谷川清隆 訳

Dokl. Akad. Nayk SSSR Vol.48, 527-530(1954)

ハミルトン関数が微小変化したときの準周期運動の保存について
On the preservation of conditionally periodic motions under a small change of the Hamiltonian function

A.N. Kolmogorov

s 自由度の力学系の $2s$ 次元の相空間内に領域 G を考えよう．この領域は s 次元トーラス T と s 次元ユークリッド空間の領域 S との積として表されているとする．トーラス T の点は円座標 $q_1, \ldots, q_s$ (ただし、 q_α を $q'_\alpha = q_\alpha + 2\pi$ に変えても点 q は変わらない) で特徴づけることができ, S の点 p の座標を $p_1, \ldots, p_s$ で表すことにする．座標 $(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s)$ を使って表した領域 G において運動方程式が正準形

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} H(q,p), \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial}{\partial q_\alpha} H(q,p) \tag{1}$$

を取るとする．

さらに, ハミルトン関数 H はパラメータ θ に依存すること, すべての $(q,p) \in G, \theta \in (-c, +c)$ に対して定義されること, そして時間には依存しないことを仮定する．本質的に以下の考察は実数的性格ではあるが, 関数 $H(q,p,\theta)$ の滑らかさに関しては, 無限回微分可能より強い滑らかさが必要である．簡単のため, 以下を通じて, 関数 $H(q,p,\theta)$ は全変数 (q,p,θ) に関して解析的であるとする．

ギリシャ文字の添字の和は 1 から s まで走るとする．普通のベクトル表記を使う．すなわち, $(x,y) = \sum_\alpha x_\alpha y_\alpha$, $|x| = +\sqrt{(x,x)}$ である．整数ベクトルとよばれるベクトルは, 成分が整数のベクトルである．G の点 (q,p) の集合で $p = c$ なるものを T_c と書く．定理 1 では, S が点 $p = 0$ を含むと仮定する．すなわち, $T_0 \subseteq G$.

定理 1. 次のようにおく．

$$H(q,p,0) = m + \sum_\alpha \lambda_\alpha p_\alpha + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta}(q) p_\alpha p_\beta + O(|p|^3), \tag{2}$$

ここで m と λ_α は定数である．また定数 $c > 0$ と $\eta > 0$ を適当に選ぶと, すべての整数成分ベクトル n に対して, 不等式

$$(n, \lambda) \geq \frac{c}{|n|^\eta}, \tag{3}$$

が満たされる．加えて, 関数

$$\Phi_{\alpha\beta}(q) = \frac{\partial^2}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} H(q,0,0),$$

の平均値

$$\varphi_{\alpha\beta}(0) = \frac{1}{(2\pi)^s} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \Phi_{\alpha\beta}(q) dq_1 \ldots dq_s,$$

から構成される行列式がゼロでないとする．すなわち

$$|\varphi_{\alpha\beta}(0)| \neq 0. \tag{4}$$

このとき, 十分小さな θ すべておよび集合 T_0 のある近傍 V の点 (Q,P) すべてに対して決まる解析関数 $F_\alpha(Q,R,\theta)$ と $G_\alpha(Q,P,\theta)$ が存在して, V から $V' \subseteq G$ への接触変換

$$q_\alpha = Q_\alpha + \theta F_\alpha(Q,P,\theta), \quad p_\alpha = P_\alpha + \theta G_\alpha(Q,P,\theta)$$

を決める．この変換によって H は

$$H = M(\theta) + \sum_\alpha \lambda_\alpha P_\alpha + O(|P|^2), \tag{5}$$

なる形になる ($M(\theta)$ は Q および P に依らない).

力学にとっての定理 1 の重要性は容易にわかる．定理 1 によると, $\theta=0$ のときに存在する準周期運動の s パラメータ族

$$q_\alpha = \lambda_\alpha t + q_\alpha^{(0)}, \quad p_\alpha = 0,$$

が, 条件 (2) および (3) の下で, ハミルトン関数 H の小さな変化の結果として消えることができない．単に, この運動の軌跡が巻き付いている s 次元トーラス T_0 がトーラス $P=0$ に変形し, それが前と同一の振動数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ の準周期運動の軌跡によって満たされるのである．

定理 1 により存在が保証されている変換

$$(Q,P) = K_\theta(q,p)$$

は, 変換

$$(Q^{(k)},P^{(k)}) = K_\theta^{(k)}(q,p)$$

の極限の形で構成することができる．ここで変換

$$(Q^{(1)},P^{(1)}) = L_\theta^{(1)}(q,p), \quad (Q^{(k+1)},P^{(k+1)}) = L_\theta^{(k+1)}(Q^{(k)},P^{(k)})$$

は「一般化されたニュートン法」(参考文献 [1] 参照) を使って見つけることができる．本論文においては, 変換 $K_\theta^{(1)} = L_\theta^{(1)}$ の構成法についてのみ述べる．これだけでも定理 1 の条件 (3) と (4) の役割が理解できる．変換 $L_\theta^{(1)}$ を式

$$Q_\alpha^{(1)} = q_\alpha + \theta Y_\alpha(q), \tag{6}$$

および

$$p_\alpha = P_\alpha^{(1)} = \theta\left\{\sum_\beta P_\beta^{(1)}\frac{\partial Y_\beta}{\partial q_\alpha} + \xi_\alpha + \frac{\partial}{\partial q_\alpha}X(q)\right\}$$

によって与え (簡単に確認できるとおり, これは接触変換である), 定数 ξ_α, ζ と関数 $X(q)$, Y_β を探そう．出発時の要請として,

$$\begin{aligned} H = \quad & m + \sum_\alpha \lambda_\alpha p_\alpha + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta}(q)p_\alpha q_\beta \\ & +\theta\left\{A(q) + \textstyle\sum_\alpha B_\alpha(q)p_\alpha\right\} + O(|p|^3 + \theta|p|^2 + \theta^2) \end{aligned} \tag{7}$$

が

$$H = m + \theta\zeta + \sum \lambda_\alpha P_\alpha^{(1)} + O(|P^{(1)}|^2 + \theta^2). \tag{8}$$

なる形をしているとする.

(6) を (7) に代入して

$$\begin{aligned} H = \ & m + \sum_\alpha \lambda_\alpha P_\alpha^{(1)} + \theta \left\{ A + \sum_\alpha \lambda_\alpha \left(\xi_\alpha + \frac{\partial X}{\partial q_\alpha} \right) \right\} \\ & + \theta \sum_\alpha P_\alpha^{(1)} \left\{ B_\alpha + \sum_\beta \Phi_{\alpha\beta}(q) \left(\xi_\beta + \frac{\partial X}{\partial q_\beta} \right) + \sum_\beta \lambda_\beta \frac{\partial Y_\beta}{\partial q_\beta} \right\} + O(|P^{(1)}|^2 + \theta^2). \end{aligned}$$

を得る.

こうして, 我々の要請 (8) は方程式

$$A + \sum_\alpha \lambda_\alpha \left(\xi_\alpha + \frac{\partial X}{\partial q_\alpha} \right) = \zeta, \tag{9}$$

および

$$B_\alpha + \sum_\beta \Phi_{\alpha\beta} \left(\xi_\beta + \frac{\partial X}{\partial q_\beta} \right) + \sum_\beta \lambda_\beta \frac{\partial Y_\alpha}{\partial q_\beta} = 0, \tag{10}$$

を満足させることに帰着する.

関数

$$Z_\alpha(q) = \sum_\beta \Phi_{\alpha\beta}(q) \frac{\partial}{\partial q_\beta} X(q). \tag{11}$$

を導入しよう.

関数 $\Phi_{\alpha\beta}, A, B_\alpha, X, Y_\alpha, Z_\alpha$ をフーリエ級数

$$X(q) = \sum x(n) e^{i(n,q)},$$

の形に展開し, 物事をはっきりさせるために (dlya oppregelennosti)

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \tag{12}$$

と置いて, フーリエ係数 $x(n), y_\alpha(n), z_\alpha(n)$ および定数 ξ_α, ζ を決めるための方程式

$$a(0) + \sum \lambda_\alpha \xi_\alpha = \zeta, \tag{13}$$

$$a(n) + (n, \lambda) x(n) = 0 \quad \text{for} \quad n \neq 0 \tag{14}$$

$$b_\alpha(0) + \sum_\beta \varphi_\alpha(0) \xi_\beta + z_\alpha(0) = 0, \tag{15}$$

$$b_\alpha(n) + \sum_\beta \varphi_{\alpha\beta}(n) \xi_\beta + z_\alpha(n) + (n, \lambda) y_\alpha(n) = 0 \quad \text{for} \quad n \neq 0 \tag{16}$$

を得る.

簡単にわかるように, 系 (11)–(16) は条件 (3) と (4) の下で, 一意に解ける. 条件 (3) は (14) から $x(n)$ を決める際に, また (16) から $y_\alpha(n)$ を決める際に本質的な役割を果たす. 条件 (4) は (15) から ξ_β を決める際に本質的な役割を果たす. 解析関数 $\Phi_{\alpha\beta}, A, B_\alpha$ のフーリエ係数は $|n|$ の増加につれて, $\rho^{|h|}$, $\rho < 1$ よりは小さくない次数で減少するから, 条件 (3) から, (13)–(16) が形式的に解けることだけでなく, 関数 X, Y_α, Z_α のフーリエ級数の収束およびこれらの解析性も出て来る. これ以後の近似の構成には何ら新たな困難はない. ややデリケートなのは変換 $K_\theta^{(k)}$ が解析的な極限変換 K_θ に収束することの証明に条件 (3) を使うときだけである.

「小分母」が存在しないための条件 (3) は, 「一般に言って」満たされるとみなすべきである. と言うのは, 任意の $\eta > s-1$ のもとで, s 次元空間のすべての点 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ に対して, リュベーグ測度ゼロの集合を除いて, $c(\lambda)$ を見つけて

$$(n, \lambda) \geq \frac{c(\lambda)}{|n|^\eta}$$

がどんな整数 $n_1, n_2, \ldots, n_s$ に対しても成り立つようにできるからである [2]. 条件 (4) も「一般的に言って」満たされるとみなすことができる. ところで

$$\varphi_{\alpha\beta}(0) = \frac{\partial}{\partial p_\alpha}\lambda_\beta(0),$$

が成り立つ. ただし,

$$\lambda_\beta(p) = \frac{1}{(2\pi)^s}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{dq_\beta}{dt}dq_1\ldots dq_s.$$

は運動量 $p_1, \ldots, p_s$ を固定したときの座標 q_β による「平均周波数」である. だから, 条件 (3) は, 運動量の平均周波数のヤコビ行列式がゼロでないことを意味する.

さて, $H(q,p,0)$ が p のみに依存する場合, すなわち $H(q,p,0) = W(p)$ なる特別な場合を考察することにしよう. この場合, $\theta = 0$ のとき, 各トーラス T_p は周波数

$$\lambda_\alpha(p) = \frac{\partial W}{\partial p_\alpha}$$

の準周期運動の軌跡全体から成る.

ヤコビ行列式

$$J = \left|\frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial p_\beta}\right| = \left|\frac{\partial^2 W}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\right| \tag{17}$$

がゼロでなければ, ほとんどすべてのトーラス T_p に定理 1 を適用することができる. θ が小さいとき, 定理 1 に対応して得られる「移動したトーラス」が領域 G の大きな部分を占めることが自然に推定される. これは以下の定理 2 で確認される. この定理を定式化するにあたって, 領域 S が有界であるとみなし, いま考えている集合 M_θ 内に, 点 $(q^{(0)}, p^{(0)}) \in G$ を導入する (??). ただし, この点を通る方程式 (1) の解

$$q_\alpha(t) = f_\alpha(t; q^{(0)}, p^{(0)}, \theta), \quad p_\alpha(t) = G_\alpha(t; q^{(0)}, p^{(0)}, \theta)$$

は初期条件

$$q_\alpha(0) = q_\alpha^{(0)}, \quad p_\alpha(0) = p_\alpha^{(0)}$$

を満たすものであり, t が $-\infty$ から $+\infty$ まで動くとき, 領域 G から出ないで, 周期 $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(q^{(0)}, p^{(0)})$ で準周期的な軌跡を導く. すなわち, 上記の解は

$$f_\alpha(t) = \varphi_\alpha(e^{i\lambda_1 t}, \ldots, e^{i\lambda_s t}), \quad g_\alpha(0) = \psi_\alpha(e^{i\lambda_1 t}, \ldots, e^{i\lambda_s t}).$$

なる形をしている.

定理 2. $H(q, p, 0) = W(p)$ であって, 行列式 (17) が領域 S においてゼロでなければ, $\theta \to 0$ のときに集合 M_θ のリュベーグ測度は領域 S の全測度に向かう.

おそらく, 集合 M_θ がすべての正の θ に対して, いたるところ稠密な補集合を持つことが「一般の場合」であろう. 解析的力学系理論において生じるこのような種類の複雑さについては, わたしの小論文においてもうすこし詳しく述べておいた.

1954 年 8 月 31 日受

参考文献

[1] L.V. Kantorovich, *Uspekhi, Matem. Nauk* **3**, 163(1948).

[2] J.F. Koksma, *Diophantine Approximation*, 1936.

[3] A.N. Kolmogorov, *DAN* **93**, 763(1953).