谷川清隆 訳

Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math.-Phys. Kl. II, 1-20(1962)

円環の面積保存写像の不変曲線について

On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus

J. Moser

1. 序

a) ポアンカレ [1] は制限三体問題の研究において, 円環からそれ自身の上への面積保存写像の研究へと導かれていった. 実は, 彼はこのような写像の不動点の存在に関する定理を述べたが, これは制限三体問題の無限個の周期軌道の存在を示すために使うことができる. このプログラムへの洞察豊かな証明は後に G.D. Birkhoff[2] によって与えられた.

円環を研究することは, 広い類の非線形微分方程式にとって重要である. 制限三体問題は本質的な困難を単純な形で示しており, 非線形微分方程式のモデルと考えることができる. 面積保存写像は摩擦のない運動を記述する常微分方程式から生じる.

この論文では, このような写像の閉不変曲線の存在を保証する定理を証明する. 閉不変曲線は, 写像を生成する微分方程式の概周期解に対応する. これらは周期解の安定性を調べるために重要である.

b) r, θ を平面の極座標とし, 円環

$$0 < a \leq r \leq b,$$

を考える. はじめに単純な写像

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta + \alpha(r) \\ r_1 = r \end{cases} \tag{1.1}$$

を考える. ただし, 回転角 $\alpha(r)$ は r に単調に依存すること, すなわち,

$$\frac{d\alpha}{dr} > 0$$

を仮定する. この写像は円を保存する. 円をある角度だけ回転する. その角度は動径とともに増大する. (1.1) を「ねじれ写像」とよぶ.

次にねじれ写像の摂動

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta + \alpha(r) + F(r,\theta) \\ r_1 = r \qquad\qquad + G(r,\theta) \end{cases} \tag{1.2}$$

を考える．ここで F, G は小さい量であって, θ に関し周期 2π であるとする．この写像は, ねじれ写像の不変曲線の近くに閉不変曲線を持つか．これが問題である．

これ以上の仮定を加えないかぎりそのような不変曲線が必ずしも存在しないことははっきりしている．たとえば, G が正なら, 写像の下で r は増加するから閉不変曲線は存在しない．そこで, 次のような仮定を加える．すなわち, 円 $r=$ 一定 に近いどの閉曲線

$$r = f(\theta) = f(\theta + 2\pi) \tag{1.3}$$

も自分自身の像と交わるとする．ここで $f'(\theta)$ は小さいとする．(1.2) 式が面積保存であること, また円 $r=a$ を不変にすることを要請すれば, 上の仮定は満たされる[1]．とくに円 $r=$ 一定 の像曲線はその円と交わるはずである．つまり, $G(r,\theta)$ は各固定した r について少なくとも 1 つゼロ点を持つ．

以下の定理は次のような意味である．上の条件の下で, F, G が十分小さく, しかも十分な回数だけ微分可能ならば, 実際に不変曲線が存在する．定理の定式化のための記法を導入しよう．$h(r,\theta)$ は階数 s までの連続微分を持つ関数であるとする．このとき第 s 階微分のノルムを

$$|h|_s = \sup \left| \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{\sigma_1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^{\sigma_2} h(r,\theta) \right|, \quad \sigma_1 + \sigma_2 \le s,$$

ここで r, θ は h の定義域内を動く．

定理 1. $\varepsilon > 0$ と整数 $s \ge 1$ が与えられたとき, 関数 p, q を周期 2π の関数とし, s 階連続微分可能で

$$|p|_s + |q|_s < \varepsilon$$

を満たすとして, 写像 (1.2) が閉不変曲線

$$\begin{cases} \theta = \theta' + p(\theta') \\ r = r_0 + q(\theta') \end{cases} \tag{1.5}$$

を持つのは, 以下の仮定 (前提) の下である．

(1) 写像 (1.2) に対しては, 円に近いどの閉曲線 (1.3) もその像と交わる．

(2) $b - a \ge 1$ とし, ある定数に対して

$$0 < c_0^{-1} \le \frac{d\alpha(r)}{dr} \le c_0$$

(3) 正数 $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, s, c_0)$ および整数 $l = l(s)$ を構成することができ, F, G は階数 l まで微分可能であって不等式

$$|F|_0 + |G|_0 < \delta_0 \tag{1.7}$$

$$|\alpha|_1 + |F|_1 + |G|_1 < c_0 \tag{1.7$'$}$$

[1] ほかにもこの条件が満たされる状況はある．たとえば, reversible な系の場合である．[4] 参照．

を満たす.

さらに, 曲線 (1.4) 上に誘導された写像は

$$\theta_1' = \theta' + \alpha(r_0) \tag{1.8}$$

で与えられる.

注意. 実は, (1.8) の回転数 $\alpha(r_0) = \omega$ によって区別される不変曲線はたくさんある. 後に次を示す. すなわち,

$$\alpha(a) + \varepsilon < \omega < \alpha(b) - \varepsilon, \tag{1.9}$$

内に任意に ω が与えられて, $\omega/2\pi$ が有理数によって容易には近似できないとき, つまり

$$|n\omega - m2\pi| \geq \varepsilon n^{-3/2}, \tag{1.10}$$

がすべての整数 $n > 0, m$ に対して成り立つとき, この回転数 $\omega = \alpha(r_0)$ を持つ曲線 (1.4) が存在する.

c) 1954 年に類似の定理が Kolmogorov[6], [7] によって述べられた. Kolmogorov の陳述は近可積分微分方程式の解析的ハミルトン系の概周期解の存在に関するものであった. この論文は証明の得られていない[2] この Kolmogorov の定理を証明する試みから始まった. 著者は Kolmogorov の主張を, 最も簡単な形で述べ, 幾何学的に扱えるようにした. 高次 (数次元) への拡張には困難は伴わない.

今回の結果が [7] と違う点は次のとおりである. Kolmogorov の論文では, 微分方程式はすべての変数に関して解析的であるとされたが, ここでは有限回の微分の存在のみが仮定された. この事実は実際上は何の意味もない. というのは, (1.7′) における数 l は非常に大きいからである (式 (2.4) からは, $\sigma = 4, s = 1$ のとき $l = 333$ が得られる).

これとの関連で, 不変曲線の存在が言えてしまえば, 不変曲線を任意の精度まで計算で得ることは簡単であることを強調しておく. たとえば, 解析的な場合, 微小パラメータによる級数展開は簡単に工夫できる. 問題は, この級数が収束するかどうかである. われわれの扱うケースでは, 非常に速く収束する逐次過程を構成する. 実は, 逐次過程の急速な収束性はいわゆる小分母の影響を打ち消すために本質的である ([11] も参照).

d) この論文の目的は上の定理の完全な証明を与えることである. この定理の応用のいくつか, またダフィング方程式および制限三体問題への定理の拡張については [12] で述べたのでここでは議論しない.

とくに重要なのは, 定理 1 をもっとするどくすれば, 周期解の安定性の証明に使えるという事実である. Birkhoff(3], [4] 参照) にしたがって, $r = 0$ に選んだ不動点近くで面積保存写像 (1.2) を調べることへと導かれる. 不動点の安定性の証明のためには $r = 0$ のどの近傍の中にも $r = 0$ を囲む不変曲線があることを確立しなければならない (この発想に関しては [5] 参照[3]).

[2] つい最近, V.I. Arnold[8] の論文が現れた. 「微小分母」や Denjoy の円問題, その他が扱われている. さらに Arnold は [9], [10] で 1954 年の Kolmogorov の主張を拡張したと述べている

[3] 同様の結果は V.I.Arnold[9] によっても発表された.

このためには, 角度 $\alpha(r)$ が小さな区間上で変る写像へと定理 1 を拡張することが要請される. このような結果については 5 節で議論する.

この話題は, ニューヨーク大学でのセミナーで講演したものである. F. John, L. Nirenberg やその他の人々が議論してくれた. 以前, この分野におけるインスピレーションをくれた C.L.Siegel に感謝する.

2. 証明のアウトライン

定理 1 の証明の発想を示すために, 定理 1 を

$$\alpha(r) = r, \quad s = 1$$

へと特殊化してみる. 一般の場合は 5 節に残しておく. また角度変数 θ を x, 動径変数を y で表す. すると, 写像は次の形になる.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x + y + f(x, y) \\ y_1 = y + \qquad g(x, y) \end{array} \right. \quad \text{in} \quad a \leq y \leq b \tag{2.1}$$

ただし f, g は x に関し周期 2π であり, $b - a \geq c_0^{-1}$ である. f, g の微小性に関する仮定は

$$|f| + |g| < \delta_0, \tag{2.2}$$

および

$$|D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} f| + |D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} g| < c_0 \quad \text{for} \quad \rho_1 + \rho_2 = l$$

で与えられる. 数 ω は

$$a + \varepsilon < \omega < b - \varepsilon, \tag{2.3}$$

内で

$$\left| \omega - \frac{2\pi m}{n} \right| \geq \varepsilon n^{-\sigma + 3/2} \quad \text{for all integers} \quad n, m \quad \text{with} \quad n > 0 \tag{2.3$'$}$$

を満たすように選ぶ. ここで σ は 4 以上の整数である.

不変曲線は以下で示すような逐次過程を通じて構成する. 与えられた円環 $a < y < b$ において, 狭い円環を構成し, そこに適当な極座標 $\xi (\mathrm{mod}\ 2\pi)$ および η を導入する. やり方は, 変換で得られた写像がはじめの写像よりねじれ写像へのよい近似になるようにする. この過程を繰り返し, 前よりも狭い円環, そしてねじれ写像を近似するよい写像とよい座標を順次得て行く. 極限では, 円環列は曲線に縮まる. これが求める不変曲線である. 同時に曲線上の角度パラメータが得られ, 誘導された写像は回転になる.

もちろん, 第二段階で導入する規格化パラメータなしに不変曲線が得られるならそれでよい. しかし, 不変曲線を構成するためには その回転数が 2π の有理数倍による近似がひどく悪いことが要請される. 回転数は逐次過程の際に制御されなければならない. この理由から, 規格化座標も同時に見つけることなしに不変曲線を決定することが不可能であるように見える.

この構成法を実行しその収束性を証明するために, 第 $(n-1)$ 段階の円環から第 n 段階の円環へと進む一般の第 n 段階を記述しよう．円環のサイズ, 写像からの偏差 (deviation) はいくつかのパラメータによって見積もる．そのパラメータを導入しよう．パラメータは N, M, δ であって, これらの間の関係はあらかじめ決めておく．すなわち,

$$\kappa = \frac{4}{3}, \quad \nu = 6(\sigma+1), \quad l = 3 + 11\nu \tag{2.4}$$

と置き, $N > 1$ に対して

$$M = N^{\nu} > N, \quad \delta = M^{-2\kappa}. \tag{2.5}$$

以下の証明における眼目は, ねじれ写像からのはずれが $\delta_0^{\kappa^n}$ で減少するという意味で, 逐次過程の収束が急速であることである．この事は次の定理において表現される．

パラメータ N_-, M_-, δ_- は繰り返しの $(n-1)$ 番目のステップに付随する量であり,

$$N = N_-^{\kappa}, \quad M = M_-^{\kappa}, \quad \delta = \delta_-^{\kappa}.$$

によって N, M, δ と関係している．

見積もり (2.2), (2.2') を弱めて, これらを帰納過程に適応させ, また

$$|f| + |g| < \delta_- \quad \text{in} \quad |y-\omega| < \frac{1}{M_-}, \tag{2.6}$$

および

$$|D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} N_- f| + |D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} M_- g| < N_-^{\rho_1+1} M_-^{\rho_2} \quad \text{for} \quad \rho_1 + \rho_2 = l \tag{2.6$'$}$$

を仮定する．パラメータ δ_- は $\delta_{n-1} = \delta_0^{\kappa^{n-1}}$ に置き換え, 同様のことを N_-, M_- についても行う．

$n=1$ の場合には, 与えられた写像が条件 (2.6) と (2.6') を満たすのは, δ_0 が十分小さく取られたときである．すなわち, (2.2) と (2.6) は一致し, $M_0 > \varepsilon^{-1}$ のときには (2.3) と $|y-\omega| < \dfrac{1}{M_0} < \varepsilon$ が $a < y < b$ を保証する．最後に (2.2') から

$$|D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} N_0 f| + |D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} M_0 g| < c_0 M_0$$

が出る．また $M_0 > N_0$ および $rho_0 + \rho_1 = l \geq \nu$ であるから

$$N_0^{\rho_1} M_0^{\rho_2} \geq N_0^{l} \geq N_0^{\nu} \geq M_0$$

であり, $N_0 > c_0$ なら

$$c_0 M_0 \leq c_0 N_0^{\rho_1} M_0^{\rho_2} \leq N_0^{\rho_1+1} M_0^{\rho_2}$$

が成り立つ．ゆえに (2.6) と (2.6') が $n=1$ のときに成り立つのは, $M_0 > \varepsilon^{-1}$ かつ $N_0 > c_0$ と選んだとき, つまり

$$\delta_0 < \varepsilon^{2\kappa}, \quad c_0^{2\kappa\nu}.$$

のときである．しかしながら, δ_0 をもっと小さくする自由度は残しておく．

定理 2. (2.1) 式が表すのは, (2.6) および (2,6') を満たし, また $y=$ 一定 に近いどの閉連続曲線もその像と交わるという性質を有する円環写像であるとする.

このとき, 十分小さな δ_0 に対して, 座標変換

$$\text{(2.7)} \qquad \begin{cases} x = \xi + u(\xi,\eta) \\ y = \eta + v(\xi,\eta) \end{cases} \quad \text{in} \quad |\eta - \omega| < \frac{1}{M_-} - \frac{1}{M} < \frac{1}{M}$$

が存在し,

$$\text{(2.7}') \qquad |u|_1 + |v|_1 < \frac{1}{N}$$

を満たし, また

$$|\eta - \omega| < \frac{1}{M}$$

内で, 写像 (2.1) は座標 ξ, η に変換されて

$$\text{(2.8)} \qquad \begin{cases} \xi_1 = \xi + \eta + \varphi(\xi,\eta) \\ \eta_1 = \eta \qquad + \psi(\xi,\eta) \end{cases}$$

なる形を取る. ただし,

$$\text{(2.9)} \qquad |\varphi| + |\psi| < \delta = \delta_0^\kappa \quad \text{in} \quad |\eta - \omega| < \frac{1}{M}$$

および

$$\text{(2.9}') \qquad |D_\xi^{\rho_1} D_\eta^{\rho_2} N\varphi| + |D_\xi^{\rho_1} D_\eta^{\rho_2} M\psi| < N^{\rho_1+1} M^{\rho_2} \quad \text{for} \quad \rho_1 + \rho_2 = l.$$

である.

定理 2 の証明はこの論文の主要部分である. それは 4 節に残しておく. ここでは定理 2 から, $\alpha(r) = r, s = 1$ の特別の場合の定理 1 の証明が得られることを示したい.

この目的のために, 写像 (2.1) を $\mathcal{F}_0$ と表し, ねじれ写像 $x_1 = x + y; y_1 = y$ を $\mathcal{F}_\infty$ と表す. 不等式 (2.2) は

$$|\mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_\infty| < \delta_0.$$

と表現できる. すると定理 2 により, 変換 (2.7), それを $\mathcal{U}_1$ と表すとして, があって $\mathcal{F}_0$ を

$$\mathcal{U}_1^{-1} \mathcal{F}_0 \mathcal{U}_1 = \mathcal{F}_1$$

へと変換し, (2.8) を

$$|\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_\infty| < \delta_0^\kappa = \delta_1.$$

と表現する. 写像を規格化するこの過程を狭い円環で繰り返すことにより, 円環写像

$$\text{(2.10)} \qquad \mathcal{F}_n = \mathcal{U}_n^{-1} \mathcal{F}_{n-1} \mathcal{U}_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

が得られる．ただし，

$$|\mathcal{F}_n - \mathcal{F}_\infty| < \delta_n = \delta_{n-1}^\kappa. \tag{2.11}$$

$\mathcal{F}_n$ が表される座標を $x^{(n)} = \xi; y^{(n)} = \eta$ と書くと，$\mathcal{F}_n$ は

$$|\eta - \omega| < \frac{1}{M_n} = \frac{1}{M_{n-1}^\kappa} \tag{2.12}$$

内で定義される．その上，(2.7') によれば，$x^{(n-1)}, y^{(n-1)}$ から $x^{(n)}, y^{(n)}$ への座標変換 $\mathcal{U}_n$ は恒等写像に近い．そのことを

$$|\mathcal{U}_n - I| < \frac{1}{N_n} = \frac{1}{N_{n-1}^\kappa} \tag{2.13}$$

と表現する．不等式 (2.11) と (2.12) は，円周 $\eta = \omega$ 上，写像 $\mathcal{F}_n$ が純粋な回転 $\xi_1 = \xi + \omega$ を表す $\mathcal{F}_\infty$ に収束することを表現している．最後に，$x^{(n)}, y^{(n)}$ と旧座標 $x = x^{(0)}, y = y^{(0)}$ との関係は

$$\mathcal{W}_n = \mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2 \cdots \mathcal{U}_n$$

および

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{W}_n^{-1} \mathcal{F}_0 \mathcal{W}_n.$$

で与えられる．

写像 $\mathcal{W}_n$ は $|y^{(n)} - \omega| < \dfrac{1}{M_n}$ において定義され，この円環を狭い円環 $|y - \omega| < \dfrac{1}{M_0}$ に写す．$\mathcal{W}_n$ を

$$\begin{cases} x = \xi + p_n(\xi, \eta) \\ y = \eta + q_n(\xi, \eta) \end{cases} \quad \text{with} \quad \xi = x^{(n)}, \eta = y^{(n)} \tag{2.14}$$

の形に書いた上で，$p_n(\xi, \omega), q_n(\xi, \omega)$ およびその第一微分が一様にある関数 $p(\xi), q(\xi)$ に収束することを示さねばならない．このとき

$$x = \xi + p(\xi), \quad y = \omega + q(\xi)$$

は定理 1 の不変曲線を表す．

p_n, q_n の収束性そのものは

$$|p_n| + |q_n| < \sum_{\nu=1}^{n} (|u_\nu| + |v_\nu|) < \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{N_\nu}$$

よりただちにしたがう．

十分大きな N_0 に対して，右辺は ε より小さくできる．p_n, q_n の微分の収束性を証明するために，$\mathcal{U}_n$ のヤコビ行列式を

$$U_n = \begin{pmatrix} 1 + u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & 1 + v_\eta \end{pmatrix},$$

と書く．すると, ((2.7’) に対する)(2.13) より,

$$|U_n - I| < \frac{1}{N_n}$$

を得る．ここで $|V|$ は行列 V の要素の絶対値の最大値を表す．鎖則により, $\mathcal{W}_n$ のヤコビ行列は

$$W_n = U_1 U_2 \cdots U_n$$

で与えられる．右辺は行列の乗算である．p_n, q_n の微分の収束性は W_n の収束性, つまり行列の積の収束性と同値である．(2.13) 式によれば行列 U_ν は

$$I + \frac{1}{N_\nu} \quad ただし \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

によって majorize されるから, 交換積 (commutative product)

$$\prod^{\infty} \left(I + \frac{1}{N_\nu} J \right) \quad または \quad \prod_{\nu=1}^{\infty} \exp \frac{1}{N_\nu} J$$

の収束性を証明すれば十分である．これの収束性は明らかである．その上, 見積もり

$$\begin{aligned} |W_n - I| \le & \left| \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{N_\nu} J \right) - I \right| \le \left| \exp \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{N_\nu} J \right) - I \right| \\ \le & \exp 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{N_\nu} - 1 \le \exp \frac{c_2}{N_0} - 1 \le \frac{c_3}{N_0}. \end{aligned}$$

を得る．N_0 を十分大きく取ることにより,

$$|W_n - I| < \varepsilon$$

を達成できる．これから $s = 1$ の場合の (1.5) が得られる．

以上のことから,($s = 1, \alpha(r) = r$ の特別の場合の) 定理 1 の証明は定理 2 の証明に帰着される．定理 2 の証明のために 3 節でいくつかの道具立てを展開し, 証明は 4 節で行う．

3. 差分方程式; 平滑化作用素

a) 定理 2 の変換 (2.7) を構築するのに差分方程式

$$w(x + \omega) - w(x) = h(x) \tag{3.1}$$

を解くことが基本的に重要である．ここで, w, h は周期 2π, 平均ゼロの関数である．数 ω は条件 (2.3’) を満たすことが想定されている:

$$\left| \omega - \frac{2\pi m}{n} \right| \ge \varepsilon n^{-\tau + 1/2} \tag{3.1}$$

ここで $\tau = \sigma - 1 \geq 3$ は整数である.

補題 1. h が $\tau \geq 3$ 回連続微分を持てば, (3.1) 式は連続解を持つ. その解を $w = Lh$ と書くと, c を絶対定数として

$$|Lh|_0 \leq \frac{c}{\varepsilon}|h|_\tau \tag{3.2}$$

が成り立つ. h が定数の場合には $Lh = 0$ と定義する.

<u>証明</u>. 三角多項式

$$h = \sum_{k \neq 0} h_k e^{ikx}$$

の解は

$$w = \sum_{k \neq 0} \frac{h_k}{e^{ik\omega} - 1} e^{ikx} \tag{3.3}$$

で与えられる. 不等式 (3.2) からフーリエ係数に関する見積もりが要請される. すなわち, h は τ 回連続微分可能であるから,

$$|h_k| \leq |k|^{-\tau}|h|_\tau \quad (k \neq 0)$$

が成り立つ. 条件 (3.1') は小分母に対して

$$|e^{ik\omega} - 1| = 2\sin|\frac{\omega k - 2\pi l}{2}| \geq \frac{2}{\pi} \cdot \varepsilon |k|^{-\tau + 3/2}.$$

であることを意味する. ゆえに

$$|\frac{h_k}{e^{ik\omega} - 1}| \leq \frac{\pi}{2\varepsilon}|k|^{-3/2}|h|_\tau,$$

であり, だから級数 (3.3) 絶対収束し,

$$c = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3/2}.$$

として (3.2) は証明された. □

$h(x, y)$ が 2 変数関数であって, x に関し周期 2π で平均がゼロであれば, 差分方程式

$$w(x + \omega, y) - w(x, y) = h(x, y)$$

は同様にして解け, 補題 1 から, 解 $w = Lh$ に対して見積もり.

$$|Lh(x, y)|_0 \leq \frac{c}{\varepsilon}|D_x^\tau h|_0 \tag{3.4}$$

が得られる. ただし, 右辺が存在し, 連続であることを仮定する.

b) **平滑化作用素** ([11] 参照). 2 変数関数に対する平滑化作用素を導入する. これは任意の関数 $h(x,y)$ を滑らかな関数によって近似する. しかし, この作用素の特徴は, はじめから滑らかな関数 $h(x,y)$ を近似する場合に精度が高いことである. この性質は補題 2 で表現される.

$h(x,y)$ はある領域で定義される連続関数であるとする. その領域として無限帯

$$a < y < b$$

を取ろう. x 方向および y 方向への近似の度合は別々にしておき, 大きなパラメータ $N, M > 1$ で測ることにする. 平滑化された関数 $T_{NM}h$ はもっと狭い帯

$$\alpha = a + \frac{1}{M} < y < b - \frac{1}{M} = \beta$$

において

$$T_{NM}h(x,y) = \int\int_{a<y'<b} \chi_{NM}(x-x', y-y')h(x',y')dx'dy'. \tag{3.5}$$

によって定義されることになる. ここで $2M^{-1} < b-a$ と仮定する. 積分核 χ_{NM} は

$$\chi_{NM}(x,y) = N\chi(Nx)\cdot M\chi(My)$$

の形に取る. ここで $\chi(x)$ は微分がすべて連続な関数であって

$$\chi(x) \equiv 0 \quad \text{for} \quad |x| > 1, \tag{3.6}$$

および

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \chi(x)dx = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad k=0 \\ 0 & \text{for} \quad 0<k<l \end{cases} \tag{3.7}$$

を満たす. ここで l は固定した数である. こうして, T_{NM} は l に依存する. l は (2.4) のように取る.

条件 (3.6) によると, $|x| > N^{-1}$ および $|y| > M^{-1}$ のとき χ_{NM} はゼロになる. したがって, (3.5) しきにおいて, 積分は $\chi_{NM}(x-x', y-y')$ の台の上で行うべきである. $\alpha < y < \beta$ であるから, 台は $a < y' < b$ に含まれる. ゆえに新しい積分変数を導入して, (3.5) を

$$T_{NM}h(x,y) = \int\int_{|\xi|<1,|\eta|<1} \chi_{11}(\xi,\eta)h(x-\frac{\xi}{N}, y-\frac{\eta}{M})d\xi d\eta. \tag{3.8}$$

の形に書くことができる.

条件 (3.7) は次数 (degree) の多項式 $p(x,y)$ が保存することを意味する. すなわち,

$$T_{NM}p(x,y) = p(x,y). \tag{3.9}$$

補題 2. $h(x,y)$ が $a<y<b$ において連続であれば, $\alpha < y < \beta$ において

$$|D_x^{Q_1} D_y^{Q_2} T_{NM}h| \le c_\rho N^{Q_1} M^{Q_2} \sup_{a\le y\le b}|h| \quad \text{for all} \quad \rho_1, \rho_2 \tag{3.10}$$

である．ただし，c_ρ は関数 χ および ρ_1, rho_2 に依存する．$h(x,y)$ が l 回連続微分可能であれば，$\alpha < y < \beta$ において

$$|h - T_{NM}h| \leq c \sup_{\rho_1+\rho_2=l, a<y<b} N^{-Q_1}M^{-Q_2}|D_x^{Q_1}D_y^{Q_2}h| \tag{3.11}$$

である．ただし，定数 c は関数 $\chi(x)$ に依るが，M, N には依らない．

証明．(3.10) の証明は (3.5) よりただちにしたがう．すなわち，

$$\begin{aligned}
|D_x^{Q_1}D_y^{Q_2}T_{NM}h(x,y)| \leq &\sup_{a<y<b}|h|\int\int|D_x^{Q_1}D_y^{Q_2}\chi_{NM}(x-x', y-y')|dx'dy' \\
\leq &\sup_{a<y<b}|h|N^{Q_1}M^{Q_2}\int|D_x^{Q_1}\chi(x)|dx\int|D_y^{Q_2}\chi(y)|dy.
\end{aligned}$$

(3.11) の証明のために式 (3.8) を使う．$h(x-\dfrac{\xi}{n}, y-\dfrac{\eta}{M})$ を $\xi = \eta = 0$ において次数 $< l$ までテイラー展開する．T_{NM} は次数 $< l$ の多項式を保存するから $h(x-\dfrac{\xi}{n}, y-\dfrac{\eta}{M})$ の残余項 $\tau_l(x,y,\xi,\eta)$ のみが $(I - T_{NM})h$ に寄与する．この項は

$$|r_1(x,y,\xi,\eta)| \leq \sup_{\rho_1+\rho_2=l, x', y'} 2\frac{|\xi^{Q_1}\eta^{Q_2}|}{N^{Q_1}M^{Q_2}}|D_x^{Q_1}D_y^{Q_2}h(x',y')|,$$

によって見積もることができる．ここで $|x'-x| < \dfrac{1}{N}$, $|y'-y| < \dfrac{1}{M}$ および $|\xi|, |\eta| < 1$ である．ゆえに (3.8) 式より，

$$|(I - T_{NM})h(x,y)| \leq \sup_{\rho_1+\rho_2=l, x', y'} N^{-Q_1}M^{-Q_2}|D_x^{Q_1}D_y^{Q_2}h(x',y')|c,$$

を得る．ここで

$$c = 2\sup_{\rho_1+\rho_2=l}\int\int|\xi^{Q_1}\eta^{Q_2}\chi_{11}(\xi,\eta)|d\xi d\eta.$$

である．これで補題 2 が証明された．□

見積もり (3.2) および (3.10) の例として以下の 2 つを挙げよう．$\alpha < y < \beta$ に対して $\rho_1 = \tau, \rho_2 = 0$ として

$$|LT_{NM}h(x,y)| \leq \frac{c}{\varepsilon}|D_x^\tau T_{NM}h|_0 \leq c_Q c\frac{N^\tau}{\varepsilon}|h|_0$$

が成り立つ．また

$$N > \varepsilon^{-1}, \quad \sigma = \tau + 1$$

と選べば，

$$|LT_{NM}h| \leq c_Q c N^{\tau+1}|h|_0 = c_q c N^\sigma |h|_0. \tag{3.12}$$

が成り立つ．同様に

$$|L^2 T_{NM}h| \leq c_q c^2 N^{2\sigma}|h|_0. \tag{3.13}$$

が成り立つ. $T_{NM}h$ は h 自身より小さな領域でのみ定義されていることを改めて指摘しておく.

c) 完全を期すため, 性質 (3.6), (3.7) を持つ関数 $\chi(x)$ の構成法を示しておく. $\varphi(x)$ を任意の C^∞ 関数とし, $|x| > \frac{1}{2}$ でゼロ, $|x| < \frac{1}{2}$ で正であるとする. このとき l 個の定数 $a_1, \ldots, a_l$ を決めて

$$\chi(x) = \sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda \varphi(x - \delta_\lambda) \quad \text{with} \quad \delta_\lambda = \frac{\lambda}{2l}$$

が要請された性質を持つようにできる. 定数 $a_1, \ldots, a_l$ は行列式がゼロでない線形系 (3.7) によって定義される. すなわち, そうでないときは

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^\mu \varphi(x - \delta_\lambda) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x + \delta_\lambda)^\mu \varphi(x) dx$$

の非自明な線形結合がゼロになるだろう. つまり, 次数 $< l$ の多項式 $p(x) \not\equiv 0$ で

$$\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} p(x + \delta_\lambda)\varphi(x)dx = 0, \quad \lambda = 1, \ldots, l.$$

なるものが存在するはずである. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} p(x+\delta)\varphi(x)dx$ は p と同じ次数の多項式であるから, l 個未満のゼロしか持たない. これで主張が証明された.

4. 定理 2 の証明

a) u, v の構成

定理 2 を証明するために, ふたたび円環写像

$$\begin{cases} x_1 = x + y + f(x,y) & \text{in} \quad |y - \omega| < \dfrac{1}{M_-} \\ y_1 = y \qquad\quad + g(x,y) \end{cases} \tag{4.1}$$

を考え,

$$\begin{cases} x = \xi + u(\xi, \eta) \\ y = \eta + v(\xi, \eta) \end{cases}$$

によって変換して新しい写像

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi + \eta + \varphi(\xi, \eta) \\ \eta_1 = \eta \qquad + \psi(\xi, \eta) \end{cases}$$

に持って行きたい. 新しい写像はねじれ写像に近い.

まず u, v についての以下の構成法を motivate する.

$$\begin{cases} \xi + \eta + \varphi + u_1 & = & \xi + u + \eta + v + f(\xi + u, \eta + v) \\ \eta + \psi + v_1 & = & \eta + v + g(\xi + u, \eta + v) \end{cases}$$

ここで簡単のため $u_1 = u(\xi_1, \eta_1); v_1 = v(\xi_1, \eta_1)$ と書いた. $\varphi = \psi = 0$ と置いたときの方程式を以下のような意味で線形化する. すなわち, f, g, u, v および $|\eta - \omega|$ が λ と同じ程度の大

きさであると考え, λ^2 程度の大きさの量を捨てる. たとえば, u_1 は $u(\xi+\omega,\eta)$ で置き換える. $|u_1 - u(\xi+\omega,\eta)| \le |u|_1 \cdot |\eta-\omega| + \cdots$ であり, これは λ の 2 次でゼロに向かうから, 上の置き換えはこの線形化プロシージャに矛盾しない. この線形化により

$$\begin{aligned} u(\xi+\omega,\eta) - u(\xi,\eta) &= v + f(\xi,\eta) \\ v(\xi+\omega,\eta) - v(\xi,\eta) &= g(\xi,\eta) \end{aligned}$$

が導かれる. この差分方程式は小分母を導入する. 第二の式は g の平均値がゼロのときのみ解けることを指摘しておく. また, 関数 f, g は微分がなくなることを相殺するために適当に滑らかにされることは以下の議論にとって重要である.

この理由で, u, v を系

$$\left\{ \begin{array}{l} u(\xi+\omega,\eta) - u(\xi,\eta) = v + Tf(\xi,\eta); [u] = 0 \\ v(\xi+\omega,\eta) - v(\xi,\eta) = T(g - [g]). \end{array} \right. \tag{4.5}$$

の解としてここで定義する. T は前節の作用素 T_{NM} のことであり, $[\cdot]$ は角変数に関する関数の平均値を表す. (4.5) の第一式の平均値から

$$[v] + [Tf] = 0$$

が得られ, だから

$$v = L(Tg) + [v] = L(Tg) - [Tf].$$

である. (4.5) の第一式の右辺の平均値はゼロであるから,

$$u = L(v + Tf) = L^2Tg + LTf.$$

であることがわかる. 関係式

$$\left\{ \begin{array}{l} u = L^2Tg + LTf \\ v = LTg - [Tf] \end{array} \right.$$

は円環

$$|\eta - \omega| < \frac{1}{M_-} - \frac{1}{M}.$$

内に u, v を定義する.

b) u, v の見積もり.

(3.12), (3.13) および仮定 (2.6) より

$$|u| + |v| \le c_3 N^{2\sigma}(|f|_0 + |g|_0) < c_3 N^{2\sigma}\delta_- = c_3 N^{2\sigma} M^{-2} \tag{4.7}$$

がしたがい, 同様に

$$\left\{ \begin{array}{l} |D_\xi u| + |D_\xi v| \le c_4 N^{2\sigma+1} M^{-2} \le c_4 N^{2\sigma} M^{-1} \\ |D_\eta u| + |D_\eta v| \le c_4 N^{2\sigma} M^{-1}. \end{array} \right. \tag{4.7'}$$

が出る. (2.4) より $\nu > 2\sigma + 1$ であるから

$$
\left\{
\begin{array}{l}
|u| + |v| \leq \dfrac{1}{NM} \\
|u|_1 + |v|_1 \leq \dfrac{1}{N}.
\end{array}
\right.
\tag{4.8}
$$

が得られる. これで (2.7') が示された.

こうして, u, v は円環

$$|\eta - \omega| < \frac{1}{M_-} - \frac{1}{M} > \frac{3}{M} \quad \left(\text{if} \quad M_0 > 4^{\frac{1}{\kappa - 1}}\right)$$

内で定義され, そこで (4.7) を満足する. 陰関数定理より, (4.2) の下での $|\eta - \omega| < \dfrac{3}{M}$ の像は, 少なくとも円環

$$|y - \omega| < \frac{2}{M}$$

を被覆する. ゆえに (4.2) の逆写像は $|y - \omega| < \dfrac{2}{M}$ 内で一意に定義され, そこで連続微分可能である (ただし $M \geq M_0$ が十分大きく選ばれているとして).

このことから, 写像 (4.3) は $|\eta - \omega| < \dfrac{1}{M}$ 内で定義され微分可能であることがわかる. すなわち, (4.2) はこの円環を

$$|y - \omega| \leq |\eta - \omega| + |v| < \frac{1}{M} + \frac{1}{MN}$$

の中に写し, (4.1) は

$$|y_1 - \omega| < |y - \omega| + \delta_- < \frac{1}{M} + \frac{1}{MN} + \frac{1}{M^2}$$

の中に写す. ここでは (4.2) の逆も定義されている. ゆえに (4.3) は $|\eta - \omega| < \dfrac{1}{M}$ 内で定義され, 微分可能である.

c) $|\varphi| + |\psi|$ の見積もり.

$|\varphi|$, $|\psi|$ を $|\eta - \omega| < \dfrac{1}{M}$ 内で見積もるために, 最初に指摘しておきたいのは, 仮定により, 円 $y =$ 一定 に近いどの閉曲線, たとえば $\eta = \eta^\circ$ の像曲線

$$\eta_1 = \eta^0 + \psi(\xi, \eta^0)$$

も $\eta = \eta^\circ$ と交わる, すなわち, $\psi(\xi, \eta^\circ)$ は少なくともゼロ点をひとつ持つ. これは

$$
\begin{aligned}
\sup_\xi |\psi(\xi, \eta^0)| &\leq \operatorname{osc}_\xi \psi(\xi, \eta^0) \\
&\leq 2 \sup_\xi |\psi(\xi, \eta^0) + w(\eta^0)|
\end{aligned}
$$

であることを意味する. ここで $w(\eta)$ は η のみの任意の関数であり, $\operatorname{oso}_\xi \psi(\xi, \eta^\circ)$ は ψ の振動を表す. $w(\eta) = -[Tg(\xi, \eta)]$ と選ぶことにする.

このとき (4.4) より,

$$\frac{1}{2}|\psi(\xi,\eta)|_0 \le |\psi(\xi,\eta)-[Tg(\xi,\eta)]|_0 = |v(\xi,\eta)-v(\xi_1,\eta_1)+g(\xi+u,\eta+v)-[Tg]|_0$$

である. v が (4.5) を満たすことを使うと,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\psi(\xi,\eta)|_0 \le\ & |v(\xi+\omega,\eta)-v(\xi_1,\eta_1)|_0+|g(\xi+u,\eta+v)-Tg|_0\\ \le\ & |D_\xi v|_0|\eta-\omega+\varphi|_0+|D_\eta v|_0|\psi|_0+|Tg(\xi+u,\eta+v)-Tg|_0\\ & +\sup_{|y-\omega|<\frac{1}{M_-}-\frac{1}{M}}|(I-T)g(x,y)|\end{aligned}$$

である. (4.7') を考慮すると,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\psi|_0 \le\ & c_4N^{2\sigma+1}M^{-2}|\eta-\omega|+|v|_1(|\varphi|_0+|\psi|_0)+|Tg(x,y)|_1(|u|_0+|v|_0)\\ & +|(I-T)g(x,y)|_0\end{aligned}$$

を得る. 最後の 2 つの項には変数 x,y を示しておいた. この項では大きい方の円環 $|y-\omega|<\frac{1}{M_-}-\frac{1}{M}$ にわたる極大を取る.

φ に関しては (4.4) および (4.5) の第一式より同様の見積もりを得る. すなわち, 2 つの関係式を差し引いて

$$\varphi = u(\xi+\omega,\eta)-u(\xi_1,\eta_1)+f(\xi+u,\eta+v)-Tf$$

および

$$\begin{aligned}|\varphi|_0 \le\ & c_4N^{2\sigma+1}M^{-2}|\eta-\omega|+|u|_1(|\varphi|_0+|\psi|_0)+|Tf(x,y)|_1(|u|_0+|v|_0)\\ & +|(I-T)f(x,y)|_0\end{aligned}$$

が成り立つ. この関係を $|\psi|_0$ の見積もりに加え, (4.7) を考慮すると,

$$\begin{aligned}|\varphi|_0+|\psi|_0 \le\ & 3c_4N^{2\sigma+1}M^{-3}|\eta-\omega|+(|u|_1+2|v|_1)(|\varphi|_0+|\psi|_0)\\ & +(2|Tg(x,y)|_1+|Tf|_1c_3N^{2\sigma}M^{-2})\\ & +|(I-T)g|_0+|(I-T)f|_0\end{aligned}$$

となる. 第二項は無視できる. というのは, (4.8) より $N>4$ に対して $|u|_1+2|v|_1<\frac{2}{N}<\frac{1}{2}$ であり, この項は左辺に移すことができるからである. 項 $|Tf|_1$ は補題 2 により

$$|Tf|_1 \le c_5M|f|_0 < \frac{c_5}{M}.$$

と見積もることができる. g についても同様な見積もりを行えば

$$|\varphi|_0+|\psi|_0 \le c_6\{N^{2\sigma+1}M^{-3}+|(I-T)g|_0+|(I-T)f|_0\}$$

であることがわかる.

前提 (2.6') と補題 2 を使って

$$\begin{aligned} |(I-T)g|_0 + |(I-T)f|_0 \le \;& c_7 \sup_{\rho_1+\rho_2=l} (N^{Q_1} M^{-Q_2} N_-^{Q_1+1} M_-^{Q_1}) \\ \le \;& c_7 N_- \sup_{\rho_1+\rho_2=l} \left(\frac{N_-}{N}\right)^{Q_1} \left(\frac{M_-}{M}\right)^{Q_2} = c_7 N_- \left(\frac{N_-}{N}\right)^{l} = c_7 N_-^{1+(1-\kappa)l} \end{aligned}$$

を得る. したがって

(4.9) $$|\varphi|_0 + |\psi|_0 \le c_8 \{N^{2\sigma+1} M^{-3} + N_-^{1+(1-\kappa)l}\}.$$

そこで関係 (2.4) を使う. すると

$$c_8 N^{2\sigma+1} M^{-3} = c_8 M^{\frac{2\sigma+1}{\nu} - 3} < \frac{1}{2} M^{2\kappa}.$$

であることが, M_0 が十分大きく

(4.10) $$\nu > \frac{2\sigma+1}{3-2\kappa} = 6\sigma+3$$

である限り成り立つ. (4.10) は (2.4) から出る. 同様に

$$c_8 N_-^{1+(1-\kappa)l} < \frac{1}{2} M^{-2\kappa} = \frac{1}{2} N_-^{-2\kappa^2\nu}.$$

が

(4.11) $$(\kappa-1)l > 1 + 2\kappa^2\nu$$

である限り成り立つ. この式も (2.4) から出る. ゆえに (4.9) から

$$|\varphi|_0 + |\psi|_0 \le M^{-2\kappa} = \delta$$

が導かれる. これで (2.9) が証明された.

d) 高階微分の見積もり.

最後に, (2.9') を証明するために, 新しい変数

$$\begin{aligned} \hat{x} = Nx, \quad \hat{\xi} = N\xi, \\ \hat{y} = My, \quad \hat{\eta} = M\eta. \end{aligned}$$

を導入する. 写像 (4.1) は

(4.12) $$\begin{cases} \hat{x}_1 = \hat{x} + \dfrac{N}{M}\hat{y} + \hat{f}(\hat{x},\hat{y}) \\ \hat{y}_1 = \hat{y} \qquad\qquad + \hat{g}(\hat{x},\hat{y}). \end{cases}$$

の形になる．ただし

$$\hat{f} = Nf, \quad \hat{g} = Mg$$

まず，$\hat{f}, \hat{g}$ の $\hat{x}, \hat{y}$ に関する階数 l までの微分が N, M に依らない定数によって見積もることができることを示したい．

このために，仮定 (2.6') を使い，$\rho_1 + \rho_2 = l$ に対して，

$$\begin{aligned} |D_{\hat{x}}^{Q_1} D_{\hat{y}}^{Q_2} Nf| + |D_{\hat{x}}^{Q_1} D_{\hat{y}}^{Q_2} Mg| \le N_- \frac{M}{M_-} \cdot \left(\frac{N_-}{N}\right)^{Q_1} \left(\frac{M_-}{M}\right)^{Q_2} &\le N_- \frac{M}{M_-} \left(\frac{N_-}{N}\right)^{l} \\ &= N_-^{1+(1-kappa)(l-\nu)} \le 1 \end{aligned}$$

を得る．なぜなら，(4.11) より指数は負だからである．一方，領域 $|y-\omega| < \dfrac{1}{M_-}$ において

$$|Nf| + |Mg| \le M \cdot \delta_- = \frac{1}{M} \le 1$$

である．ゆえに関数 $\hat{f}(\hat{x}, \hat{y}), \hat{g}(\hat{x}, \hat{y})$ はすべての実数 $\hat{x}$ に対して定義され，

$$|\hat{y} - M\omega| < \frac{M}{M_-} > 1,$$

内で有界であって 1 より小さく，階数 l の微分はすべて有界であって 1 より小さい．このことから，(平均値定理を繰り返し使って) 階数 l までのすべての微分は

$$|\hat{f}(\hat{x}, \hat{y})|_l + |\hat{g}(\hat{x}, \hat{y})|_l < c_0$$

によって見積もられる．定数は l のみに依存する．

ゆえに写像 (4.12)，それを $\hat{\mathcal{F}}$ とも書くことにして，を $\hat{x}_1 = F(\hat{x}, \hat{y}), \hat{y}_1 = G(\hat{x}, \hat{y})$ の形に書くと，

$$|F|_l + |G|_l < c_{10}$$

が成り立つ．短く書けば，$|\hat{\mathcal{F}}|_1 < c_{10}$ である．

同様な見積もりで $\hat{\mathcal{U}}$ についてもできる．すなわち，

$$\hat{x} = \hat{\xi} + \hat{u}(\hat{\xi}, \hat{\eta}) : \quad \hat{y} = \hat{\eta} + \hat{v}(\hat{\xi}, \hat{\eta})$$

ここで $\hat{u} = Nu, \hat{v} = Mv$ である．ξ, η に関する $\hat{u}, \hat{v}$ の微分は (4,6) および補題 2 から見積もることができて ($\rho_1 + \rho_2 \le l + 2\sigma$ として)

$$|\hat{u}|_l + |\hat{v}|_l \le c' M N^{2\sigma} \delta_- = c' M^{-1} N^{2\sigma} < \frac{1}{N} < \frac{1}{4}$$

となる．ここで微分は $\hat{\xi}, \hat{\eta}$ に関して取る．陰関数定理が保証するところによると，逆写像が存在して，階数 l までの微分の見積もりは $|y-\omega| < \dfrac{2}{M}$ 内で N, M に依存しない．記号的には

$$|\hat{\mathcal{U}}|_l < 2, \quad |\hat{\mathcal{U}}^{-1}|_l < 2$$

と書ける. だから写像

$$\hat{\Phi} = \hat{\mathcal{U}}^{-1}\hat{\mathcal{F}}\hat{\mathcal{U}}$$

は階数が l までの微分が N, M に依らないある定数, たとえば c_{11} によって見積もることのできる関数によって表現できる. つまり, φ, ψ に対して

$$|D_{\hat{x}}^{Q_1} D_{\hat{y}}^{Q_2} N\phi| + |D_{\hat{x}}^{Q_1} D_{\hat{y}}^{Q_2} M\psi| \leq c_{11} N^{Q_1} M^{Q_2} \quad \text{for} \quad |\eta - \omega| < \frac{1}{M}$$

かつ $\rho_1 + \rho_2 \leq l$ である. $N_0 > c_{11}$ として, 見積もり (2.9') を示したことになる. これで定理 2 の証明が完了した.

5. いくつかの一般化

a) いままでのところ, 定理 1 の証明は $\alpha(r) = r$ および $s = 1$ に対するものであった. この節では, 一般の $\alpha(r)$ の場合が上で考えた場合に帰着されることを示す. その上, $s(> 1)$ 回微分可能な曲線を得るための証明をどのように修正するかも指摘する.

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta + \alpha(r) + F(r, \theta), \quad a \leq r \leq b, \\ r_1 &= r + G(r, \theta) \end{aligned}$$

は与えられた写像とする. 独立変数として

$$x = \theta, \quad y = \alpha(r)$$

を導入する. 仮定 (1.6), (1.7') より, この変換は 1:1 であり, 与えられた bound を持つ l 個の微分を許す. その上, 写像は

$$f(x, y) = F(r, \theta), \quad g(x, y) = \alpha(r + G(r, \theta)) - \alpha(r)$$

として (2.1) の形を取る. これからすると, 条件 (2.2), (2.2') はある c_0 のもとで満たされる. 円環の幅は $\alpha(b) - \alpha(a) \geq c_0^{-1}$ と見積もることができる.

b) 不変曲線の高次の微分可能性は, l を大きくすることによって得られる. このためには, (2.4) 内のパラメータ κ, ν, l の選び方を変え, δ と M の関係を修正する必要がある. その修正について指摘しよう. すなわち, $s \geq 1$ を曲線の持つべき連続微分回数とする. このとき (2.4) を

(5.1) $$\kappa = 1 + \frac{1}{2s+1}, \quad \nu = 6(\sigma + 1), \quad l = 2s + 1 + 3(s+1)^2\nu$$

で置き換え, (2.5) を

$$\delta = M^{-(s+1)\kappa}$$

で置き換える. 4 節の証明は同じようなやり方で, 以下の変更の下で実行できる. c) 節で (4.9) の代わりに

$$\begin{aligned} |\varphi|_0 + |\psi|_0 \leq\ & c_8 \left\{ N^{2\sigma+1}(M^{-s-2} + M^{-2s-1}) + N_-^{1+(1-\kappa)l} \right\} \\ \leq\ & 2c_8 \left\{ N^{2\sigma+1} M^{-s-2} + N_-^{1+(1-\kappa)l} \right\}. \end{aligned}$$

を得る．右辺を $\leq M^{-\kappa(s+1)}$ にするために，

$$s+2>\kappa(s+1)+\frac{2\sigma+1}{\nu}$$

および

$$(\kappa-1)l>1+(s+1)\kappa^2\nu$$

が成り立つように ν, l を十分大きく決めねばならない．これら 2 つの関係式はどちらも (5.1) からしたがう．

(5.2) の δ の選び方の結果, (4.8) を

$$|u|_s+|v|_s\leq\frac{1}{N}$$

で置き換えることができる．これによって写像 (2.14) の第 s 階の微分の一様収束性, したがって極限曲線の第 s 階の微分の連続性が証明できる．

c) **微小ねじれ.** 写像の不動点の安定性の研究のために, ねじれ写像 (1.1) における回転角が微小区間内を動く場合へと定理 1 を拡張しておくことが重要である．ここでその拡張について記述しよう．

このためにパラメータ γ を範囲

$$0<\gamma\leq 1$$

内に導入し, 写像 (1.2) を

$$\left\{\begin{array}{l}\theta_1=\theta+\gamma(\alpha(r)+R(r,\theta))+\beta\\ r_1=r+\gamma G(r,\theta)\end{array}\right. \tag{5.3}$$

の形に書く．ここで r は $a\leq r\leq b, b-a\geq 1$ を動く．

定理 3. 仮定 (1.6), (1.7), (1.7') の下で, (1.8) を

$$\theta_1'=\theta'+\gamma\alpha(r_0)$$

で置き換えても定理 1 は成り立つ．数 $\delta_0=\delta_0(s,\varepsilon,c_0)$ は γ とは独立に選ぶことができる．

この形では (5.3) の非摂動写像は

$$\theta_1=\theta+\gamma\alpha(r)+\beta,\quad r_1=r$$

である．ただし回転角 $\gamma\alpha(r)$ は区間 $(\gamma\alpha(a),\gamma\alpha(b))$ を動く．この区間は γ が小さければ小さい．

この場合, このような小さな区間に (1.10) を満たすような数 ω があるかどうかはっきりしない．したがって, (1.9) と (1.10) を修正して

$$\alpha(a)+\varepsilon<\frac{\omega-\beta}{\gamma}<\alpha(b)-\varepsilon, \tag{5.4}$$

および

$$|n\omega - 2\pi m| \geq \gamma\varepsilon n^{-3/2}. \tag{5.5}$$

にする．すると, (5.4) における許される ω の密度は 1 に近づくはずである．

上に与えた証明は, パラメータ γ を適切な場所におけば同様に遂行できる．(5.5) を考慮すると, (3.2) は

$$|\gamma Lh| \leq \frac{c}{\varepsilon}|h|_\tau$$

へと修正さるべきである．一方, (4.6) は

$$\begin{cases} u = (\gamma L)^2 Tg + \gamma LTf \\ v = \gamma LTg - [Tf] \end{cases} \tag{5.6}$$

によって置き換えられるべきである．この式によると, γL に関する bound のみが入るべきである．残りの詳細は曲折なしに行える．

参考文献

[1] H. Poincaré, Sur une th'eoréme de géométrie, *Rend. Circ. mat. Palermo* **33**, 375-407(1912).

[2] G.D. Birkhoff, The restricted problem of three bodies. *Rend. Circ. mat. Palermo* **39**, 1-70(1915).

[3] G.D. Birkhoff, Surface transformation and their dynamical applications. *Acta Math.* **43**, 1-110(1922).

[4] G.D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, New York, 1927.

[5] G.L. Siegel, *Vorlesungen über Himmelsmechanik*, Springer Verlag, 1956.

[6] A.N. Kolmogorov, General theory of dynamical systems and classical mechanics, Proceedings of the International Congress of Math. 1954, vol.1, pp.315-333, Amsterdam, 1957.

[7] A.N. Kolmogorov, Doklady Akad. Nauk **98**, 527-530(1954).

[8] V.I. Arnold, Isvest. Akad. Nauk vol.25, 21-86(1961).

[9] V.I. Arnold, Doklady Akad. Nauk **137**, 255-257(1961).

[10] V.I. Arnold, Doklady Akad. Nauk **138**, 13-15(1961).

[11] J. Moser, A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations, *Proc. Nat. Acad. Sciences* **47**, 1824-1831(1961).

[12] J. Moser, Perturbation theory for almost periodic solutions for undampted nonlinear differential equations, presented at the Symposium on Nonlinear Differential Equations, Colorado Springs, Aug. 1961, to appear.