\alpha)$ であり, (3.4.13) により $\kappa_{ij} = O(\alpha^{9/4})$ であるから, 展開 (3.4.17) の係数は

$$\nu_{ij} = \nu_{ij} + O(\alpha)O(\varphi^2) + O(\alpha\ 9/4)O(\varphi) = \nu_{ij} + O(\alpha^{7/2})$$

であり, (3.4.12) の結果, ν_{ij}' は漸近的に (3.4.3) のようにふるまう.

6. 2 つの補題. 以下の記法を用いる.

$$\left.\begin{aligned} \xi_k &= \sqrt{2\Gamma_k}\cos\gamma_k, \quad p_k = \xi_k + i\eta_k, \\ \eta_k &= \sqrt{2\Gamma_k}\sin\gamma_k, \quad q_k = \xi_k - i\eta_k, \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2) \tag{3.4.22}$$

補題 1. 以下の等式が成り立つ:

$$2\Gamma_k = \xi_k^2 + \eta_k^2 = p_kq_k, \tag{3.4.23}$$

$$4\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\cos(\gamma_1-\gamma_2) = 2(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2) = p_1q_2 + p_2q_1, \tag{3.4.24}$$

$$8\Gamma_1\Gamma_2\cos^2(\gamma_1-\gamma_2)=2\left[(\xi_1^2-\eta_1^2)(\xi_2^2-\eta_2^2)+4\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2\right]=p_1^2q_2^2+p_2^2q_1^2, \tag{3.4.25}$$

証明は明らかである. 補題 1 より, 次が簡単に証明できる.

補題 2. (3.4.22) の記法を使って, x_k は ξ_k および η_k または p_k および q_k を表すとして, 公式

$$\left.\begin{aligned} x_1&=x_1'\cos\varphi+x_2'\sin\varphi,\\ x_2&=-x_1'\sin\varphi+x_2'\cos\varphi,\end{aligned}\right\} \tag{3.4.26}$$

は正準変換 $\xi,\eta\to\xi',\eta'$ を定義する. φ が関係式

$$\nu'=(\nu_1-\nu_2)\sin 2\varphi+\nu\cos 2\varphi=0, \tag{3.4.27}$$

を満たせば, 関数 $H_2=\nu\Gamma_1+\nu_2\Gamma_2+\nu\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\cos(\gamma_1-\gamma_2)$ は, 新しい変数 x' を使って, 公式

$$H_2=\nu_1'\Gamma_1'+\nu_2'\Gamma_2',\quad (2\Gamma_k'=\xi_k'^2+\eta_k'^2=p_k'q_k'), \tag{3.4.28}$$

により表される. ここで

$$\nu_1'=\nu_1-\frac{\nu}{2}\sin 2\varphi-(\nu_1-\nu_2)\sin^2\varphi,\quad \nu_2'=\nu_2+\frac{\nu}{2}\sin 2\varphi+(\nu_1-\nu_2)\sin^2\varphi, \tag{3.4.29}$$

である.

7. 行列式 (3.3.10), (3.3.12) の漸近的ふるまい. (3.4.1) と (3.3.8) の帰結として, 係数 $v'=\overline{v}$ は

$$\overline{v}_0=-\beta_1\beta_2a_2^{-1}\nu_0',\quad \overline{v}_k=-\beta_1\beta_2a_2^{-3/2}\nu_k',\quad \overline{v}_{kl}=-\beta_1\beta_2a_2^{-2}\nu_{kl}', \tag{3.4.30}$$

なる形を持つ. したがって, (3.4.3) より,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\overline{v}_{11}&\overline{v}_{12}\\ \overline{v}_{21}&\overline{v}_{22}\end{vmatrix}&=a_2^{-4}\beta_1^2\beta_2^2\begin{vmatrix}v_{11}'&v_{12}'\\ v_{21}'&v_{22}'\end{vmatrix}\\ &=a_2^{-4}\beta_1^2\beta_2^2\begin{vmatrix}-\dfrac{3}{8\beta_1^2}\alpha+O(\alpha^{5/2})&\dfrac{9}{8\beta_1\beta_2}\alpha^{3/2}+O(\alpha^{5/2})\\ \dfrac{9}{8\beta_1\beta_2}\alpha^{3/2}+O(\alpha^{5/2})&\dfrac{3}{2\beta_2^2}\alpha^2+O(\alpha^{5/2})\end{vmatrix}\\ &=-\frac{117}{64}\frac{\alpha^3}{a_2^4}+O(\alpha^{7/2})\not\equiv 0\end{aligned} \tag{3.4.31}$$

が成り立つ. さらに

$$\frac{\partial(v_1',v_2')}{\partial(\Lambda_1,\Lambda_2)}=\frac{\partial(v_1',v_2')}{\partial(\alpha,a_2)}\Big/\frac{\partial(\Lambda_1,\Lambda_2)}{\partial(\alpha,a_2)}=\frac{27}{16}\frac{\alpha^3}{a_2^4}+O(\alpha^{9/2})\not\equiv 0. \tag{3.4.32}$$

であることを示そう. (3.2.18) に応じて, $a_1=\alpha a_2$ に対して

$$\Lambda_1=\beta_1\sqrt{a_1}=\beta_1\sqrt{\alpha a_2},\quad \Lambda_2=\beta_2\sqrt{a_2}. \tag{3.4.33}$$

である. したがって,

$$\frac{\partial(\Lambda_1,\Lambda_2)}{\partial(\alpha,a_2)}=\frac{\beta_1\beta_2}{4\sqrt{\alpha}}. \tag{3.4.34}$$

が成り立つ. (3.4.30) および (3.4.3) より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial(v_1',v_2')}{\partial(\alpha,a_2)} &= \beta_1^2\beta_2^2\begin{vmatrix} \dfrac{9}{8\beta_1^2}\dfrac{\alpha^{1/2}}{a_2^{3/2}}+O(\alpha^{5/2}) & -\dfrac{9}{8\beta_1}\dfrac{\alpha^{3/2}}{a_2^{5/2}}+O(\alpha^{7/2}) \\ \dfrac{3}{8\beta_2}\dfrac{\alpha}{a_2^{3/2}}+O(\alpha^{5/2}) & -\dfrac{9}{8\beta_2}\dfrac{\alpha^2}{a_2^{5/2}}+O(\alpha^{7/2}) \end{vmatrix} \\ &= -\frac{27}{64}\frac{\beta_1\beta_2\alpha^{5/2}}{a_2^4}+O(\alpha^4)\end{aligned} \tag{3.4.35}$$

である. (3.4.35) と (3.4.34) を比較すれば, (3.4.32) が得られる.

§5. 多体問題

平面および 3 次元の三体および多体問題の性質のうち, 角運動量の保存に関連したものを以下で議論する.

1. $n_0>2$ 個の惑星の平面問題**.** 2 節と 3 節の議論は 3 つ以上の惑星の場合へ簡単にもって行ける. 惑星数を n_0 で表すと, 自由度の数は $n=2n_0$ である (全物体の重心は固定して考える). 2 節および 3 節で使った文字 $\Lambda,\lambda,\Gamma,\gamma,\xi,\eta$ は n_0 次元のベクトルを表す. 不等式 (3.3.10), (3.3.12) は $n_0=2$ の場合の 4 節と同じ方法で確かめる (verify) ことができる. 1 節の 4 項の結果へと至る計算の詳細には立ち入らない.

2. 平面三体問題のモーメント積分**.** 2 節 ~ 4 節の議論は角運動量の保存則をまったく考慮しなかった. これは 2 節の記法では

$$\sum G_k=C.$$

という形を取る.

n 体問題のこの第一積分はハミルトン関数を F_1 とする正準方程式の「平均系」の第一積分に対応する:

$$\sum\Gamma_k=C.$$

この第一積分の存在のおかげで, 平均系は $n_0=2$ の場合は可積分であり, したがって変数 p_1,q_1 を適当に選ぶことにより, $\overline{F}_1$ を

$$\overline{F}_1(\Lambda,\lambda;\xi,\eta)=\overline{\overline{F}}(p_0;p_1,q_1)\quad(p_0=\Lambda) \tag{3.5.1}$$

なる形に還元できる. その際, 余計な項 $\widetilde{\overline{F}}_1$ (IV 章, 1 節参照) は必要ない. ξ,η から p_1,q_1 への移行は正準解析変換である. $|\xi|,|\eta|$ が小さいとき, p_1,q_1 の表式はバーコフ級数によって与えられる (I 章, 9 節を見よ). この場合, 平均系は可積分であるから級数は収束する.

(3.5.1) に応じると, $|\xi|,|\eta|$ が小さい場合に話を限定することはできないが, IV 章, 1 節の基本定理の代りに, I 章, 8 節の結果を使うことができる (この結果は基本定理より簡単であって,

基本定理から容易に導出できる). 衝突の場合を排除するために Λ, e に条件を課さねばならない ((3.1.5) 参照):

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 < \varepsilon_0(\Lambda_{1\max}, \Lambda_{2\min}). \tag{3.5.2}$$

条件 (3.5.2) は, I 章, 8 節の条件を満たす空間 Γ, Λ 内の領域 G を区別する (??). これらの条件を使って, 1 節, 6 項の結論に到達する.

3. 空間問題におけるドローネーおよびポアンカレ変数. n_0 個の惑星の空間問題の自由度は $3n_0$ である (前と同様, 重心を固定する). 各惑星は 6 個の楕円要素を持つ (2 節, 2 項を見よ). すなわち, $a, e, i; l, g, h$ である. ここで角度 h, 交点経度, は交線の方向を決める. 交線とは, ケプラー楕円と p_1, q_1 面との交わり線のことである. 角度 i, 軌道傾斜角, はこれら 2 つの面の間の角度である. 最後に, g, 近点経度, は交線と軌道半長径方向との間の角度である. ドローネー要素 L, G, H は角度 l, g, h に対応する. ここで, $H = \cos i$ は $q^{(3)}$ 軸への角運動量の射影である (2 節と違って, ここでは H はハミルトン関数ではない).

空間 (3 次元) 問題において, 角運動量は保存される. これより, 3 個の積分が得られる.

$$\sum G_k \sin i_k \cos h_k = \sum \sqrt{G_k^2 - H_k^2} \cos h_k = C_1, \tag{3.5.3}$$

$$\sum G_k \sin i_k \sin h_k = \sum \sqrt{G_k^2 - H_k^2} \sin h_k = C_2, \tag{3.5.4}$$

$$\sum G_k \cos i_k \quad = \sum H_k^2 \quad = C_2, \tag{3.5.5}$$

ポアンカレ要素 $\Lambda, \Gamma, Z; \lambda, \gamma, \zeta$ および $\Lambda, \xi, p; \lambda, \eta, q$ は公式

$$\begin{array}{llll} \mu\Lambda = L, & \mu\Gamma = L - G, & \mu Z = G - H, & \xi = \sqrt{2\Gamma}\cos\gamma, \quad p = \sqrt{2Z}\cos\zeta \\ \lambda = l + g + h, & \gamma = -g - h, & \zeta = -h, & \eta = \sqrt{2\Gamma}\sin\gamma, \quad q = \sqrt{2Z}\sin\zeta \end{array}$$

によって決まる. λ に関して平均したハミルトン関数

$$\overline{F}_1(\Lambda; \xi, \eta; p, q) = \overline{F}_{10} + \overline{F}_{12} + \overline{F}_{14} + \dots$$

は ξ, η, p, q に関して偶で, 平衡点 $\xi = \eta = p = q = 0$ を持つ. 2 次の項は $\overline{F}_{12} = \overline{F}'_{12}(\xi, eta) + \overline{F}''_{12}(p, q)$ であり (ここで $\overline{F}'_{12}(\xi, \eta)$ は (3.3.3) の $\overline{F}_{12}$ である), 2 次形式 $\overline{F}''_{12}$ は

$$\overline{F''}_{12} = v''_1 Z_1 + \dots + v''_{n_0} Z_{n_0} \quad (v''_1 \equiv 0, v''_2, \dots, v''_{n_0} > 0). \tag{3.5.6}$$

に還元される. 周波数 v''_1 が消えるのは, 積分 (3.5.3), (3.5.4) の効果であると説明される.

4. 三体問題における交点の消去. 知られているように ([1] を見よ), 積分 (3.5.3)–(3.5.5) により, 系の自由度の数は 2 だけ減る. 三体問題の場合, ヤコビによれば, 変数 H, h を完全に消去することが可能である.

座標面 $q^{(1)}, q^{(2)}$ が系の角運動量ベクトルに垂直であるとする. すると, (3.5.3)–(3.5.5) において, $C_1 = C_2 = 0, C_3 = C$ であり,

$$\left.\begin{array}{r} G_1 \cos i_1 + G_2 \cos i_2 = C, \\ G_1 \sin i_1 = -G_2 \sin i_2 = \varepsilon, \\ h_1 - h_2 = \pi \end{array}\right\} \tag{3.5.7}$$

が成り立つ. ここで $C =$ 一定 で, ε も軌道傾斜角も小さい. $(3.5.7)$ より,

$$H_1 + H_2 = C, \quad H_1^2 - H_2^2 = G_1^2 - G_2^2,$$

が成り立ち, したがって

$$H_1 = \frac{C}{2} + \frac{1}{2C}(G_1^2 - G_2^2), \quad H_2 = \frac{C}{2} - \frac{1}{2C}(G_1^2 - G_2^2), \tag{3.5.8}$$

である. 座標 h_1 と h_2 はハミルトン関数に含まれないことははっきりしている. ハミルトン関数はしたがって平面問題の変数 $L, G; l, g$ で表現される (H_1, H_2 を表式 $(3.5.8)$ で置き換える). ε^2 のべきによる展開

$$C = G_1 + G_2 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G_2}\right), \quad G_1 - H_1 = \frac{\varepsilon^2}{2G_1} + \ldots, \quad G_2 - H_2 = \frac{\varepsilon^2}{2G_2} + \ldots,$$

より, 得られた $L, G; l, g$ の関数 (まだパラメータ C には依存する) が平面三体問題のハミルトン関数から ε^2 と同じように小さい ($G_1 + G_2 - C$ と同様) 解析項だけ違うことを導き出すことはむずかしくない.

だから 3 次元三体問題は, 軌道傾斜角がゼロに向かったときに平面三体問題になるようなある平面問題に還元される. 2 項との比較, および I 章, 8 節を使って, 1 節, 7 項の結果に到達する.

5. 空間多体問題. 三体よりも物体が多い場合, 自由度の数を減らすエレガントな方法はない. ここでは, 自由度を 1 だけ消去する方法について述べよう. 消すのは $(3.5.6)$ のゼロ周波数 ν_1'' である.

知られているように, 角運動量の成分 C_1, C_2, C_3 のポアッソン括弧は式

$$-(C_1, C_2) = C_3, \quad -(C_2, C_3) = C_1, \quad -(C_3, C_1) = C_2,$$

で与えられる. C_1, C_2, C_3 の 2 つの関数 Φ_1, Φ_2 が正準共役変数と見なせるのは, そのポアッソン括弧が $(\Phi_1, \Phi_2) \equiv 1$ のときである. 次の形

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = y + \varphi_1(x, y, z), \qquad \Phi_2 = z + \varphi_2(x, y, z), \\ &\varphi_1(x, y, z) = \varphi(x, y, z), \quad \varphi_2(x, y, z) = \varphi(x, y, z), \end{aligned}$$

の関数 Φ_1, Φ_2 を探そう. ただし, $-C_3 = 1 + x,\ -C_1 = y,\ -C_2 = z$ である.

関数 $\varphi(x, y, z)$ に対しては, 方程式

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \begin{vmatrix} 1 + x & y & z \\ \varphi_{1x} & 1 + \varphi_{1y} & \varphi_{1z} \\ \varphi_{2x} & \varphi_{2y} & 1 + \varphi_{2z} \end{vmatrix} \equiv 1. \tag{3.5.9}$$

が得られる. $(3.5.9)$ より, たとえば, φ を級数 $\varphi = ax + by + cz + \ldots$ のように展開して, 対称な解 $\varphi(x, y, z) = \varphi(x, z, y)$ を見つけることも可能である.

n_0 個の惑星の問題に戻ろう. $(3.5.9)$ からすると, $3n_0$ 個の正準変数の組を選んで以下を満たすことが可能である.

1) Λ_k と λ_k は n_0 個のペアからなる.
2) n_0 個のペアは離心率に対応する (G と g や Γ と γ, ξ と η のように).
3) n_0 個のペアは軌道傾斜角に対応する (H と h や Z と ζ, p と q のように).
4) Φ_1 と Φ_2 は上記後者のペアのひとつからなる.

Φ_1 と Φ_2 は第一積分であるから, ハミルトン関数の中には決して入らない. そして自由度 $3n_0 - 1$ の系が得られる. (3.5.6) に対応する展開において, $n_0 - 1$ 個の周波数と $n_0 - 1$ 個の変数の組が得られる. 3 節の手法により, ハミルトン関数を (4.1.1) の形に還元でき ($n = 3n_0 - 1$, $n_1 = 2n_0 - 1$ である. ただし, n_0 は惑星の個数である), 基本定理より, 1 節, 5 項の結果が得られる.

(3.5.9) を解くためのかなり長い計算が必要である, 条件 1)–4) を満たす変数の構築, 4 節の議論に似た非縮退条件の確認などは, ここでは議論しない.

IV 章. 基本定理

この章では, II 章および III 章の議論の基になっている定理の正確な定式化と完全な証明を行う. 定式化にあたっては (1 節), 天体力学への応用の都合の良いようにしたので, 結果の一般性や最終性には気を配らなかった.

証明 (9 節-14 節) はかなり面倒である. I 章で数え上げた発想以外に, 証明は多数のほぼ自明な不等式に基づく. この章の最も大事な部分は 6 節である. そこでは 4 節で定式化した基本補題を証明する. V 章の終りに挙げた記号リストは読者の助けになるだろう. 不等式は V 章の補題を基礎とする. これらの不等式を導くにあたって, 定数を見積り際のエレガンスや精度には注意を払わなかった. 必要以上に厳しい条件を課すことがしばしばであった (たとえば 1 節の $\mu < \varepsilon^4$). 読者は容易に結果を強めることができる.

§1. 基本定理

ハミルトン関数 $H(p_0, p_1, q_0, q_1)$, 領域 G_0, 正数 ρ, R, C を考える. 以下の 4 つの条件が満たされると仮定する.

1) 関数 $H(p, q)$ (ただし $p = p_0, p_1$; $q = q_0, q_1$ であり, p_0 は n_0 次元ベクトル, p_1 は n_1 次元ベクトル. ここで $n_0 + n_1 = n$ である. q_0 は角度変数で, $H(p_1, p_1, q_0 + 2\pi, q_1) = H(p_1, p_1, q_0, q_1)$) は領域 $F : p_0 \in G_0, |\mathrm{Im}\ q_0| \le \rho, |x_1| \le R$ $(x_1 = p_1, q_1)$ において解析的で, パラメータ $\mu, 0 < \mu \le \mu_0$ に依存する.

2) H は次の形をしている.

$$H = H_0(p_0) + \mu H_1(p, q) + (\mu^2) H_2(p, q) \tag{4.1.1}$$

ここで

$$H_1(p, q) = \overline{H}_1(p_0, p_1, q_1) + \widetilde{H}_1(p_0, q_0, p_1, q_1), \quad \int \widetilde{H}_1 dq_0 = 0, \tag{4.1.2}$$

ただし

$$\overline{H}_1(p_0, p_1, q_1) = \overline{\overline{H}}_1(p_0, \tau) + \widetilde{\overline{H}}_1(p_0, p_1, q_1) \tag{4.1.3}$$

および

$$\overline{\overline{H}}_1(p_0, \tau) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i \tau_i + \sum_{i,j=1}^{n_1} \lambda_{ij} \tau_i \tau_j + \sum_{i,j,k=1}^{n_1} \lambda_{ijk} \tau_i \tau_j \tau_k. \tag{4.1.4}$$

ここで $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ および λ_{ijk} は p_0 の関数であり,

$$2\tau_i = p_{n_0+i}^2 + q_{n_0+i}^2 \quad (i = 1, \ldots, n_1) \tag{4.1.5}$$

3) F 内で以下の不等式が (ある $C \ge 1$ に対して) 満たされる.

$$|(\mu^2) H_2| \le \mu^2 C, \tag{4.1.6}$$

$$|\widetilde{H}_1| \le C, \quad |\overline{H}_1| \le C, \quad \overline{\overline{H_1}} \le C \tag{4.1.7}$$

[16]

$$|\widetilde{\overline{H}}_1| \le C|x_1|^7. \tag{4.1.8}$$

4) G_0 内では

$$\det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_0^2} \right| \not\equiv 0, \tag{4.1.9}$$

$$\det|\lambda_{ij}(p_0)| \not\equiv 0. \tag{4.1.10}$$

仮定 1) - 4) の下で, 任意の $\kappa > 0$ に対して, $\varepsilon_0(\kappa; H_0, \overline{\overline{H}}_1, G_0; \rho, R, C; \mu_0) > 0$ を見つけることができ, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ かつ $0 < \mu < \varepsilon^4$ のときに以下の 4 つの条件が成り立つようにできる.

I. 領域 $\mathrm{Re}\ F_\varepsilon$:

$$p_0 \in \mathrm{Re}\ G_0, \quad |\mathrm{Im}\ q_0| = 0, \quad 0 < \tau_i < \varepsilon,$$

が 2 つの集合 $\mathbf{F}_\varepsilon$ と f_ε から成り, そのうちのひとつ $\mathbf{F}_\varepsilon$ はハミルトン関数を (4.1.1) とする正準方程式に関して不変であり, もうひとつ f_ε は小さい, すなわち

$$\mathrm{mes} f_\varepsilon < \kappa\ \mathrm{mes} F_\varepsilon.$$

II. $\mathbf{F}_\varepsilon$ は不変な n 次元解析的トーラス T_ω から成る. これらはパラメータを使って次のように表される.

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= p_{0_\omega} + f_{0_\omega}(Q),\ q_0 = Q_0 + g_{0_\omega}(Q), \\ p_1 &= \sqrt{2(\tau_\omega + f_{1_\omega}(Q))}\cos[Q_1 + g_{1_\omega}(Q)] \\ q_1 &= \sqrt{2(\tau_\omega + f_{1_\omega}(Q))}\sin[Q_1 + g_{1_\omega}(Q)] \end{aligned}\right\} \tag{4.1.12}$$

ここで $Q = Q_0, Q_1$ は角度パラメータであり, p_{0_ω} と τ_ω はトーラス ω の番号に依存する定数である.

III. 不変トーラス T_ω はトーラス

$$\begin{aligned} &p_0 = p_{0_\omega} = \text{一定}, \quad \tau = \tau_\omega = \text{一定} \\ &|f_{i_\omega}(Q)| < \kappa\varepsilon, \qquad |g_{i_\omega}(Q)| < \kappa\varepsilon, \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

と少ししか違わない.

IV. ハミルトン関数 (4.1.1) によって決まるトーラス T_ω 上の運動は n 個の周波数 ω を持って準周期的 (conditionally periodic) である. つまり,

$$\dot{Q}_0 = \omega_0, \quad \dot{Q}_1 = \omega_1 \quad \left(\text{ただし}\ \ \omega_0 = \frac{\partial H_0}{\partial p_{0_\omega}},\ \omega_1 = \mu\frac{\partial \overline{\overline{H}}_1}{\partial \tau_\omega}\right) \tag{4.1.14}$$

[16] 原論文では (4.1.7) の中央の式の H_1 に上線がない.

基本定理は以下の定理で与えられる帰納過程に基づいて 9 節-14 節で証明する.

§2. 帰納定理

関数 $H(p,q)$, 領域 G, Ξ および正数 $d, \Theta, \theta, \rho, \kappa; \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \mu, M, K$ が以下の性質を持つとする.

1) 領域 $F = \{(p,q) : p \in G,\ |\mathrm{Im}\ q| \le \rho\}$ において, 関数

$$H(p,q) = H_0(p_0) + H_1(p) + H_2(p,q) \tag{4.2.1}$$

は解析的である. ただし, $p = (p_0, p_1)$ であり, $q = (q_0, q_1)$ は角変数[17] , $\dim p_0 = n_0, \dim p_1 = n_1$, $n_0 + n_1 = n$.

2) 領域 G から領域 Ξ の上への写像 A:

$$p \to Ap = \frac{\partial}{\partial p_0}(H_0 + H_1), \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial H_1}{\partial p_1} \tag{4.2.2}$$

は微分同相である. ただし,

$$\theta|dp| \le |dA| \le \Theta|dp|, \quad \left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_0^2}\right| \le \Theta, \quad \left|\frac{\partial^2 H_1}{\partial p^2}\right| \le \mu\Theta, \quad (0 \le \theta \le 1 \le \Theta < \infty) \tag{4.2.3}$$

3) F 内で

$$|H_2(p,q)| \le \mu M. \tag{4.2.4}$$

4) 次の不等式が満たされる.

$$\begin{aligned} \delta &\le \delta^{(4)}(n, \Theta, \theta, \rho, \kappa, D) \\ &= \min\left\{\delta^{(1)}\left(n, 2\Theta, \frac{\theta}{2}\right); \delta^{(2)}(\rho, n); \delta^{(3)}(n, \Theta, \theta, D, \kappa)\right\} \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

$$\mu \le K, \tag{4.2.6}$$

ここで, $\delta^{(1)}$ は 3 節で定義する. また

$$\begin{aligned} \delta^{(2)} &= \min\{10^{-4n}\rho^{4n}, 2^{-55n}\} \\ \delta^{(3)} &= \min\{e^{2n}[2^8 n(n+4)]^{-2n}; (6+14\Theta)^{-1}; 4^{-n-3}\theta^n\Theta^{-n}D^{-1}n^{-1}\kappa\} \end{aligned}$$

5) 次のように置く.

$$\beta = \delta^3\varepsilon, \quad \gamma = \delta^{\frac{1}{4n}}, \quad \varepsilon = \delta^T, \quad K = \delta\varepsilon, \quad M = \varepsilon^{7/2}\delta^{-1}, \quad T = 16(n+4). \tag{4.2.7}$$

[17] [註] 基本定理では q_0 だけが角変数と書かれていた.

6) 領域 Ξ は, 5 章 2 節 5 項の記法により, 次の形をしている.

$$\Xi = \Xi^*_{K_0N_0d_0}, \quad N_0 < \frac{1}{\gamma}\ln\frac{1}{2M}, \quad K_0 \geq K, \tag{4.2.8}$$

ただし Ξ^* は $\dfrac{D}{\varepsilon}$ 型の領域である.

数 δ_s $(s \geq 1)$ を $\delta_1 = \delta,\ \delta_{s+1} = \delta_s^{15/14}$ により導入する. $s \geq 1$ に対して

$$\beta_s = \delta_s^3\varepsilon_s, \quad \gamma_s = \delta_s^{\dfrac{1}{4n}}, \quad \varepsilon_s = \delta_s^T, \quad M_s = \varepsilon_s^{7/2}\delta_s^{-1} \quad (\text{このとき } M_{s+1} = M_s^{15/14}), \tag{4.2.9}$$

と置く.

仮定 1)-6) の下に, $P^{(s)}, Q^{(s)} = X^{(s)} \in F^{(s)} : P^{(s)} \in G^{(s)}, |\mathrm{Im}\ Q^{(s)}| \leq \rho_s$ の形の領域列 $F^{(0)} = F, F^{(1)}, \ldots$ および領域 $F^{(s)}$ から $F^{(s-1)}$ の中への正準微分同相写像の列 $B_s : P^{(s)}, Q^{(s)} \to P^{(s-1)}, Q^{(s-1)}$ があって以下を満たす.

I. すべての $s \geq 1$ に対して

$$|B_s - E| < \beta_s, \quad |dB_s| < 2|dX^{(s)}|, \quad F^{(s)} \subseteq F^{(s-1)} - 2\beta_s, \quad \rho_s > \frac{\rho}{3}. \tag{4.2.10}$$

II. $P^{(s)}, Q^{(s)} = X^{(s)} \in F^{(s)}, p^{(s)} = P_0^{(s)}, P_1^{(s)}$ のとき, $p, q = B_1B_2\ldots B_s(P^{(s)}, Q^{(s)})$ に対して次が成り立つ.

$$H(p,q) = H^{(s)}(P^{(s)}, Q^{(s)}) = H_0(P^{(s)}) + H_1^{(s)}(P^{(s)}) + H_2^{(s)}(P^{(s)}, Q^{(s)}), \tag{4.2.11}$$

$$|H_2^{(s)}(P^{(s)}, Q^{(s)})| < \mu M_{s+1}, \quad \left|\frac{\partial H_2^{(s)}}{\partial X^{(s)}}\right| < \delta_s\beta_{s+1}, \quad \left|\frac{\partial^2 H_2^{(s)}}{\partial {X^{(s)}}^2}\right| < \delta_s, \tag{4.2.12}$$

III. 写像 $A^{(s)}$

$$P^{(s)} \to A^{(s)}P^{(s)} = \frac{\partial}{\partial P_0^{(s)}}\left[H_0(P_0^{(s)}) + H_1^{(s)}(P^{(s)})\right],\ \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial P_1^{(s)}}H_1^{(s)}(P^{(s)}) \tag{4.2.13}$$

は領域 $G^{(s)}$ の微分同相写像であって, 次を満たす.

$$\underline{\theta}|dP^{(s)}| < |dA^{(s)}| < \overline{\Theta}|dP^{(s)}|, \quad |A^{(s)} - A^{(s-1)}| < \beta_s\delta_s, \quad \underline{\theta} = \frac{1}{2}\theta, \quad \overline{\Theta} = 2\Theta. \tag{4.2.14}$$

IV. 各 $s \geq 1$ に対して, 次が成り立つ.

$$\mathrm{mes}(G - G^{(s)}) \leq \frac{\kappa}{2}\Theta^{-n}\mathrm{mes}\ \Xi^*. \tag{4.2.15}$$

この帰納定理は帰納法により 8 節で証明する.
証明の各段階は次節の補題に基づく.

§3. 帰納補題

関数 $H(p,q)$, 領域 G, Ξ および正数 $\Theta, \theta, \rho; \beta, \gamma, \delta, M; K, \mu$ が以下の性質を持つとする[18] .

1) 領域 $F : p \in G, |\mathrm{Im}\ q| \leq \rho$ において, 関数

$$H(p,q) = H_0(p_0) + H_1(p_1) + H_2(p,q) \tag{4.3.1}$$

は解析的である (ただし, $p = p_0, p_1$ であり; $q = q_0, q_1$ は角変数, $\dim p_0 = n_0$, $\dim p_1 = n_1$; $n_0 + n_1 = n$).

2) G から Ξ の上への写像 A

$$p \to Ap = \frac{\partial}{\partial p_0}(H_0 + H_1), \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial H_1}{\partial p_1}, \tag{4.3.2}$$

は微分同相であり, 次を満たす.

$$\theta|dp| \leq |dA| \leq \Theta|dp|, \quad \left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_0^2}\right| \leq \Theta, \quad \left|\frac{\partial^2 H_1}{\partial p^2}\right| \leq \mu\Theta, \quad (0 < \theta \leq 1 \leq \Theta < \infty). \tag{4.3.3}$$

3) F において

$$|H_2(p,q)| \leq \mu M, \quad M \leq \delta^{2n+3} K\beta^2 \tag{4.3.4}$$

4) 以下の不等式が満たされる.

$$15\delta \leq 3\gamma \leq \rho \leq 1, \quad 3\beta \leq 2\delta, \quad \mu \leq K \leq 1, \tag{4.3.5}$$

$$\delta \leq \delta^{(1)}(n, \Theta, \theta) = \min\{\delta^{(0)}(n, \Theta); \frac{\theta}{2n}\}. \tag{4.3.6}$$

ただし, $\delta^{(0)}(n, \Theta)$ は基本補題で定義される (4 節).

仮定 1)-4) の下に, 領域 F'(ここで $X = (P,Q) \in F' : P \in G' \subset G, |\mathrm{Im}\ Q| \leq \rho' < \rho - 3\gamma$), および F' を F の中に写す正準微分同相 $B : P, Q \to p, q$ が存在して次を満たす.

I. $|B - E| < \beta$, $|dB| < 2|dX|$, $F' \subset F - 2\beta$.

II. $(p,q) = x = BX; X = (P, Q \in F'); P = (P_0, P_1)$ に対して次が成り立つ.

$$H(p,q) = H_0(P_0) + H_1'(P) + H_2'(P,Q), \tag{4.3.7}$$

$$|H_2'(P,Q)| < \mu M', \quad \left|\frac{\partial H_2'}{\partial X}\right| < \mu\frac{M'}{\beta}, \quad \left|\frac{\partial^2 H_2'}{\partial X^2}\right| < 2\mu\frac{M'}{\beta^2}, \tag{4.3.8}$$

$$M' = \frac{M^2}{K\beta^2}\delta^{-\nu}, \quad \nu = 4n + 7 \tag{4.3.9}$$

[18] (註) 以下で H_1 が p_1 だけの関数となっている. すると, (4.3.2) の最初の式で p_0 による偏微分のとき H_1 が入っているのは無意味. また (4.3.3) で p による偏微分は p_1 による偏微分と書くべき. もしかして H_1 は p の関数ではないのか? それなら (4.3.2) も (4.3.3) も意味がある.

III. 写像 A'

$$P \to A'P = \frac{\partial}{\partial P_0}(H_0 + H_1'), \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial H_1'}{\partial P_1} \tag{4.3.10}$$

は G' から Ξ' の上への微分同相写像であり, 次を満たす.

$$\theta'|dp| < |dA'| < \Theta'|dp|, \quad \left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial P_0^2}\right| < \Theta, \quad \left|\frac{\partial^2 H_1'}{\partial P_1^2}\right| < \mu\Theta', \tag{4.3.11}$$

ただし $\theta' = (1-\delta)\theta, \Theta' = (1+\delta)\Theta$ である.
ここで, 5 章 2 節の記法によれば,

$$\Xi' = \Xi_{\mu KN} - d, \quad d = (5+7\Theta)\beta, \quad N = \frac{1}{\gamma}\ln\frac{1}{2M} \tag{4.3.12}$$

IV. $\text{mes}\ (G - G') < \theta^{-n}\ \text{mes}\ (\Xi - \overline{\Xi'})$ である. ただし, $\overline{\Xi'} = \Xi' - \beta = \Xi_{\mu KN} - \overline{d}$ および $\overline{d} = (6+7\Theta)\beta$ である.

帰納補題は 7 節で証明する. 証明の鍵は次節の補題を使うところである.

§4. 基本補題

関数 $H(p,q)$, 領域 G, Ξ, および正数 $\theta, \Theta, \rho; \beta, \gamma, \delta; \mu, M, K$ が以下の性質を持つとする.

1) 領域 $F : p \in G, |\text{Im}\ q| \le \rho$ ($p = p_0, p_1$ であり; $q = q_0, q_1$ は角変数, $\dim p_0 = n_0, \dim p_1 = n_1, n_0 + n_1 = n$) において, 関数

$$H(p,q) = H_0(p_0) + H_1(p) + \widetilde{H}_2(p,q) \quad \left(\oint \widetilde{H}_2 dq_0 \equiv 0\right) \tag{4.4.1}$$

は解析的である.

2) G から Ξ の上への写像 A

$$p \to Ap = \frac{\partial}{\partial p_0}(H_0 + H_1), \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial H_1}{\partial p_1}, \tag{4.4.2}$$

は微分同相である. ただし,

$$\theta|dp| \le |dA| \le \Theta|dp|, \quad \left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_0^2}\right| \le \Theta, \quad \left|\frac{\partial^2 H_1}{\partial p^2}\right| \le \mu\Theta, \quad (0 < \theta \le 1 \le \Theta < \infty). \tag{4.4.3}$$

3) F において

$$|\widetilde{H}_2(p,q)| \le \mu M, \quad M \le \delta^\nu K\beta^2, \quad (\nu = 2n+3). \tag{4.4.4}$$

4) 以下の不等式が満たされる.

$$10\delta \le 2\gamma \le \rho \le 1, \quad 3\beta \le 2\delta, \quad \mu \le K \le 1, \tag{4.4.5}$$

$$\delta \le \delta^{(0)}(n,\Theta) = 4^{-2n} n^{-1}(n+1)^{-(2n+2)} e^{2n+2}\Theta^{-1}. \tag{4.4.6}$$

$N = \frac{1}{\gamma}\ln\frac{1}{M}$ および $G_{\mu KN} = A^{-1}\Xi_{\mu KN}$ と置く. ただし, $\Xi_{\mu KN}$ は $\xi \in \Xi, \xi = \xi_0, \xi_1$ のうち, すべての整数ベクトル $k, 0 < |k| < N$ に対して

$$|(\xi_0, k_0) + \mu(\xi_1, k_1)| \geq \begin{cases} K|k|^{-(n+1)}, & \text{if} \quad k_0 \neq 0 \\ \mu K|k|^{-(n+1)} & \text{if} \quad k \neq 0 \end{cases} \tag{4.4.7}$$

を満たすものから成る.

仮定 1)-4) の下で, 領域 $P \in G_{\mu KN} - 2\beta$, $|\mathrm{Im}\ Q| \leq \rho - 2\gamma$ から F の中への微分同相写像 $B : P, Q \to p, q$ が存在して以下を満たす.

I. $|B - E| < \beta$, $|dB| < 2|dX|$ $(X = P, Q)$.

II. $(p, q) = x = BX$ および $P \in G_{\mu KN} - 2\beta$, $|\mathrm{Im}\ Q| \leq \rho - 2\gamma$ に対して

$$H(p, q) = H_0(P_0) + H_1(P) + H_2'(P, Q), \tag{4.4.8}$$

が成り立つ. ただし

$$|H_2'| < \mu M', \quad M' = \frac{M^2}{K\beta}\delta^{-2\nu} \quad (2\nu = 4n + 6). \tag{4.4.9}$$

基本定理の証明の第一段 (10 節参照) は以下の補題を使う.

§5. 短周期変数の平均化に関する補題

関数 $H(p, q)$, 領域 G_0, F_1, Ω, および正数 $\theta, \Theta, \rho; \beta, \gamma, \delta; K, M, \overline{M}$ が以下の性質を持つとする.

1) 領域 $F : p_0 \in G_0$, $|\mathrm{Im}\ q_0| \leq \rho$, $x_1 \in F_1$ $(p = p_0, p_1; q = q_0, q_1; x_1 = p_1, q_1$; 変数 q_0 は角変数 [19] ; $\dim\ p_0 = n_0$, $\dim\ p_1 = n_1$, $n_0 + n_1 = n)$ において, 関数

$$H(p, q) = H_0(p_0) + \overline{H}_1(p_0, p_1, q_1) + \widetilde{H}(p_0, p_1; q_0, q_1) \quad (\oint \widetilde{H}_1 dq_0 \equiv 0) \tag{4.5.1}$$

は解析的である.

2) G_0 から Ω の上への写像 A_0

$$p_0 \to A_0 p_0 = \omega_0 = \frac{\partial H_0}{\partial p_0} \tag{4.5.2}$$

は微分同相である. ただし,

$$\theta|dp_0| \leq |dA_0| \leq \Theta|dp_0|, \quad \left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_0^2}\right| \leq \Theta \quad (0 < \theta \leq 1 \leq \Theta < \infty). \tag{4.5.3}$$

3) F において,

$$|\overline{H}_1| \leq M, \quad |\widetilde{H}_1| \leq M, \quad M \leq \delta^\nu \beta^2 \quad (\nu = 2n + 3). \tag{4.5.4}$$

[19] この補題においては, 他のすべての場合と違って, q_1 が角変数であることは保証されていない.

4) 以下の不等式が成り立つ.

$$10\delta \le 2\gamma \le \rho \le 1, \quad 3\beta \le \delta, \quad \delta \le K, \quad M \le \bar{M}, \tag{4.5.5}$$

$$\delta \le \delta^{(0)}(n, \Theta) = 4^{-2n} n^{-2} (n+1)^{-(2n+2)} e^{2n+2} \Theta^{-1}. \tag{4.5.6}$$

$N = \dfrac{1}{\gamma} \ln \dfrac{1}{M}$ と置き, $(G_0)_{KN} = A_0^{-1} \Omega_{KN}$ なる記法を導入する. ただし, Ω_{KN} は, すべての整数ベクトル $k_0, 0 < |k_0| < N$ に対して

$$|(\omega_0, k_0)| \ge K |k_0|^{-(n+1)} \tag{4.5.7}$$

が成り立つような $\omega_0 \in \Omega$ からなっている.

仮定 1)-4) の下に, 領域 F' :

$$P_0 \in G_0', \quad |\mathrm{Im}\ Q_0| \le \rho - 2\gamma, \quad X_1 \in F_1 - 3\beta \quad (X_1 = P_1, Q_1)$$

から F の中への微分同相写像 $B : P, Q \to p, q$ があって以下を満たす.

I. $|B - E| < \dfrac{M}{K \beta \delta^{2n+2}}, \ |dB| < 2|dX| \quad (X = P, Q)$

II. $p, q = x = BX, X \in F'$ に対して

$$H(p, q) = H_0(P_0) + \overline{H}_1(P_0, P_1, Q_1) + H_2'(P_0, P_1, Q_0, Q_1), \tag{4.5.8}$$

ただし

$$|H_2'| < M', \quad M' = \frac{M \overline{M}}{\beta^2} \delta^{-2\nu}, \quad 2\nu = 4n + 6. \tag{4.5.9}$$

III. $G_0' = (G_0)_{KN} - 2\beta = A_0^{-1} \Omega_{KN} - 2\beta$.

この補題の証明は基本補題の証明と同様である (6, 8 節参照).

§6. 基本補題の証明

1. 構成. 母関数を $Pq + S(P, q)$, $S = \sum_{|k|>0} S_k(P) e^{i(k,q)}$ とする正準変換

$$p = P + \frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q = q + \frac{\partial S}{\partial P} \tag{4.6.1}$$

により, ハミルトン関数 $H(p, q)$ は次の形になる.

$$H(p, q) = H_0(P_0) + H_1(P) + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5(P, Q), \tag{4.6.2}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \left[\left(\omega(P)\frac{\partial S}{\partial q}\right) + [\widetilde{H}_2(P,q)]_N\right], \\
\Sigma_2 &= \left[H_0(P_0+\Delta P_0) - H_0(P_0) - \left(\frac{\partial H_0}{\partial P_0}\right)\Delta P_0\right], \\
\Sigma_3 &= \left[H_1(P+\Delta P) - H_1(P) - \left(\frac{\partial H_1}{\partial P}\Delta P\right)\right], \\
\Sigma_4 &= \left[\widetilde{H}_2(P+\Delta P,q) - \widetilde{H}_2(P,q)\right], \\
\Sigma_5 &= \left[\widetilde{H}_2(P,q) - [\widetilde{H_2}(P,q)]_N\right],
\end{aligned}$$

および

$$\widetilde{H}_2(P,q) = \textstyle\sum_{|k|>0} h_k(P)e^{i(k,q)}, \quad [\widetilde{H}_2(P,q)]_N = \sum_{0<|k|<N} h_k(P)e^{i(k,q)}.$$

$$\omega(P) = \frac{\partial}{\partial P}[H_0(P_0) + H_1(P)],$$

$$\Delta P = p - P = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad \Delta P_0 = p_0 - P_0 = \frac{\partial S}{\partial q_0},$$

(4.6.2) 式で, 微分をすべて行ったあと, 変数 p, q は (4.6.1) を使って P, Q による表式で表される.

S は $\Sigma_1 \equiv 0$ となるように定義する. そのために

$$S_k(P) = \frac{ih_k(P)}{(k,\omega(P))} \quad (0<|k|<N), \quad S_k = 0 \quad (|k| \geq N) \tag{4.6.3}$$

と置く.

2. S の見積もり. $p \in G_{\mu KN}$ に対して

$$|(\omega(P),k)| = |(\xi_0,k_0) + \mu(\xi_1,k_1)| \geq \begin{cases} K|k|^{-(n+1)}, & \text{if} \quad k_0 \neq 0, \\ \mu K|k|^{-(n+1)}, & \text{if} \quad k \neq 0, \end{cases} \tag{4.6.4}$$

を得る. ここで $\xi = \xi_0, \xi_1$ は, 周波数ベクトル $\omega = \omega_0, \omega_1$ と $\omega_0 = \xi_0, \omega_1 = \mu\xi_1$ と関係するように導入された周波数ベクトルである.

V 章 3 節 2 項の 1) に応じ, 条件 3) から $|h_k| \leq \mu M e^{-|k|\rho}$ が出る. (4.6.3) と (4.6.4) の比較より, (5.3.10) を考慮すると,

$$\left.\begin{aligned} |S_k| &< \frac{\mu M}{\mu K}\frac{L_1}{\delta^{\nu_1}}e^{-|k|(\rho-\delta)} \quad (k \neq 0), \\ |S_k| &< \frac{\mu M}{K}\frac{L_1}{\delta^{\nu_1}}e^{-k(\rho-\delta)} \quad (k_0 \neq 0), \end{aligned}\right\} \tag{4.6.5}$$

が成り立つことがわかる. ここで $L_1 = \left(\frac{\nu_1}{e}\right)^{\nu_1}$ および $\nu_1 = n+1$ である.

したがって, 5 章 3 節 2 項の 2) に応じて, $|\mathrm{Im}\ q| \leq \rho - 2\delta$ のとき

$$|S| < \frac{M}{K}\frac{L_2}{\delta^{\nu_2}} \quad (L_2 = 4^n L_1, \nu_2 = 2n+1), \tag{4.6.6}$$

を得る.

3. B の見積もり. 条件 3) に応じて, (4.6.6) より,

$$|S| < \frac{\beta^2}{16n} \quad \text{for} \quad \delta \le L_3^{-1}, \quad L_3 = 16nL_2 \tag{4.6.7}$$

がしたがう.

したがって, 正準変換に関する V 章, 4 節 3 項の補題が適用できる. この補題によれば, 式 (4.6.1) は正準微分同相写像 $B : P, Q \to p, q$ を定義する. この写像は, 領域 $P \in G_{\mu KN} - 2\beta,\ |\mathrm{Im}\ Q| \le \rho - 5\delta (\le \rho - 2\delta - 3\beta$. なぜなら, (4.4.5) より $3\beta \le 2\delta$ であるから) を F 内へと写す. ただし, (4.6.7) および (4.6.5) からすると,

$$\left.\begin{aligned} |B - E| < \beta, \quad |dB| < 2|dX|, \qquad |\Delta P| < \frac{M}{K}\frac{L_2}{\delta^{\nu_2+1}}, \\ |\Delta P_0| < \mu\frac{M}{K}\frac{L_2}{\delta^{\nu_2+1}} \end{aligned}\right\} \tag{4.6.8}$$

4. Σ_2, Σ_3 の見積もり. テイラーの公式 (5.3.4) [20] をあてはめよう. $P \in G_{\mu KN} - 2\beta,\ |\mathrm{Im}\ Q| \le \rho - 5\delta$ とすると, $|\lambda| \le 1$ に対して, (4.6.8) より, $P + \lambda\Delta P \in G_{\mu KN} - \beta$ が成り立つ. だから (4.6.8), 条件 2), および $\delta \le L_4^{-1}\Theta^{-1}$ より,

$$|\Sigma_2| < \mu^2\frac{M^2}{K^2}\frac{\Theta n^2 L_2^2}{2\delta^{2\nu_2+2}} < \mu^2\frac{M^2}{K^2}\frac{1}{\delta^{\nu_3}} \quad (\nu_3 = 2\nu_2 + 3, L_1 = n^2L_2^2). \tag{4.6.9}$$

がしたがう. 同じ論拠により, 同じ領域で

$$|\Sigma_3| < \frac{M^2}{K^2}\mu\frac{\Theta n^2 L_2^2}{2\delta^{2\nu_2+2}} < \mu\frac{M^2}{K^2}\frac{1}{\delta^{\nu_3}}. \tag{4.6.10}$$

が成り立つ.

5. Σ_4 の見積もり. 公式 (5.3.4) を使う. $P \in G_{\mu KN} - 2\beta,\ |\mathrm{Im}\ Q| \le \rho - 5\delta,\ |\lambda| < 1$ に対して, $P + \lambda\Delta P \in G_{\mu KN} - \beta$ が成立ち, またコーシーの公式 (5.3.3) より, $\left|\dfrac{\partial\widetilde{H}}{\partial P}\right| < \dfrac{\mu M}{\beta}$ が成り立つ. したがって, $\delta \le L_3^{-1} < L_2^{-1}n^{-1}$ に対して,

$$|\Sigma_4| < \mu\frac{M^2}{K\beta}\frac{L_2 n}{\delta^{\nu_2+1}} \le \mu\frac{M^2}{K\beta}\frac{1}{\delta^{\nu_4}} \quad (\nu_4 = \nu_2 + 2). \tag{4.6.11}$$

であることがわかる.

6. Σ_5 の見積もり. V 章 3 節 2 項の 3) を応用しよう. $P \in G_{\mu KN} - 2\beta, |\mathrm{Im}Q| \le \rho - 5\delta - \gamma$ に対して, (4.6.8) に応じて $P \in G,\ |\mathrm{Im}\ q| \le \rho - \gamma - \delta$ が成り立つ. $N = \dfrac{1}{\gamma}ln\dfrac{1}{M}$, $\delta \le L_5^{-1}$ に対して, (4.4.5) を考慮すると, V 章 3 節 2 項の 3) より,

$$|\Sigma_5| < \mu\frac{M^2L_5}{\delta^{n+1}} < \mu\frac{M^2}{\delta^{\nu_5}} \quad \left(\nu_5 = n + 2, L_5 = 2\left(\frac{2n}{e}\right)^n\right). \tag{4.6.12}$$

[20] 原論文には (5.3.14) とあるが, 対応する式番号はばい.

が成り立つ.

7. H' の見積もり. 条件 4) より, $\delta \le \delta^{(0)}(n,\theta) = L_4^{-1}\Theta^{-1}$ を得る. $L_3 \le L_4, L_5 \le L_4$ は容易にわかる. $\Theta > 1$ であるから, $\delta < \delta^{(0)}(n,\Theta)$ に対して, $\delta \le L_3^{-1}$, $\delta \le L_5^{-1}$ が成り立つはずであり, 見積り (4.6.9)-(4.6.12) は $P \in G_{\mu KN} - 2\beta$, $|\mathrm{Im}\ Q| \le \rho - 2\gamma \le \rho - \gamma - 5\delta$ に対して成り立つ. この領域において (4.6.2) は $H(p,q) = H_0(P_0) + H_1(P) + H_2'(P,Q)$ の形を取る. ここで, 4–6 項および条件 4) を考慮すると,

$$|H_2'(P,Q)| \le \left(\mu^2\frac{M^2}{K^2} + \mu\frac{M^2}{K^2} + \mu\frac{M^2}{K\beta} + \mu M^2\right)\delta^{-\nu_3} < \mu\frac{M^2}{K\beta}\delta^{-(4n+6)},$$

が成り立つ. これで基本補題が証明された.

8. 平均化補題の証明. 証明は上で述べたものに似ているので, 必要な変更点のみを指摘しよう.
1 項における母関数は $P_0q_0 + P_1q_1 + S$ の形にとる. ただし,

$$S(P_0,P_1,q_0,q_1) = \sum_{k_0\neq 0} S_{k_0}(P_0,P_1,q_1)e^{i(k_0,q_0)}.$$

また, (4.6.3) の代わりに

$$S_{k_0}(P_0,P_1,q_1) = \frac{ih_{k_0}(P_0,P_1,q_1)}{(\omega_0(P_0),k_0)} \quad (0 < |k_0| < N),$$

を得る.
この結果, Σ_3 は

$$\Sigma_3 = \overline{H}_1(p_0,p_1,q_1) - \overline{H}_1(P_0,P_1,Q_1), \tag{4.6.13}$$

の形になる.
$X \in F'$ については, (4.6.8) の代わりに

$$|\Delta P_0| < \frac{ML_2}{K\delta^{\nu_2+1}}, \quad |\Delta Q_0| < \frac{ML_2}{K\beta\delta^{\nu_2}}, \quad |\Delta X_1| < \frac{ML_2}{K\beta\delta^{\nu_2}} \quad (\nu_2 = 2n+1), \tag{4.6.14}$$

を得る. 量 $|\Sigma_3|$ はラグランジュ公式 (5.3.4) から見積もられる.
(4.6.13) および (4.6.14) より, 見積もり

$$|\Sigma_3| < \frac{M^2 2nL_2}{K\beta^2\delta^{\nu_2}} \le \frac{M^2}{\beta^2\delta^{\nu_4}}, \tag{4.6.15}$$

を得る. さらに, $N = \dfrac{1}{\gamma}\ln\dfrac{1}{M}$ として, Σ_5 の見積もりを

$$|\Sigma_5| \le \frac{M\overline{M}}{\delta^{\nu_5}} \tag{4.6.16}$$

と得る.

$M \le \overline{M}$ であるから, 見積もり (4.6.15) と (4.6.16) は

$$|H_2'| < \frac{M\overline{M}}{\beta^2}\delta^{-2\nu},$$

に帰着する. これで 5 節の補題が証明された.

§7. 帰納補題の証明

1. $H_2(p,q) = \overline{H}_2(p) + \widetilde{H}_2(p,q)$ と置く. ここで $\oint \widetilde{H}_2(p,q)dq \equiv 0$ である. このとき, $H(p,q) = H_0(p_0) + H_1'(p) + \widetilde{H}_2(p,q)$ である. ただし, $H_1' = H_1(p) + \overline{H}_2(p)$ である. 写像 A' :

$$p \to A'p = \frac{\partial}{\partial p_0}(H_0 + H_1'), \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial H_1'}{\partial p_1} = Ap + \Delta(p); \quad \Delta = \frac{\partial \overline{H}_2}{\partial p_0}, \ \frac{1}{\mu}\frac{\partial \overline{H}_2}{\partial p_1},$$

を考える. 周波数の変分に関する補題 (V 章 4 節 5 項) を適用する. 条件 3), 4) より, $M < \dfrac{\delta\theta}{2n}\beta^2$ が従う. したがって, コーシーの公式 (5.3.3) より, $p \in G - \beta$ に対して $|\Delta| < \dfrac{M}{\beta} < \delta\beta$, $|d\Delta| < \delta\theta|dp|$ が成り立つ. V 章 4 節 5 項の補題において $\Omega_0 = \Xi_{\mu KN}$, $b = 3\mu$ と置くと, A' が領域 $G' = A'^{-1}$ を微分同相的に $\Xi' = \Xi_{\mu KN} - d$, $d = (5 + 7\Theta)\beta$ の上に写すこと, また $G' + 3\beta$ を $\Xi_{\mu KN}$ の中に写すことがわかる. これにより, 帰納補題の結論 III と IV が満たされる.

2. 基本補題を領域 F 内の関数

$$H(p,q) = H_0(p_0) + H_1'(p) + \widetilde{H}_2(p,q)$$

に適用する. 1 項に応じて, $|\widetilde{H}_2| < 2\mu M$, $\theta'|dp| < |dA'| < \Theta'|dp|$ であり, また数 $\theta', \Theta', \rho, \beta, \gamma, \delta, \mu, 2M, K$ は基本補題の条件を満たす (帰納補題の条件 1)-4) を考慮せよ) から, 基本定理が適用可能である. これにより, 領域 $P \in G_{\mu KN} - 2\beta$, $|\mathrm{Im}\ Q| \le \rho - 2\gamma$ 内に微分同相写像 $B : P, Q \to p, q$ と不等式 $|H_2'(P,Q)| < \mu M'$ が用意される. ゆえにコーシーの公式より, $P \in G_{\mu KN} - 3\beta$, $|\mathrm{Im}\ Q| \le \rho - 3\gamma$ に対して帰納補題の結論 II の見積もりを得る.

3. 1 項に応じて, $P, Q \in F'$; $P \in G', |\mathrm{Im}\ Q| \le \rho - 3\gamma$ であることより, $P \in G_{\mu KN} - 3\beta$ が出る. ところがそのとき, 2 項に応じて帰納補題の結論 I と II が成り立つから, これによって帰納補題は完全に証明された.

§8. 帰納定理の証明

1. 帰納定理の条件の下で, 帰納補題が適用できること を示そう. そのためにまず, 2 節および 3 節の条件 1), 2) が共通であることに注意する. $\delta \le \delta^{(4)}$ より, $\delta \le \delta^{(1)}(n, \Theta, \theta)$ が 3 節の 4) からしたがう. $\delta \le \delta^{(2)}$ より, $\gamma \le 0.1\rho$; $\gamma \le 2^{-14}$ が出る. また, $\delta \le \delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$ に対して

$$15\delta < 15\delta\frac{1}{2}\delta\frac{1}{4n} \le 3\delta\frac{1}{4n} = 3\gamma, \quad 3\beta = 3\delta^3\varepsilon < 2\delta^2\varepsilon < 2\delta$$

が成り立つ。 だから, 3 節の 4) は 2 節の 4) および 5) よりしたがう. 最後に, 3 節の条件 3) において, $M < \delta^{2n+3} K\beta^2$ は不等式 $-3T-1 > 3T+2n+10$(実は $T = 16n+24$) からしたがう. こうして帰納補題の条件はすべて満たされる.

2. $\delta \le \delta^{(2)}$ であることより, (5.3.2) に応じて, $s \ge 1$ に対して

$$\delta_s + \delta_{s+1} + \ldots < 2\delta_s, \quad 3(\gamma_s + \gamma_{s+1} + \ldots) < 6\gamma_s \le 6\gamma_1 < 2\frac{\rho}{3} \tag{4.8.1}$$

が成り立つ.

(4.8.1) より, $s \ge 1$ に対して

$$\theta_s = \theta_{s-1}(1-\delta_s), \quad \Theta_s = \Theta_{s-1}(1+\delta_s), \quad \rho_s = \rho_{s-1} - 3\gamma_s,$$
$$(\theta_0 = \theta, \Theta_0 = \Theta, \rho_0 = \rho)$$

と置けば, 次の不等式が満たされることがわかる.

$$\theta_s > \underline{\theta} = \frac{\theta}{2}, \quad \Theta_s < \overline{\Theta} = 2\Theta, \quad \rho_s > \rho_\infty = \frac{1}{3}\rho. \tag{4.8.2}$$

簡単に確認できるように, 任意の $s \ge 1$ に対して, 数 $\beta_s, \gamma_s, \delta_s, \varepsilon_s, M_s; K, \mu$ は帰納補題の条件 3), 4) の不等式を定数 $\theta_{s-1}, \Theta_{s-1}, \rho_{s-1}$ で満たす. $s = 1$ のとき, これは段落 4 で確かめる.

3. $\delta \le \delta^{(3)}$ であるから, 不等式 (5.3.10) を考慮すると, $N_s = \dfrac{1}{\gamma_s}\ln\dfrac{1}{2M_s} < \dfrac{1}{\gamma_s}\ln\dfrac{1}{\delta_s^{4T}}$ に対して不等式

$$\delta_s N_s^n = \delta_s \left(\delta_s^{-\frac{1}{4n}\ln\delta_s^{-4T}}\right)^n \le \delta_s \left(\frac{16nT}{e}\delta_s^{-\frac{1}{2n}}\right)^n \le \delta_s^{\frac{1}{2}} \left(\frac{16nT}{e}\right)^n < 1 \tag{4.8.3}$$

が成り立つ. さらに, $\sigma_1 = \sum\limits_{1 \le m < N_1} m^{-2}$ および $s > 1$ に対して $\sigma_s = \sum\limits_{N_{s-1} \le m < N_s} m^{-2}$ と置く. $\sum\limits_{s=1}^{\infty} \sigma_s < 2$ であるから, $\delta < \delta^{(3)}$, (4.8.1) および (4.8.3) より, 次の不等式を導くことができる.

$$\sum_{s=1}^{\infty} [K\sigma_s + (6+7\Theta_s)\beta_s N_s^n] \le \sum_{s=1}^{\infty} [\delta_1\sigma_s + \delta_s]\varepsilon < 4\delta_1\varepsilon < \frac{\kappa\varepsilon}{2\overline{D}}, \tag{4.8.4}$$

ただし

$$\overline{D} = \left(\frac{2\Theta}{\theta}\right)^n LD, \quad L = n2^{n+2}.$$

4. 項

$$A^{(s-1)}; \quad F^{(s-1)}, G^{(s-1)}; \quad H^{(s-1)}(P^{(s-1)}, Q^{(s-1)}); \quad \Xi^{(s-1)} \quad (s \ge 1) \tag{4.8.5}_{s-1}$$

が帰納補題の条件を満たすとする. ただし, その際, 定数

$$\theta_{s-1}, \Theta_{s-1}; \quad \rho_{s-1}; \quad \beta_s, \gamma_s, \delta_s, M_s; \quad K, \mu, \tag{4.8.6}_{s-1}$$

は上で定義されたものとする. このとき帰納補題は

$$A', B; \quad F', G'; \quad H_1'(P), H_2'(P,Q); \quad \Xi', \overline{\Xi}'; \quad \theta', \Theta', \rho'$$

を定義する. これらを

$$A^{(s)}, B_s; \quad F^{(s)}, G^{(s)}; \quad H_1^{(s)}(P^{(s)}), H_2^{(s)}(P^{(s)}, Q^{(s)}); \quad \Xi^{(s)}, \overline{\Xi}^{(s)}; \quad \theta_s, \Theta_s, \rho_s. \tag{4.8.7}_s$$

と書くことにする. 帰納補題の結論 II より, $T = 16(n+4)$ であることより, $F^{(s)}$ 内で

$$|H_2^{(s)}| \le \mu \frac{M_s^2}{K\beta_s^2}\delta_s^{-\nu} < \mu\delta^{7T-3T-4n-16} < \mu\delta_s^{1\frac{1}{14}(3\frac{1}{2}T-1)} = \mu M_{s+1} \tag{4.8.8}$$

を得る. 帰納補題の結論 I, II, III より, 2 項と (4.8.8) に注意すると, $(4.8.5)_{s-1}$ の項が帰納補題の条件を, 定数 $(4.8.6)_{s-1}$ で満たすならば, $(4.8.5)_s$ の項は帰納補題の条件を定数 $(4.8.6)_s$ で満たすという結論に達する.

5. ところが 1 項に応じて, $(4.8.5)_0$ の項 $(A^{(0)} = A, F^{(0)} = F, G^{(0)} = G, H^{(0)} = H, P^{(0)} = p, Q^{(0)} = q, \Xi^{(0)} = \Xi)$ は帰納補題の条件を定数 $(4.8.6)_0$ で満たす. ゆえに, 帰納補題は無限回適用できる. その結果, $(4.8.7)_s$ の項を $s = 1, 2, \ldots$ に対して得る.

(4.8.2) および (4.8.8) からすると, 帰納定理の結論 I, II, III は帰納補題の結論 I, II, III からしたがう. $F^{(s)}$ が空でないことをまだ証明していない. これは帰納定理の結論 IV からしたがう. 結論 IV をこれから証明しよう.

6. 帰納補題の結論 III および IV より,

$$\text{mes } (G^{(s-1)} \backslash G^{(s)}) \le \underline{\theta}^{-n} \text{mes } (\Xi^{(s-1)} \backslash \overline{\Xi}^{(s)}), \tag{4.8.9}$$

であることがわかる. ここで, $\overline{\Xi}^{(s)} = \xi_{\mu K N_s}^{(s-1)} - \overline{d}_s$, $\overline{d}_s = (6 + 7\Theta_s)\beta_s$ であり, $\Xi^{(s-1)}$ は $\Xi^{(0)}$ から公式

$$\Xi^{(k)} = \Xi_{\mu K N_k}^{(k-1)} - d_k, \quad d_k = (5 + 7\Theta_k)\beta_k, \quad N_k = \frac{1}{\gamma_k} \ln \frac{1}{2M_k} \quad (k = 1, \ldots, s-1)$$

によって得られる. ここで $d_k > 0, N_1 < N_2 < \ldots$ であり, 領域 $\Xi = \Xi^{(0)}$ は帰納定理の条件 6) に応じて

$$\Xi^{(0)} = \Xi_{K_0 N_0 d_0}^*, \quad N_0 < N_1, K_0 > K, d_0 > 0,$$

なる形をしている. ただし, Ξ^* は $\dfrac{D}{\varepsilon}$ 型の領域である.

V 章 2 節 5 項の算術補題より,

$$\text{mes } (\Xi^{(s-1)} \backslash \Xi^{(s)}) \le \frac{DL}{\varepsilon}[K\sigma_s + (6 + 7\Theta_s)\beta_s N_s^n] \text{mes } \Xi^*, \tag{4.8.10}$$

であることがわかる. (4.8.9), (4.8.10) および (4.8.4) より,

$$\begin{aligned}&\text{mes } (G\backslash G^{(s)}) = \sum_{k=1}^{s} \text{mes } (G^{(k-1)} - G^{(k)}) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{s} [K\sigma_k + (6+7\Theta_k)\beta_k N_k^n] \frac{DL}{\varepsilon \underline{\theta}^n} \text{mes } \Xi^* \leq \frac{\kappa\varepsilon}{2} \frac{DL\underline{\theta}^n}{DL\Theta^n \varepsilon \underline{\theta}^n} \text{mes } \Xi^* \\ &= \frac{\kappa}{2}\Theta^{-n} \text{mes } \Xi^*\end{aligned} \tag{4.8.11}$$

が出る. だから, 帰納定理の結論 IV が成り立ち, 定理は完全に証明された.

§9. 微分同相写像の非退化に関する補題

基本定理の証明のために, ある種の写像の非退化を表現する 1 節の条件 4) をもっと精密にしよう.

1. 補題. 基本定理の条件において, 任意の $\kappa > 0$ に対して, $\kappa, G_0, \rho, R, H_0$ および $\overline{\overline{H}}_1$ のみに依存する正数 $\theta, \Theta, D, m, r, \overline{\mu}$ が存在し, 領域 G_0 は $m+1$ 個の部分に分かれる. すなわち,

$$G_0 = G_{01} \cup G_{02} \cup \ldots \cup G_{0m} \cup \overline{G}_0,$$

ただし,

$$\text{mes } \overline{G}_0 \leq \frac{\kappa}{2} \text{mes } G_0. \tag{4.9.1}$$

また, 任意の $0 < \mu < \overline{\mu}$ に対して, 領域 G_{0i} の各々は以下の 3 つの性質を持つ.

1) 写像 $A_0 : p_0 \to Ap_0 = \omega_0 = \dfrac{\partial H_0}{\partial p_0}$ は G_{0i} から D 型領域 Ω_i(V 章 1 節の記法) の上への微分同相写像であり, G_{0i} の各点において

$$\theta |dp_0| \leq |dA_0| \leq \Theta |dp_0|, \quad \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_0^2} \right| \leq \Theta, \tag{4.9.2}$$

を満たす.

2) 写像 $A : p \to Ap = \xi$ を考える. ただし,

$$p = p_0, \tau; \quad \xi = \xi_0, \xi_1; \quad \xi_0 = \frac{\partial}{\partial p_0}(H_0 + \mu \overline{\overline{H}}_1), \quad \xi_1 = \frac{\partial \overline{\overline{H}}_1}{\partial \tau}.$$

写像 A は領域 $G_i(r)(p_0 \in G_{0i}, |\tau| \leq r)$ から領域 $\Xi_i(r)$ の上への微分同相写像であり, $G_i(r)$ の各点において

$$\theta |dp| \leq |dA| \leq \Theta |dp|; \quad \left| \frac{\partial \overline{\overline{H}}_1}{\partial p} \right|, \left| \frac{\partial^2 \overline{\overline{H}}_1}{\partial p^2} \right| \leq \Theta, \tag{4.9.3}$$

を満たす.

3) 点 $p = p_0, \tau$ の領域

$$p_0 \in G_{0i}, \quad \left| \tau_j - \frac{\varepsilon}{2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

を $G_i^*(\varepsilon)$ と記す.

$\xi_0 \in \Omega_i - d$ なる点 $Ap, p \in G_i^*(\varepsilon)$ の集合を $\Xi_i^*(\varepsilon, d)$ と記す.

性質 3) は, 任意の $0 < \varepsilon < r,\ 0 < d < r$ に対して, 領域 $\Xi_i^*(\varepsilon, d)$ が $\dfrac{D}{\varepsilon}$ 型であることを言っている (V 章 1 節 3 項参照).

2. 補題の証明. $\overline{G}_0$ としては, 行列式 (4.1.9), (4.1.10) がゼロとなる解析多様体の十分小さな近傍を取る必要がある. このとき, $\overline{G}_0$ の外では, 不等式

$$\theta^* E < \left|\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_0^2}\right|\right| < \Theta^* E, \quad \theta^* E < ||\lambda_{ij}|| < \Theta^* E, \quad \left|\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j}\right| \leq \Theta^*$$

が, 十分小さな θ^* および大きな Θ^* に対して成り立つ. これらの不等式より, 変形に関する補題 (V 章 4 節 6 項) の助けを借りて容易に示せるように, ある $\theta, \Theta, 0 < \theta \leq 1 \leq \Theta < \infty$ および十分小さな $r, \overline{\mu}$ に対して不等式 (4.9.2) および (4.9.3) が導ける. このとき, $r, \overline{\mu}$ および G_{0i} は A_0 と A が微分同相写像になるように選ばれる. 最後に, 十分小さな $r, \overline{\mu}$ および十分大きな D に対して, 条件 3) も満たされる (V 章 1 節 3 項の III に応じて). D をこのように選んで補題の証明が完了する.

3. 注意. 各領域 G_{0i} に関してそれぞれ別々に基本定理が証明されたとする. つまり,

$$\varepsilon_{0i} = \varepsilon_0(\kappa;\ H_0, \overline{\overline{H}}_1;\ G_{0i}, R_0, C, \rho).$$

が見つかったとする.

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\kappa;\ H_0, \overline{\overline{H}}_1;\ G_0, R_0, C, \rho) = \min_{1 \leq i \leq m} \varepsilon_0 \left(\frac{\kappa}{2m};\ H_0, \overline{\overline{H}}_1;\ G_{0i}, R_0, C, \rho\right)$$

と置く. (4.9.1) からすると, この値 ε_0 は基本定理の要請をすべて満足する.

上の注意を心に留めて, 以後は領域

$$p_0 \in G_0; \quad p \in G(r) \quad (\text{i.e. } p_0 \in G_0,\ |\tau| \leq r); \quad p \in G^*(\varepsilon)$$

$$\left(\text{i.e. } p_0 \in G_0, \left|\tau - \frac{\varepsilon}{2}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right)\ (0 < \varepsilon < r)$$

において 1 項の条件 1), 2), 3) が満たされると仮定する.

§10. 高速変数に関する平均

基本定理の証明は 5 節の補題を関数

$$H_0(p_0) + \mu \overline{H}_1(p_0, p_1, q_1) + \mu \tilde{H}_1(p_0, q_0, p_1, q_1) \tag{4.10.1}$$

に適用することから始まる. 証明のこの第一段階を以下で遂行する.

1. 仮定. 関数 $H(p, q)$, 領域 F, G_0 および正数 $\rho,\ R = \sqrt{r}, C;\ \theta, \Theta, D, m, r;\ \kappa$ が基本定理の条件 1)-4) を満たし, 9 節 1 項の条件 1)-3) を満たすことを仮定する. 加えて,

$$\mu \leq \varepsilon^4, \quad \varepsilon = \delta^T, \quad T > n + 2, \quad \rho \leq 1, \quad D > 1 \tag{4.10.2}$$

を仮定し, 量

$$\beta = \delta^3, \quad \gamma = 2\delta^{\frac{1}{4n}}, \quad K_0 = \delta, \quad M = \mu\delta^{-1}, \quad \overline{M} = \varepsilon^4\delta^{-1} \tag{4.10.3}$$

を導入する.

最後に δ が十分小さいことを仮定する. すなわち,

$$\delta \le \delta^{(5)}(n, \theta, \Theta, C, T, R, \rho, \kappa, D). \tag{4.10.4}$$

ただし,

$$\delta^{(5)} = \min\{\delta^{(0)}(n, \Theta);\ \delta^{(6)}(n, \rho, R, C);\ \delta^{(7)}(n, \theta, \Theta, T, \kappa, D)\}.$$

ここで $\delta^{(0)}$ は 5 節で定義されたものであり, $\delta^{(6)} = \min\left\{0.04; \rho^n 8^{-4n}; \frac{R}{2}; \frac{1}{C}\right\}$ であり, また

$$\delta^{(7)} = \min\{\frac{1}{4\Theta}, \left(\frac{e}{16nT}\right)^{2n}, \frac{\kappa\theta^n}{6\Theta^n D n 2^{2n+2}}\}$$

である.

2. 主張. 1 項の仮定の下で, P, Q 空間の領域 F'

$$P_0 \in G_0', \quad |\mathrm{Im}\ Q_0| \le \rho - 2\gamma \le \rho' = 0.5\rho, \quad |X_1| \le R - 3\beta \le R' = 0.5R, \tag{4.10.5}$$

において, 以下の条件を満たす正準微分同相写像 $B : P, Q \to p, q$ が存在する.

I. $|B - E| < \mu\delta^{-(2n+7)}$, $|dB| < 2|dX|$.

II. $p, q = BX$(ただし, $X \in F'$) に対して, (4.1.1) の関数 $H(p, q)$ は

$$H(p, q) = H_0(P_0) + \mu\overline{H}_1(P_0, P_1, Q_1) + H_2(P_0, P_1, Q_0, Q_1) \tag{4.10.6}$$

の形をしている. ここで H_0 と $\overline{H}_1$ は (4.1.1)-(4.1.3) のものと同じであり, また

$$|H_2| < \mu\varepsilon^4\delta^{-(4n+15)} \tag{4.10.7}$$

である.

III. $G_0' = A_0^{-1}\Omega_{K_0N_0} - 2\delta^3$ $\left(\text{ただし}, N_0 = \frac{1}{2}\delta^{-\frac{1}{4n}} \ln\frac{\delta}{\varepsilon^4}\right)$.

IV. G_0'' が P_0 空間の領域であって, $A_0G_0'' \supseteq \Omega_{K_0N_0} - 4\Theta\delta^3$ であれば, $\mathrm{mes}\,(G_0 \backslash G_0'') \le \frac{\kappa}{2}\mathrm{mes}\, G_0$ である.

3. 証明. $\delta \le \delta^{(6)}$, (4.10.3) および (4.10.2) より,

$$10\delta \le 2\gamma \le \frac{\rho}{2} \le \frac{1}{2}, \quad 3\beta \le \delta \le \frac{R}{2}, \quad \delta \le K, \quad \mu C \le M \le \overline{M} \le \delta^{2n+3}\beta^2 \tag{4.10.8}$$

がしたがう.

(4.1.7), (4.10.8), および (4.9.2) および条件 (4.10.4) と (4.10.2) に応じて, 関数 (4.10.1), 領域 $F, G_0, G_1 : |x_1| \le R$ および数 $\theta, \Theta, \rho;\ \beta, \gamma, \delta;\ K_0, M, \overline{M}$ は 5 節の平均化補題の条件 1)-4) を満たす. この補題により, 領域 F' と写像 B が用意される.

不等式 (4.10.5) は (4.10.8) よりしたがう. (4.10.3) からすると, 主張 I は 5 節 1 項からしたがう. 主張 II は 5 節 II および 1 節の (4.1.6) からしたがう. というのは, $H_2 = (\mu^2)H_2 + H_2'$ であり, ゆえに, (4.10.3) および (4.10.2) より

$$|H_2| \le \mu^2\delta^{-1} + \mu\varepsilon^4\delta^{-(4n+14)} \le \mu\varepsilon^4\delta^{-(4n+15)}$$

であるからである. 主張 III は 5 節 III と同じである.

主張 IV を証明しよう. (4.10.4) において $\delta \le \delta^{(7)}$ であることを考えると

$$\begin{aligned}&\text{mes } (G_0\backslash G_0'') \le \theta^{-n} \text{ mes } [\Omega\backslash(\Omega_{K_0N_0} - 4\Theta\delta^3)] \le \theta^{-n}(2K_0 + \delta^2 N_0^n)DL \text{ mes } \Omega\\ &\le \theta^{-n}3\delta DL \text{ mes } \Omega \le 3\delta\Theta^n\theta^{-n}DL \text{ mes } G_0 \le \frac{\kappa}{2} \text{ mes } G_0\end{aligned}$$

である.

ここで算術補題 (V 章 2 節 2 項) と不等式 $\delta \le \left\{\frac{1}{4\Theta}, \frac{1}{N_0^n}, \frac{\kappa\theta^n}{6\Theta^n LD}\right\}$ を逐次使った.

不等式 $\delta < N_0^{-n}$ は $\delta < \left(\frac{e}{16nT}\right)^{2n}$, $N_0 < \delta^{-\frac{1}{4n}\ln\frac{1}{\delta^{4T}}}$ からしたがう. 事実, (5.3.1) からすると, $\ln\frac{1}{\delta^{4T}} \le 4T\frac{4n}{e}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{4n}}$ であり, ゆえに $N_n^0 \le \delta^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{16nT}{e}\right)^n < \delta^{-1}$ である. 主張 I-IV は証明された.

§11. 極座標

1. 記法. 2 次およびそれ以後の近似を実行するために, 10 節の直交座標 P_1, Q_1 から極座標 τ, φ へ正準変換

$$P_1 = \sqrt{2\tau}\cos\varphi, \quad Q_1 = \sqrt{2\tau}\sin\varphi \tag{4.11.1}$$

で移ろう.

変数 P_0, Q_0, τ, φ を文字 $P_0^*, Q_0^*, P_1^*, Q_1^*$ で表し, 変換 (4.11.1) を文字 $B^* : B^*X^* = X$ で表す. ここで, $X^* = P_0^*, P_1^*, Q_0^*, Q_1^* = P_0, \tau, Q_0, \varphi;\ X = P_0, P_1, Q_0, Q_1$ である. 変数 Q^* はすべて角度の意味を持つことを注意しておく.

2. 補題. 10 節 1 項の条件において, 不等式

$$T > 8n + 30, \quad \delta \le \delta^{(8)} = 2^{-15}C^{-1} \tag{4.11.2}$$

が成り立つとする. 領域 $X^* \in F^{*'}(\varepsilon)$ を考える. ただし, $P_0^* \in G_0'$ は 10 節 2 項のとおりであり, $P_1^* \in G_1(\varepsilon)$, $\left[\left|P_1^* - \frac{\varepsilon}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right]$, $|\text{Im } Q^*| \le 0.5\rho$. この領域では, $p, q = x = BX = BB^*X^*$ の関数 (4.1.1) は

$$H(p,q) = H_0(P_0^*) + \overline{\mu}H_1(P_0^*, P_1^*) + H_3(P_0^*, P_1^*, Q_0^*, Q_1^*) = H^*(P^*, Q^*), \tag{4.11.3}$$

なる形を取る. ここで H_0 および $\overline{\overline{H}}_1$ は (4.1.1)-(4.1.4) の関数と同じであり, H_3 は Q^* について周期 2π の解析関数であって, $F^{*'}(\varepsilon)$ 内で

$$|H_3| < \frac{\mu\varepsilon^{3.5}}{\delta} \tag{4.11.4}$$

を満たす.

3. 証明. $\delta < \delta^{(6)}$ であるから, $\dfrac{\varepsilon}{2} < 2^{-6}R^2 = \left(\dfrac{R'}{4}\right)^2$ を得る. したがって, 極座標に関する補題 (V 章 4 節 7 項) が適用でき, これに応じて, (4.10.6) は

$$H(p,q) = H_0(P_0^*) + \mu\overline{\overline{H}}_1(P_0^*, P_1^*) + \mu\widetilde{\overline{H}}_1 + H_2, \tag{4.11.5}$$

なる形を取る. ここで, (4.1.8), (5.4.4) および (4.10.7) に応じて

$$|\widetilde{\overline{H}}_1| \le C|8P_1^*|^{3.5}, \quad |H_2| < \mu\varepsilon^4\delta^{-(4n+15)}$$

である. (4.11.2) の $\delta < \delta^{(6)}$ より, 領域 $F^{*'}(\varepsilon)$ において

$$|\mu|\widetilde{\overline{H}}_1| \le \mu C 8^{3.5}\varepsilon^{3.5} < \frac{\mu}{2\delta}\varepsilon^{3.5}, \tag{4.11.6}$$

が成り立ち, (4.11.2) の $T > 8n + 30$ より,

$$|H_2| < \mu\varepsilon^{3.5}\varepsilon^{0.5}\delta^{-(4n+15)} < \frac{\mu\varepsilon^{3.5}}{2\delta} \tag{4.11.7}$$

であることがわかる. (4.11.5)-(4.11.7) を比較して, 関係式 (4.11.3) および (4.11.4) を得る.

§12. 帰納定理の適用性

以下では, δ が十分小さいとき関数 (4.11.3) が 2 節の帰納定理の条件 1)-6) を満たすことを示そう.

1. 仮定.

$$\delta \le \delta^{(9)}(n, \theta, \Theta, C, R, \rho, \kappa, D)$$

と置く. ただし,

$$\delta^{(9)} = \min\left\{\delta^{(4)}(n, \Theta, \theta, \frac{\rho}{2}, \frac{\kappa}{2}, D);\ \delta^{(5)}(n, \Theta, \theta, C, 16(n+4), \rho, \kappa, D);\ \delta^{(8)}(C)\right\}.$$

$\delta^{(4)}$ は 2 節で定義され, $\delta^{(5)}$ は 10 節で, $\delta^{(8)}$ は 11 節で定義された.

基本定理の条件 1)-4) と 9 節 1 項の条件 1)-3) が満たされていると仮定する. 加えて,

$$\mu \le \varepsilon^4, \quad \rho \le 1$$

を仮定する. このとき, $T = 16(n+4)$ に対して, 10 節および 11 節の仮定が満たされる. だから (4.1.1) は変数 $P^*, Q^* \in F^{*'}$ に関して (4.11.3) の形を取る.

2. 領域 Ξ, G**.** 上で導入したいくつかの領域の記法を思い起こそう.

G_0 は p_0 空間の元の領域である (9 節参照).

$\Omega = A_0 G_0$ は ω_0 空間の領域.

$G_1(\varepsilon)$ は $\left|p_1 - \dfrac{\varepsilon}{2}\right| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$ を満たす p_1 からなる.

$G^*(\varepsilon) = G_0 \times G_1(\varepsilon)$ は, $p_0 \in G_0$, $p_1 \in G_1(\varepsilon)$ を満たす $p = p_0, p_1$ からなる.

$\Xi^*(\varepsilon, d_0)$ は $\xi = Ap$ を満たす $\xi = \xi_0, \xi_1$ からなる. ただし, $p \in G^*(\varepsilon), \xi_0 \in \Omega - d_0$ である.

新しい領域 Ξ を導入する. これは $\xi = Ap$ を満たす $\xi = \xi_0, \xi_1$ からなる. ただし, $p \in G^*(\varepsilon)$ および

$$\xi_0 \in \Omega_{K_0 N_0} - d_0$$

である. ここで $K_0 = \delta$, $N_0 = \dfrac{1}{2}\delta^{-\dfrac{1}{4n}} \ln \dfrac{\delta}{\varepsilon^4}$, $d_0 = 3\Theta\delta^3$ である (記法 $\Omega K_0 N_0$ については V 章 2 節 2 項参照). また領域

$$G = A^{-1}\Xi.$$

を導入する.

3. 領域 Ξ, G の性質**.** 以下の主張を証明する (V 章 1 節および 2 節を見よ).

I. 領域 $\Xi^*(\varepsilon, d_0)$ は $\dfrac{D}{\varepsilon}$ 型であり, 次を満たす.

$$\text{mes } \Xi^*(\varepsilon, d_0) \le \Theta^n \text{mes } G^*(\varepsilon).$$

II. $\Xi^*(\varepsilon, d_0)$ において, 領域 Ξ は $[\Xi^*(\varepsilon, d_0)]_{K_0 N_0 d_0}$ の形をしている.

III. $G \subseteq G_0' \times G_1(\varepsilon)$, ただし $G_0' = A_0^{-1}\Omega_{K_0 N_0} - 2\delta^3$.

IV. $G \supseteq G_0'' \times G_1(\varepsilon)$, ただし $G_0'' = A_0^{-1}(\Omega_{K_0 N_0} - 4\Theta\delta^3)$.

I は (4.9.3) および 9 節の 3) からしたがう. というのは, (4.10.4) および (4.10.2) に応じて

$$0 < \varepsilon < r = R^2, \quad 0 < d_0 < r = R^2,$$

だからである.

II は Ξ の定義から明白である (2 参照).

III と IV の証明は次の事実に基づく. すなわち, (4.9.3) を考慮すると, $p = p_0, p_1$; $\xi = \xi_0, \xi_1$; $\omega_0 = A_0 p_0, \xi = Ap$ のとき, $|\xi_0 - \omega_0| < \mu\Theta < \delta^3\Theta$ が成り立つ.

G の定義より, $p \in G$ から $\xi_0 \in \Omega_{K_0 N_0} - 3\Theta\delta^3$ が出る. つまり, $\omega_0 \in \Omega_{K_0 N_0} - 2\Theta\delta^3$ および $p \in A_0^{-1}(\Omega_{K_0 N_0} - 2\Theta\delta^3)$ を意味する. したがって, V 章 4 節 4 項に応じて, $p_0 \in G_0'$ である. これで III が証明された.

しかし $p_0 \in G_0''$, つまり, $\omega_0 \in \Omega_{K_0 N_0} - 4\Theta\delta^3$ のとき, $\xi_0 \in \Omega_{K_0 N_0} - 3\Theta\delta^3$ であり, $p_1 \in G_1(\varepsilon)$ に対して $p \in G$ を得る. これで IV が証明された.

4. 帰納定理の条件 **1)-6)** の確認**.** 1 項の仮定の下で, (4.11.3) 式の関数 $H^*(p^*, q^*)$, 3 項で構成された領域 G, Ξ, および 10 節の数 D, Θ, θ, $\dfrac{\rho'}{2}$, κ が

$$\begin{aligned} &\beta = \delta^3\varepsilon, \quad \varepsilon = \delta^T, \qquad T = 16(n+4), \quad \gamma = \delta^{\dfrac{1}{4n}}, \\ &\mu \le \varepsilon^4, \quad M = \varepsilon^{3.5}\delta^{-1}, \quad K = \delta\varepsilon \end{aligned} \tag{4.12.1}$$

と共に帰納補題の条件 1)-6) を満たすことを示そう.

条件 1)(ただし $\overline{\overline{H}}_1(P^*)$ は $H_1(p)$ の役割を果たし, $H_3(P^*,Q^*)$ は $H_2(p,q)$ の役割を果たす) は 11 節 2 項および 3 項の III からしたがう.

条件 2) は 9 節 2) からしたがう.

条件 3) は (4.11.4) および (4.12.1) からしたがう.

条件 4) は 1 項において $\delta \le \delta^{(4)}$ であることよりしたがう.

条件 5) は (4.12.1) よりしたがう.

条件 6) は 3 項の I および II からしたがう. その際, $\Xi^*(\varepsilon, d_0)$ が Ξ^* の役割を果たす.

事実, $K_0 = \delta > \varepsilon\delta = K$, $N_0 = \dfrac{1}{2}\delta^{-\dfrac{1}{4n}} \ln \dfrac{\delta}{2\varepsilon^{3.5}} = \dfrac{1}{\gamma} \ln \dfrac{1}{2M}$ が成り立つ.

こうして, 帰納定理の条件はすべて満たされる. だからその結論 I ー IV は正しい.

§13. 極限への移行

ここでは (4.11.3) 式のハミルトン関数 $H^*(P^*,Q^*)$ から得られる正準方程式の不変トーラスを構成する.

1. 収束性. 空間 P^*, Q^* 内の領域 $P_0^* \in G = G^{(0)}$, $|\mathrm{Im}\ Q^*| \le \dfrac{\rho}{2}$ を $F = F^{(0)}$ と表す (領域 G は 12 節 2 項で定義した). 12 節 4 項に応じて, 2 節の帰納定理により領域列 $F^{(s)}$ および $P^{(s)}, Q^{(s)}$ を $P^*, Q^* = S_s(P^{(s)}, Q^{(s)})$: $S_s = B_1 B_2 \dots B_s$ につなぐ微分同相写像列 B_s が用意される. 座標 $P^{(s)}, Q^{(s)}$ において, $F^{(s)}$ 内のハミルトン関数 $H^*(P^*,Q^*)$ (4.11.3) は 2 節の形 $H^{(s)}(P^{(s)}, Q^{(s)})$ を取る.

2 節 I に応じて, V 章 5 節 1 項の収束性補題は, $d_s = \beta_s < 4^{-s}$ として列 B_s および $F^{(s)}$ に適用できる. この補題のおかげで, 集合 $F^{(\infty)} = \cap_{s\ge 0} F^{(s)}$ 上の微分同相写像の列 S_s は一様にある写像 S_∞:

$$|S_\infty - E| < 2\beta_1 \tag{4.13.1}$$

に収束する. 集合 $F^{(\infty)}$ は $P^{(\infty)} \in G^{(\infty)}$, $|\mathrm{Im}\ Q^{(\infty)}| \le \rho_\infty$

$$\left(\rho_\infty \ge \frac{\rho}{6}, \quad G^{(\infty)} = \cap_{s\ge 0} G^{(s)}\right).$$

の形をしている.

2. 不変性. この節の変数はすべて実数とする.

集合 $S_\infty F^{(\infty)}$ が, $H^*(P^*,Q^*)$ によって決まる運動に関して不変であることを示そう. ハミルトン関数を $H^{(s)}(P^{(s)}, Q^{(s)}) = H^*(P^*,Q^*)$ とする正準方程式を

$$\dot{X} = Y^{(s)}(X^{(s)}) \quad (\text{ただし} \quad X^{(s)} = P^{(s)}, Q^{(s)}; \quad Y^{(s)} = -H^{(s)}_{Q^{(s)}}, H^{(s)}_{P^{(s)}}) \tag{4.13.2}$$

の形に書く.

変換 S_s は正準である. したがって, $X^{(s)}(t)$ が $(4.13.2)_s$ を満たせば, $X^*(t) = S_s X^s(t)$ も $(4.13.2)_*$ を満足する.

まったく同じやり方で, ハミルトン関数を $H_0(P_0^{(s)}) + H_1^{(s)}(P^{(s)})$ とする方程式はベクトル場 $\overline{Y}^{(s)} = (0; A_0^{(s)}, \mu A_1^{(s)})$ を定義する. ただし, $A_0^{(s)}, A_1^{(s)}$ は 2 節 III のベクトル $A^{(s)}(P^{(s)})$ の最初の n_0 個および最後の n_1 個の成分である.

2 節 III に応じて, $s \to \infty$ のとき, $G^{(\infty)}$ 上の微分同相写像列 $A^{(s)}$ は極限 $A^{(\infty)}$ に収束する. ただし ((4.8.1) 参照)

$$|A^{(s)} - A^{(\infty)}| \leq \sum_{k=s+1}^{\infty} \beta_k \delta_k < \frac{1}{2}\beta_{s+1}$$

である.

$A^{(\infty)}$ が $A_0^{(\infty)}, A_1^{(\infty)}$ の形に書かれているとき, $F^{(\infty)}$ 上のベクトル場 $(0; A_0^{(\infty)}, \mu A_1^{(\infty)})$ を $\overline{Y}^{(\infty)} = Y^{(\infty)}$ と記し, 方程式 $(4.13.2)_\infty$ の解 (直線) を $X^{(\infty)}(t)$ と記す. 2 節 II より, $F^{(s)}$ 内で $|Y^{(s)} - \overline{Y}^{(s)}| < \frac{1}{2}\beta_{s+1}$ が成り立つ. (4.13.3) からすると, $F^{(\infty)}$ 内で $|Y^{(s)} - Y^{(\infty)}| < \beta_{s+1}$ を得る. 2 節 II より, $\left|\frac{\partial Y^{(s)}}{\partial X^{(s)}}\right| < 2n\delta_s + 2\Theta < 3\Theta$ を得る. したがって, V 章 5 節 3 項の補題が適用でき, $X^{(\infty)}(0) \in F^{(\infty)}$ に対して点 $X^*(t) = S_\infty(X^{(\infty)}(t))$ が F に属し $(4.13.2)_*$ を満たすことがわかる.

だから集合 $F^* = S_\infty F^{(\infty)}$ は不変である.

§14. 基本定理の証明

10 節に始まった基本定理の証明をここで完成させよう. 変数はすべて実数に取る. 構成法と記法は 10 節-13 節のものを使う.

1. $\mathbf{F}_\varepsilon$ の構築.

$$\mathbf{F}_\varepsilon = BB^*\mathbf{F}^* = BB^*S_\infty F^{(\infty)} \tag{4.14.1}$$

と置く. B は 10 節で定義され, B^* は 11 節, S_∞ と $F^{(\infty)}$ は 13 節で定義された. 基本定理の主張 I-IV を証明する.

まず

$$\mathbf{F}^* \subseteq F^{*'}(\varepsilon) - \beta_1 \tag{4.14.2}$$

を証明する. ここで $P^*, Q^* \in F^{*'}(\varepsilon)$ は $P^* \in G_0' \times G_1(\varepsilon)$ のことである (11 節 2 項参照). 2 節 I より, $\mathbf{F}^* \subseteq B_1 F^{(1)} \subseteq F - \beta_1$ であること, また 12 節 3 項 III より, $G \subseteq G_0' \times G_1(\varepsilon)$ が出る. したがって, (4.14.2) が成り立ち, BB^* は F^* 上で定義され, (4.14.1) は意味を持つ.

さらに

$x^* = V^{*-1}x,$	$x = BX,$	$X = B^*X^*,$	$X^* \in F^*$
$x^* = p_0^*, p_1^*, q_0^*, q_1^*,$	$x = p_0, p_1, q_0, q_1,$	$X = P_0, P_1, Q_0, Q_1,$	$X^* = P_0^*, P_1^*, Q_0^*, Q_1^*$
$x_0^* = p_0^*, q_0^*,$	$x_0 = p_0, q_0,$	$X_0 = P_0, Q_0,$	$X_0^* = P_0^*, Q_0^*,$
$x_1^* = p_1^*, q_1^*,$	$x_1 = p_1, q_1,$	$X_1 = P_1, Q_1,$	$X_1^* = P_1^*, Q_1^*$

と置く. B^* の定義より, $x_0^* = x_0, X_0^* = X_0$ を得る. 10 節 I からすると,

$$|x_0^* - X_0^*| < \mu\delta_1^{-(2n+7)} < \varepsilon^3 < \beta_1, \quad |x_1 - X_1| < \varepsilon^3 < \sqrt{\delta_1^3\varepsilon} \tag{4.14.3}$$

である. また, $|X_1| < \sqrt{2\varepsilon},\ |x_1| < \dfrac{1}{2}$ であることも明らかである. (4.14.2) からすると, $|P_1^*| \geq \beta_1 = \delta_1^3\varepsilon$ が成り立ち, (4.13.3) に応じて $|x_1 - X_1| < \sqrt{P_1^*}$ である. したがって, V 章 4 節 8 項の補題により, $|x_1^* - X_1^*| \leq \max\left\{\varepsilon^3, 2\dfrac{\varepsilon^3}{\sqrt{\delta_1^3\varepsilon}}\right\} < \varepsilon^2$ である. (4.13.3) および (4.14.2) と併せると, これから

$$|x^* - X^*| < \varepsilon^2 \tag{4.14.4}$$

が得られる.

2. 不変トーラス. $P^{(\infty)} \in G^{(\infty)}$ を固定し, x 空間においてトーラス

$$x = BB^*S_\infty(P^{(\infty)}, Q^{(\infty)}) \tag{4.14.5}$$

を考える. 座標は $Q^{(\infty)}$ である. 13 節 2 項に応じ, また変換 B, B^* が正準であることから, ハミルトン関数を (4.1.1) とするこのトーラス上の方程式は

$$\dot{Q}^{(\infty)} = \omega \quad (\text{ここで} \quad \omega = \omega_0,\ \omega_1 \quad \text{および} \quad \xi = \omega_0,\ \mu\omega_1 = A^{(\infty)}(P^{(\infty)})) \tag{4.14.6}$$

なる形を取る.

記法

$$p_\omega^* = A^{-1}\xi = A^{-1}A^{(\infty)}(P^{(\infty)}), \tag{4.14.7}$$

を導入する. ここで A は 9 節の微分同相写像である. (4.13.3) に応じて $|A - A^{(\infty)}| < \beta_1$ である. したがって, $|AP^{(\infty)} - Ap_\omega^*| < \beta_1$ であり, V 章 4 節 4 項の補題より

$$|P^{(\infty)} - p_\omega^*| < \theta^{-1}\beta_1 \tag{4.14.8}$$

である.

トーラス (4.14.5) を T_ω と書き, $p_\omega^* = p_{0\omega}$, τ_ω, $Q^{(\infty)} = Q$ と置き, 基本定理の主張 II-IV を証明しよう.

主張 IV は (4.14.6) および (4.14.7) から直ちにしたがう.

主張 II は $x = B^*x^*$ であることに注意し,

$$\begin{aligned} f_{0_\omega} &= p_0 - p_{0_\omega}, \quad g_{0_\omega} = q_0 - Q_0^{(\infty)}, \\ f_{1_\omega} &= p_1 - \tau_\omega, \quad g_{1_\omega} = q_1^* - Q_1^{(\infty)}, \end{aligned}$$

と置けば, (4.14.5) から得られる.

$f_{i_\omega}(Q)$, $g_{i_\omega}(Q)$ の解析性は複素領域 $F^{(\infty)}$ における S_s の収束性 (13 節 1 項) からしたがう.

次に主張 III を証明しよう. (4.14.4), (4.13.1), (4.14.8) に応じ, また $\delta < \delta^{(7)}$(10 節 1 項) であるから

$$\begin{aligned} &|p^* - p_\omega^*| \leq |p^* - P^*| + |P^* - P^{(\infty)}| + |P^{(\infty)} - p_\omega^*| \leq \varepsilon^2 + 2\beta_1 + \theta^{-1}\beta_1 < \kappa\varepsilon, \\ &|q^* - Q^{(\infty)}| \leq |q^* - Q^*| + |Q^* - Q^{(\infty)}| < \varepsilon^2 + 2\beta_1 < \kappa\varepsilon, \end{aligned}$$

を得る.

3. $\mathbf{F}_\varepsilon$ の測度の見積もり. 2 節 IV および 12 節 I からすると,

$$\text{mes } (G\backslash G^{(\infty)}) \leq \frac{\kappa}{2}\Theta^{-n}\text{mes } \Xi^*(\varepsilon, d_0) \leq \frac{\kappa}{2}\text{mes } G^*(\varepsilon) \tag{4.14.9}$$

が成り立つ. さらに, 2 節 3 項 IV および 10 節 2 項 IV に応じて

$$\begin{aligned} &\text{mes } [G^*(\varepsilon)\backslash G] = \text{mes } [(G_0 \times G_1(\varepsilon))\backslash G] \\ &\leq \text{mes } [(G_0\backslash G_0'') \times G_1(\varepsilon)] \leq \frac{\kappa}{2}\text{mes } [G_0 \times G_1(\varepsilon)] = \frac{\kappa}{2}\text{mes } G^*(\varepsilon) \end{aligned} \tag{4.14.10}$$

を得る.

V 章 5 節 4 項の補題より, (4.14.9) および (4.14.10) を考慮すると,

$$\begin{aligned} \text{mes } S_\infty^{(\infty)} \geq \text{mes } F^{(\infty)} = &\quad (2\pi)^n\text{mes } G^{(\infty)} \\ \geq &\quad (2\pi)^n(1-\kappa)\text{mes } G^*(\varepsilon) = (1-\kappa)\text{mes } F(\varepsilon) \end{aligned}$$

が成り立つ.

ところが, 正準変換 BB^* は測度保存であるから, 1 節 I を得る. すなわち,

$$\text{mes } F_\varepsilon = \text{mes } BB^*S_\infty F^{(\infty)} = \text{mes } S_\infty F^{(\infty)} \geq (1-\kappa)\text{mes } F(\varepsilon). \tag{4.14.11}$$

見積もり (4.14.11) の示すところによると, われわれの構成した不変トーラスの集合 $\mathbf{F}_\varepsilon$ は空でない. これで基本定理の証明が完了した.

V 章. 技術補題

IV 章で使われる補題はこの章に集めた. 2 節 2 項 – 5 項および 3 節 2 項は重要な役割をはたす.

§1. D 型領域 (domain)

各領域 (domain: 連結開集合) にはその面・体積比を特徴づける数を付随させる.

1. Ω は空間 ω 内の領域であって, 区分的に滑らかな曲面によって限られているとする. 次の性質は簡単に示すことができる.

I. 定数 $D > 0$ があって, 任意の $d_2 > d_1 > 0$ に対して

$$\text{mes } [(\Omega - d_1) \backslash (\Omega - d_2)] \leq D(d_2 - d_1) \text{ mes } \Omega. \tag{5.1.1}$$

この場合, Ω を D 型領域と呼ぶ. Ω に同形な領域 $\varepsilon\Omega$ は D/ε 型領域である.

2. IV 章 9 節において, 特殊な仕方で構成された型の領域の見積もりを使うつもりだ. $0 < \varepsilon < \varepsilon_0, 0 < \mu < \mu_0$ と置く.

G_0 は p_0 空間内の領域で, 区分的に滑らかな境界を持つ.

G は p 空間内の領域で, 区分的に滑らかな境界を持つ.

$p = p_0, p_1$.

$G_1(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2}$ は p_1 空間の点の近傍である.

$G^*(\varepsilon) = G_0 \times G_1(\varepsilon)$ は空間 $p : p_0 \in G_0, p_1 \in G_1(\varepsilon)$ 内の領域である.

A_0 は G_0 から Ω の上への微分同相写像 $A_0 p_0 = \omega_0 \in \Omega$ である.

A は G から Ξ の上への微分同相写像 $Ap = \xi = \xi_0, \xi_1 \in \Xi$ であって, μ に依存する. その依存性はといえば, $\mu \to 0$ のとき, $p \in G$ に関して, またその微分に関して (?) 一様に $|A_0 p_0 - (Ap)_0| = |\omega_0 - \xi_0| \to 0$.

3. 領域 $AG^*(\varepsilon)$ に興味がある. I を以下のように拡張する. 証明は容易である.

II. ε の方向にも, 領域 $G_1(\varepsilon)$ の中心 p_1 にも依存しない定数 $D > 0$ があって, $G^*(\varepsilon) \subset G$ なる領域 $AG^*(\varepsilon)$ はすべて D/ε 型領域である.

III. p_1 にも ε にも依らない定数 $D > 0, \overline{\mu} > 0, r > 0$ があって, $0 < \mu < \overline{\mu}, 0 < d < r$ に対して, 以下に定義される領域 $\Xi^*(\varepsilon, d)$ は D/ε 型である.

ここで, $\Xi^*(\varepsilon, d)$ は, $p \in G^*(\varepsilon) \in G, \xi_0 \subset \Omega - d$ なる点 $\xi = \xi_0, \xi_1 = Ap$ から構成される.

主張 I, II, III の証明は省略する. 証明は初等的であるが, 面倒である.

4. 帯 (strips). 超曲面の $\dfrac{h}{2}$ 近傍は, 幅 h の帯 Γ とよばれる. たとえば, 不等式 $|(k, \omega)| < a$ は, $k \geq 1$ の場合, ω 空間内に, 幅が $2a$ 以内の帯を定義する. 簡単に計算できるように, 幅 h の帯と ω 空間の n 個の座標軸のひとつとの交わりは nh より長くない. ゆえに, (5.1.1) を考慮すると,

$$\text{mes } (\Omega \cap \Gamma) \leq Dnh \text{ mes } \Omega \tag{5.1.2}$$

が得られる.

$\Omega' \subset \Omega$ とする. Ω' が Ω 内で N 型であるとは, $\Omega' = (\Omega - d)\backslash(\cup\Gamma_i)$ のときである. ただし, $d > 0$ であり, $\cup\Gamma_i$ は N 個以内の帯の和である. $d_2 > d_1 > 0$ に対して明らかに,

$$(\Omega' - d_1)\backslash(\Omega' - d_2) \subseteq \begin{array}{l}[(\Omega - d - d_1)\backslash(\Omega - d - d_2)]\cup \\ \cup\{[(\cup\Gamma_i + d_2)\backslash(\cup\Gamma_i + d_i)] \cap \Omega\}\end{array}$$

が成り立つ. したがって, (5.1.1) および (5.1.2) より

$$\text{mes } [(\Omega' - d_1)\backslash(\Omega' - d_2)] \leq D(1 + 2nN)(d_2 - d_1) \text{ mes } \Omega. \tag{5.1.3}$$

がしたがう.

§2. 算術補題

以下の補題は, 無作為に取った数の非尽数性を表現する.

1. 整数点. 整数 $k_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ を成分とするベクトルを $k = k_1, k_2, \ldots, k_n$ と書き, 数 $|k_1| + \ldots + |k_n|$ を $|k|$ と書く. 簡単に計算できるように, $|k| = m \geq 1$ なる異なるベクトルの数は $2^n m^{n-1}$ を越えない. また $|k| \leq m$ のとき, 数は $2^n m^n$ を越えない.

2. Ω を D 型の領域とする. $\Omega_{KN}(K > 0, N > 0)$ は Ω の点 ω のうち, 任意の整数ベクトル $k, 0 < |k| < N$ に対して

$$|(k, \omega)| > K|k|^{-\nu} \quad (\nu = n + 1) \tag{5.2.1}$$

なるものの集合を表す. $d_1, d_2, \ldots > 0$ および $0 < N_1 < N_2 < \ldots$ とする. 領域 $\Omega^{(s)}$ を関係式 $\Omega^{(0)} = \Omega,\ \Omega^{(s)} = \Omega_{KN_s}^{(s-1)} - d_s$ で導入する.

補題. 任意の $s \geq 1$ および任意の $d > 0$ に対して, 不等式

$$\text{mes } [\Omega^{(s-1)}\backslash(\Omega_{KN_s}^{(s-1)} - d)] \leq LD[K\sigma_s + dN_s^n] \text{ mes } \Omega, \tag{5.2.2}$$

が成り立つ. ただし

$$\sigma_s = \sum_{N_{s-1} \leq m < N_s} m^{-2}, \quad N_0 = 1, \quad L = n2^{n+2}.$$

3. 証明. まず

$$\text{mes } [\Omega^{(s-1)}\backslash\Omega_{KN_s}^{(s-1)}] \leq LDK\sigma_s \text{ mes } \Omega. \tag{5.2.3}$$

満たすことにする. 事実, (5.2.1) は幅 $2K|k|^{-\nu}$ 以内の帯 Γ_k においては成り立たない. $|k| = m$ を満たすような異なる k の数は $2^n m^{n-1}$ 以内である. したがって, (5.1.2) より

$$\sum_{|k|=m} \text{mes } (\Omega \cap \Gamma_k) \leq \frac{LDK}{m^2} \text{ mes } \Omega$$

が出る. これを $N_{s-1} \leq m < N_s$ なる m に関して和を取れば, (5.2.3) が得られる.

さて, $|k| \le m$ を満たす異なる k の数は $2^n m^n$ 以内であることに注意しよう. これより, $\Omega^{(s-1)}$ は Ω 内で $2^n N_s^n$ 型である (1 節 4 項参照). (5.1.3) より

$$\text{mes } [\Omega_{KN_s}^{(s-1)} \backslash (\Omega_{KN_s}^{(s-1)} - d)] \le d(1 + 2n2^n N_s^n) D \text{ mes } \Omega \tag{5.2.4}$$

を得る.

(5.2.2) は (5.2.3) および (5.2.4) よりただちにしたがう.

4. 領域 Ξ. Ξ は点 $\xi = \xi_0, \xi_1$ の $n = n_0 + n_1$ 次元空間内の D 型領域であるとする. $\Xi_{\mu KN}$(ただし $0 < \mu < 1,\ K > 0, N > 0$) は Ξ の点集合であって, すべての整数ベクトル $k, 0 < |k| < N$ に対して

$$|(k_0, \xi_0) + \mu(k_1, \xi_1)| \ge \begin{cases} K|k|^{-\nu}, & \text{if} \quad |k_0| \ne 0, \\ \mu K|k|^{-\nu}, & \text{if} \quad |k| \ne 0, \end{cases} \quad (\nu = n + 1) \tag{5.2.5}$$

を満たすものとする. $d_1, d_2, \ldots > 0$ および $0 < N_1 < N_2 < \ldots$ と置く. 領域 $\Xi^{(s)}$ を

$$\Xi^{(0)} = \Xi, \quad \Xi^{(s)} = \Xi_{\mu KN_s}^{(s-1)} - d_s \tag{5.2.6}$$

で導入する.

補題. 任意の $s \ge 1$ および任意の $d > 0$ に対して, 不等式

$$\text{mes } [\Xi^{(s-1)} \backslash (\Xi_{\mu KN_s}^{(s-1)} - d_s)] \le LD[K\sigma_s + dN_s^n] \text{ mes } \Xi$$

が成り立つ. ただし,

$$\sigma_s = \sum_{N_{s-1} \le m < N_s} m^{-2}, \quad N_0 = 1, \quad L = n2^{n+2}.$$

証明は, (5.2.5) が成り立たないのは幅が $2K|k|^{-\nu}$ 以下の帯 Γ_k においてのみであるという事実に基づく. 事実, $|k_0| \ne 0$ なら, 始めの n_0 方向に沿っての Γ_k の幅は $2K|k|^{-\nu}$ を越えない. しかし, $k_0 = 0$ のとき, (5.2.5) において μ はキャンセルされ, 残り (latter) の方向のひとつに沿っての Γ_k の幅は $2K|k|^{-\nu}$ を越えない. 以後の証明は 3 項と同様である.

5. 領域 $\Xi_{K_0 N_0 d_0}$. 4 項の領域 Ξ からその一部 $\Xi_{K_0 N_0 d_0}$(ただし $K_0 \ge K, 0 < N_0 \le N_1, d_0 \ge 0$) を以下のように取り出す. 点 $\xi_0, \xi_1 = \xi \in \Xi$ が $\Xi_{K_0 N_0 d_0}$ に属すのは, $|\xi_0 - \omega_0| \le d_0$ なる任意の ω_0 に対して,

$$|(k_0, \omega_0)| > K_0 |k_0|^{-\nu} \quad (\nu = n + 1)$$

がすべての整数ベクトル $k_0, 0 < |k_0| < N_0$ に対して成り立つときである.

簡単に示せるように, (5.2.6) において $\Xi^{(0)} = \Xi$ の代わりに $\Xi^{(0)} = \Xi_{K_0 N_0 d_0}$ を入れても 4 項の補題は成り立つ.

§3. 解析補題

ここでの補題により, 解析関数のフーリエ係数や微分を関数自身を用いて評価したり, その逆を行なったりすることができる.

1. 不等式. 任意の $m>0, \nu>0, \delta>0$ に対して

$$m^\nu \le \left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu \frac{e^{m\delta}}{\delta^\nu}, \quad \ln\frac{1}{\delta} \le \frac{\nu}{e}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{\nu}}. \tag{5.3.1}$$

証明. $f(x)=x-\nu\ln x$ は $x=\nu$ において極小になる. したがって, $\dfrac{e^x}{x^\nu} \ge \dfrac{e^\nu}{\nu^\nu}$. $x=m\delta$, $x=|\ln\delta|$ と置いて (5.3.1) を得る. □

さらに, $s\ge 1$ に対して $\delta_{s+1}=\delta_s^{1+\alpha}, \alpha>0$ および $\delta_1 \le 2^{-\frac{1}{\alpha}}$ とする. すると

$$\delta_{s+1} \le 2^{-s}\delta_1, \quad \sum_{s=1}^{\infty}\delta_s < 2\delta_1. \tag{5.3.2}$$

証明. $\delta_1 \le 2^{-\frac{1}{\alpha}}$ に対して $\delta_{s+1}=\delta_s^\alpha\delta_s \le \delta_1^\alpha\delta_s \le 2^{-1}\delta_s$ である. これから (5.3.2) は容易に出る.

2. フーリエ係数. $f(q)=\sum_k f_k e^{i(k,q)}$ $(q=q_1,\dots,q_n)$ とする. このとき,
1) $|\mathrm{Im}\ q|\le\rho$ に対して $|f(q)|\le M$ が常に成り立つなら, $|f_k|\le Me^{-|k|\rho}$ である.
2) $|f_k|\le Me^{-|k|\rho}$ なら $|\mathrm{Im}\ q|\le\rho-\delta$ に対して $|f|<4^n\delta^{-n}M$ を得る (ただし, $0<\delta\le\rho\le 1$ として).

第一の結果は, 公式 $f_k=(2\pi)^{-n}\int f(q)e^{-i(k,q)}dq$ において積分経路を $\pm i\rho$ だけずらすことにより得られる. $\delta\le 1$ の場合, $(1+e^{-\delta})(1-e^{-\delta})^{-1}<4\delta^{-1}$ である. したがって

$$|f| \le \sum Me^{-|k|\delta} = M(1+2\sum_{m>0}e^{-m\delta})^n = M(1+e^{-\delta})^n(1-e^{-\delta})^{-n} < 4^n\delta^{-n}M.$$

記法 $R_Nf=\sum_{|k|\ge N} f_k e^{i(k,q)}$ を導入する.

3) $|f_k|\le M^{-|k|\rho}$ なら, $|\mathrm{Im}\ q|\le\rho-\delta-\gamma$ に対して $|R_Nf|<\left(\dfrac{2n}{e}\right)^n\dfrac{M}{\delta^{n+1}}e^{-N\gamma}$ を得る (ただし, $4\delta\le 2\gamma\le\rho\le 1$ として).
実際, 2 節 1 項と (5.3.1) を考慮すると,

$$\begin{aligned} |R_Nf| \le\ & M\sum_{m\ge N}(2m)^n e^{-m(\delta+\gamma)} \le M\left(\frac{2n}{e\delta}\right)^n\sum_{m\ge N}e^{-m\gamma} \\ \le\ & \left(\frac{2n}{e}\right)^n\frac{M}{\delta^n}\frac{e^{-N\gamma}}{1-e^{-\gamma}} < \left(\frac{2n}{e}\right)^n\frac{M}{\delta^{n+1}}e^{-N\gamma}, \end{aligned}$$

となる. $4\delta\le 2\gamma\le 1$ のとき $1-e^{-\gamma}>\delta$ だからである.

3. コーシーの見積もり. $x\in U$ に対して, 関数 $f(x)$ が解析的であって $|f(x)|\le M$ であれば, $x\in U-\delta$ に対して

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \le \frac{M}{\delta}, \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right| \le \frac{2M}{\delta^2}, \tag{5.3.3}$$

が成り立つ. 証明はコーシー積分 $f(x)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\dfrac{f(\xi)d\xi}{\xi-x}$ から得られる.

4. ラグランジュおよびテイラーの公式. $f(x_1,\dots,x_n)$ が x 空間の線分 (a,b) の近傍において連続微分可能な (一般にベクトル関数, $f=f_1,\dots,f_m$) 関数であって, ab 上で $|df|\le C|dx|$ であれば, $|f(b)-f(a)|\le C|b-a|$ である. とくに, $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|\le C$ なら $|df|\le Cn|dx|$ かつ

$$|f(b)-f(a)|\le Cn|b-a| \tag{5.3.4}$$

である.

関数 $f(x)$ が領域 $|x_i-a_i|<|b_i-a_i|$ において 2 回連続微分可能であって, $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right|\le\Theta$ ならば, 以下の不等式が成り立つ.

$$\left|f(b)-f(a)-\left(\frac{\partial f}{\partial x}|_a,(b-a)\right)\right|\le\frac{\Theta n^2}{2}|b-a|^2. \tag{5.3.5}$$

不等式 (5.3.4) および (5.3.5) は実領域でも複素領域でも等しく成り立つ. 証明は, 微分の積分の形に増分を書けば十分である.

§4. 幾何学補題

ここでの補題は変数変換の一価可逆性を保証する.

1. ε-変位 (displacement). U をユークリッド空間 R の閉領域 (closed domain), A を U から R 内への連続写像とし, $|Ax-x|\le\varepsilon$ とする. すると, 像 AU は $U-\varepsilon$ を含む.

証明. $x_0\in(U-\varepsilon)\backslash AU$ と置く. このとき写像 $A^*x=x_0+\varepsilon\dfrac{Ax-x_0}{|Ax-x_0|}$ は $|x-x_0|\le\varepsilon$ に対して連続である. したがって, 球 $S_{t\varepsilon}:|x-x_0|=t\varepsilon\ (0<t\le1)$ [21] から球 S_ε の上への写像 A^* の写像度 $d(t)$([55] 参照) は t に依らない. ところが $d(1)=1$ であり, $t\to0$ のとき $d\to0$ である. すなわち, $x\in AU$.

2. ε-変位の inversion. 1 項の条件において, $|dx|\ne0$ のとき $|dA|\ne0$ であるとする. このとき A は領域 $U-4\varepsilon$ の微分同相写像である.

証明. $x,y\in U-4\varepsilon$, $Ax=Ay=z$ と置く. 中心が区間 xy の中点にある半径 2ε の球は $U-\varepsilon$ に含まれる. 区間 xy の像 $A_{xy}\subseteq D$ は空間 x の閉弧であり, D 内で点 z に収縮する. 1 項および $|dA|\ne0$ より, 区間 xy は端点をそのままに 1 点に収縮し得る. したがって $x=y$ である.

3. 正準変換. G および U は n 次元空間 P および q の領域とする. $G\times U$ 内の関数 $S(P,q)$ が解析的で $|S|\le M\le16^{-1}n^{-1}\beta^2$ を満たせば, 関係 $p=P+S_q$, $Q=q+S_p$ は領域 $P\in G-2\beta$, $Q\in U-3\beta$ の正準微分同相写像 $B:P,Q\to p,q$ を定義する. ただし $|B-E|\le M\beta^{-1}$, $|dB|<2|dX|(X=P,Q)$ である. また $Q\in U-3\beta-\delta$ に対して $|P-p|\le M\delta^{-1}$ を得る.

[21] 原文では $S_{t\varepsilon}:|x-\varepsilon|=t\varepsilon\ (0<t\le1)$ となっている.

証明. 写像 $B : q \to q + S_p = Q$ において各 $P \in G - \beta$ に対して, コーシーにより (3 節 3 項), $|S_p, S_q| \leq M\beta^{-1} < 0.2\beta$, $|S_{PP}, S_{Pq}, S_{qq}| \leq 2M\beta^{-2} < 4^{-1}n^{-1}$ が成り立つ. したがって, $|Bp - E| \leq M\beta^{-1} < 0.2\beta$ および $|dBp| \neq 0$ である. 2 項に応じて, Bp は領域 $q \in U - 1.8\beta$ の微分同相写像であり, 1 項により, その像は領域 $Q \in U - 2\beta$ を含む. したがって, $P \in G - \beta$, $Q \in U - 2\beta$ に対して, 以下の写像 B が決まる. すなわち, $P, Q \to p, q = P + S_q, B_p^{-1}(Q)$(ただし, S_q には微分のあとで $q = B_p^{-1}(Q)$ を代入する). $P \in G - 2\beta$, $Q \in U - 3\beta$ に対しては, $|B - E| < M\beta^{-1} < 0.2\beta$ および $|dB - dx| < 0.5|dx|$ を得る. そこで, 3 項は 2 項とコーシーの見積りからしたがう.

4. A は球 $U_\varepsilon(x_0) : |x - x_0| \leq \varepsilon$ の写像であって, $\theta|dx| \leq |dA| \leq \Theta|dx|$ であるとする. このとき,

$$U_{\theta\varepsilon}(Ax_0) \subseteq AU_\varepsilon(x_0) \subseteq U_{\varepsilon\Theta}(Ax_0).$$

証明. 第二の不等式はラグランジュの公式 (2 節 4 項) からしたがう. $y(t) = y_0 + ty$ と置く. ただし, $y_0 = Ax_0, 0 \leq t < \infty$ である. t が小さいとき, 連続な分枝 $A^{-1}(y(t)) \subset U_\varepsilon x_0$ がある. ただし, $A^{-1}y_0 = x_0$. $\overline{t}$ はこれが成り立つ最大の t であるとする. すると, $\overline{y} = y(\overline{t})$ に対して, $|A^{-1}(\overline{y}) - x_0| = \varepsilon$ となるはずである. ところが, ラグランジュの公式より, $|A^{-1}(\overline{y}) - A^{-1}(y_0)| \leq \theta^{-1}|\overline{y} - y_0|$, つまり, $|\overline{y} - y_0| \geq \theta\varepsilon$ となる. これが示すべき結果であった.

5. 周波数の変動に関する補題 A は p 空間の領域 G から ω 空間の領域 Ω の上への微分同相写像であるとし, $\theta|dp| \leq |dA| \leq \Theta|dp|$ とする. また A' は領域 $G - \beta$ の写像 $p \to Ap + \Delta(p)$ である. ただし, $|\Delta(p)| < \beta$ および $|d\Delta| < \delta\theta|dp|$. Ω_0 は Ω の部分領域, また $\beta > 0, b > 0, 0 < \delta < 1$ とする. このとき領域 G_1 と G' があって, 以下を満たす.

1) $G \supseteq G - \beta \supseteq G_1 \supseteq G' + b \supseteq G'$.

2) A' は G_1 の微分同相写像であり, $\theta'|dp| < |dA'| < \Theta'|dp|$ である. ただし, $\theta' = \theta(1 - \delta)$, $\Theta' = \Theta(1 + \delta)$.

3) $A'G' = \Omega' = \Omega_0 - d$. ただし, $d = 2\Theta b + (5 + \Theta)\beta$; $A'(G' + b) \subset \Omega_0$.

4) mes $(G \backslash G') \leq \theta^{-n}$ mes $\Omega \backslash \overline{\Omega}'$. ただし, $\overline{\Omega}' = \Omega_0 - \overline{d}$, $\overline{d} = 2\Theta b + (6 + \Theta)\beta$.

証明. $\omega \in A(G - \beta)$ に対して, $|A'A^{-1} - E| < \beta$ および $|dA'A^{-1}| > (1 - \delta)|d\omega|$ が成り立つことははっきりしている. 2 項に応じて, $\omega \in A(G - \beta) - 4\beta$ に対して, 写像 $A'A^{-1}$ は微分同相写像であり, 1 項に応じて, $A'A^{-1}(A(G - \beta) - 4\beta) \supseteq A(G - \beta) - 5\beta$ である. したがって, A' は $G'' = A^{-1}(A(G - \beta) - 4\beta)$ の微分同相写像であり, $A'G'' \supseteq A(G - \beta) - 5\beta$ を満たす. ところが, 4 項に応じて, $A(G - \beta) \supseteq \Omega - \Theta\beta$ であり, したがって $A'G'' \supseteq \Omega = \Omega - (5 + \Theta)\beta$ を満たす[22]. そこで $G_1 = A'^{-1}\Omega_1$, $G' = A'^{-1}\Omega'$ と置く. ここで $\Omega' = \Omega_1 - d$, $d = 2\Theta b + (5 + \Theta)\beta$ である. このとき, $\Omega' + 2\Theta b \subseteq \Omega_1$ であり, 4 項に応じて, $G' + b \subseteq G_1$ を得る. 1), 2), 3) の正しさは明らかである. また 1 項に応じて $AG' = AA'^{-1}\Omega' \supseteq \Omega' - \beta = \overline{\Omega}'$ である. したがって,

$$\text{mes } (G \backslash G') = \int_{\Omega \backslash AG'} \left(\det \left| \frac{\partial A}{\partial p} \right| \right)^{-1} d\omega \leq \theta^{-n} \text{ mes } (\Omega \backslash AG') \leq \theta^{-n} \text{ mes } (\Omega \backslash \overline{\Omega}').$$

6. 変形 (distortion) に関する補題

[22] この不等式おかしくないか?

線形変換 D

$$z = x,\ y \to x',\ y' = z,\quad \text{ただし}\quad x' = Ax,\ y' = Bx + Cy,\ z' = Dz$$

は変換 A, B, C の合成であって,

$$\theta_A|x| \le |Ax| \le \Theta_A|x|,\quad |Bx| \le \Theta_B|x|,\quad \theta_C|x| \le |Cx| \le \Theta_C|x|.$$

が成り立つとする. このとき

$$\theta_D|z| \le |Dz| \le \Theta_D|z|, \tag{5.4.1}$$

である. ただし, $\Theta_D = \Theta_A + \Theta_B + \Theta_C$ および $\theta_D^{-1} = \theta_A^{-1} + \theta_C^{-1} + \theta_A^{-1}\theta_C^{-1}\Theta_B$.

証明. (5.4.1) の第二の不等式はあきらかであり, 第一の不等式は D^{-1} が

$$z' = x',\ y' \to x,\ y = z,$$
$$\text{ただし } x = A^{-1}x',\ y = C^{-1}y' - C^{-1}BA^{-1}x',\ z = D^{-1}z'$$

なる形をしていることからしたがう.

7. 極座標に関する補題

$$p = \sqrt{2\tau}\cos\varphi,\quad q = \sqrt{2\tau}\sin\varphi, \tag{5.4.2}$$

と置く. $f(p,q)$ が $|x| \le R$ $(x = p, q;\ |x| = \max\{|p|, |q|\})$ に対して解析的であるなら, $f[p(\tau,\varphi), q(\tau,\varphi)]$ は

$$|\tau - \tau_0| < \tau_0,\quad |\mathrm{Im}\ \varphi| \le 1 \quad \left(\tau_0 = \left(\frac{R}{4}\right)^2\right) \tag{5.4.3}$$

に対して解析的である. またさらに, $|\mathrm{Im}\ \varphi| \le 1$ なら

$$\sqrt{\tau} \le |x| \le \sqrt{8|\tau|} \tag{5.4.4}$$

が成り立つ.

証明. 領域 (5.4.3) において, 関数 (5.4.2) は一価であり, $|x|\sqrt{|2\tau|}\cosh 1(?) < \sqrt{8|\tau|} \le \sqrt{16\tau_0} = R$. さらに, $2\tau = p^2 + q^2$. したがって $\sqrt{|\tau|} \le |x|$.

8. 極座標に関する注意. 実領域において,

$$p_i = \sqrt{2\tau_i}\cos\varphi_i,\quad q_i = \sqrt{2\tau_i}\sin\varphi_i,$$

$$x_i = p_i,\ q_i (i = 1, 2),\quad \Delta z = z_1 - z_2\ (z = p,\ q,\ \tau,\ \varphi,\ \text{or}\ x)$$

を仮定する. $|x_i| \le \dfrac{1}{2}$, $|\Delta x| \le \sqrt{\tau_i}$ なら, $|\Delta\tau| \le |\Delta x|$, $|\Delta\varphi| \le \dfrac{2|\Delta x|}{\sqrt{\tau_1}}$ である.

証明. $r_i = \sqrt{2\tau_i}$ と置く. $|x_i| \le \dfrac{1}{2}$ のとき, 明らかに $|r_i| \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ および $|\Delta\tau| = \left|\Delta\dfrac{r^2}{2}\right| \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}|\Delta r| \le |\Delta x|$ である. また, $\sqrt{2}|\Delta x| \le \sqrt{2\tau_1} \le r_1$ のとき $|\Delta\varphi| \le \arcsin\dfrac{\sqrt{2}|\Delta x|}{r_1} \le \dfrac{2|\Delta x|}{\sqrt{\tau_1}}$ であり, 要求どおりである.

§5. 収束性補題

1. 領域列 $F^{(s)}$ および微分同相写像列 $B_s : F^{(s)} \to F^{(s-1)}$ $(s = 1, 2, \ldots)$ が与えられたとする. 以下を仮定する:

1) $|B_s - E| < d_s$,
2) $F^{(s)} \subseteq F^{(s-1)} - d_s$,
3) $|dB_s| < 2|dx|$,
4) $d_s < C4^{-s}$.

このとき列 $S_s = B_1 B_2 \ldots B_s$ $(s = 1, 2, \ldots)$ は $F^{(\infty)} = \cap F^{(s)}$ 上, $|S_\infty - E| < C$ を満たす連続写像 S_∞ へと一様収束する.

証明. $x \in F_s$ とする. 1) より, $|B_s x - x| < d_s$ である. 2) より, ラグランジュの公式 (3 節 4 項) が区間 $x, B_s x$ および写像 S_{s-1} に適用できる. 3) より, $|dS_{s-1}| < 2^s |dx|$ が出る. 4) に応じて, $|S_s x - S_{s-1} x| = |S_{s-1} B_s x - S_{s-1} x| < 2^s d_s < C2^{-s}$. が成り立つ. これが証明すべきことであった.

2. $F = d$ を区間 $x = x_0 + vt,\ 0 \le t \le \dfrac{d}{\varepsilon}$ の近傍とする. $Y(x)$ は F 内の滑らかなベクトル場であって, $|Y - v| \le \varepsilon$ を満たすとする. $x(t)$ は方程式 $\dfrac{dx}{dt} = Y(x)$ の解で, 初期条件 $x(0) = x_0$ を満たすものとする. このとき, $0 \le t \le \dfrac{d}{\varepsilon}$ に対して $|x(t) - (x_0 + vt)| \le d$ である.

証明. $y(t) = x(t) - (x_0 + vt)$ を考える. $t < t_0$ に対して, $|y(t)| < d$ および $|y(t_0)| = d$ が常に成り立つとする. $t < t_0$ に対して $\left|\dfrac{dy}{dt}\right| \le \varepsilon$ および $y(0) = 0$ であるから, ラグランジュ公式より $|y(t_0)| \le \varepsilon t_0$ であり, これより $t_0 \ge \dfrac{d}{\varepsilon}$ が得られ, 証明すべきことが得られた.

3. $F^{(0)}$ に関する 1 項の条件において, 滑らかなベクトル場 $Y^{(0)}$ が与えられて運動 $S^t_{(0)}(x)$: $\dfrac{d}{dt} S^t_0(x) = Y^{(0)}(S^t_0(x))$, $S^0_0 x = x$ を定義するとする. 自然に運動 $S^t_s = S_s^{-1} S^t_0 S_s$ が生じ, 対応して $F^{(s)} : Y^{(s)}(X^{(s)}) = \dfrac{d}{dt}(S^t_s X^{(s)})|_{t=0}$ 上に場 $Y^{(s)}$ が生じる.

以下を仮定する:

5) 列 $Y^{(s)}(X)$ は $s \to \infty$ のとき収束する. $X \in F^{(\infty)}$ から $Y^{(\infty)}(X)$ へ[23] , また $F^{(\infty)}$ 上で $|Y^{(s)} - Y^{(\infty)}| < d_{s+1}$;

6) 区間 $x = x_0 + vt$, $0 \le t \le 1$ は $F^{(\infty)}$ に属し, この区間上で $Y^{(\infty)} = v$;

7) $F^{(s)}$ 上で $\left|\dfrac{\partial Y^{(s)}}{\partial X^{(s)}}\right| \le \Theta$ が成り立つ. ただし, Θ は s に依らない.

このとき $0 \le t \le \dfrac{1}{1 + \Theta}$ に対して, $S^t_0(S_\infty x_0) = S_\infty(x_0 + vt) \in F^{(0)}$ である.

[23] 何かおかしい.

証明.

$$|S_s^t x_0 - (x_0 + vt)| \le d_{s+1} \quad \text{for} \quad 0 \le t \le \frac{1}{1+\theta} \tag{5.5.1}$$

であることを示す. 区間 $x_0+vt\ \left(0 \le t \le \dfrac{1}{1+\Theta}\right)$ 上で, 5) および 6) に応じて, $|Y^{(s)} - v| \le d_{s+1}$ である. この区間 (1 項の 2) よりこれは $F^{(s)}$ に属する) の d_{s+1} 近傍において, ラグランジュの公式を使うと, 7) より, $|Y^{(s)} - v| \le (1+\Theta)d_{s+1}$ が成り立つ. 2 項において $d = d_{s+1}$ および $\varepsilon = (1+\Theta)d_{s+1}$ と置けば, (5.5.1) が得られる.

(5.5.1) および 2) からすると, $x_0 + vt$, $S_s^t x_0$ を端点とする区間は領域 $F^{(s)}$ に属する. ラグランジュの公式より, 3) と 4) を考慮すると, $s \to \infty$, $0 \le t \le \dfrac{1}{1+\Theta}$ のとき $|S_s S_s^t - S_s(x_0+vt)| \to 0$ を得る. これが証明すべきことであった.

4. 極限の測度. F をユークリッド空間の有界連続体 (compactum) とし, $S_s (s = 1, 2, \ldots)$ は $F^{(s)} \subset R$ 上の F の連続写像列であって, $F^{(\infty)}$ 上の写像 S_∞ に一様収束するとする. このとき $\text{mes } F^{(\infty)} \ge \overline{\lim}\ \text{mes } F^{(s)}$ である.

証明. $\delta < \delta(\varepsilon)$ および任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\text{mes } (F^{(\infty)} + \delta) < \text{mes } F^{(\infty)} + \varepsilon$ である. 一様収束性より, 十分大きな $s(\delta)$ $F^{(s)} \subseteq F^{(\infty)} + \delta$ に対して

$$\text{mes } F^{(s)} < \text{mes } (F^{(\infty)} + \delta) < \text{mes } F^{(\infty)} + \varepsilon,$$

を得る. これが要請されたことである.

§6. 記法

IV 章および V 章で系統的に使う記法を以下に記載する.

1. 関数. ここで考える関数はすべて複素解析的であり, 実変数の場合は実数を取るとする. 正準共役変数 $p = p_1, \ldots, p_n$ と $q = q_1, \ldots, q_n$ の n 次元複素空間を考える. 変数は $x = p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n = x_1, \ldots, x_{2n}$ とも書く. これらの変数は 2 つのグループに別れる. n_0 個の「高速」変数 $p_1, \ldots, p_{n_0}$ はベクトル p_0 を構成し, 残りの n_1 個の「低速」変数 $p_{n_0+1}, \ldots, p_n$ はベクトル p_1 を構成する. 同様に, q_0, q_1 および $x = p_0, q_0$; $x_1 = p_1, q_1$ を定義する (p_1 をベクトルとして扱ったり成分として扱ったりしても混乱は生じない. 成分としてはほとんど使用しないからだ). また, 周波数 $\omega = \omega_0, \omega_1$ の n 次元空間と還元周波数 $\xi = \xi_0, \xi_1$ を使う. ここで $\omega_0 = \xi_0$, $\omega_1 = \mu\xi_1$ であり, μ は微小パラメータである. 座標の絶対値の最大値 $|x| = \max_j |x_j|$ はこれらすべての空間でノルムの役をする.

考える関数は変数 q(または q_0) に関し周期 2π であり, フーリエ級数の形で以下のように表現される:

$$f(q) = \sum_k f_k e^{i(k,q)} = f_0 + \sum{}' f_k e^{i(k,q)} = \overline{f} + \tilde{f}(q) = [f(q)]_N + R_N f(q).$$

ここで, $\overline{f} = f_0$; $(k,q) = \sum_{j=1}^n k_j q_j$, $\sum' = \sum_{k \ne 0}$, $[\ ]_N = \sum_{|k|<N}$ であり, k は整数座標 k_j を持つベクトルである. q に共役な, k のハーモニクスの数の空間において, 絶対値 $|k| = \sum_{j=1}^n |k_j|$ はノルムの

役をする. 省略形

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{\partial f}{\partial x_1},\ \ \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_m},$$

を使う. ここで, f は数関数あるいはベクトル関数 $f(x_1, \ldots, x_m)$ である.

2. 領域. U をコンパクト複素領域, すなわち, 複素数空間の有界領域であって, その境界も含むものとする. $d > 0$ のとき, $U + d$ および $U - d$ は U の d 近傍および d 近傍が U に入る集合である. U_1 と U_2 が領域のとき, $U_1 \cup U_2$ はその和, $U_1 \cap U_2$ は共通部分, $U_1 \backslash U_2$ は U_1 のうち U_2 に含まれない部分である. $U_1 \subseteq U_2$ は U_1 が U_2 に含まれることを表し, $u \in U$ は点 u が U に属することを意味する. $U_1 \times U_2$ は $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ なる組 u_1, u_2 の集合のことである.

$\mathrm{Re}\ U$ は U と実空間の交わりを表す. Im は虚部であり, mes U は, たとえ複素数集合であったとしても, $\mathrm{Re}\ U$ のリュベーグ測度のことである.

文字 $G,\ G_0,\ G_1;\ \Omega,\ \Xi,\ \Xi_0,\ \Xi_1$ は複素空間 $p,\ p_0,\ p_1;\ \omega,\ \xi,\ \xi_0,\ \xi_1$ のコンパクト領域である. 文字 F は $p \in G,\ |\mathrm{Im}\ q| \leq \rho$ の形の条件によって指定される x 空間の領域を表す. そこで点 q と $q + 2\pi k$ は同一視されるので, mes $F = (2\pi)^n$ mes G である.

領域の特殊な記法のリストは IV 章 12 節 2 項にある (V 章 1 節 2 項も見よ).

3. 写像. 考える写像は解析関数によって与えられる. 各点において, 1 対 1 であって, 連続微分可能, 逆も同様な写像は, U_1 から U_2 の上への微分同相な写像あるいは微分同相写像とよばれる. 写像 A の点 x における微分 (differential) とは, 線形作用素 $dx \to dA = \dfrac{\partial A}{\partial x} dx$ のことである.

$p \to \omega$ および $p \to \xi$ の形の領域 G の微分同相写像は文字 A で表す. 文字 B と S は領域 F の微分同相写像であって, 正準変換でもある (たとえば [14] を見よ). E は恒等写像を表す. $A \leq E$ は任意の x に対して $|Ax| \leq |x|$ のことである.

変換 B と S によって x 空間に $X,\ x^*,\ X^*,\ X^{(s)}$ 等々の新変数を導入する. このとき, 変数 $X_0,\ X_1;\ P_0,\ P_1;\ Q_0,\ Q_1$ などは $x_0,\ x_1;\ p_0,\ p_1;\ q_0,\ q_1$ などに対応する.

4. 定数. 数 $\rho,\ \theta,\ \Theta,\ C,\ \kappa$ は正定数である. 数 $\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \mu$ は上の正定数に比べてずっと小さく, $\gamma \gg \delta \gg \varepsilon \gg \beta \gg \mu$ を満たす. 数 N は大きな正数である.

L と ν は大きな正数であって, (自由度 n にのみ依存する) 絶対定数である.

添字 s は近似の次数を数える.

VI 章. 補遺

この章は, 多数の解決および未解決問題に関する注意 (remarks) からなる. 5 つの節はそれぞれ独立である.

1 節では, 力学の可積分問題においてどうして運動が準周期的であるかを示す.

ある種の未解決問題を 2 節で考察する. 多次元系の位相的不安定性の可能性 (不安定ゾーン) を議論し, 摂動の大きなモデル問題を 2 つ議論する (円から円の上への写像の問題と準周期係数を持つ方程式の還元可能性). C.L.Siegel と E.G.Belaga の結果によると, 平衡位置, 周期解, あるいは準周期解の近傍の微分方程式系は線形正規形に還元できる. これについて 3 節で報告する.

混合 (intermixing) を引き起こすある機構について 4 節で議論する. 最後に 5 節でハミルトン関数が解析的であるべしという要請を緩めた J.Moser の平滑化技術を簡単に記述する.

§1. 可積分系

力学の可積分問題に準周期運動がなぜいつも現われるのかを説明する.

J. Liouville([4] を見よ) の証明によると, n 自由度の系

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (p = p_1, \ldots, p_n; q = q_1, \ldots, q_n) \tag{6.1.1}$$

において, 包合関係 (1 項参照) にある n 個の積分

$$H = F_1, F_2, \ldots, F_n, \quad (F_i, F_j) = 0 \tag{6.1.2}$$

が知られると, 系は求積によって積分可能である. 可積分問題は多数知られている. これらの例すべてにおいて積分 (6.1.2) を見つけることができる.

ずっと以前に, これらの例において, 方程式 $F_i = f_i =$ 一定 によって指定される多様体がトーラスであること, またその上の運動が準周期的であることが知れた. [20] にしたがって, 一価の積分 (6.1.2) を持つ任意の問題において, このような状況が不可避であることをこれから証明する. 証明は単純な位相幾何学的議論に基づく.

1. 記法. $2n$ 次元ユークリッド空間の点 p, q を $x = x_1, \ldots, x_{2n}$ と表す. 関数 $F(x)$ の勾配ベクトル $F_{x_1}, \ldots, F_{x_{2n}}$ を grad F で表す. すると, ハミルトン方程式 (6.1.1) は

$$\dot{x} = I \text{ grad } H, \quad \text{ただし} \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \tag{6.1.3}$$

の形を取る. ここで E は階数 n の単位行列である.

2 つのベクトル x, y の skew–scalar 積を導入する:

$$[x, y] = (Ix, y) = -[y, x], \tag{6.1.4}$$

これは簡単に示すことができるように, 辺を x, y とする平行四辺形を座標平面 $p_i q_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ に射影したときの面積の和を表現する.

skew–scalar 積を保存する線形変換 S(したがって, すべての x, y に対して $[Sx, Sy] = [x, y]$) はシンプレクティックとよばれる. たとえば, 行列 I による変換はシンプレクティックである.

グラジエントの skew–scalar 積 $[\mathrm{grad}\ F, \mathrm{grad}\ G]$ は関数 F と G のポアッソン括弧 (F, G) と呼ばれる. あきらかに, F が系 (6.1.3) の第一積分であるための必要十分条件はハミルトン関数とのポアッソン括弧 (F, H) が恒等的にゼロになることである. 2 つの関数のポアッソン括弧が恒等的にゼロのとき, これらの関数は包合関係にあるという.

2. 定理. n 自由度のハミルトン系 (6.1.3) が互いに包合関係にある n 個の一価第一積分 (6.1.2) を持つとする. 方程式 $F_i = f_i =$ 一定 $(i = 1, \ldots, n)$ は $2n$ 次元 x 空間内に, n 次元コンパクト多様体を定義し, その多様体の各点において勾配 $\mathrm{grad}\ F_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ は線形独立であるとする.

このとき M は n 次元トーラスであり, 方程式 (6.1.3) の解を表現する点 $x(t)$ はトーラスに沿って準周期的である.

証明. A) M は平行化可能である. すなわち, 各点において線形独立な n 個の接線ベクトル場を持つ.

これを示すために, ハミルトン関数を F_i とする系 (6.1.3) を考える. $(F_i, F_j) = 0$ であるから, 関数 F_j はすべて第一積分であり, どの軌跡も全部 M 上にある. したがって, 速度場 $I\ \mathrm{grad}\ F_i$ は M に接する (図 17). I が非縮退であるから, ベクトル $I\ \mathrm{grad}\ F_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ は各点において線形独立である.

図 17

B) D は M 内の面であり, Γ はその境界であるとする. このとき $\oint pdq$ (すなわち座標面 p_i, q_i $(i = 1, \ldots, n)$ への D の射影の面積の和) はゼロである.

これの証明は M 内の無限小平行四辺形に関して行なえば十分である. Γ は辺を ξ, η とする平行四辺形であるとする. このとき, 射影した面積の和は ξ と η の skew-scalar 積である. すなわち,

$$\oint_\Gamma pdq = [\xi, \eta].$$

そこで, ξ と η がある点で M に接するとする. A) に応じて, M に接する任意のベクトルは n 個のベクトル $I\ \mathrm{grad}\ F_i$ の線形結合である. ところがこれらのベクトルは skew–orthogonal である. というのは, (6.1.2) に応じて

$$[\mathrm{grad}\ F_i, \mathrm{grad}\ F_j] = 0,$$

であり, ゆえに, I がシンプレクティックであることより,

$$[I \text{ grad } F_i, I \text{ grad } F_j] = 0,$$

が成り立つ. したがって, 要請どおり, $[\xi, \eta] = 0$ である.

C) ベクトル場 I grad F_i は非回転的 (irrotational, つまり多価関数の勾配) である.

B) の $\int_{q_0}^{q} pdq$ は M_F 内の積分路に依存しない. したがって, 積分は多価関数 $S(q; f)$ とみなすことができる. 方程式 $p = \dfrac{\partial S}{\partial q}$, $g = \dfrac{\partial S}{\partial f}$ は各近傍において, 母関数を S とする正準変換 $f, g \to p, q$ を定義する ([4] を見よ). 変数 f, g において, ハミルトン関数 F_i は f_i であり, ハミルトン方程式は

$$g_1 = 1, \quad g_j = f = 0 \quad (j \neq i) \tag{6.1.5}$$

に還元する.

速度場 I grad F_i は線形独立であるから, 微分 dg_i は M の各点において線形独立である. g_i を M 上の局所座標と考えよう. 2 つの近傍の交わりにおいて, これらは定数だけ違う. だから, 微分 dg_i は大域的に定義できる. しかし, 関数 g_i は M 上で多価である.

g 座標において M 上のベクトル場 I grad F_i は g_i の勾配と同様非回転である. だから多様体 M は非回転場によって平行化可能である. ゆえに, M がトーラスであることは簡単に言える.

D) 補題. n 次元多様体 M 上に n 個の微分 dg_i があって各点において線形独立であるとする (1 次 (degree) の閉微分形式). このとき, この多様体は n 個の円と直線の直積である.

これを証明する. O を M の点とし, N を M の普遍被覆とする. M 上の各道 OA に N 上の道 $O'A'$ が対応する. 関数 $g_i(A') = \int_{O'A'} dg_i$ は N をユークリッド空間 $g_1, \ldots, g_n$ へと変換する. 簡単に確認できるとおり ([60] 参照), dg_i の独立性の結果として,

α) この写像は空間 g 全体の上への写像である.

β) g の各点は N の唯一の点 A' に対応する.

γ) N の O' と O'' が O を被覆し, かつ $g(O''') = g(O') + g(O'')$ なら, O''' は O を被覆する.

α) と β) からすると, N はユークリッド空間 $g_1, \ldots, g_n$ と同一視でき, γ) からすると, O を被覆する点は N 内で格子をなす (k 個の線形独立ベクトルの整数線形結合の総体). 明らかに, N の点 A' と A'' が点 A を被覆するのは $A' - A''$ が格子ベクトルのとき, そしてそのときのみである. ユークリッド空間 N においてこれらの点を同一視すると, k 個の円と $n - k$ 本の直線の直積を得る. これで補題が証明された.

E) 定理の証明の完結. C) に応じて, 多様体 M_f は補題の条件を満たす. コンパクトであるから n 次元トーラスである. (6.3.5) に応じて座標 g は運動 (6.3.3) の間に一様に変化するから, この運動は準周期的である. これで定理が証明された.

3. 注意. A) 作用–角変数. n 個のベクトル grad F_i が線形独立でない $2n$ 次元空間 x の点集合の次元は一般に $n-1$ である. したがって grad F_i が線形独立でない n 次元多様体 M_f は例外である ($2n$ 次元空間内の n 次元および $(n-1)$ 次元多様体は一般には交わらない). だから, 「一般の場合」, $(2n-1)$ 次元特異集合は可積分系の $2n$ 次元相空間を n 次元トーラスと n 次元ユー

クリッド空間の部分との直積領域へと分割する. 知られているとおり, 作用–角変数 $I-\omega$(I 章 1 節では p,q と書いた) をこのような領域には容易に導入できる.

それを示そう. トーラス M_f を選び, M_f の基本サイクル γ_i の上の n 個の積分

$$\Delta_i S(f)=\oint_{\gamma_i} pdq \quad (i=1,\dots,n)$$

を考えよう. 明らかに, 量

$$I_i(x)=\frac{1}{2\pi}\Delta_i S(F_1(x),\dots,F_n(x)) \quad (i=1,\dots,n)$$

は F_j の関数であって, それ自身が包合関係にある第一積分である.

$I_i(x)$ は関数的に独立であると仮定する. このとき, 2 項の議論が適用できる. 2 項の C) において, 正準変換 $p,q\to I,w$ を構築した (2 項では変数 I,w は f,g と書いた). サイクル γ_i のひと回りから変数 w_j の増加

$$\Delta_i w_j=\Delta_i\frac{\partial S}{\partial I_j}=\frac{\partial}{\partial I_j}\Delta_i S=\frac{\partial 2\pi I_i}{\partial I_j}=2\pi\delta_{ij}$$

が得られる. したがって, 変数 W はトーラス上の角変数である.

B) 正準構造. 簡単のため, 1 項および 2 項において, 相空間 p,q がユークリッド空間である場合に話を限ろう. しかし, 相空間が正準構造の与えられた可微分多様体 (非縮退 2–形式を選んで $dp\wedge dq$ の役割をさせる) である一般の場合にも結論のすべてが成り立つことを確認するのは容易である.

C) 「力学系」と古典力学. 2 項の定理は単純な群論的基礎を持つ. ポアッソン括弧はリー代数を構成し, ハミルトン方程式で記述される運動は対応するリー群を構成する. ハミルトン関数を F_i とする運動の可換性は (6.4.2) からしたがう. リー可換群が遷移的に作用するコンパクト一様空間はトーラスである.

この観点からして, もっと一般の場合, すなわち包合関係にない m 個の一価第一積分 $F_1,\dots,F_m$

$$(F_i,F_j)=\varphi_{ij}(F_1,\dots,F_m)$$

がある場合を考えるのは面白そうだ. 関数 φ_{ij} はリー代数を定義する. これはどのような代数か, そして不変多様体 M_f ($F_i=f_i=$ 一定) のトポロジーに, またその上の運動 (6.3.3) にどのような制限を課すのであろうか? これらの運動は M_f 上にある種の測度を保存する. 測度を保存する多様体の滑らかな変換の 1–パラメータ群は「力学系」とよばれる.

滑らかな多様体上に定義された「力学系」としてどんなものが力学の問題から生じるのであろうか?

測地流 (たとえば [3], [33] を見よ) と準周期運動が得られることを知っている. ほかの多数の力学系 ([34] を見よ) もまた最近調べられている. これらに力学の中で出会うことは可能か? とくにハミルトン関数を $H=T+U$(T は運動エネルギー, U はポテンシャルエネルギー) とする「自然系」で出会うことがあるか?

§2. 未解決問題

すでに仕上げた手法が適用できる問題はたくさんある．たとえば, G.D. Birkhoff の「ビリヤード問題」[3], 凸解析多様体上の測地流の非エルゴード性の確立, 「磁気面」の問題 ([35], [36]), 剛体力学のさまざまな問題 [37], 天体力学の数多くの問題がこれである．これらの問題にかかわることなく, もっと基本的な疑問を考察する．

1．不安定ゾーン． これまでの節の内容との関係で生じる基本的かつ主要な問題は次のようなものである．

問題 **I.** 不変トーラスが相空間を分割しないとき, 摂動論の多次元問題には本当の不安定性はあるのか?

すでに指摘したとおり (I 章 10 節), 最初の未挑戦問題は, 4 次元空間からそれ自身の上への正準写像の不動点の安定性問題である．多次元問題において, 不変トーラスは相空間より次元が少なくとも 2 つ低い．トーラスは相空間の中に, 3 次元空間の線のように存在する (図 18).

図 18

位相不安定性が典型的であろうと推察される．不変トーラスの間隙を出発するある種の軌跡は遠くまで行き得る．というのは, 間隙はすべて連結集合になっており, 無限遠にまで広がっているからである (図 18 を見よ)．惑星運動の位相不安定性はとくにこの前提の妥当性からしたがう．III 章の結果からは, 初期条件の任意に小さな違いによって, 無限時間の間に運動の性質がまったく異なってしまう可能性を排除できない．III 章においてわれわれが証明したのは単に初期条件のこのような違いが高度に特殊な形をとるべきことである．すなわち, 初期条件の大多数にとって運動は準周期的のままである．言えるのは, 運動の「測度論的」安定性, つまり小さな測度の集合を除いてほかのすべての初期条件に対しての安定性である．われわれの前提を以下のように定式化しよう．

摂動理論の多次元問題において典型的なのは, 位相不安定性と準周期運動の測度論的安定性の組合せである．

この前提の確認のためには, 共鳴に適応させた漸近法をもっと詳しく考察する必要がある．

2．不変トーラスが相空間を分割する．

これによって不安定ゾーンの詳しい研究をも利する．はっきりさせるため, Birkhoff の問題 (図 6) を考えよう．ポアンカレの時代以来知られているように, 隣り合う 2 つの双曲点セパラトリックスのふるまいは一般に図 19 に示すとおりの複雑なネットワーク[24] である．厳密に言え

[24] これを発見してポアンカレは次のように述べた．「交差は一種の格子, 蜘蛛の巣, あるいはネットワークを形成し, 無限に巻いたループを作る．どの 2 つの曲線も自分自身とは交わらず, 複雑に折り畳まれて, ネットワークのループのすべてと無限回交わる

この図の複雑さに打たれて, 図を書く気にもならない．三体問題ばかりでなく動力学のすべての問題の複雑さ

ば, 第一積分の非存在と摂動論の級数の発散 [10], [38] はこの発想を基にしている. ただ, 解析系において O の任意の近傍に一般型の双曲型非特異点が存在することはまだ厳密には証明されていない. 不安定ゾーンの存在はしたがって証明されておらず, 一般の場合にセパラトリックスが交わる事実も証明されていない. 交わるであろうと信じているが, 文献には厳密な証明がないことを強調しておく.

図 19

不安定ゾーン内の典型的軌跡のふるまいのエルゴード理論的観点からの研究は面白そうだ. 簡単なモデルとして, 区間 $[0,1)$ の部分 $\Delta_1 = [0,a)$, $\Delta_2 = [a,b)$, $\delta_3 = [b,1)$ を $\Delta_3, \Delta_2, \Delta_1$ の順への並べ替えを考えることができる.

3. 大摂動

不変トーラスの運命は, 摂動パラメータ μ が非常に小さい場合に以前の章で追いかけた. 摂動が大きいときにも準周期運動は保たれるのであろうか?

問題 **II.** 任意の質量比で互いの距離が同じ程度の三体 (n 体) 問題において正測度を占める有界運動はあるか? 不変トーラスが壊れてしまう質量比 μ の臨界値はあるか?

モデル問題においても, この問題への答えは出されていない. このうちの 2 つをここで手短かに考えてみよう.

4. 円からそれ自身の上への解析写像

円上に角度座標 $\varphi \pmod{2\pi}$ を導入する. このとき, $2\pi\omega$ の回転は

$$T_0 : \varphi \to \varphi + 2\pi\omega. \tag{6.2.1}$$

なる形に書かれる. 円からそれ自身の上へのもっと一般の写像を考えよう. 変動する角度 $f(\varphi)$ の回転

$$T : \varphi \to \varphi + f(\varphi). \tag{6.2.2}$$

である. ここで $f(\varphi)$ は周期 2π の関数である. $\varphi_1 < \varphi_2$ に対してつねに $\varphi_1 + f(\varphi_1) < \varphi_2 + f(\varphi_2)$ が成り立つなら, 変換 (6.2.2) は 1 対 1 である.

に関してよい描像を与えてくれるものはなにひとつない. 正則な積分はないしボーリン級数は発散する.」([1], III 巻, p.369).

図 19 は V.K. Melnikov の仕事から転載した.

φ から変換を逐次作用させて得られる円上の点列 $\varphi, T\varphi, T^2\varphi, \ldots$ に興味がある. ポアンカレ [2] の証明によると, 回転各の時間平均がつねに存在する. いわゆる回転数 (rotation number) である:

$$2\pi\omega = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\varphi) + f(T\varphi) + \ldots + f(T^{n-1}\varphi)}{n}$$

数 ω の算術的性質は点 $T^n\varphi$ のふるまいに本質的な影響を持つ. ω が通常の無理数性の要請を満たすとする. すなわち, ある $K > 0$ に対して

$$|n\omega + m| \geq K|n|^{-2}. \tag{6.2.3}$$

問題 **III.** 写像 T は解析的であるとする. 解析的な変数変換 S を行なうことにより, この T を角度 $2\pi\omega$ の回転 T_0 に持っていくことは可能か? すなわち,

$$STS^{-1} = T_0\ ? \tag{6.2.4}$$

(6.2.4) において, S は写像 $\varphi \to \varphi + g(\varphi)$ であり, 関数 $g(\varphi)$ は解析的で周期 2π かつ $|g'| < 1$ である. Denjoy[39] は, (6.2.4) を満たす変数変換 S が存在し連続であることを示した. A. Finzi[40] は, S が連続微分可能であることを確立した. S の解析性が証明できるのは, T が回転から少しだけ違うときのみである. これに関しては [18] を見よ.

5. Floquet 理論の一般化. k 次元トーラスの点 $q = q_1, \ldots, q_k$ に解析的に依存する行列 $A(q)$ が与えられたとする ($A(q + 2\pi) = A(q)$ に注意). 点 $q(t)$ はトーラス上で準周期運動であるとし, 周波数は $\dot{q} = \omega$ ($\omega = \omega_1, \ldots, \omega_k$) であるとする.

準周期係数を持つ線形分方程式系

$$\dot{x} = A[q(t)]x \quad (x = x_1, \ldots, x_n) \tag{6.2.5}$$

を考える. 系 (6.2.5) が定数係数の系

$$\dot{y} = By \quad (y = y_1, \ldots, y_n) \tag{6.2.6}$$

へと可約であるのは, 行列 $C(q)$ があって, トーラス上で解析的かつ変換 $x = C(q)y$ が (6.2.5) を (6.2.6) に変えるときである.

周期係数 (k = 1) の場合, 任意の系は可約である. これは Floquet-Lyapunov の定理による (複素数の場合は任意の rate でいい (?). 実数の場合, $C(q)$ は周期 4π でいい).

$k \geq 2$ なら, (6.2.5) の係数は準周期的であり, 系は $n = 1$ の場合でも既約となることもある (小分母のために). ところが, 周波数 ω が (6.2.3) 型の通常の算術的要請を満たせば, 系 (6.2.5) は $n = 1$ の場合でも可約である. 算術的要塞が満たされるものと仮定する.

問題 **IV**[25] **.** $k, n > 1$ のとき系はつねに可約であるか?

A.E. Gelman[41] は $n = 2$ のとき可約な $A(q)$ はトーラス上の行列全体の空間のある領域を満たすことを証明した. L.Ya. Adrianova[42] はこの結果を $n > 2$ へと拡張した. 既約な $A(q)$

[25] D.G.Mackle の指摘によると, A.M. Gleason の例では $A(q)$ の滑らかさを仮定しないと否定的な答えにいたる. われわれに興味があるのは $A(q)$ が q に解析的に依存する場合である.

の領域が存在すれば, それらの正規形の問題が生じる. $q = q(t)$ がある力学系の相点であるような線形系 (6.2.5) の正規形のもっと一般の問題を調べるのが面白い. このような問題は, 以下で見るように, 不変多様体の近傍の研究から自然に生じる.

§3. 不変多様体の近傍

常微分方程式系の解のふるまいの定性的研究は特定の単純な解を見つけることから始まる. すなわち, 平衡位置および周期軌跡がそれである. そのあとで, これらの解の近傍の積分曲線の分布を調べる. その結果, ときには解全体のふるまいに関して重要な結論が得られることもある.

不動点や周期軌跡のものより複雑な構造を持つ不変多様体の近傍の積分曲線のふるまいを考察するのも面白い. 複雑さで次に位置するのは準周期運動で満たされたトーラスである. このようなトーラスの近傍の研究において E.G. Belaga[22] が得た結果をここで示そう. 不動点や周期軌跡に関する同様の結果はそれ以前に C.L. Siegel[9] によって得られている.

1. 平衡位置の近傍

点 O を平衡位置とする解析的常微分方程式系を考えよう. 第一次近似で, 方程式は線形である:

$$\dot{x} = Ax + O(x^2) \quad (x = x_1, \ldots, x_n). \tag{6.3.1}$$

ここで A は定数行列である. 行列 A の固有値 λ_i が異なるなら, 線形変換 $y = Bx$ により, 行列 A は対角形

$$\dot{y} = \Lambda y + O(y^2) \quad (y = y_1, \ldots, y_n) \tag{6.3.2}$$

に還元される. ここで Λ は固有値からなる対角行列である.

線形系

$$\dot{z} = \Lambda z \tag{6.3.3}$$

の場合, O の近傍の構造を調べるには何の困難もない. だが, (6.3.2) の項 $O(y^2)$ は得られる描像を変えてしまうのではないか?

ポアンカレは学位論文において以下の仮定を行なうならばそれが起こらないことを示した.

1) 複素平面の点 λ_i の凸包は O を含まない.

2) 数 λ_i のどれひとつも, 他の λ の正整数係数線形結合で書けない.

仮定 1), 2) に基づいて, ポアンカレは非線形変数変換

$$z = y + O(y^2), \tag{6.3.4}$$

によって, O のある近傍で (6.3.2) を (6.3.3) の形に還元しようとした. 置き換え (6.3.4) によって O の近傍を構成する問題は解ける. すなわち, 系 (6.3.1) と (6.3.3) の積分曲線は同じにふふまう.

条件 1) は Λ 空間の積分領域満たされない. しかし, (6.3.3) の形に還元できない系は例外的であることがわかった. つまり, ほとんどすべての λ に対して (リュベーグ測度ゼロの集合を除いて), (6.3.2) の解析成分 $O(y^2)$ が何であろうと, (6.3.4) から (6.3.3) の形への解析的変換がある. この結果は C.L. Siegel[9] による.

置き換え (6.3.4) は y に関するテーラー級数展開の形で求めることができる. 係数は小分母 (6.3.5) を含む公式によって逐次計算することができる. Siegel が与えた収束性の証明は, 分母のうち, 小分母に出会うのはほんのたまにであるという議論に基づいている.

置き換え (6.3.4) を決めるにあたってニュートン法を用いれば, 上の議論を使わずに同じ結果を得ることができる.

ニュートン近似は収束するなかりでなく, 安定になる. テーラー級数の各係数は有限回の近似をすれば正確に決まる (s 次近似のあとで, $2^{s-1}+1$ 階の項が安定になる).

置き換え (6.3.4) が存在するためには, 生じる小分母が, ある $K>0$ に対して, 非負の整数成分 k_j を持つベクトル K を使って,

$$|\lambda_i-(\lambda,k)|\geq K|k|^{-(n+1)}\quad(|k|=\sum_{j=1}^{n}|k_j|>1;i=1,\ldots,n) \tag{6.3.5}$$

と見積もることができれば十分である. 条件 (6.3.5) は, 条件 1) と 2) が成り立つと自動的に満たされる (上を見よ). これはほとんどすべての λ に対して満たされる. ただ正準系では満たされない (?).

2. 周期運動の近傍

任意の点における軌跡に垂直な面積をそれ自身の上に写す写像は周期運動に自然に結びつく. 最も単純な場合にこのような写像の構築を扱った Siegel[8] の結果 (いわゆる「中心問題」, [53] を見よ) を定式化しよう.

$$z\to Tz=e^{2\pi i\omega}z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots \tag{6.3.6}$$

は複素面 z の O の近傍をそれ自身の上に写す等角写像であるとし, ω は条件 (6.2.3) を満たすとする. このとき負動転 O は安定である. さらに, 解析的置き換え

$$w=z+b_2z^2+b_3z^3+\ldots$$

が存在して, T を角度 $2\pi\omega$ の回転

$$w\to e^{2\pi i\omega}w.$$

へと変換する.

したがって, z 面の O の近傍は解析不変曲線 $|w|=$ 一定 によって分割される. 軌跡 T^nz $(n=1,2,\ldots)$ はこの曲線をいたるところ稠密に満たす.

等角写像を正準写像と比較するのは教育的である (序 4 節を見よ).

多次元の場合も同様の結果が得られる. Floquet 理論 (2 節 3 項) をこの結果と結びつけると, 「一般の場合」の周期軌跡の近傍の研究が定数係数の線形系の研究に還元されると納得できる. この結果には長くとどまるつもりはない. というのは, この結果は次の節のもっと一般の定理に含まれるからである.

3. 準周期運動の近傍 $n+m$ 個の微分方程式の系が, 周波数 $\omega_,\ldots,\omega_m$ の準周期運動の軌跡で満たされた m 次元不変トーラス T を持つとする. 座標 $q_1,\ldots,q_m;x_1,\ldots,x_n$ がこのトーラスの近

傍に導入できるとする. ここで q はトーラス T 上の角度変数であり, トーラス上で $x=0$ である (?). わが微分方程式は

$$\left.\begin{array}{ll}\dot{x}=A(q)x+f(x,q) & (x=x_1,\ldots,x_n),\\ \dot{q}=\omega+g(x,q) & (q=q_1,\ldots,q_m),\end{array}\right\} \tag{6.3.7}$$

なる形を取る. ここで $f=O(x^2)$, $g=O(x)$ である.

行列 $A(q)$ を持つ線形系が可約 (5 項を見よ) であるとする. したがって, (6.3.7) の代りに, 系

$$\dot{y}=\Lambda y+f(y,g),\quad \dot{q}=\omega+g(y,g) \tag{6.3.8}$$

を考える. ここで Λ は固有値 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ の定数対角行列であり, $f=O(y^2)$, $g=O(y)$ は解析的で, q に関し周期 2π である.

同じニュートン法を使って, E.G. Belaga[22] が証明するところによると, 仮定 (6.3.11) の下で, 解析的変数変換

$$Y=y+\varphi(y,q),\quad Q=q+\psi(y,g) \tag{6.3.9}$$

があって, (6.3.8) を線形系

$$\dot{Y}=\Lambda Y,\quad \dot{Q}=\omega \tag{6.3.10}$$

に還元する. (6.3.9) の変数 ($\varphi=O(y^2)$, $\psi=O(y)$ は q に関し周期 2π) が導入できるのは, 以下の算術条件が満たされるときである. すなわち, ある $K>0$ に対して

$$\begin{array}{c}|(k,\lambda)-\varepsilon\lambda_j+i(l,\omega)|\geq K(|k|+|l|)^{-(m+n+1)}\\ (\varepsilon=0,1;j=1,\ldots,n;i^2=-1)\end{array} \tag{6.3.11}$$

が, すべての整数ベクトル $k=k_1,\ldots,k_n$; $l=l_1,\ldots,l_m$ に対して成り立つ. また (6.3.11) において

$$|k|=\sum_{\alpha=1}^{n}k_\alpha>1+\varepsilon,\quad k_\alpha\geq 0,\quad |l|=\sum_{\beta=1}^{m}|l_\beta|.$$

非線形系 (6.3.8) はこうして容易に積分可能な線形系 (6.3.10) に還元される. 条件 (6.3.11) は, (6.3.7) の行列 A によって定義される固有値および準周期運動の周波数 ω に制限を課すのみであることを指摘しておく. また (6.3.7) の関数 f と g は任意である. 条件 (6.3.11) が破れるのは λ, ω 空間のリュベーグ測度ゼロの集合の上でのみである. 残念ながら, 正準系はこの例外的な集合に含まれる.

正準系の準周期運動の近傍に関する理論を, Birkhoff(I 章 9 節) が平衡位置の近傍および周期軌跡の近傍に関して構築した理論に似せてつくるのは面白いことだ. このような理論ができれば, 多次元の場合の不安定ゾーン (2 節 1 項) の構造理解の手助けになろう. だが, いまのところわれわれの手の内にない線形理論に基づいて作らねばならない.

4. もっと複雑な場合準周期運動よりも複雑な運動の近傍の構造はまったく研究されていない[26]. 複素時間の場合に系を線形系に還元する問題もわたしには面白く思える. 時間が複素数で

[26] 校正中に書いた注意: 散逸系における不変多様体の存在に関する面白い結果が最近 N.N. Bogolyubov および J. Moser によってニュートン法を使って得られた.

あると,「積分曲線」は 2 次元曲面 (実数の意味で) である. これらの曲面の大域的ふるまいの研究は始まったばかりである [43], [44].

§4. Intermixing

統計力学の「エルゴード仮説」は,「一般形の」力学系において等エネルギー面 $H = h$ 上のがエルゴード性と混合性 (intermixing) を持つという発想に関係する. いままでの章の結果によれば, エルゴード性と混合性は一般現象ではなく, 特殊な条件と結びついている. ここでは, 混合性を引き起こし得るある機構を考察する.

1. 衝突最も簡単なモデルとして, ユークリッド計量を持つ 2 次元トーラス面上の完全弾性球粒子 2 個の運動を考える. 簡単のため, はじめに粒子のひとつが固定されているとする. 第二の粒子 (これを点とみなす) は「トーラスビリヤードテーブル」上を,「入射角は反射角に等しい」という法則にしたがって固定面に反射されながら動く (図 20).

図 20, 21

同時に, 楕円ビリヤードテーブル (図 21) も考える. 楕円は偏平 (oblate) な楕円体と考えることができ, 点は測地線に沿って動き, 反射の法則にもしたがう. まったく同じようにして, トーラスビリヤードテーブルは穴のあいた両面 (two-sided) トーラスであり, 粒子はその上を測地線に沿って動くと考えることができる. ところが, 両面楕円が偏平楕円体なら, 穴あき両面トーラスは (種数 2 の) 偏平「巻きパン」(Kringel) である. だから, わがトーラスビリヤードテーブル上の運動は結び目型曲面 (knotted shaped surface) 上の測地線に沿っての運動の極限になったいる.

よく知られているとおり, 測地線に沿っての運動の特徴は, その曲面のガウス曲率に強く依存する. 負曲率曲面上では測地線は強く不安定である. この場合, エルゴード性, 非常に強い混合性, その他が証明されている ([33], [46], [47]).

最初のビリヤードテーブルに戻り, 図 20 と図 21 の図形の曲率を考えよう. 楕円体は正の曲率を持ち, 積分すると 4π に等しい (ガウス・ボンネの定理). 楕円体をどんどん偏平にすると, 曲率は楕円の境界に沿って集積する.「巻きパン」の場合, 曲率の積分は -4π に等しい. だから, 両面トーラスビリヤードテーブルは, いたるところ負曲率の偏平曲面とみなすことができる. 偏平にすることにより, 曲率はすべて周に沿って集積する.

上の議論は, もちろんわがモデルのエルゴード性の証明ではない. だが, 負曲率の曲面上の測地線を調べる方法を適用して, エルゴード仮説を証明する試みをすることが可能であること

を示している[27] .

2. 特異スペクトル混合に関して別の場合がある. 非常にゆっくりした混合である. A.N. Kolmogorov が与えた例 d である:

$$\dot{x} = \omega_1 A(x,y), \quad \dot{y} = \omega_2 A(x,y) \tag{6.4.1}$$

($x, y(\mathrm{mod}\ 2\pi)$ はトーラスの点の角度座標, $A > 0$ はトーラス上の解析関数, $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ は無理数).

有理数によって異常なほどよく近似できる $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ のある値に対して, $A(x,y)$ をうまく選ぶと, (6.4.1) は混合系になる. 力学系 (6.4.1) のスペクトルの性質を明らかにするのが面白そうだ (スペクトルは特異であると予想される).

もうひとつ永年運動に関連して混合機構がある. 最も簡単なモデルとして, 低摩擦の 1 次元系を取る. だが, 類似の現象は保存系にも存在する ([49] 参照).

3. 進化. ポテンシャルエネルギー $U(q)$(図 22) を持ち, 低摩擦 $\mu F(p,q)$, $\mu \ll 1$ の働く 1 次元系を考えよう. 明らかに, M のほとんどすべての点は時間が経つにつれてポテンシャル極小 A または B のどちらかに到達する. だが, どちらに行く?

[27] この方向への最初の試みは N.S. Krylov[48] が行なった. 校正中の注意: Ya.G. Sinai はつい最近ここで考えたビリヤードテーブル問題および統計力学のさまざまな問題においてエルゴード性を証明した.

図 22, 23

初期エネルギー $h > 0$ のとき, A または B に到達する確率 p_A または p_B が確定する. これらの確率は公式 (図 23 を見よ)

$$\frac{p_A}{p_B} = \frac{\oint_a F dq}{\oint_b F dq}, \quad p_a + p_B = 1. \tag{6.4.2}$$

によって与えられる.

運動は初期条件で決まるから, x から A へ動く確率を定義する必要がある. $\Omega(d) = d$ を相空間の点 x の近傍とし, $\Omega_A(d, \mu)$ は $\Omega(d)$ を出発する初期条件のうち, 摩擦が μF のときに A に到達する集合であるとする. 定義により

$$p_A = \lim_{d \to 0} \lim_{\mu \to 0} \frac{\text{mes } \Omega_A(d, \mu)}{\text{mes } \Omega(d)}$$

である. 公式 (6.4.2) によると, p_A は x に依存せず ($H(x) > 0$ なら), 臨界エネルギーレベル $H(p, q) = 0$ における $F(p, q)$ の値によって決定される. (6.4.2) の証明は読者に任せる.

縮退の場合, 保存系でも決定性を失う場合があり得る (I 章 5 節). 不変トーラスによる非摂動相空間の層状分割が特異点を持つ場合がある. n_0 次元不変トーラスが永年変化して, このような特異多様体へと還元されるとき決定性を失う.

もうひとつゆっくりした混合過程は共鳴を通した系の進化にに関係する (II 章 5 節). これらの現象はすべて厳密な数学的取扱いを待っている. 厳密でない取扱いは B.V. Chirikov の学位論文 (Novosibirsk, 1959) で記述されている.

A.M. Molchanov は [21, pp.42-49] において, 間違った「運動の分割に関する定理」を定式化した. 弱い方の主張 (ゆっくりした運動に周期性があるとき変数の変化は多価である) は正しい. だが, A.M. Molchanov はこの主張については証明していないと述べている.

§5. 平滑技術

この節では, J. Nash[50] にまで遡る平滑化技術の基本的発想を説明しよう. J. Moser はこれを使ってハミルトン関数が解析的であるべしとの要請を 333 階の微分が滑らかであるべしとの要請で置き換えた. Moser のすばらしい論文 [24], [25] に詳しい証明があるので参照して欲しい. しかし, その論文の中で, 重要な発想のひとつ (不等式 (6.5.6) の使用) がやや隠されている. J. Moser が 1962 年の夏にモスクワ大学で行なった証明を追ってみよう.

1. 技術補題. 周期関数

$$f(x)=\sum_{k\neq 0} f_k e^{i(k,x)} \quad (x=x_1,\dots,x_n; k=k_1,\dots,k_n) \tag{6.5.1}$$

を考える. 記法

$$\sum_{|k|\leq N} f_k e^{i(k,x)}=f_N(x), \quad \sum_{|k|>N} f_k e^{i(k,x)}=R_N f \quad (|k|=|k_1|+\ldots+|k_n|) \tag{6.5.2}$$

を導入する. 微分

$$|f^{(l)}|=|f^{(l)}(x)|=\max_{0\leq l_1+\ldots+l_n\leq l}\left|\frac{\partial^{l_1+\ldots+l_n}}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l}}f\right| \tag{6.5.3}$$

の見積もりを見つけよう.

$0\leq\lambda\leq l$ を整数とする. 以下の主張は知られており, 証明も簡単である:

$$|f^{(l)}|\leq M \quad \text{のとき} \quad |R_N f^{\lambda}|\leq CMN^{-(l-\lambda-\delta)}. \tag{6.5.4}$$

$$|f|\leq M_0 \quad \text{のとき} \quad |f_N^{\lambda}(x)|\leq CM_0N^{\lambda+\delta}. \tag{6.5.5}$$

$$|f|\leq M_0,\ \ |f^{(l)}|\leq M \quad \text{のとき} \quad |f^{\lambda}|\leq CM_0\left(\frac{M}{M_0}\right)^{\lambda/l}. \tag{6.5.6}$$

ここで $\delta>0$ は f, M_0, M, N, l, λ に依らない定数であり, $C>0$ は f, M_0, M, N に依らない定数である ([59] を見よ).

2. 平滑化つきニュートン近似. I 章で記述したのに似たニュートン型逐次近似過程が存在すると仮定する. 「摂動」$f(x)$ に関して, 「変数変換」$x\to x+g(x)$ が構築されると仮定する. ここで関数 $g(x)$ は, たとえば, 級数

$$g(x)=\sum_{k\neq 0}\frac{if_k}{(k,\omega)}e^{i(k,x)} \tag{6.5.7}$$

によって定義される. (ω の通常の算術的性質により)

$$|g(x)|\leq K|f^{(\nu)}(x)|. \tag{6.5.8}$$

を仮定する. さらに, 次の近似では摂動の役割をするのは関数 f', すなわち

$$\Sigma_1=f(x)\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \Sigma_2=f(x)-f(x+g(x)), \quad \text{ほか} \tag{6.5.9}$$

の形の数個の量の和であると仮定する. g 自身や f と g の微分が f と同じ程度の小さな量であるとすれば, (6.5.9) 内の量は f^2 程度の大きさである. この仮定は, $f(x)$ が解析的なら成り立つ (I 章および IV 章を見よ).

だが, $f(x)$ が有限回のみ可微分であると, 「滑らかさの喪失」(6.5.8) により, 有限回しか近似を進めることができない. この困難は平滑化によって避けることができることがわかった. $f(x)$ を無限回微分可能な関数 $F_N(x)$((6.5.2) を見よ) に置き換え, 残余 $R_N f$ を次の近似 (6.5.9) に渡す. 十分大きな (しかし有限の) 数の $f(x)$ の微分と十分小さな $|f|$ に対して, 量 N_s (s は近似の数, $N_s \to \infty$) は近似が収束するように扱うことができる.

(6.5.6) に応じて, 関数とその最高次の微分を見積もれば十分である. $f(x)$ が不等式

$$|f^{(0)}| < M_0, \quad |f^{(l)}| < M, \quad (M_0 \ll 1 \ll M), \tag{6.5.10}$$

を満たせば, 次の近似において, 摂動 f' に対して, 見積もり

$$|f'^{(0)}| < M_0' \le M_0^{1+\alpha}, \quad |f'^{(l)}| < M \le M^{1+\alpha} \tag{6.5.11}$$

を, f, M_0, M に依存しないある $0 < \alpha < 1$ $\left(\text{たとえば} \alpha = \dfrac{1}{2}\right)$ に対して, 得る. 見積もり (6.5.11) より, 近似の収束性が容易に導ける. 不等式 (6.5.11) の導出は以下で概説する. 式の氾濫にしないため, 定数 δ, K, C などは書かないことにする. たとえば, (6.5.5) は

$$|f_N^{(\lambda)}(x)| \le M_0 N^{\lambda}.$$

と書く.

3. $|f'|$ の見積もり. 2 項に応じて, 有限三角関数和 $g(x)$ は公式 (6.5.7) から決まる. ただし, $0 < |k| \le N$ である. (6.5.6) の助けを借りて (6.5.8) の $|f^{(\nu)}(x)|$ を見積もるにあたって, (6.5.10) より, $1 \le \nu \le l$ に対して

$$|g^{(0)}| \le M_0 \left(\frac{M}{M_0}\right)^{\frac{\nu}{l}}, \quad |g^{(l)}| \le M N^{\nu} \tag{6.5.12}$$

が成り立つ ($g^{(l)} = g_N^{(l)}(x)$ の見積もりは (6.5.5) からしたがう). (6.5.6) を使って (6.5.10) と (6.5.12) を補間すれば, $0 \le \nu, \lambda \le l$ に対して

$$|f^{(\lambda)}| \le M_0 \left(\frac{M}{M_0}\right)^{\frac{\lambda}{l}}, \quad |g^{(\lambda)}| \le M_0 \left(\frac{M}{M_0}\right)^{\frac{\nu}{l}+\frac{\lambda}{l}} N^{\frac{\nu\lambda}{l}}, \tag{6.5.13}$$

であることがわかる.

$0 \le \lambda \le l$ 回だけ積 $f\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を微分して, (6.5.13) よりあらっぽい見積もり

$$\left|\left(f\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{(\lambda)}\right| \le M_0^2 \left(\frac{M}{M_0}\right)^{\frac{\lambda}{l}+\frac{2\nu}{l}} N^{2\nu} \tag{6.5.14}$$

を得る.

(6.5.4) に応じて,

$$|R_N f^{(0)}| \le M_0 N^{-1}, \quad |R_N f^{(l)}| \le M \tag{6.5.15}$$

を得る. ところが, 2 項に応じて f' は $f\dfrac{\partial g}{\partial x}$((6.5.9) 参照) と $R_N f$ の形の量からできている. したがって, (6.5.14), (6.5.15) より,

$$\begin{aligned} |f'^{(0)}| &\le M_0' = M_0^2 \left(\frac{M}{M_0}\right)^{\frac{2\nu}{l}} N^{\frac{\nu}{l}} + MN^{-1}, \\ |f'^{(l)}| &\le M' = M_0^2 \left(\frac{M}{M_0}\right)^{1+\frac{2\nu}{l}} N^{2\nu} + M, \end{aligned} \tag{6.5.16}$$

が得られる.

4. 収束性. さて N を選び, 十分大きな l および十分小さな M_0 に対して不等式 (6.5.11) が (6.5.16) から出ることを示そう. $M < M_0^{-\kappa}$, $N = M_0^{-\beta}$ とする. ただし, $\kappa > 0$ および $\beta > 0$ は以下で選ぶ. (6.5.16) に応じて,

$$\begin{aligned} &2 - \frac{2\nu}{l}(1+\kappa) - \frac{\beta\nu}{l} > 1 + \alpha, \\ &\beta l - \kappa > 1 + \alpha, \\ &\left(1 + \frac{2\nu}{l}\right)(1+\kappa) + 2\beta\nu < \kappa(1+\alpha) + 2. \end{aligned} \tag{6.5.17}$$

が成り立てば, 不等式 (6.5.11) は満たされる.

これらの不等式中の量は, ν を除いて, すべてわれわれが制御できる. 最初に $0 < \alpha < 1$ を選ぶ. (6.5.17) の不等式が両立することを示そう. $l \gg \nu,\ \beta\nu,\ \kappa\nu$ に対して, 不等式 $(6.5.17)_1$ が満たされる. $l \gg \dfrac{\kappa}{\beta}$ に対して $(6.5.17)_2$ が満たされる. また, $\left(\alpha - \dfrac{2\nu}{l}\right)\kappa \gg \beta\nu$ に対して $(6.5.17)_3$ も満たされる. 次に $\beta > 0$ を選び, 次に κ を十分大きく選んで $\alpha\kappa \gg \beta\nu$ となるようにし, 次に l を十分大きく選んで $l \gg \dfrac{\kappa}{\beta}$, $\dfrac{\nu}{l} \ll \alpha$, $\dfrac{\nu\kappa}{l} \ll 1$, $\dfrac{\beta\nu}{l} \ll 1$ となるようにする. M_0 は十分小さいとする.

このようにして選んだパラメータ α, β, κ, l を使うと, (6.5.11) は (6.5.10) からしたがう. まったく同じやり方で, $(s+1)$ 近似で $N_{s+1} = N_s^{1+\alpha} = (M_0^{(s)})^{-\beta}$ と置けば, (6.5.11) タイプの見積もりを

$$M_0^{s+1} \le (M_0^{(s)})^{1+\alpha}, \quad M^{(s+1)} \le (M^{(s)})^{1+\alpha} \le (M_0^{(s+1)})^{-\kappa}.$$

なる関係と同時に得ることができる.

$M_0 \ll 1$ であるから, 近似の収束性は (6.5.18) から容易に出る.

5. 注意. 1) $l \gg \kappa \gg \delta$ が成り立ち, 不等式 (6.5.17) が余裕をもって成り立ち, また $M_0 \ll (1, K, C^{-1})$ が十分小さい限り定数 δ, C, K を書かないという 2 項の最後の約束は危険でない.

2) ニュートン法はしばしば x に関してではなく, $y = x + g(x)$ に対して微分 f' を見積もることを要請する. けれども, この場合もまた, (6.5.16) の型の不等式を得ることは難しくない.

3) l を十分大きく取るにあたって, r 階微分 $(r \ll l)$ を使った $(?)$ 近似の収束性を得ることができる.

4) $f(x)$ または $g(x)$ に三角関数和を代入する代りにもっと精密な平滑化を採用する方がときに有用である.

参考文献

[1] H. Poincare, *Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Vol.I – III, Paris, 1892, 1893, 1899.

[2] H. Poincare, *Sur les courbes définies par lres équations différentielles* (Translated into Russian, O krivykh, oppredelyaemykh differentsialnymi uravneniami, Moscow-Leningrad, Gostekhisdat, 1947.)

[3] G.D. Birkhoff, *Dynamical Systems*

[4] E.T. Whittaker, *Analytical Dynamics*, 3rd edition, Cambridge, 1927.

[5] M. Born, *Vorlesungen uber Atommechanik*, Springer, berlin, 1925.

[6] L.D. Landau and E.M. Lifshits, *Mekhanika*, Moscow, Fizmatgiz, 1956.

[7] N.N. Bogolyubov and Yu. Mitropol'skii, *Asimptoticheskie metody v teorii nelineinyx kolebanii*, 2nd edition, Moscow, Fizmatgiz, 1958.

[8] C.L. Siegel, *Vorlesugen uber Himmelsmechanik*, Springer, berlin, 1956.

[9] C.L. Siegel, Uber die Normalform analytoscher Differentialgleichungen in der Nahe einer Gleicgewichtslosung, *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen*

Math.-Phys. Kl. IIa, Jahrg. 1952, 21-30

[10] C.L. Siegel, Uber die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nahe einer Gleichgewichtsloseng, *Math. Ann.* **128**(1954), 144-170.

[11] A.N. Kolmogorov, Dynamical systems with an integral invariant on a torus, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **93**(1953), 763-766.

[12] A.N. Kolmogorov, The conservation of conditionally periodic motions with a small variation in the Hamiltonian, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **98** (1954), 527-530.

[13] A.N. Kolmogorov, The general theory of dynamical systems and classical mechanics, *International mathematical Congress in Amsterdam*, 1954.

[14] V.I. Arnold, The stability of the equilibrium position of a Hamiltonian system of ordinary differential equations in the general elliptic case, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **137** (1961), 255-257.

[15] V.I. Arnold, Generation of conditionally periodic motion from a family of periodic motions, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **138** (1961), 13-15.

[16] V.I. Arnold, On the behaviour of the adiabatic invariant with a slow periodic variation of the Hamiltonian, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **142** (1962), 758-761.

[17] V.I. Arnold, On the classical perturbation theory and the stability problem of planetary systems, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **145** (1962), 487-490.

[18] V.I. Arnold, Small denominators. I. Mapping the circle onto itself, *Izv. Akad. Nauk SSSR* Ser. Math. **25** (1961), 21-86.

[19] V.I. Arnold, Small denominators. II. Proof of A.N. Kolmogorov's theorem on the preservation of conditionally periodic motions with a small variation in the Hamiltonian, *Uspekhi Mat. Nauk SSSR* **18** (1963), 13-39.

[20] V.I. Arnold, A theorem of Liouville concerning integrable problems of dynamics, *Sibirsk. Mat. Zh.* **4** (1963), 471-474.

[21] Problemy dvizheniya iskusstvennykh nebesnykh tel, Moscow, Izd. AN SSSR, 1963.

[22] E.G. Belaga, The reducibility of a system of ordinary differential equations in the neightbourhood of a conditionally periodic motion, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **143** (1962), 255-258.

[23] An.M. Leontovich, On the stability of Lagrangian periodic solutions of the restricted three-body problem, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **143** (1962), 525-528.

[24] J. Moser, A new technique for the construction of solutions of non-linear differential equations, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **47** (1961), 1824-1831.

[25] J. Moser, On the invariant curves of area-preserving mappings of an annulus, *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math.-Phys.* Kl. II 1962, 1-20.

[26] A.A. Andronov, M.A. Leontovich, L.I. mandelshtam, A contribution to the theory of adiabatic invariants, *Zhurnal Russkogo Khimicheskogo Obshchestva* **60** (1928), 413; L.I. Mandelshtam, *Sobranye sochinenii*, Vol. I, 1948, and Vol. II, 1954.

[27] M. Kruskal, *Adiabatic invariants*, Princeton, 1961.

[28] L.A. Artsimovich, *Upravlyaemye termoyardernye reaktsii*, Fizmtgiz, 1961.

[29] V.M. Volosov, Averaging in systems of ordinary differential equations, *Uspekhi Mat. Nauk SSSR* **17** (1962), 3-126.

[30] T. Kasuga, On the adiabatic theorem for the hamiltonian system of differential equations in classical mechanics I, II, III, *Proc. Japan Acad.* **37** (1961), 366-371; 372-376; 377-382.

[31] C.V.L. Charlier, *Die Mechanik des Himmels*, I-II, Leipzig, 1902-1907.

[32] U.J. le Verrier, *Annales de l'pbservatoire Imperial de Paris* Vo. I (1855).

[33] E. Hopf, The statistics of geodesics on manifolds of negative curvature, *Uspekhi Mat. Nauk SSSR* **4** (1949), 129-170.

[34] L. Auslander, F. Hahn, L. Markus and L.W. Green, Flows on nil-manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.* **67** (1961), 298-299; 414-415.

[35] V.K. Melnikov, On lines of force in a magnetic field, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **144** (1962), 747-750.

[36] I.M. Gelfand, M.I. Graev, N.M. Zueva, M.S. Mikhailova and A.I. Morozov, An example of a toroidal magnetic field not having magnetic surfaces, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **143** (1962), 81-83.

[37] R.I. Chertkov, *Metod Yakobi v dinamike tverdogo tela*, Sudpromgiz, 1960

[38] G.A. Merman, Almost-periodic solutions and the divergence of Lindstedt's series in the plane bounded three-body problem, *Trudy Inst. Teoret. Astronam.* **8** (1961), 1-134.

[39] A. Denjoy, Sur les courbes définies par les équations différentielles á la surface de tore, *J. Math. Pures Appl.* **11** (1932), 333-375.

[40] A. Finzi, Sur le probleme de la génération d'une transformation donnée d'une courbe fermée par une transformation infinitésimal, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **67** (1950), 273-305; **69** (1952), 371-430.

[41] A.E. Gelman, On the reducibility of a class of systems of differential equations with quasi-periodic coefficients, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **116** (1957), 535-537.

[42] L.Ya. Adrianova, Reducibility of systems of n linear differential equations with quasi-periodic coefficients, *Vestnik Leningrad. Univ.* **17** (1962), 14-24.

[43] I.G. Petrovskii and E.M. Landis, On the number of limiting cycles of the equation $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, where P and Q are polynomials of the second degree, *Mat. Sb. (N.S.)* **37**(79) (1955), 209-250.

[44] M.B. Khudai-Verenov, A property of the solutions of a differential equations, *Mat. Sb. (N.S.)* **56**(98) (1962), 301-308.

[45] V.I. Arnold and A.L. Krylov, Uniform distribution of points on a sphere and certain ergodic properties of solutions of linear differential equations in a comlex domain, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **148** (1963), 9-12.

[46] Ya.G. Sinai, Geodesic flows on compact surfaces of negative curvature, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **136** (1961), 549-552.

[47] D.V. Anosov, Roughness of geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **145** (1962), 707-709.

[48] N.S. Krylov, *Raboty po obosnovaniyu statisticheskoi fiziki*, Moscow, Izd. AN SSSR, 1950.

[49] I.M. Lifshits, A.A. Slutskii and V.M. Nabutovskii, On the phenomenon of the "scattering" of charged quasi-particles at singular points in p-space, *Dakl. Akad. Nauk SSSR* **137** (1961), 553-556.

[50] J. Nash, The imbedding problem for Riemannian manifolds, *Ann. Math.* **63** (1956), 20-63.

[51] L.V. Kantorovich, Functional analysis and applied mathematics, *Uspekhi Mat. Nauk* **3** (1948), 89-185.

[52] B. Jessen, Some aspects of the theory of almost-periodic function, *International mathematical Congress in Amsterdam*, 1954.

[53] N.G. Chebotarev, *teoriya gruppu Li*, Moscow-Leningrad, Gostekhizdat., 1940.

[54] A.Ya. Khinchin, *Tsepnye drobi*, Moscow-Leningrad, ONTI, 1935.

[55] H. Seifert and W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig-Berlin, Teubner, 1934.

[56] A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin, *Elementy teorii funktsii i funktsionalnogo analiza* Part 2, Moscow, Fizmatgiz, 1960.

[57] V.F. Kagan, *Osnovy teorii poverkhnostei* Vol.I, Gostekhizdat., Moscoe-Leningrad, 1947.

[58] G. Polya and G. Szego, *Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis*, Berlin, Springer, 1925.

[59] G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*, Cambridge, 1934.

[60] E. Cartan, *Lecons sur la géométrie des espaces de riemann*, Paris, 1928.