谷川清隆 訳

Uspkhii Math. Nauk **32**:6 (1977), 5-66

近可積分ハミルトン系の安定時間の指数関数的評価

An exponential estimate of the time of stability of nearly-integrable Hamiltonian systems

N. N. Nekhoroshev

目次

はじめの 3 節は非公式に書いた. 序 (1 節) の最初の部分は摂動論に基づく近可積分系研究の概観である. 1 節の後半ではこの論文の結果に関して詳しく述べる. 3 節では基本定理の証明について詳説する. ここで安定性時間の指数関数評価を確立する. 4 節から 9 節までは定理の陳述および証明に費やされる. 基本定理を証明するのに必要なある種の補題の証明は別のところに発表する. これらの補題の定式化が 10 節の内容である. その証明と 5 節から 9 節の内容が基本定理の完全な証明を構成する.

11 節は非公式に書いた. そこでは基本定理の証明の方法と発想を用いて近可積分系のふるまいに関しいくつかの帰結を出す. 最後の 12 節では基本定理の帰結として惑星系の安定性時間を指数関数的に評価する.

1 節. 序

1.1. 近可積分ハミルトン系. 永劫安定性および有限時間の安定性. この論文では正準方程式が

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi},\ \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I},$$

で, ハミルトン関数が

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi), \tag{1.1}$$

のハミルトン系における変数 I のふるまいを調べる. ここで $\varepsilon \ll 1$ は小さなパラメータであり, 摂動 $\varepsilon H_1(I, \varphi)$ は変数 $\varphi = \varphi_1, \ldots, \varphi_s$ に関し 2π 周期であり, I は s 次元ベクトル $I = I_1, \ldots, I_s$ である.

φ_i は角変数, I_i は作用変数と呼ばれる. 作用変数のみに依存するハミルトン関数を持つ系は可積分といわれ, 系 (1.1) は近可積分系と呼ばれる. 系 (1.1) はまたハミルトン関数 H_0 を持つ無摂動系への摂動と呼ばれる.

ハミルトン方程式より, 変数 I_i は無摂動系の第一積分であることがわかる. また摂動系の解に沿ってのこの変数の変化率はあきらかに ε 程度の大きさである. ところが長い時間間隔の間に ($1/\varepsilon$ よりかなり長い), 作用変数の値はほんの少ししかもとの値と違わない.

これに関して, いくつもの疑問が生じる. 重要なもののみ挙げよう. 解 $I(t), \varphi(t)$ のすべてまたは一部に対して, 点 $I(t)$ はその初期値の近くに永遠にとどまっているだろうか, すなわち, これらすべての解に対して $|I(t) - I(0)| < \alpha(\varepsilon)$ がすべての実数 t に対して成り立つか? ここで $\varepsilon \to 0$ のとき $\alpha(\varepsilon) \to 0$ である. このような解は永劫安定であるという. 永劫安定解が存在すれば, それはどの位の量あるか? 永劫安定でない解があるとして, その「安定性時間」の大きさの程度は？主として, ここでは安定性時間の下限に興味がある. すなわち, 十分小さなすべての ε に対して, 時間区間 $[0, T(\varepsilon)]$ の間に $I(t)$ が $I(0)$ に近くとどまる, つまり,

$$|I(t) - I(0)| \ll 1 \quad \text{for} \quad t \in [0, T(\varepsilon)]$$

となるような関数 $T(\varepsilon)$ に興味がある.

この論文を通して, 安定性 (有限時間であろうと無限時間であろうと) をこの意味で用いる. 通常のリャプーノフ安定性ではない.

上で述べた疑問のいくつかはラプラスやラグランジュにまでも遡る. 彼らは太陽系の安定性を説明するよりもむしろそれを理解しようとした. Poincaré[2], Birkhoff[3], および Siegel[4], [5] は別の問題を提出した. もっと最近では, Kolmogorov[6], [7], Arnold[8]-[11] および Moser[12], [13] がこれらの問題を答えるのに多大の貢献をしている.

1.2. コルモゴロフ・トーラス. 2 周波数系の永劫安定性. アーノルド拡散. Arnol'd [8],[10] はとくに次の主張を証明した. 無摂動ハミルトン関数 H_0 を「一般形」の関数とする. このときハミルトン関数 (1.1) を持つ系の相空間には方程式 $I_1 =$ 一定$, \ldots, I_s =$ 一定 で与えられるトーラスに近い s 次元不変トーラスの集合が存在する. この集合はコルモゴロフ (Kolmogorov) 集合と呼ばれ, 閉かついたるところ疎であるが, 相空間の「大きな部分」を形成する. もっと詳しく言うと, コルモゴロフ K 集合の補集合の測度は $\varepsilon \to 0$ のとき 0 に向かう.

$\varepsilon \to 0$ のとき, 系 (1.1) のコルモゴロフトーラスは無摂動系の不変トーラス $\{I, \varphi | I = 一定\}$ に変わる. ゆえにコルモゴロフ集合上にある軌跡に対応する解 (これは解の大多数である) は永劫安定である.

コルモゴロフ集合の存在の十分条件は

$$\Delta_1 = \det\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}\right), \tag{1.2}$$

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} & \dfrac{\partial H_0}{\partial I} \\ \dfrac{\partial H_0}{\partial I} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

なる行列式 Δ_1, Δ_2 の少なくともどちらか 1 つが恒等的にゼロにならないことである. ここで Δ_1 は H_0 のヘシアン, すなわち, 2 階微分 $\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j}$ を要素とする s 次の行列の行列式である. (1.3) の行列は対称であり, $(s+1)$ 次であり, $\dfrac{\partial H_0}{\partial I}$ は H_0 の 1 階微分を成分とするベクトルである.

これらの結果の帰結として, 自由度 $2(s=2)$ の系の場合は次のような強い主張が証明されている. すなわち行列式 Δ_2 がゼロでなければ, 系のすべての解は永劫安定である. 条件 $\Delta_1 \not\equiv 0$ および $\Delta_2 \not\equiv 0$ や永劫安定性の性質の意味の詳しい説明は教科書 [27], 365-383 に書かれている.

上で述べた結果ははじめ H が解析的であるとして得られた. J. Moser はこの条件を十分大きな (すなわち, 333 階) 微分の存在に置き換えた ([12], [13]). Moser および Rüssman[31], [32] の努力により, 微分の階数は 6 にまで下げられた.

Zehnder はコルモゴロフ集合の存在が, 滑らかでない汎関数に関する陰関数定理型の一般定理から従うことを証明した ([33] および [34] 参照).

これらの研究すべてにおいて, $s \geq 3$ のコルモゴロフトーラス集合の補集合における解のふるまいは未解決問題として残った. Arnold は, それらの解 $I(t)$ の一部が $I(0)$ から任意に離れるような系の例を構成した ([11] 参照). この効果は「アーノルド拡散」と名づけられた ([14]).

1.3. 安定性時間の指数関数的評価. [11] で構成された不安定な解の点 $I(t)$ が $I(0)$ の近くにいる時間間隔は ε が線形に減少するとき指数関数的に増大する. これに関連して, V.I.Arnold[15] が予想したところによると, 一般形のハミルトン関数を持つ系では, $I(t)$ が $I(0)$ の近くにいる「束縛時間」はすべての初期条件に対して $1/\varepsilon$ のどのベキよりも速く成長する. この主張はここで証明される. この論文では安定性時間の指数関数的評価を確立する.

指数関数的な評価の精密な定式化がこの論文の主要結果定理 4.4 の内容である. ここでは完全に正確でなく, 定理 4.4 と細かな点で異なる定理を述べる.

1.4. 定理. H_0 は 1.7 節で定義するある「急勾配」条件を満たすとする. このとき, 以下の性質をもつ正の定数 a, b および ε_0 がある.

$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ とする. このとき, ハミルトン関数を $H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi)$ とする系の各解 $I(t), \varphi(t)$ に対して

$$|I(t) - I(0)| < \varepsilon^b, \tag{1.4}$$

がすべての $t \in [0,T]$ に対して成り立つ．ただし

$$T = \frac{1}{\varepsilon}\exp(\frac{1}{\varepsilon^a}) \tag{1.5}$$

である．

定数 a と b は H_0 のみに依存する．定数 ε_0 は H_0 と H_1 内の 2 つのパラメータ[1] のみに依存する．後者は H_1 の φ によるフーリエ級数展開の係数の最大量と減少率である．定数 a と b の値は 1.10 節で与え, 1.10, 1.11, および 2.1B 節で議論する．

評価 (1.5) は H が解析的という仮定の下で証明される．H が滑らかであることのみ要請すれば, 評価は指数関数的でなくなり, 級数評価になる．その際, そのべきは H が高い微分を持つほど大きくなる．

指数関数的な評価は, ハミルトン関数が (1.1) より少し一般的な形をしている系でも成り立つ．1.5 および 1.6 節でこの種の系を列挙する．(1.1) と本質的に異なる系への評価の一般化は 2.2 節で議論する．

1.5. パラメータを持つ系に関する指数関数的評価. 4 節から 9 節において次のハミルトン関数を持つ系の指数関数的評価を証明する．

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I,p,\varphi,q). \tag{1.6}$$

ここで p と q は $(n-s)$ 次元ベクトル $(n \geq s)$, 変数 I と p はそれぞれ φ と q に正準共役, 関数 H_1 は $\varphi = \varphi_1,\dots,\varphi_s$ に関し周期 2π である．$n = s$ のときハミルトン関数 (1.6) は (1.1) に一致する．

この一般化によりわれわれの太陽系のような惑星系に主定理を応用できる (詳細は 1.18 節参照)．系 (1.6) へ評価を一般化しても証明の計算はほとんど複雑にならないし, 評価が悪くなることもないことを注意しておく．

系 (1.6) に対する評価 (1.4) と (1.5) の正しさに関する主張からほぼ自動的に同値な次の主張がでる．すなわち，これらの評価は摂動が「遅い時間」εt に依存する非自励系, すなわち, ハミルトン関数を

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I,\varphi,\varepsilon t)$$

とする系でも成り立つ．

(1.6) 式の変数 p と q はパラメータとも呼べる．パラメータや遅い時間への摂動の依存性は主定理における評価 (1.4) や (1.5) を悪くさせない．

コルモゴロフ・アーノルド・モーザーの理論 (1.2 節参照) は, ハミルトン関数が (1.1) の形をしているか, またはそこへ帰着できない限り, この副節で考えた系へは持ち込めない．

1.6. 時間に周期的に依存する摂動を持つ系.

次のハミルトン関数を持つ系を考える．

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I,\varphi,t), \quad \text{ただし} \quad H_1(I,\varphi,t+2\pi) = H_1(I,\varphi,t) \tag{1.7}$$

[1] 定理 4.4 で第二のパラメータの役割を演ずるのは H_1 が解析的であるような変数 φ の実平面の複素近傍の幅 ρ である．よく知られているように, この幅はフーリエ係数の減少率を決める．

勾配条件以外の H_0 に関する条件により, 系の解の安定性時間の指数関数的評価が保証される. これらの条件は (P 勾配条件と呼ばれる), 1.9B 節で与える. これらは $(s+1)$ 個の変数 $I_1,\dots,I_s,T$ の関数 $\mathcal{H}$ に関する勾配条件で, H_0 により $\mathcal{H}(I,T)=H_0(I)+T$ と定義されるものに同値である.

1.7. 急勾配関数. 無摂動ハミルトン関数 H_0 に関する条件で, 系 (1.6) の安定性時間の指数関数的評価を保証する条件を定式化しよう. これらは条件 $|\dfrac{dH_0(I)}{dI}|\geq g>0$ の一般化である. これは (?) 明らかに単一の周波数 $s=1$ を持つ系 (1.1) の I に関する永劫安定性を保証している.

H_0 はユークリッド空間 $\mathbf{E}^s$ のある領域 (domain)G(領域とは開集合のこと) で定義された任意の関数であるとする. $\mathbf{E}^s$ のアフィン部分空間とは任意の次元の平面のことである. I を G の任意の点とし, λ は I を含む平面で $\dim\lambda\neq 0$ とする. $\mathrm{grad}(H_0|_\lambda)$ で, λ に制限した H_0 の勾配を表わし, $m_{I,\lambda}(\eta)$ で中心 I 半径 η の球上のこの勾配の長さの最小値を表わす.

$$m_{I,\lambda}(\eta)=\min_{\{I'\in\lambda:|I-I'|=\eta\}}|\mathrm{grad}(H_0|_\lambda)|_{I'}|.$$

1.7A. 定義. 関数 H_0 が平面 λ 上の点 I において <u>急勾配</u> であるとは, 定数 $C>0,\delta>0$ および $\alpha\geq 0$ があって, すべての $\xi\in(0,\delta]$ に対して

$$\max_{0\leq\eta\leq\xi}m_{I,\lambda}(\eta)>C\xi^\alpha, \tag{1.8}$$

が満たされるときである. 定数 C と δ を <u>勾配係数</u> と呼び, α を <u>勾配指数</u>(index) と呼ぶ.

以下の 2 つの定義では, 本質的に評価 (1.8) の一様性に関する条件のみを課そう.

$\Lambda^r(I)$ で, 点 $I\in\mathbf{E}^s$ を含む $\mathbf{E}^s$ 内の r 次元平面すべての集合を表わす.

1.7B. 定義. s 個 ($s\geq 1$) の変数の関数 H_0 が点 I において急勾配であるとは次の条件が成り立つときである. まず, $g>0$ として $|\mathrm{grad}H_0|_I|\geq g$. 次に $s\geq 2$ のときすべての $r=1,\dots,s-1$ に対して, 数 $C_r>0,\delta_r>0$, および $\alpha_r\geq 1$ があって H_0 は I において $\mathrm{grad}H_0|_I$ に直交するすべての面 $\lambda\in\Lambda^r(I)$ において, 係数 C_r および δ_r また指数 α_r を持って急勾配である. 数 $g,C_1,\dots,C_{s-1},\delta_1,\dots,\delta_{s-1}$ を I における H_0 の <u>急勾配係数</u>, $\alpha_1,\dots,\alpha_{s-1}$ を <u>急勾配指数</u> と呼ぶ.

以下の条件は, 関数が定義されるところではどこでも条件 1.7B が一様であることを保証する.

1.7C. 定義. s 個の変数の関数 H_0 が領域 G において係数 $g,C_1,\dots,C_{s-1},\delta_1,\dots,\delta_{s-1}$ および指数 $\alpha_1,\dots,\alpha_{s-1}$ を持って急勾配と言われるのは, これらの係数と指数を持ってすべての点 $I\in G$ で急勾配であるときである.

条件 1.7C により系 (1.1) の解 $I(t),\varphi(t)$ のうち, 初期条件が領域 $G\times T^s$ 内にあってこの領域の境界の小さな近傍の外にあるようなすべての解に対して安定性時間の指数関数的評価が保証される. ここで T^s は s 次元トーラスであって, $\varphi\in T^s$ である.

1.8. 急勾配条件についての注意. 急勾配の幾何学的意味. これら 3 つ (定義 1.7A) の基本的定義を説明する. H_0 が平面 λ の I において急勾配であって, 係数 C と δ, および指数 α を持つとする. γ は λ 上の任意の曲線で I から距離 d にある他の任意の点を I に結ぶとする. ただし $d<\delta$ とする. このときこの曲線上に $\tilde{I}$ を見つけて, この点における $\mathrm{grad}(H_0|_\lambda)$ の長さが級数評価

$$|\mathrm{grad}(H_0|_\lambda)|_{\tilde{I}}>Cd^\alpha,$$

によって下から限られているとする.

まさしく急勾配関数のこの性質が主定理の証明に使われる.

この性質の直観的解釈を述べることができる. $H_0|_\lambda$ のグラフを考える. このときグラフの曲面上を I の上の点から別の点に向かって動く旅行者は必然的にこの曲面の急勾配を登り越さねばならない.

平面 λ が $\mathrm{grad} H_0|_\lambda$ に直交しなければ, $\mathrm{grad}(H_0|_\lambda)_I \neq 0$ であり, 上で述べた定数 C, δ および α をつねに見つけることができる. その上, α をゼロにとれる. 定義 1.7B におけるように $\lambda \perp \mathrm{grad} H_0|_\lambda$ なら $\mathrm{grad} H_0|_\lambda = 0$ である. この場合, H_0 は急勾配ではあり得ない. たとえば I を通り λ 上にある曲線 γ で, すべての点で $\mathrm{grad}(H_0|_\lambda)$ がゼロになるものを見つけることができる (詳しくは 1.15 節参照). λ 上の I において H_0 が急勾配ならつねに $\alpha \geq 1$ であり, 勾配指数はそれより小さいことはあり得ない (これは H_0 の滑らかさの結果である).

また異なる r, $r = \dim\lambda$, に対して点における急勾配条件の相対的独立性に注意しよう. 以下の事実はこの独立性を指摘している. 三変数の関数で, あるものは $r = 1$ に対してこの条件を満たし $r = 2$ に対しては満たさないものがあり, 一方逆の関数もある. 最初の型の関数は, たとえば $I_1 - I_2^2 = 0$ および $I_3 \neq 0$ なる点において $(I_1 - I_2^2)^2 + I_3^2$ であり, 第二の片野関数はすべての点において $I_1 + I_2^2 - I_3^2$ である.

急勾配条件に似た条件を Glimm が [16] で導入している.

これらの条件は次のような状況を頭に描いている. いま調べている系は (1.1) でなくて任意のハミルトン系の平衡位置の近傍である (2.2B 節参照). この場合, Glimm はいわゆる系の形式的安定性を, 系によって定義されるある種の関数が急勾配条件に近い条件を満たすという仮定のもとで証明した. Glimm は「一般の位置」の関数がかれの条件を満たすかどうか明らかにしなかった. これらの関数は [17] で証明されているように急勾配条件を満たす (上の 1.13 節も参照).

1.9. 急勾配条件の変形. 1.9A. $S-$ **急勾配条件.** 条件 $\left|\dfrac{dH_0(I)}{dI}\right| \geq g > 0$ は $s = 1$ に対して系 (1.1) の永劫安定性を保証しているが, これをもっと弱めることができる. $\dfrac{dH_0}{dI}$ をゼロにできる. ただし級数評価を満たすことを要請する. この条件の多周波数系への拡張は以下で述べる S 急勾配条件である. この場合も $\mathrm{grad} H_0$ がゼロになることが許される. しかしながら, これらは系 (1.6) の安定性時間の指数関数的評価 (1.5) を保証する. もっとも a の値は悪くなる. これはわが主定理の簡単な帰結である.

<u>定義.</u> s 変数の関数 H_0 が I において対称的に急勾配 (symmetrically steep), または S 急勾配であるとは, 次が成り立つことである. 各 $r = 1, \ldots, s$ に対して, 数 $C_r > 0$, $\delta_r > 0$ および $\alpha_r \geq 0$ が存在して, H_0 は係数 C_r および δ_r また指数 α_r なる各面 $\lambda \in \Lambda^r(I)$ 上の点 I において急勾配である.

これらの条件が, H_0 の定義されているいたるところで一様に成り立つという要請は指数関数的評価を保証する. この要請は定義域における急勾配条件との類比で定式化される (1.7C 節参照).

1.9B. $P-$ **急勾配条件.** 以下の条件が, H_0 の定義されているいたるところで一様に成り立つという要請は, 1.6 節の摂動が周期的に時間に依存する系の安定性時間の指数関数的評価を保証する.

定義. s 変数の関数 H_0 が I_0 において係数 $C_r > 0$, $\delta_r > 0$ および指数 $\alpha_r \geq 1 (r = 1, \ldots, s)$ を持って P 急勾配であるとは, 次の条件が成り立つことである.

$\mathcal{K}$ で関数 $\mathcal{K}(I) = H_0(I) - \langle \omega(I_0), I \rangle$ を表わす. ここで $\omega(I_0) = \mathrm{grad} H_0|_{I_0}$ である ($\mathcal{K}$ は H_0 と線形関数だけ異なり, その I_0 における勾配はゼロという特徴をもっている). このとき $\mathcal{K}$ は係数 C_r と δ_r および指数 α_r を持ち, I_0 において S 急勾配のはずである.

1.10. 急勾配 index および系の安定性時間条件. 主定理の評価 (1.4) および (1.5) を定義する定数 a と b は非摂動ハミルトン関数 H_0 の急勾配指数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$(1.7C で定義されている) にのみ依存し, 次のようにそれらによって表わされる.

$$a = \frac{2}{12\zeta + 3s + 14}, \quad b = \frac{3a}{2\alpha_{s-1}}, \tag{1.9}$$

ここで $s > 2$ に対しては

$$\zeta = [\alpha_1(\alpha_2 \cdots (\alpha_{s-3}(\alpha_{s-2} \cdot s + s - 2) + s - 3) + \cdots + 2) + 1] - 1$$

であり, $s = 2$ に対しては $\zeta = 1$ である. s は周波数 $I = I_1, \ldots, I_s$ の数である.

a に関してはもっと良い値

$$a = \frac{1}{3\zeta + s + 4} - \sigma,$$

が得られる. ここで $\sigma > 0$ は任意に小さい. 引き続く論文では, どのようにこれをするのかを説明する. もっともこの値は改善できそうである.

$\alpha_r \geq 1$ であるから, $\zeta > s(s-1)/2$ を得る. ここで等式はすべての r に対して $\alpha_r = 1$ のときに成り立つ. だから周波数の数 s あ同じすべての系において安定性時間の最良評価は s が増大すると強く劣化する.

次の 2 つの副節では急勾配関数の重要な類を 2 つ記述する.

1.11. 準凸関数. 定義. 関数 H_0 が領域 $G, G \subset \mathbf{E}^s$ において準凸と言われるのは、すべての $I \in G$ に対して次の条件が成り立つときである.

a) $\mathrm{grad} H_0|_I \neq 0$;

b) 系

$$\left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial H_0(I)}{\partial I_i} \eta_i = 0, \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{s} \frac{\partial^2 H_0(I)}{\partial I_i \partial I_j} \eta_i \eta_j = 0, \end{array} \right. \tag{1.10}$$

は (自明な解 $\eta = 0$ を除いて) 実の解 $\eta = \eta_1, \ldots, eta_s$ を持たない.

条件 b) は次のようにも述べられる. I のまわりの H_0 のテイラー級数の 2 階の項 $\sum_{i,j=1}^{s} \dfrac{\partial^2 H_0(I)}{\partial I_i \partial I_j}$ を I における H_0 のレベル曲面に接する超曲面 $\sum_{i=1}^{s} \dfrac{\partial H_0(I)}{\partial I_i} \eta_j = 0$ に制限すると一定の符号を持つ.

これらの関数のレベル曲面は凸であるから、「準凸」という用語がふさわしいことがわかる.

定義域の任意の点のある近傍における準凸関数の急勾配性は明らかである．I を含み接超曲面 $\sum_{i=1}^{s}\dfrac{\partial H_0(I)}{\partial I_i}\eta_j = 0$ 上にあるすべての部分空間 λ に対して、I の近傍内の $H_0|_\lambda$ のグラフは楕円パラボロイド (酒杯) に近い．だから勾配指数 $\alpha_i(i = 1, \ldots, s-1$ はすべて 1 に等しいこともわかる．勾配指数の間に非ゼロの勾配を持つすべての非準凸関数に対して、少なくとも 1 つは 1 より大きいものがあることに注意しよう．だから準凸関数は一番「急」なのである．

2 変数 $(s = 2)$ の関数の場合、準凸性は行列式 (1.3) がゼロでないことに同値であることを示すのは難しくない．ゆえに 2 変数の「一般の位置にある」関数は準凸である．3 変数の関数に関しては、準凸性は行列式 (1.3) が負という条件に同値である．

注意. 1.10 節で指摘したとおり、安定性時間の評価 (1.5) を定義する定数 a は H_0 の勾配指数のみに依存する．この指数が小さいほど評価は大きくなる．著者の予想によれば、事実、同じ数の周波数を持つ系 (1.6) を比較すると、H_0 が小さな急勾配指数を持つほど、ある意味で大きな急勾配指数を持つ系より安定である．とくに準凸の非摂動ハミルトン関数を持つ系がもっとも安定である．

3 周波数の系の場合、この予想が正しければ、系の安定性が本質的に行列式 (1.3) に依存することになる．行列式が負なら拡散は行列式が正の場合よりもゆっくりである．この依存性をなんらかの方法で、たとえば計算機で、示せれば面白い．

注意. 周期系 (1.7) では解の安定性時間の最良評価は凸の H_0 を、つまりテイラー展開の 2 階の項が一定符号を持つ関数を、持つ系に対して得られる．

1.12. 3-ジェット関数に関する条件. 定義域のすべての点

$$I = I_1, \ldots, I_s$$

で次の条件を満たす関数を考える．

a) $\mathrm{grad} H_0|_I \neq 0$;

b) 系

$$\left\{\begin{array}{r} \displaystyle\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial H_0(I)}{\partial I_i}\eta_i = 0, \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{s}\frac{\partial^2 H_0(I)}{\partial I_i \partial I_j}\eta_i\eta_j = 0, \\ \displaystyle\sum_{i,j,k}^{s}\frac{\partial^3 H_0(I)}{\partial I_i \partial I_j \partial I_k}\eta_i\eta_j\eta_k = 0 \end{array}\right. \tag{1.11}$$

は自明な解 $\eta = \eta_1, \ldots, \eta_s = 0$ 以外に実の解を持たない．

定義域のすべてのある近傍で、このような関数が急勾配条件を満たすことを証明するのは難しくない．

明らかに条件 (1.11) は (1.10) より弱い．準凸関数は (1.11) を満たす．

また「一般の位置にある」3 変数の関数が (1.11) を満たすことを注意しておく．

1.13. 非ジェット関数の無限縮退. 4 つまたはそれ以上の変数の「一般の位置」の関数は点のある近傍で急勾配であるか、という疑問が生じる．これらは急勾配であることがわかる．その上、次の定理が [17] で証明された．

1.13A. 定理. s 変数 $(s \geq 2)$ の関数 H_0 の I における勾配が非ゼロであるとする．H_0 が I の任意の近傍で急勾配でなければ、それは無限に縮退している．すなわち、この点のまわりの H_0 のテイラー級数の係数は独立な代数方程式を無限に満たす.

この定理の証明を少し修正すれば、1.9 節で定義した P 急勾配および S 急勾配関数に関して同様の主張が得られる．定理 1.13A と違うのは、条件 $\mathrm{grad} H_0|_I \neq 0$ がないことである.

1.13B. 定理. I の任意の近傍において H_0 が P 急勾配 (S 急勾配) でなければ、これは定理 1.13A の意味で無限に縮退している.

1.14. 代数的急勾配規準. 1.14A. 非ゼロの勾配を持つ非急勾配関数のジェットの集合．非急勾配関数の無限縮退性は次の事実からでる.

$J^r(s)$ で、任意の点 I における s 変数の関数の r ジェットの空間、すなわちこの点のまわりでの関数のテイラー級数の r 階までの係数から作られるベクトル空間、を表わす．このときすべての空間 $J^r(s)(r, s = 2, 3, 4, \ldots)$ 内に以下の条件を満たす semi-algebraic 集合 $\Sigma^r(s)$ を見つけることができる．まず、勾配がゼロでない非急勾配関数すべての r ジェットは $\Sigma^r(s)$ 内にある．詳しくいえば、r ジェットが $\Sigma^r(s)$ の外にある関数 H_0 はすべて $\mathrm{grad} H_0|_I = 0$ であるか、I のある近傍で急勾配である．第二に、すべての $s = 2, 3, 4, \ldots$ に対して、$J^r(s)$ 内の $\Sigma^r(s)$ の余次元は $r \to \infty$ のとき無限大に向かう.

集合 $\Sigma^r(s)$ の第二の性質は評価の帰結である[2]．これは [17] の結果をもとに証明できる：

$$\mathrm{codim} \sum^r(s) \geq \begin{cases} \max[0, r-1-\frac{s(s-2)}{4}] & \text{for even} \quad s, \\ \max[0, r-1-\frac{(s-1)^2}{4}] & \text{for odd} \quad s. \end{cases} \tag{1.12}$$

$r_m(s)$ で、I において非ゼロの勾配を持つ s 変数の関数で r ジェットが「一般の位置」にあるものが i の近傍で急勾配であるものの内 r の最小値を表わす．(1.12) より次が従う.

$$r_m(s) \leq \begin{cases} \frac{s(s-2)}{4} + 2 & \text{for even} \quad s, \\ \frac{(s-1)^2}{4}] + 2 & \text{for odd} \quad s. \end{cases}$$

とくに $r_m(2) \leq 2$ および $r_m(3) \leq 3$ である.「一般の位置」にある 2 変数または 3 変数の関数がそれぞれ (1.10) および (1.11) を満たすことを主張したときに、このことは 1.12 および 1.12 節で述べた．実際には $r_m(2) = 2$ および $r_m(3) = 3$ であることに注意しよう.

1.14B. 非急勾配関数のジェットを見分ける条件の構成的性格. (1.12) は別の場所で証明する[3]．そこでは $J^r(s)$ のある種の部分集合 $\sigma^r(s)$ でその閉包が $\Sigma^r(s)$ に一致するものを定義する代数的条件を記述した．残念ながらこれらの条件は陰の形をしている．つまり (1.2) あるいは (1.3) の形でなく (1.10) またじゃ(1.11) の形をしている．(詳しくいうと、これらは低い order のテイラー係数やほかの変数 (パラメーター) の多項等式および不等式系の集まりを構成している．テイラー係数を固定したときに、この集まりの系がひとつでも解けることはこれらの値が構成するベクトルが $\sigma^r(s)$ に属することを意味する.) これらの条件が陰の性質を持っているにもかかわらず、ある程度までは、ジェットに沿っての関数の急勾配性を効率的に示せという問題に答えている.

---

[2] $J^r(s)$ における $\Sigma^r(s)$ の余次元が (1.12) の右辺にちょうど等しいと仮定する.
[3] 同様ではあるが、もっと悪い評価は [17] で確立された.

1.14C. 注意. $\sigma^r(s)$ を定義する条件は急勾配条件 (1.10) および (1.11) の一般化と見ることができる．というのは、これらは (1.10) および (1.11) に形が近いからである．そのうえ、$s = 2, 3, 4, \ldots$ に対して $\sigma^2(s) = \Sigma^2(s)$ を定義する条件は準凸性 (1.10) のための条件と同値であり、$s = 2$ および 3 に対して $\sigma^3(s) = \Sigma^3(s)$ を定義する条件は (1.11) とほんの少ししか違わない.

1.14D. 注意. I において非ゼロの勾配を持つ関数で、この点におけるその r ジェットが $\Sigma^r(s)$ の外にあるものの急勾配指数 α_i は s と r にのみ依存する量で上から限られる.

1.15. 急勾配でない関数の例. 非急勾配関数の最も簡単な例は 2 つまたはそれ以上の変数の線形関数である.

$$H_0 = \sum_{i=1}^{s} a_i I_i + b.$$

H_0 の定義域 G が有限または無限個の直線分を含み、H_0 をそこに制限すると一定であると仮定する．このとき H_0 はこの線分のどんな点でも急勾配でなく、だからこれと交わるどんな領域でも急勾配でない.

もっと一般の状況を考える．すなわち、$\dim\lambda \neq 0$ なる平面 λ とこの平面上にある曲線 γ があって、H_0 のこの λ への制限の勾配が γ 上のすべての点で消えてしまうとする．つまり、

$$\operatorname{grad}(H_0|_\lambda)|_I = 0 \quad \text{for all} \quad i \in \gamma \tag{1.13}$$

このとき H_0 は γ の任意の点で急勾配でない.

非急勾配関数のこれらの例は、非 P 急勾配および非 S 急勾配関数の例でもあることを注意しておく.

1.16. 先経的評価より良く安定性時間を評価するのに急勾配条件が重要であること．このような評価の必要条件． ハミルトンの方程式よりただちに、ハミルトン関数

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi) \tag{1.14}$$

を持つ系のすべての解 $I(T), \varphi(t)$ に対して、$1/\varepsilon$ よりずっと小さな時間の間、点 $I(t)$ は $I(0)$ に近いことが出る．この評価 ($\ll 1/\varepsilon$) を系の解の安定性時間の低先験的評価と呼ぶ．非摂動ハミルトン関数に関する急勾配条件により先験的評価よりよい評価が保証される (H が解析的なら指数関数的評価、H がいくつかの微分を持てば級数評価)．しかしこの評価は任意の H_0 を有する系でも成り立つのだろうか？答えが否であることがわかる．非急勾配関数のかなり大きな類 $\mathcal{M}$ が以下の性質を持つことを主張できる．$H_0 \in \mathcal{M}$ とする．このときハミルトン関数 (1.14) を持ち、適当な摂動 $\varepsilon H_1, H_1 = H_1(H_0)$ を持つ系は、任意の $\varepsilon > 0$ に対して解 $I_\varepsilon(t), \varphi_\varepsilon(t)$ で、$I_\varepsilon(t)$ が時間間隔 $1/\varepsilon$ の間に order ε の速さで初期位置 $I_\varepsilon(0)$ から離れていくものを持つ．だからこれらの解の安定性時間は $1/\varepsilon$ よりはるかに小さく、先験的評価に一致する.

この定理の簡易版をここで述べよう.

1.16A. 定義. 整数成分を持つベクトルの線形 hull から平行移動で得られる平面 λ は有理的と呼ばれる．(上と同様、平面とは任意の次元のアフィン部分空間のことである.)

1.16B. 記法. 定義域が $\mathbf{E}^s, I \in \mathbf{E}^s$ に含まれる関数の類で、以下の性質を持つものを $\mathcal{M}$ で表わす．すべての $H_0 \in \mathcal{M}$ に対して $\mathbf{E}^s$ 内の有理平面 λ と曲線 $\gamma, \gamma \subset \lambda$ で、まず (1.13) を満た

し、第二に方程式 $\dot{I} = V(I)$ で γ が相曲線になるようななめらかな右辺を有するものを見つけることができる (?).

1.16C. 定理. すべての $H_0 \in \mathcal{M}$ に対して、以下の性質を有する $H_1 = H_1(I, \varphi)$ と一対一写像 $\xi : [0,1] \to \mathbf{E}^s$ を見つけることができる．すべての $\varepsilon > 0$ に対して、系 (1.14) の解 $I_\varepsilon(t), \varphi_\varepsilon(t)$ で $[0, 1/\varepsilon]$ で定義され、$I_\varepsilon(t) = \xi(\varepsilon t)$ なるものがある．

1.16D. 注意. H_0 とベクトル場 V が解析的なら、ハミルトン関数 H_1 が解析的になるように H_1 をとることができる．これは定理の証明から出る．

次の結果は定理 1.16C からしたがう．

1.16E. 系. 非摂動ハミルトン関数 H_0 に関する条件の類のうち、条件 $H_0 \notin \mathcal{M}$ は (1.14) の解の安定性時間の評価が先験的評価より良くなるための必要条件である．

1.16F. 注意. $\mathcal{M}$ に属する関数と 1.15 節の終わりに考えた非急勾配関数の重要な違いは、$\mathcal{M}$ から取ってきた関数は対応する平面 λ が有理的であることである．

1.16G. 注意. $I_\varepsilon(t)$ の軌跡は曲線 γ ($\{|I = \xi(t), t \in [0,1]\} \equiv \gamma$)．適当な摂動のもとで、曲線 γ は「超伝導チャンネル」となり、これに沿って $I(t)$ が速さ ε で動く．

2 周波数 $(s = 2)$ の系に対して、先験的評価より良い安定性時間の評価のための必要条件は、$\mathbf{E}^2$ が $H_0 = H_0(I_1, I_2)$ が定数[4] となるような有理数勾配の直線を含まないことである．以下で、H_0 がこのような直線を有し、「高速」解 $I_\varepsilon(t), \varphi_\varepsilon(t)$ を有するような例を挙げる．

1.17. 高速進化する系の例. ハミルトン関数

$$H = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2^2) + \varepsilon \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{1.15}$$

を持つ系は高速解 $I_1 = -\varepsilon t, I_2 = \varepsilon t, \varepsilon_1 = -\frac{1}{2}\varepsilon t^2, \varphi_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon t^2$ を持つ．

注意. したがって、この系 $H_0 = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2^2)$ に対して、行列式 (1.2) はどこでも決してゼロにならない．だから不変トーラスの有限測度のコルモゴロフ集合の存在にもかかわらず、作用変数 I の空間において 1.16G で記述した「超伝導チャンネル」があり得る．この場合、直線 $I_1 + I_2 = 0$ がこのようなチャンネルである．

(1.15) に似て高速進化する系の例は Moser[18]、Khapaev[19]、およびそのほかの人によって与えられている．

1.18. 非線形弱結合振動子．指数関数的に大きな時間の間の惑星系の安定性． 非線形弱結合振動子とは、ハミルトン関数 (1.16) を持つ系で、$H_0 = \sum_{i=1}^s f_i(I_i)$ であり、f_i の 2 階微分と H_0 の勾配がゼロにならない系のことである．その上、これらの 2 階微分が同じ符号を有していれば、H_0 は凸であり、したがって準凸であるから急勾配である．

---

[4] H_0 が有理線上で一定なら、この直線上の非摂動運動の振動数 $\dot{\varphi}_i(I) = \dfrac{\partial H_0(I)}{\partial I_i} (i = 1, 2)$ の比もまた一定で有理数である．振動数 $\dot{\varphi}_I(I)$ は、I を決めたとき「角度座標」$\varphi = \varphi_1, \varphi_2$ を持つトーラス上の運動の振動数である．振動数 $\dot{\varphi}_i$ の間の同様の関係が、$H_0 \in \mathcal{M}$ なる 2 振動数より大きな系 $(s > 2)$ でも λ が有理数であるような対応する面で成り立つ．

これの例は惑星系である．$s+1$ 個の点が互いにニュートンの法則で引き合い、一つの点 (太陽) の質量が残り (惑星) の質量よりはるかに大きい．事実、よく知られているように、相空間のある領域で系のハミルトン関数は (1.6) の形に簡単になり、

$$H_0 = -\sum_{i=1}^{s} \frac{C_i^{(0)}}{I_i^2},$$

となる．ここで $C_i^{(0)} > 0$ は定数である．

物体の初期位置と速度は太陽系におけるものにほぼ等しいとする．12 節で証明したように、この場合、$1/\varepsilon$ に比べて指数関数的に大きな時間 T の間、系の崩壊は起こらない．ここで ε は惑星質量と太陽質量の比である．もっと正確にいうと、この系の物体の運動が初期に以下を満たすと仮定しよう．a) 惑星は楕円に沿って運動し、この楕円はそれほどつぶれていない；この楕円の軌道半長径の長さは互いに十分違っている．c) 軌道面の間の角度は大きすぎない．また惑星はみな同じ向きに動いている．このとき、時間 T の間に物体同士が衝突したり物体が系から逃げたりすることは不可能である．その上、この時間全体にわたって条件 a)、b)、および c) が満たされ軌道半長径の長さはほとんど変わらない．

この主張は主定理からは直接出てこないことを注意しておく．なぜなら、少なくとも 2 体が接近するとき、摂動 $H - H_0$ は小さくなるからである．別の事実 (角運動量積分の存在?) が [9] におけると同様必要である．事実は、軌道半長径の長さ a_i を固定したとき角運動量ベクトルの長さ G は惑星の運動が円運動で同一平面を同一方向に起こるとき、対応する相空間の点の近くで最大になる．だからペア毎に異なる $\alpha_i > 0$ に対して数 γ を見つけることができて条件 $a_i = \alpha_i (i = 1, \ldots, s)$ および $G \geq \gamma$ が、相互の距離が小さくなり過ぎないような系の天体の位置に対応する相空間の点集合を特徴付けることができる．(条件 $a_i = \alpha_i$ および $G \geq \gamma$ は a)、b)、および c) よりも鋭い (sharp?)．)．したがっていま問題にしている時間の間に近接衝突が不可能であることを証明するには、この間 a_i の変化が小さいことを証明すれば十分である．しかしよく知られている通り、$C_i^{(1)} > 0$ を定数として $a_i = C_i^{(1)} I_i^2$ である．ゆえに、初期値からの a_i の大規模偏差があれば作用変数 I_i も初期値から大規模偏差することになる．ところが、これは小摂動に involve するから、主定理に矛盾する．

次の 2 つの節では主題からやや離れて非ハミルトン摂動を考える．

1.19. 太陽系の安定性. われわれの太陽系は 4×10^9 年もの長きにわたって存在していると見積られている．この期間は評価式 (1.5) あるいはほかのもっと正確な評価と比較できるが、われわれはこれをしない．たとえこの期間がアーノルド拡散の遅効性を基にのみ説明されるにしても、惑星がいつの時点でほぼ円運動で、しかもほぼ同一平面内で動き出したのかまったくはっきりしていない．ゆえに太陽系の安定性の研究では、非ハミルトン的摂動も考慮する必要がある．これらはハミルトン的摂動に比べてずっと小さいけれども、後者の効果も長期間にわたって非常に小さい．これは非ハミルトン的摂動の作用によって打ち消され、系を安定な状態へ向かわせるように見える．

非ハミルトン的摂動のこの性質の説明の 1 つとして次が考えられる．これらは長さ G よりもむしろ粒子のエネルギー $h_i = C_i^{(0)} C_i^{(1)} \frac{1}{a_i}$．を打ち消す．だから a_i として可能な値に対して、G は極大に向かう．しかし、そのときは 1.18 節より系は離心率ゼロの軌道運動に向い、軌道面は互いにずれない．

潮汐の影響およびまわりの媒質の抵抗が基本的役割を果たしている可能性がある．簡単な計算によれば、a_i と G の減少の間の関係がなりたつのは、まわりの媒質の抵抗のみを考慮し、媒質の粒子が系の重心に関して静止していると仮定したときである．

1.20. 主定理および非ハミルトン的摂動. 実のところ、本文で述べたように、非ハミルトン的摂動が小さいなら、系の安定性時間が非常に長くなるということは主定理からは出てこない．しかし指数関数的評価 (1.5) が非常に小さな非ハミルトン的摂動を受けた系にも成り立つことは、この定理の証明を解析すれば出てくる．この一般化を荒っぽく言えば次のようになる．

定理. ハミルトン摂動の大きさを ε_H で表わし、非ハミルトン摂動の大きさを ε_N で表わす．次のように書く．

$$\varepsilon = \max[2\varepsilon_{H'}(\log \frac{1}{(2\varepsilon_N)^{1-\delta}})^{-1/\alpha}],$$

ここで $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ は $\varepsilon \to 0$ のときにゼロに向かう既知関数である．$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ と仮定する．このとき (1.4) と (1.5) が系のすべての解に対して成り立つ．ここで a および ε_0 は主定理と同じものである．

この主張は次のように述べられる．十分長期間にわたっての拡散の速さ、つまり、作用変数の変位の平均測度は

$$\max\{2\varepsilon_H \exp[-(\frac{1}{2\varepsilon_H})^{\alpha}], (2\varepsilon_N)^{1-\delta}\}.$$

によって抑えられている．だから「評価の重ね合わせ」が近似的に成り立つ．ふたつの形の摂動の結合効果による作られる拡散の速さの評価はアーノルド拡散 (すなわちハミルトン的摂動から生じる拡散) の速さに関する我々の評価と非ハミルトン的摂動による拡散の速さの先験的評価の和から少ししか違わない．

著者はこの問題を紹介してくれ、逐次近似法によって変数変換を構成する記述を教えてくれた V.I.Arnold に感謝する．この方法により、当該問題を調べるのに都合のよい相空間の座標を得ることができた．また著者は有用な意見を述べてくれた A.D.Bryuno に感謝する．

2 節．未解決問題．予想．一般化

2.1. 主たる疑問．2.1A. 安定性時間の指数関数評価の上限. $I(t)$ が $I(0)$ から指数関数的にゆっくりと離れていく解の例を構成したが (1.2 および 1.3 節参照)、「一般的な位置」にあるハミルトン関数を持つ任意の系に対してこのような解の存在を証明したわけではない．証明は、摂動の大きさへの系の安定性時間の依存性の指数関数的特徴を once and for all 確立するようなものであるはずだ．不安定な解の測度の評価は存在しない．

不安定な解の存在の可能性、すなわちアーノルド拡散の可能性は 11.4 節で解明する．

2.1B. 系の安定性時間の勾配インデックスへの依存性. この依存性は指摘しただけで証明はしていないが、われわれの結果によれば現実の興味を惹く最も重要な帰結である．

この依存性はまず 1.11 節で予想として提出される．そこでは計算機で確かめる可能性が示唆される．結果を解析的に証明できるならもっと面白い．(すべての解に関して) 安定性時間の

最小値の上限および下限を相当に精度よく勾配指数から得ることができると著者は感じている．これが得られれば、上に述べた依存性を便密に証明できるだろう．

2.1C. 拡散の方向． 不安定な解が動く方向や拡散の選び取る方向を調べることも面白そうである．ある意味では、H_0 の勾配は方向が異なれば異なる．だから拡散の方向にも影響が出る．その上、他の因子も拡散の方向に影響を与える．たとえば 3 節で定義する共鳴帯の作用変数空間における位置がそれである．

2.1D. 安定性と共鳴. いわゆる共鳴関係に関して観測される安定性を説明するという問題もある (詳しくは、たとえば [20] 参照)．見たところ非ハミルトン的摂動は実際の系にこの安定性を与える．どんな条件がこれを保証するのか？

無摂動系がハミルトン系でなく一般の形をしているときも、この論文と同様 ([37] 参照)、同じ問題が生じる．2 周波数の場合、この形の系における共鳴の安定性は Neishtadt[35],[36] が議論している．

2.2. 指数関数的評価を他の型のハミルトン系や正準写像へ応用すること． 1.6 節で述べたとおり、作用変数での系の安定性の指数関数的評価は系 (1.6) に対してばかりでなく、時間に周期的に依存する摂動を含む系 (1.7) に対しても成り立つ．ここでは、さらに 2 つの型のハミルトン系を考える．とくにハミルトン系の平衡位置の近傍および 2 つの型の正準写像である．これらの系や写像の安定性の指数関数的評価に関して命題を述べる．

これらの主張を正式に証明することはしない．しかしながら以下の事実からその正当性が言える．系 (1.1) や (1.7) に対してもまたこの節で議論する系や写像に対して重要でない変更を加えてもいくつかの定理が成り立つ．これらの系の中でも、コルモゴロフトーラスに関するもので指数関数的評価に近いものがある (この定理には 1.2 節で触れる．[27] も参照)．指数関数的評価はこの型の定理であると筆者は納得している．

以下の系と写像は何人かの人々によって調べられている．すなわち、Siegel[4] および [5]、Moser[21]、[22]、[23]、[12]、[13]、および [18]、Arnold[10]、Glimm[16]、Contopoulos[24]、Hénon[25]、Bryuno[26]、およびそのほかの人々である．彼らは深く重要な結果を得ており、それらのいくつかは後の節で利用する．

2.2A. $2s-$ **次元円環の写像.** 写像

$$A : (I, \varphi) \mapsto (I', \varphi'), \quad \text{ただし} \quad I' = I - \tfrac{\partial S}{\partial \varphi}, \quad \varphi' = \varphi + \tfrac{\partial S}{\partial I'},$$

を考える．関数 S はいわゆる母関数であり、$S(I', \varphi) = S_0(I') + \varepsilon S_1(I', \varphi), \varepsilon \ll 1$ なる形をしている．ここで $I \in G \subset \mathbf{E}^s$ および $\varphi \in T^s$ である．また $\mathbf{E}^s$ と T^s はそれぞれ s 次元のユークリッド空間とトーラスである．

定理. L_0 は G において P 勾配であるとする (定義に関しては 1.9B 参照)．このとき G 内の S_0 の P 勾配の指数のみに依存する定数 $a > 0$ と $b > 0$ があって、以下の性質を満たす．

$I^{(0)}, \varphi^{(0)}$ を領域 $G \times T^s$ の任意の点でこの領域の境界の小さな近傍には入っていないものとする．このとき

$$|I^{(m)} - I^{(0)}| < \varepsilon^b$$

がすべての整数 $m \in [0,T]$ に対して成り立つ．ここで

$$T = \frac{1}{\varepsilon}\exp(\frac{1}{\varepsilon^a})$$

であり、$I^{(m)}, \varphi^{(m)}$ は点 $A^m(I^{(0)}, \varphi^{(0)})$ を表わす．

2.2B. 保存系の平衡位置の近傍．自由度 s の任意の自励ハミルトン系の特異点の近傍を考える．線形系の固有値は純虚数であると仮定し、それらを $\pm i\omega_1, \ldots, \pm i\omega_s$ と記す．固有振動数 ω_j が order l またはそれ以下のどんな共鳴関係をも満たさないと仮定する．すなわち、l をある自然数として、$0 < \sum_{j=1}^{s} |k_j| \leq l$ を満たす整数成分のベクトル $k = k_1, \ldots, k_s$ すべてに対して

$$\sum_{j=1}^{s} k_j\omega_j \neq 0.$$

] よく知られているとおり (たとえば [27] 参照)、この場合、特異点の近傍で正準変換を行なって新しい変数 q, p がこの点でゼロになり、この座標系で系のハミルトン関数が次の形になるようにできる．

$$H = H_0(I) + H^{(l+1)}(p,q). \tag{2.1}$$

ここで H_0 は $I = I_1, \ldots, I_s$ に関する多項式であって、次数は $l/2$ の正数部分 $[l/2]$ より高くなく、$I_j = (p_j^2 + q_j^2)/2$ であり、原点のまわりの $H^{(l+1)}$ の p および q に関するテイラー級数は $l+1$ 階未満の項を含まない．

(2.1) の形をしたハミルトン関数を持つ系を調べる

定理．$H_0 = H_0(I)$ が $I = 0$ の近傍で急勾配であるとする．このとき H_0 の急勾配指数 α_0 にのみ依存する定数 $a > 0$ および $b > 0$ があって、以下の性質を満たす．

$$l \geq \frac{2}{b} + 1 \ (b = b(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1})). \tag{2.2}$$

とおく．$p(t), q(t)$ は原点に十分近い初期条件 $p(0), q(0)$ を満たす系の任意の解とする．$\varepsilon = |I(0)|^{(l-1)/2}$ とおく．ただし $I_j(t) = (p_j^2(t) + q_j^2(t))/2$ である．このときすべての $t \in [0,T]$ に対して、$|I(t) - I(0)| < \varepsilon^b$ である．ここで $T = \frac{1}{\varepsilon}\exp\frac{1}{\varepsilon^a}$ である．

この定理から、解の軌跡が特異点の小さな近傍の中にとどまる時間の評価の正当正がしたがう．この評価は特異点への初期距離に指数関数的に依存する．特異点の安定性の十分条件は H_0 の急勾配性と階数 l またはそれ以下の共鳴の非存在である．ただし l と α_j は (2.2) を満たす．

2.2C. 時間に周期的に依存する系の平衡位置の近傍．ハミルトン関数が t に関して周期 2π の系の stationary 特異点の近傍を考える．(保存系のハミルトン関数は周期軌跡の近傍でこの形に帰着できる.) すべての乗数、すなわち、周期 2π の線形化系の解の基本行列の substitution の固有値 $\lambda_1^{\pm}, \ldots, \lambda_s^{\pm}$、が絶対値 1 を持つと仮定する．これらが共鳴関係

$$\lambda_1^{k_1} \ldots \lambda_1^{k_s} = 1 \tag{2.3}$$

で階数 l およびそれ以下のもの、つまりすべての $k = k_1, \ldots, k_s$ に対して $0 < \sum |k_j| \leq l$ なるものを決して満たさないとする．このとき特異点の近傍で系のハミルトン関数は t に関して 2π 周期の正準変換により (2.1) の形に帰着できる．ただし $H^{(l+1)}$ が t に関し周期 2π であること、つまり、$H^{(l+1)}(p, q, t + 2\pi) \equiv H^{(l+1)}(p, q, t)$ であることが異なる．

この型のハミルトン関数を持つ系に対する我々の主定理は、H_0 に急勾配条件の代わりに P 急勾配条件を課すという点だけが定理 2.2B と異なる．

2.2D. 正準写像の不動点の近傍. 写像 A の線形化の固有値 $\lambda_1^{\pm}, \ldots, \lambda_s^{\pm}$ が不動点においてすべて絶対値 1 を持つと仮定する．これらは階数 l およびそれ以下の共鳴関係 (2.3) のどれも満たさないとする．このとき不動点の近傍に、この点でゼロになる座標 p, q を構成し、写像 A($p = q = 0$ のまわりのテイラー級数の階数 l の項の不定性を除いて) が次の形を持つようにできる．

$$(I, \varphi) \mapsto (I, \varphi + \frac{\partial S_0}{\partial I}).$$

ここで $I = I_1, \ldots, I_s, \varphi = \varphi_1, \ldots, \varphi_s$ であり、I_j と φ_j は $p_j = \sqrt{2I_j} \sin \varphi_j, q_j - \sqrt{2I_j} \cos \varphi_j$ で定義され、$S_0(I)$ は $I_1, \ldots, I_s$ の次数 $[l/2]$ 以下の多項式である．

この型の写像を調べる．

定理. S_0 は原点のある近傍で P 急勾配であるとする．このとき S_0 の P 急勾配指数のみに依存する定数 $a > 0$ および $b > 0$ で以下の性質を持つものがある．$l \geq \frac{b}{2} + 1$ とする．このとき不動点 $p = q = 0$ のある近傍のすべての点 $p(0), q^{(0)}$ に対して、$I^{(m)} - I^{(0)}| < \varepsilon^b$ がすべての $m \in [0, T]$ に対して成り立つ．ここで $T = \frac{1}{\varepsilon} \exp \frac{1}{\varepsilon^a}$．ここで $I^{(m)}$ は $[(p_j^{(m)})^2 + (q_j^{(m)})^2]/2$ を表わす．ただし $p^{(m)}, q^{(m)} = A^{(m)}(p^{(0)}, q^{(0)}$ および $\varepsilon = |I^{(0)}|^{(l-1)/2}$ である．

3 節．指数関数評価の証明の主たる発想

この節では主定理 (定理 4.4) の証明のためのある種の発想と手法について議論する．簡単のため、パラメーターのない系、すなわち、ハミルトン関数

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi), \tag{3.1}$$

を持つ系に対して議論を展開する．

3.1. 証明の解析的および幾何学的部分. 主定理の証明は 2 つの部分に分けられる．最初の解析的な部分は Kolmogorov および Arnold によって開発された摂動論の方法 ([6]-[9] 参照) に依る．この部分では [8] で開発された技術を真正直に使う．最初の部分の主計算の目的はいわゆる「共鳴項」を消去することである．第二の部分は以下で記述する「共鳴ゾーン」と「高速ドリフト」の幾何学の研究に基礎を置く．

主定理の証明の一般スキームは Glimm が [16] で示した証明の一般スキーム (1.8 節参照) に近いことを注意しておく．

証明の解析的な部分は 3.2 節で説明する．

3.2. 概積分. この副節では作用変数 I の空間上で系 (3.1) の解の射影 $I(t)$ の安定性の主な理由を説明する．H_0 の領域 $G(i \in G)$ は、異なる次元の曲面によって次のように「充満」されてい

る．すなわち、これらの曲面を横切る $I(t)$ の射影の平均測度は摂動 ε に比べてずっと小さい．平均測度とは初期点と最終点の距離と経過時間の比のことであって、これは十分大きいと仮定する．

これらの面は変数 I の空間の平面である．もっと詳しく言えば、平面と G のある種の部分領域の共通部分である．ここでも他でも、平面とは任意の次元のアフィン部分空間を指す．

G の十分に小さなすべての部分領域 U に対して、以下の性質を持つ線形関数を見つけることができる．これらの関数を U に制限したときのレベル曲面の交わりが上で記述したような性質を持つ曲面である．

3.2A. 概積分のレベル面の交差の記述. U を G の任意の部分領域とする．

$\mathbf{Z}^s$ で、整数成分の s 次元ベクトル $k = k_1, \ldots, k_s$ の格子を表わす．$\nu > 0$ を任意の数とする．

定義. ベクトル $k \in \mathbf{Z}^s$ は、ある $I \in U$ に対して $|\langle k, \omega(I)\rangle| < \nu$ のとき、集合 U に対する ν 共鳴ベクトルと呼ばれる．ここで $\omega(I) = \mathrm{grad} H_0|_I$ であり、$\langle k, \omega\rangle$ はスカラー積

$$< k, \omega >= \sum i = 1^s k_i \omega_i,$$

のことである．

ベクトル $k \in \mathbf{Z}^s$ の order とは、$|k| = \sum_{j=1}^s |k_j|$ のことである．λ_0 で、ある数 N より大きくない階数 (order) の U に対するすべての ν 共鳴ベクトルの線形 hull を表わす．$r = \mathrm{dim}\lambda_0$ として、$r \leq s$ とする．

このとき U 内に $s - r$ 個の線形独立な概積分が存在する．これらの積分のレベル曲面の交わりは平面 λ_0 を平行移動して得られる．

概積分の性質はパラメーター ε, ν, N によって決まる．とくに、ε が小さいほど、また ν が大きいほど、これらは第一積分に似てくる．

3.2B. 概積分の構成. $H = \sum_k h_k(I) e^{ik\varphi}$ はハミルトン関数のフーリエ展開であるとする．概積分の存在は恒等変換に近い正準変数変換によって H を特別な形に帰着させることによって証明される．この特別な形は共鳴数 k を持つハーモニクスのみを含むフーリエ級数に展開される関数とほとんど違わない．この還元は補題 10.3 で行なわれる．

この補題は「非共鳴ハーモニクスの消去」に関するものであるが、荒っぽく言えば次の通りである．$U \times T^s$ 内で変数変換 $I, \varphi \to J, \psi$ でハミルトン関数が

$$H = \overline{H}(J, \psi) + R(J, \psi), \tag{3.2}$$

なる形をとるようにできる．ここで $\bar{H}$ のフーリエ級数の各ハーモニックの数 k は λ_0 に属す．

$$\overline{H} = \sum_{k \in \lambda_0 \cap \mathbf{Z}^s} \overline{h}_k(J) e^{ik\psi},$$

また残余 R の効果 $|\mathrm{grad} R|$ は N が大きければ非常に小さい．

$$|\mathrm{grad} R| < \varepsilon e^{-N^{1-\kappa}}; \tag{3.3}$$

ここで $\kappa > 0$ は任意に小さくとれる．変数変換のもとでの座標の変形 $|(J, \psi) - (I, \varphi)|$ は ε, ν および N のべきの積によって上から限られる．

概積分の存在を証明するには、ハミルトン方程式の帰結である単純な次の事実を使うことが残っている．$\mathcal{H} = \sum h_k(J)e^{ik\psi}$ の形の任意のハミルトン関数を持つ系を考える．このとき、この系のすべての解に対してハーモニック $h_k(J)e^{ik\psi}$ で定義されるベクトル J は k の方向に増大する．

したがってこの命題からハミルトン関数 $\bar{H}$ を持つ系の解の射影 $J(t)$ がちょうど λ_0 を平行移動して得られる平面上にあることが出る．だからハミルトン関数 (3.2) を持つ系の解 $J(t), \psi(t)$ に対して、λ_0 に垂直な $\dot{J}(t)$ の成分の長さは $|\mathrm{grad}R|$ より大きくない．N を十分大きくとれば、(3.3) により、$|\mathrm{grad}R|$ は ε よりはるかに小さい．変数 I および φ に戻ろう．座標の変形が十分小さいように ε, ν および N を選べば、上で記述した概積分が得られる．

3.2C. 注意 (ドリフトと振動). ハミルトン関数を (3.2) の形に還元することの幾何学的な意味は以下の通りである．$I(t), \varphi(t)$ を系 (3.1) の任意の解でその軌跡が $U \times T^s$ にあるものとする．このとき $I(t)$ の運動を 2 つの運動に分離する．ひとつは点 $J(t) = J(I(t), \varphi(t))$ の運動であり、もうひとつは座標の変換によって消去した運動である．第二の運動は微小振幅の振動である．これは系の安定正にとって本質的でない．一方 $J(t)$ の運動は $I(t)$ の運動より単純であり．λ_0 方向の $J(t)$ の速さは非常に小さいからである．

$J(t)$ の運動は $I(t)$ の平均運動または「ドリフト」と呼べる．ここで λ_0 から平行移動で得られる平面 λ を横切るドリフトは非常に遅く、これらに沿うドリフトの速さは ε 程度である．このため平面 λ を「高速ドリフト面」と呼ぶ．

3.2D. 注意. 多数回の、しかし有限回 ($\sim N$) の変数変換によって新しい変数 j, ψ を I, φ で表わした．これらはコルモゴロフとアーノルドが可測なほど大きな不変トーラスの存在を証明する (1.2 節参照) のに使ったものに似ている．かれらはこれらの変数変換の無限列を考えたことを指摘しておく．

さて主定理の証明の第二の幾何学的な部分を説明しよう．

3.3. トラップ. 線形独立な概積分数も作用変数の空間でのそれらのレベル曲面の位置も問題となっている G の部分領域に依存する．とくに部分領域があって、そこでは線形独立な s 個の概積分の完全な組を見分けることができる．これらの部分領域では平面 λ は点に縮退する．ゆえにそこでの解 $I(t), \varphi(t)$ の射影 $I(t)$ のドリフトの速さは十分大きな N に対しては実質的にゼロである．

概積分の数が s より少ない場所では点 $I(t)$ は ε 程度の速さで (つまり相対的に大きな速さで) ゼロでない次元の面 λ に沿ってドリフトしうる．しかしこの場合も, H_0 が急勾配であれば, 与えられた部分領域およびそれに隣接する部分領域での概積分は点 $I(t)$ を直径 ε の小さな集合に閉じ込める. 点 $I(t)$ は速度 ε で走る小さなサイズのわな内にある (?).

わなを構成するのに次の概念が必要である．

3.3A. 共鳴面の定義. $k \in \mathbf{Z}^s$ を任意の非ゼロベクトルとする．点集合 $I \in G$ で $\langle k, \omega(I) \rangle = 0$ なるものを k によって定義される $\underline{\text{1 重共鳴面}}$ と呼ぶ．$k^1, \ldots, k^r$ を $\mathbf{z}^s$ からとった r 個の線形独立ベクトルとする．$I \in G$ の集合ですべての $j = 1, \ldots, r$ に対して $\langle k^j, \omega(I) \rangle = 0$ なるものを $k^1, \ldots, k^r$ によって定義される $\underline{\text{r 重共鳴面}}$ と呼ぶ．

$k-1, \ldots, k^r$ によって定義される曲面は r 個の 1 重共鳴面 $\mathcal{R}(k^j)(j = 1, \ldots, r)$ の交わりと同一である．ここで $\mathcal{R}(k^j)$ は k^j によって定義されている．

ある $N > 1$ を固定して、次数が n 以下のベクトルによって定義される共鳴面のみを考えよう．共鳴点の集合、つまりこれらの曲面すべての交わり、の構造を可視化するのは有効である (図 1)．この集合の構造は共鳴周波数の集合

$$\{\omega \in \mathbf{R}^s | k \in \mathbf{Z}^s \text{が存在して} \ 0 < |k| \leq N \ \text{および} < k, \omega >= 0\}.$$

の構造によって決まることに注意する．

3.3B. 共鳴ゾーンとブロック． 共鳴曲面にはその近傍に対してほど興味はない．後者を共鳴ゾーンと呼ぼう．主定理の証明においてゾーンは特別な形の曲面 $\mathcal{R}$ の近傍であり、それはゾーンの 共鳴幅 と呼ばれるあるパラメーター ν で特徴づけられる．$\nu \to 0$ のときゾーンーは $\mathcal{R}$ に収縮する．

ゾーンに加えて、各共鳴曲面 $\mathcal{R}$ に ブロック と呼ばれる集合を付随させる．これは $\mathcal{R}$ の共鳴ゾーンと $\mathcal{R}$ を含まぬすべての曲面 $\mathcal{R}'$ $\mathcal{R}' \not\supset \mathcal{R}$ の共鳴ゾーンの和との差である (図 1).

Fig. 1.

ゾーンおよびブロックの多重度とは、対応する曲面 $\mathcal{R}$ の多重度のことであり、ゾーンやブロックを定義するベクトルとはこの曲面を定義するベクトルのことである．

G 内の共鳴ゾーンすべての補集合を 0 重共鳴 または 非共鳴 ブロックと呼ぶ．この定義ベクトルはゼロベクトルであるとする．

どのベクトル $k \in \mathbf{Z}^s$ がこれらのブロックやゾーンに対する共鳴ベクトルなのかを議論する

曲面上でもゾーン上でも、厳密な共鳴関係 $\langle k, \omega(I)\rangle = 0$ はたいへん異なる k に対して成り立つ．これと対照的に、十分小さな $\nu > 0$ に対して、ブロックに対する ν 共鳴ベクトルはこのブロックを定義するベクトルの線形 hull λ_0 に属する．ゆえに 3.3 節の議論をブロックに適用でき、ブロック内で、λ_0 から平行移動で得られる平面 λ を横切っての $I(t)$ のドリフトの速さが十分大きな N に対しては実質的にゼロであることがわかる．

3.3C. 高速ドリフトの有界性． 各共鳴曲面にブロックを付随させ、このようなブロックすべての集合およびそれに非共鳴ブロックをつけ加えたものを考える．ブロックをとり、ブロックの任意の集合を構成するときに関係したすべての 1 重ゾーンが同じ共鳴幅を持つようにする．この場合、集合のブロックは G 全体を覆う．

$I(t)$ が各ブロック内で平面 λ に沿ってのみ動けることを仮定する．ブロックは対応するゾーンの一部である．H_0 の急勾配条件は $I(t)$ が平面 λ に沿っての任意の方向への変位によって共鳴ゾーンから出ていくのを保証することがわかる (Fig.2).

Fig.2

ブロックの集合を構成するときに使ったゾーンの共鳴幅を選んで、点が対応するブロックの近くで各ゾーンを出ていくなら、それがこのゾーンより多重度の低いブロックに移っていくよ

うにできる．この理由により、$I(t)$ が初期値 $I(0)$ から動くにつれて、それは次々と多重度の低いブロックに移り、最後に非共鳴ブロックにたどり着く．非共鳴ブロックでは平面 λ は点に縮退している．仮定により、このブロック内での速さはゼロであり、だから $I(t)$ が $I(0)$ からさらに遠ざかることはできない．点 $I(t)$ は共鳴ゾーンと平面 λ の交わりから構成されるわなに閉じこめられる (Fig.3).

3.3D. 高速ドリフト面と共鳴帯の交差．急勾配条件の役割. こんどは、点が平面 λ に沿っての移動によって共鳴帯から抜け出せることを急勾配条件がどのように保証するかを説明する．

まず平面 λ と共鳴面の交わりを考察する．$\mathcal{R}$ を任意の共鳴曲面とし、λ を $\mathcal{R}$ に対応するブロック内の任意の高速ドリフト面とし、$k^1,\ldots,k^r$ は $\mathcal{R}$ を定義するベクトルとする．平面 λ はこれらのベクトルの線形 hull から平行移動で得られ、$\mathcal{R}$ は $\omega(I)=\mathrm{grad}H_0|_I$ がそれらに垂直であるような点集合である．ゆえに $\mathrm{grad}H_0|_I$ が λ に垂直であるのは $I\in\mathcal{R}$ のときおよびそのときのみである．ところが $\mathrm{grad}H_0$ の λ への射影はすべての $I\in\lambda$ に対して $\mathrm{grad}(H_0|_\lambda)_I$ である．ゆえに $I\in\mathcal{R}\cap\lambda$ の必要十分条件 $\mathrm{grad}(H_0|_\lambda)_I=0$ である．

じつのところ、ある面でこの主張を強くできる．$|\mathrm{grad}(H_0|_\lambda)_I|$ が大きいほど I から $\mathcal{R}$ への距離は大きい．勾配の長さの下からの評価が級数的性格をしていることから (急勾配関数に対して正しい)、λ と共鳴ゾーンの交わりの直径の上からの評価が必要とされる．これはこのゾーンの共鳴幅に依存する．

3.3E. 注意. $\mathcal{R}$ と λ の交わりが点毎でなければ、悲惨な結果をもたらす．適当な摂動 εH_1 に対して、$\mathcal{R}\cap\lambda$ 内にあるすべての滑らかな曲線 γ は「超伝導運河」となり、それに沿って $I(t)$ が ε の速さで動く．これらの運河は 1.16 節で記述した．そこでは別の条件で特徴づけれられた．すなわち、γ は有理面 λ 上にあり、すべての $I\in\gamma$ に対して $\mathrm{grad}(H_0|_\lambda)_I=0$ であった．3.3D 節の始めの議論により、この条件は実際 $\gamma\subset\mathcal{R}\cap\lambda$ と同値である．

3.3F. 注意. 高速ドリフトのすべての平面 λ は $\mathcal{R}\cap\lambda$ の各点において H_0 のレベル面に接し、それ以外はどこでも接しない．

3.4. 指数関数評価の導出. ここでは指数関数的評価が導けるような関係をどのように得るかを説明する．

共鳴帯と平面 λ の交わり (3.3C 節であらっぽく記述した) から本当にトラップが構成できるか確かめるために、これらのゾーンの共鳴幅を十分に小さくとる必要がある．1 重ゾーンは最小の幅を持つので、$1/N$ のある正のべきより大きくとらなければ十分である．それを $\nu_0=\nu_0(N)$ と表わす．(ν_0 やこの副節で考えるほかの関数の正確な定義は別のところで行なう.) 主定理の証明で使うすべての記号は、ε の代わりに M を使うことを除いてここのものと同じである．多だし M はやや違った意味で用いる．幅の評価の級数的性格は急勾配条件の評価からしたがう．構成の際に 1 重ゾーンの共鳴幅 $\nu_0(N)$ は可能な限り大きくとる．

ブロック内の運動は平面 λ に沿ってのみ起こると仮定してきた．事実はそうでなく、上で行なったトラップの構成において平面 λ をその近傍で置き換える必要があった．これらの近傍の厚さが $1/N$ のべきとしてある $b_1=b_1(N)$ より大きくなければ、われわれの構成法へのこの修正はなんら基本的な違いをもたらさず、前と同様 $1/N$ とともに小さな直径のトラップを与える．

各ブロック内で $I(t)$ が平面 λ の b_1 近傍を動くという主張を正当化するために、非共鳴ハー

モニクスの消去に関する補題 (3.2B 節参照) を使うだけでよい．このためには次の 3 つの条件が成り立てば十分である．まず消去に関する補題はすべてのブロックに適用可能である．このためにはブロックを構成するときのゾーンの最小の共鳴幅 ν_0 より補題の ν を大きくとらなければ十分である．．第二に、変形 $|(I,\varphi)-(J,\varphi)|$ が $b_1/2$ を超えない．これは $I(t)$ が λ の $b_1/2$ 近傍を「振動」で出ないようにするために必要である．第三に $I(t)$ はこの近傍をドリフトによって出ない．このためにはこの点の運動時間 T を制限する必要がある．

3.2B で注意したように、座標の変形は上からの評価が ε,ν および N の級数積の形をしており、それを $b=b(\varepsilon,\nu,N)$ と表わす．また平面 λ を横切るドリフトの速さは $\varepsilon\exp(-N^{1-\kappa})$ を超えない．ここで $\kappa>0$ は任意に小さい．ゆえにこれら 3 つの条件が成り立つためには

$$\begin{aligned}\nu &\le \nu_0(N),\\ b(\varepsilon,\nu,N) &\le \tfrac{1}{2}b_1(N),\\ T\cdot\varepsilon\exp(-N^{1-\kappa}) &\le \tfrac{1}{2}b_1(N).\end{aligned}$$

であれば十分である．

これらの不等式を満たす T の値は系の安定性時間の評価である．問題は T の値として可能なもっとも大きな値を得ることである．三番目の不等式より、このためには N ができるだけ大きくする必要がある．$\nu_0(N), b(\varepsilon,\nu,n)$ および $b_1(N)$ の具体的な値を二番目の不等式に代入すればわかるように、これらの不等式を等式にして、ν と N を ε で表わせば、N の最大値が得られる．これらの等式は級数的な性格をしているから、ν と N はそれぞれ ε と $1/\varepsilon$ の正級数である．

三番目の不等式より、$T=\frac{1}{\varepsilon}\exp N^{1-2\kappa}$ ととれる．$N=N(\varepsilon)$ は $1/\varepsilon$ の級数であるから、安定性時間 T の指数関数的評価

$$T=\frac{1}{\varepsilon}\exp\frac{1}{\varepsilon^a}.$$

を得る．

主定理は 4 節で定式化し、5-9 節で証明する．証明は非共鳴ハーモニクスの消去に関する補題と 10 節のある種の技術的補題を基にする．

4 節．急勾配条件．主定理の詳細陳述

4.1．急勾配条件． $\mathbf{E}^s$ はベクトル $I_1,\ldots,I_s$ のユークリド空間で、ノルム $|I|=\sqrt{(\sum_{j=1}^s I_j^2)}$ を持つものとし、$\Lambda^r(I)$ は点 $I\in\mathbf{E}^s$ を通る r 次元アフィン部分空間 (平面)λ の集合を表わすとする．つまり $I\in\lambda$ である．

H_0 は領域 (domain)$G\subset\mathbf{E}^s$ で定義された任意の関数であるとする (ここおよび以下では領域 (domain) は開集合である)．$I\in G$ および $\lambda\in\Lambda^r(I)$ を任意とする．$m_{I,\lambda}(\eta)$ で、G と λ 上の半径 η 中心 I の球との交わり上の $\mathrm{grad}(H_0|_\lambda)$ の長さの下限を表わす．

$$m_{I,\lambda}(\eta)=\inf_{\{I'\in\lambda\cap G:|I'-I|=\eta\}}|\mathrm{grad}(H_0)|_\lambda|,$$

ここで $H_0|\lambda$ は λ への H_0 の制限である．

4.1A. 定義. H_0 が平面 $\lambda \in \Lambda^r(I)$ 上の点 $I \in G$ で急勾配であると言われるのは、$C > 0$、$\delta > 0$、および $\alpha \geq 1$ を見つけることができて、$m_{I,\lambda}(\eta)$ が $[0,\delta)$ 上で定義され、

$$\sup_{0\leq\eta\leq\xi} m_{I,\lambda}(\eta) > C\xi^\alpha$$

がすべての $\xi \in (0,\delta)$ で成り立つときである．C と δ を 係数 と呼び、α を勾配 指数 と呼ぶ.

4.1B. 定義. 以下の 2 つの条件が成り立つとき H_0 は点 I において急勾配であるという．まず $g \geq 0$ として $\mathrm{grad}H_0|_I \geq g$. 次に、変数の数 s が 1 より大きければ、すべての $r = 1,\dots,s-1$ に対して、定数 $C_r > 0$、$\delta_r > 0$、および $\alpha_r \geq 1$ が存在して、H_0 は C_r および δ_r を急勾配係数とし α_r を急勾配指数として $\mathrm{grad}H_0|_I$ に直角にすべての面 $\lambda \in \Lambda^r(I)$ 上で急勾配である.

数 $g, C_1,\dots,C_{s-1}$ および $\delta_1,\dots,\delta_{s-1}$ を I における H_0 の 係数 と呼び、$\alpha_1,\dots,\alpha_{s-1}$ を勾配 指数 と呼ぶ.

4.1C. 定義. H_0 が係数 $g, C_1,\dots,C_{s-1}, \delta_1,\dots,\delta_{s-1}$ および指数 $\alpha_1,\dots,\alpha_{s-1}$ を持って G 内で急勾配と言われるのは、H_0 がこれらの係数と指数を持ってすべての点 $I \in G$ で急勾配のときである.

主定理を定式化するために α_{s-1} を除くすべての急勾配指数の関数 ζ で、$s > 2$ に対して次の条件を満たすものが必要である.

$$\zeta = [\alpha_1(\alpha_2\cdots(\alpha_{s-3}(\alpha_{s-2}\cdot s + s - 2) + \cdots + 2) + 1] - 1 \tag{4.1}$$

$s = 2$ なら $\zeta = 1$ とおく.

4.2. 記法. X を距離空間の部分集合とする．$X + \varepsilon$ で X の ε 近傍を表わし、$X - \varepsilon$ で X に ε 近傍も含めて含まれる点集合を表わす.

(a_{ij}) を s 次の複素正方行列とする．$||(a_{ij})||$ で、行列が (a_{ij}) の形をしているエルミート空間 C^s 内の線形作用素のノルムを表わす．すなわち、

$$\|\,(\alpha_{ij})\,\| = \max_{|I|=1}\sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^s|\sum_{j=1}^s a_{ij}I_j|^2}, \quad \text{where} \quad |I| = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^s |I_i|^2}.$$

4.3. 関数 H の記述. H で

$$H = H_0(I) + H_1(i,p,\varphi,q)$$

なる形の関数を表わす．ただし、これは $\varphi_1,\dots,\varphi_s = \varphi$ の 2π 周期の関数であり、I は s 次元ベクトル、p と q は $(n-s)$ 次元ベクトルである．$n \geq s \geq 2$ と仮定し、また条件 4.3A および 4.3B が成り立つと仮定する.

4.3A. H は複素集合 F

$$F = \{I,p,\varphi,q : \mathrm{Re}p,q \in D, |\mathrm{Im}I,p,\varphi,q| \leq \rho\},$$

の上で定義され、解析的である．ここで G および D はそれぞれ $\mathbf{E}^s$ および $\mathbf{E}^{2(n-s)}$ の任意の領域であり、$\rho > 0$ である．ここでも、また以下でも、$|\mathrm{Im}I,p,\varphi,q| \leq \rho$ は

$$|\mathrm{Im}I_i| \leq \rho, |\mathrm{Im}\varphi_i| \leq \rho \quad (i = 1,\dots,s),$$
$$|\mathrm{Im}p_j| \leq \rho, |\mathrm{Im}q_j| \leq \rho \quad (j = 1,\dots,n-s),$$

を意味する．このノルムおよび整数ベクトル k(主定理の証明の際に以下で導入される) のノルムを除いて、有限次元のその他のノルムはすべてユークリッドまたはエルミートノルムである．
　引数が実数のとき H は実数値関数である．

4.3B. H_0 のへシアンは F 上で一様に限られている．すなわち、

$$m = \sup_F \| \frac{\partial^2 H_0(I)}{\partial I^2} \|, \tag{4.2}$$

ならば、$m < \infty$ である．ここで、$\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} = (frac \partial^2 H_0 \partial I_i \partial I_j)$ は H_0 の 2 階微分の行列である．

4.3C. ハミルトン関数 H を持つ正準方程式系とは、次の系のことである．

$$\begin{cases} \dot{I} = -H_q, & \dot{p} = -H_q, \\ \dot{\varphi} = H_I, & \dot{q} = H_p. \end{cases}$$

4.4．主定理． $H = H_0(I) + H_1(I, p, \varphi, q)$ は集合 F の上で定義されているとする．ただし H と F は 4.3A 節のものである．H は G 内で急勾配であり、係数 g, C_r および δ_r と指数 $\alpha_r (r = 1, \ldots, s-1)$ を持つとする．このとき ρ 以外の H_1 の性質に依らない正定数 $M_0 = M_0(H_0, \rho)$ があって、次の性質を持つ．

$$M = \sup_F |\mathrm{grad} H_1|, \tag{4.3}$$

とおき、$0 < M < M_0$ とする．$I(t), p(t), \varphi(t), q(t)$ はハミルトン関数 H の正準方程式系の任意の (実) 解であって、$C > 0$ を任意として

$$I(0) \in G - d \quad \text{and} \quad p(t), q(t) \in D - d \quad \text{for all} \quad t \in [0, C],$$

であるとする．このとき、

$$|I(t) - I(0)| < d/2 \quad \text{for all} \quad t \in [0, \min[C, T]].$$

ここで、

$$d = M^b, \quad b = \frac{3}{(12\zeta + 3s + 14)\alpha_{s-1}}, \tag{4.4}$$

$$T = \frac{1}{M} \exp(\frac{1}{M})^{\alpha}, \quad a = \frac{2}{12\zeta + 3s + 14)}, \tag{4.5}$$

および $\zeta = \zeta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2})$ は (4.1) で定義される．

4.5．注意． **4.5A.** 定理の主張は、M として $\sup_F |\mathrm{grad} H_1|$ の代わりに $\sup_F |H_1|$ をとっても ((4.3) 参照) まったく変わらない．

4.5B. M_0 は急勾配係数および指数 $g, C_1, \ldots, C_{s-1}, \delta_1, \ldots, \delta_{s-1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$ および m と ρ にのみ依存する．

主定理の証明を形成する主張の一部 (命題 8.6 と 9.2) は上で記述した系に関して正しいばかりでなく、たとえば線形化した系の固有値が純虚数であるような特異点の近傍におけるハミルトン系のような系を含むもっと広い類の系に対しても正しい (2.2B 節参照). これらを周波数を持つ系 と呼ぶ. これらは以下で定義する.

5 節. 禁止運動

5.1. 振動系の禁止運動. $\mathbf{Z}^s$ は整数成分の s 次元ベクトルの格子とする.

5.1A. 定義. ベクトル $k = k_1, \ldots, k_s \in \mathbf{Z}^s$ の階数 (order) とは、$|k| = \sum_{i=1}^s |k_i|$ のことである.

5.1B. 定義. $\omega : Y \to \mathbf{C}^s$ は任意の集合 Y から複素ベクトル空間への写像であるとする. このとき $k \in \mathbf{Z}^s$ が ω に相対的な Y の ν 共鳴ベクトルと呼ばれるのは、$y \in Y$ があって $|\langle k, \omega(y)\rangle|$ のときである. ただし、$\langle k, \omega\rangle = \sum_{i=1}^s k_i\omega_i$ は k と ω のスカラー積、ν は数である.

X は実多様体 V 上のベクトル場、$\mathcal{J} : V \to G$ は写像であるとする. ここで G は $\mathbf{E}^s$ の部分集合であって、作用変数空間と呼ばれる. $\omega : G \to \mathbf{R}^s$ を写像とする. ただし、$\mathbf{R}^s$ は s 次元線形空間であって、周波数空間と呼ばれる.

5.1C. 定義. 組 $(X, \mathcal{J}, \omega)$ を周波数系と呼ぶ.

5.1D. 定義. 以下の条件が成り立つとき、$(X, \mathcal{J}, \omega)$ はパラメーター N, ν, b および T の禁止運動の条件を満たす、という.

U を $G - 2b$ の任意の部分集合とする. λ_0 は $|k| \leq N$ を満たす U に対する (ω に相対的な)ν 共鳴ベクトル k のすべての線形 hull を表わすとする. $v(t)$ はベクトル場 X で定義される微分方程式系 $\dot{v} = X(v)$ の任意の解であって、次を満たすものとする.

$$\mathcal{J}(v(t)) \in U \quad \text{and} \quad v(t) \in V - 2b \quad \text{for all} \quad t \in [0, C],$$

ここで $c > 0$ は任意である. このとき

$$\rho(\mathcal{J}(v(t)), \lambda) < b \quad \text{for all} \quad t \in [0, \min[C, T]],$$

である. ここで λ は $\mathbf{E}$ 内のアフィン空間であって、λ_0 から平行移動で得られ、点 $\mathcal{J}(v(0))$ を含む. また $\rho(\mathcal{J}(v(t)), \lambda)$ は $\mathcal{J}(v(t))$ から λ までの距離である.

5.2. 禁止運動のための条件はハミルトン関数 H を有する系にもあてはまる. $H = H_0(I) + H_1(I, p, \varphi, q)$ は複素集合 F の上で解析的であるとする. ここで H と F は 4.3 節と同じものである.

$$F = \{\mathrm{Re}I \in G, \mathrm{Re}p, q \in D, |\mathrm{Im}I, p, \varphi, q| \leq \rho\}$$

であることを思いだそう. ここで G と D は領域 (開集合) である.

V で次の集合

$$V = \{I \in G, p, q \in D, \varphi \in T^s\} \tag{5.1}$$

を表わし、X で H によって定義されるベクトル場を表わす．$\mathcal{J} : V \to G$ は $\mathcal{J}(I,p,\varphi,q) = I$ なる写像、$\omega : G \to \mathbf{R}^s$ は $\omega(I) = \dfrac{\partial H_0}{\partial I}$ なる写像とする．

5.2A．定義．このように定義された周波数系 $(X, \mathcal{J}, \omega)$ はハミルトン関数 $H = H_0 + H_1$ を持つ系から得られたと言われる．

次の命題は非共鳴ハーモニクスの消去に関する補題 10.3 の帰結である．

5.2B．命題．ハミルトン関数 H を持つ系から構成される周波数系 $(X, \mathcal{I}, \omega)$ を考える．m と M は (4.2) および (4.3) と同じであるとする．N, ν, b および T は正数であって、(10.1)-(10.4) が成り立つような $\kappa \in (0,1)$ を見つけることができる (これらの関係はやっかいな形をしているが、これらは補題 10.3 の条件が成り立つことを保証するのに必要なだけなので、それを書き下すのはやめておく)．また、以下を仮定する

$$4mbN \le \nu, \tag{5.2}$$

$$2b < \rho, \tag{5.3}$$

$$T \le \frac{\rho}{16\pi s} b \frac{1}{M} \exp(\rho N^{1-\kappa}), \tag{5.4}$$

$N, \nu, b, T, \kappa, M, m, \rho, n$ および s のみがこれらの等式および不等式に入っている．このとき $(X, \mathcal{I}, \omega)$ はパラメーター N, ν, b および T を持つ禁止運動に対する条件を満たす．

5.3．命題 5.2B の証明．$U \in G - 2b$ とし、ΔF は閉集合

$$\Delta = \{I, p, \varphi, q : \mathrm{Re} I \in \overline{U + b}, \mathrm{Re} p, q \in D - b, |\mathrm{Im} I, p, q| \le b, |\mathrm{Im}\varphi| \le \rho\}$$

であるとする (横棒は閉包を表わす)．したがって (5.3) より $\Delta F \subset F$ である．

A_I で集合

$$A_I = \{I : \mathrm{I} \in \overline{U + b}, |\mathrm{Im} I| \le b\}$$

を表わす．U は、5.1D 節で定義した λ_0 を用いて $\dim \lambda_0 < s$ であるとする．

5.3A．主張．A_I に対するすべての $(\nu/2)$ 共鳴ベクトル $k \in \mathbf{Z}^s$ で $|k| \le N$ なるものは λ_0 に属する．

実際、このような k に対して、$|\langle k, \omega(I)\rangle| < \nu/2$ なる $I \in A_I$ を見つけることができる．A_I の定義より、$I' \in U$ を見つけて、I と I' を結ぶ線分が A_I に含まれ、その長さが $2b$ より小さくなるようにできる．このような点 I' に対して

$$|\langle k, \omega(I')\rangle| \le |\langle k, \omega(I)\rangle| + m|k||I - I'| < \frac{\nu}{2} + 2mbN.$$

を得る．これと (5.2) より $|\langle k, \omega(I')\rangle| < \nu$ がわかる．λ_0 の定義より、$k \in \lambda_0$ が従い、だから主張は証明された．

さて (非共鳴ハーモニクスの消去に関する) 補題 10.3 で λ_0 を λ の代わりに使って ΔF に制限した H に適用しよう．この補題と (5.3) より、実集合

$$\{I, p, \varphi, q : I \in \overline{U}, p, q \in D - 2b, \varphi \in T^s\} \tag{5.5}$$

上で解析的な正準変換 $I, p, \varphi, q \to J, P, \psi, Q$ を行い、この集合上で

$$|J(I, p, \varphi, q) - I| < \frac{b}{15}. \tag{5.6}$$

とできる... 変数 J, P, ψ, Q では、ハミルトン関数は $H = \bar{H} + R$ の形をしており、$\bar{H}$ の展開は k が $\lambda_0 \cap \mathbf{Z}^s$ に属するハーモニクスのみを含む:

$$\overline{H} = \sum_{k \in \lambda_0 \cap \mathbf{Z}^s} \overline{h}_k(J, P, Q) e^{ih\psi}, \tag{5.7}$$

および

$$|\mathrm{grad} R| < 8\pi s \frac{1}{\rho} M \exp(-\rho N^{1-\kappa}). \tag{5.8}$$

ここで次の補題が必要である.

5.3B. 補題 (ハーモニックの貢献について). $\mathcal{H} = \sum h_k(J, P, Q)e^{ik\psi}$ を任意のハミルトン関数とし、$J(t), P(t), \psi(t), Q(t)$ をこのハミルトン関数を持つ系の任意の解とする. このときハーモニック $h_k(J, P, Q)e^{ik\psi}$ で定義されるベクトル J の増大する方向は k の方向である.

この補題はハミルトン方程式

$$\begin{aligned} \dot{J}_j = & -\tfrac{\partial}{\partial \psi_j}(h_k(J, P, Q)e^{ik\psi} + \cdots) = \\ = & \ k_j({}^i h_k(J, P, q)e^{ik\psi}) + \cdots \qquad (j = 1, \ldots, s). \end{aligned}$$

を基にする計算によって証明される.

5.3C. 命題 5.2B の証明の完結. $v(t) = I(t), p(t), \varphi(t), q(t)$ はハミルトン関数 H の系の任意の解で、すべての $t \in [0, C]$ に対して $I(t) \in U$ および $v(t) \in V - 2b$ なるものとする. ここで $C > 0$ であり、集合 V は (5.1) で定義されたものである. 簡単にわかるように、$t \in [0, C]$ に対するこの解の軌跡は集合 (5.5) に属する. 同じ解を J, P, ψ, Q 座標で表わしたものを $J(t), P(t), \psi(t), Q(t)$ と書く.

(5.7)、(5.8) および補題 5.3B より、$\dot{J}(t)$ の λ_0 に垂直な成分の長さは、すべての $t \in (0, C]$ に対して w より小さい. ここで w は (5.8) の右辺を表わす. λ' は $\mathbf{E}^s$ の平面であって λ_0 の平行移動で得られ $J(0)$ を含むとする. このとき $J(t)$ から λ' への距離 $\rho(J(t), \lambda')$ は $t \in (0, C]$ の間、tw より小さい. (5.4) より、$t \in [0, \min[C, T]]$ に対して $\rho(J(t), \lambda') < b/2$ である. (5.6) および $\lambda' || \lambda$ という事実から、これらすべての T に対して

$$\rho(I(t), \lambda) \leq \rho(I(t), J(t)) + \rho(J(t), \lambda') + \rho(\lambda', \lambda) < \frac{b}{15} + \frac{b}{2} + \frac{b}{15} < b$$

を得る. これが示すべきことであった.

6 節. 共鳴. 共鳴帯とブロック

こうして $I(t)$ のふるまいは、この点のある近傍でどんなまたどのようにベクトル $k, |k| \leq N$ が共鳴ベクトルであるかに強く依存する．この文脈では、次の概念が有用である．$N > 0$ を任意の数とする．

6.1. 定義. $k^1, \ldots, k^r$ は $\mathbf{Z}^s$ の任意の線形独立ベクトルであって order は N より大きくない、すなわち $|k^i| \leq N$、とする．Z_N で $k^1, \ldots, k^r$ の線形 hull に属する $k \in \mathbf{Z}^s$ すべての集合で $|k| \leq N$ なるものを表わす．Z_N を多重度 r、階数 N の共鳴と呼ぶ．$k^i(i = 1, \ldots, r)$ を Z_N の定義ベクトルと呼ぶ．ゼロベクトルのみから成る集合 $\{0\}$ は 0 重共鳴と呼ばれる．これの定義ベクトルは $k = 0$ であるとする．

すべての $N \geq 1$ に対してただひとつの s 重共鳴があることに注意する．($N = 0$ なら 0 重共鳴のみがある．)

s 次元ベクトル空間 $\mathbf{R}^s$(周波数空間) を考える．$w \in \mathbf{R}^s$ とする．

6.2. 定義. Z_N を任意の r 重共鳴とする．ただし $r \neq 0$ とする．$\nu > 0$ は任意であるとする．$O(Z_N, \nu)$ で次の集合を表わす.

$$O(Z_n, \nu) = \begin{array}{l} \{w \in \mathbf{R}^s : r \text{ 個のベクトル } f^i \in Z_N \text{があって} \\ |\langle k^i, \omega\rangle|, \nu(i = 1, \ldots, r)\} \end{array}$$

これを、Z_N の幅 ν の影響ゾーンあるいは単に Z_N 共鳴ゾーンと呼ぶ．$O(Z_N, \nu)$ の <u>重複度</u> とは Z_N の重複度 r のことである．すべての $\nu > 0$ に対して重複度 0 のゾーンは $\mathbf{R}^s$ 全体である．

$N > 0$ を固定し、$\mathcal{B}$ ですべての r 重共鳴を表わし、$\mathcal{B}_N$ ですべての共鳴の集合を表わす.

$$\mathcal{B}_N = \cup_{r=0}^s \mathcal{B}_N^r.$$

N と $\nu_1, \ldots, \nu_s$ を任意の正数とする．O_r は幅 ν_r のあうべての r 重共鳴ゾーンの和を表わすとする.

$$O_r = \cup_{Z_N \in \mathcal{B}_N^r} O(Z_N, \nu_r). \tag{6.1}$$

$\mathcal{B}_N$ から $\mathbf{R}^s$ の部分集合への写像で、各共鳴 $Z_N \in \mathcal{B}_N$ に部分集合 $B = V(Z_N)$ を同伴させるものを考える.

$$\begin{cases} B = O(Z_N, \nu_r r) & \text{if} \quad r = s, \\ B = O(Z_N, \nu_r r) \backslash O_{r+1} & \text{if} \quad r = 1, 2, \ldots, s-1, \\ B = \mathbf{R}^s \backslash 0_1 & \text{if} \quad r = 0, \end{cases} \tag{6.2}$$

ここで r は Z_N の重複度である.

6.3. 定義. この写像は $\mathbf{R}^s$ をパラメーター $N, \nu_1, \ldots, \nu_s$ のブロックに分割すると言われる．集合 $B(Z_N)$ はこの分割の Z_N に対応するブロックと呼ばれる.

(荒っぽく言えば、ブロック $B(Z_N)$ は Z_N の影響ゾーンと Z_N に含まれない共鳴の影響ゾーンの和の差である．)

6.4. 命題. 任意の正数 $N, \nu_1, \ldots, \nu_s$ に対して、パラメーター $N, \nu_1, \ldots, \nu_s$ を持つ分割内の多重度 r 未満のブロックすべての和は $\mathbf{R}^s \backslash \cap_{i=1}^s O_i$ である．すべての多重度のブロックの和は $\mathbf{R}^s$ である.

証明. (6.2) および (6.1) より、$O_r \backslash O_{r+1}, r = 1, \ldots, s-1$ として、集合

$$\cup_{Z_N \in \mathcal{B}_N^r} B(Z_N)$$

が $r = s$ に対して O_r と一致する．したがって

$$\cup_{i=0}^{r-1} \cup_{Z_N \in \mathcal{B}_N^i} B(Z_N) = [\cup_{i=1}^{r-1} (O_i \backslash O_{i+1}] \cup (\mathbf{R}^s \backslash O_1) = \mathbf{R}^s \backslash \cap_{i=1}^{r} O_i.$$

これで命題 6.4 が証明された.

6.5. 影響ゾーン、および任意の集合の上でのブロックへの分割. $\omega : G \to \mathbf{R}^s$ は任意の集合 G から周波数空間 $\mathbf{R}^s$ の中への写像とする．G と ω を固定する.

Z_N を任意の共鳴とし、N, ν および $\nu_1, \ldots, \nu_s$ を任意の正数とする．$B(Z_N)$ はパラメーター $N, \nu_1, \ldots, \nu_s$ を持つ $\mathbf{R}^s$ の分割のブロックであるとする.

6.5A 定義. $O(Z_N, \nu)$ の逆像 $\omega^{-1}(O(Z_N, \nu))$ を (ω に相対的に) 集合 G 上の Z_N の幅 ν の影響ゾーンと呼ぶ．$Z_N \in \mathcal{B}_N$ を G の部分集合 $\omega^{-1}(B(Z_N))$ に同伴させる写像は (ω に相対的に)G のブロックへの分割でパラメーター $N, \nu_1, \ldots, \nu_s$ をもつものと呼ばれ、$\omega^{-1}(B(Z_N))$ は Z_N に対応する G 内のブロックと呼ばれる．このブロックの 多重度 とは Z_N の多重度のことである.

以下では簡単のため、集合 $\omega^{-1}(O(Z_N, \nu))$ および $\omega^{-1}(B(Z_N))$ を $O(Z_N, \nu)$ および $B(Z_N)$ と表わす．対応する集合を周波数空間では今後使わないから混乱は起こらないはずである.

次の主張は命題 6.4 からしたがう.

6.5B. 系. 任意の正のパラメーター $N, \nu_1, \ldots, \nu_s$ を持つ、集合 G のブロックへの分割を考える．このとき多重度が r 未満のブロックすべての和は $G \backslash \cap_{i=1}^{r} O_i$ である．ここで O_i は幅 ν_i の G 上の i 重共鳴帯すべての和である．ブロックすべての和をとると G に一致する.

7 節．無摂動ハミルトン関数の勾配への高速ドリフト円盤の直径の依存性

Z_N を任意の共鳴とし、I を $\mathbf{E}^s$ の点とする．$\lambda(Z_N, I)$ は $\mathbf{E}^s$ の affine 部分空間でベクトル $k^i \in Z_N$ の線形 hull を平行移動して得たもので、I を含むものとする.

7.1. 定義. $\lambda(Z_N, I)$ を I を通る Z_N に対する高速ドリフト面と呼ぶ. $\dim \lambda(Z_N, I) = r(Z_N)$ であることに注意しよう．後者は Z_N の重複度である．$\omega : G \to \mathbf{R}^s$ をある領域 $G \subset \mathbf{E}^s$ から $\mathbf{R}^s$ の中への写像とする.

$Z_N \neq 0$ を任意の共鳴とし、ν と b を任意の正数とし、$I \in G$ とする．6.5A 節で定義された (ω に相対的な)G 上の共鳴帯 $O(Z_N, \nu)$ と平面 $\lambda(Z_N, I)$ の b 近傍との交わり $O(Z_M, \nu) \cap (\lambda(Z_N, I) + b)$ を考える.

7.2. 定義. $D = D(Z_N, \nu, b, I)$ で I を服務この個交わりの連結成分を表わし、これを共鳴 Z_N および点 I に対し、ω に相対的な G 上の高速ドリフト円盤、あるいは単に円盤と呼ぶ．ν を円盤の共鳴の幅と呼び、b を円盤の厚さと呼ぶ.

$O(Z_N, \nu)$ の境界に含まれる円盤の境界の一部を円盤の lateral surface と呼び、$\lambda(Z_N, I)$ の b 近傍の境界に含まれる部分を円盤の基礎 (base) と呼ぶ.

H_0 をある領域 $G \subset \mathbf{E}^s$ 内で定義される任意の 2 回微分可能関数とし、$m > 0$ を任意とする.

7.3. 定義． H_0 は以下の 2 つの条件を満たすとき、係数 $g, m, C_1, \ldots, C_{s-1}, \delta_1, \ldots, \delta_{s-1}$ および指数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$ を持ち、G 内で一般急勾配であると言われる．

A. H_0 は勾配係数 $g, C_1, \ldots, C_{s-1}, \delta_1, \ldots, \delta_{s-1}$ および勾配指数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$ を持ち、G 内で急勾配である．

B. G において

$$\| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \| \leq m,$$

((4.2) 参照)．

7.4. 命題． H_0 はある領域 $G \subset \mathbf{E}^s$ において一般化急勾配であり、係数 $g, m, C_1, \ldots, C_{s-1}, \delta_1, \ldots, \delta_{s-1}$ および添え字 (index)$\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$ を持つとする．$\omega : G \to \mathbf{R}^s$ は $\omega(I) = \mathrm{grad} H_0|_I$ で定義される写像とする．

Z_N は任意の r 重共鳴で、$r = 1, \ldots, s-1$ とする．D は厚さ b、Z_N および任意の $I \in G - 2d$ に対する共鳴幅 ν(ω に相対的に) の G 上の円盤とする．ただし、$N, b, \nu,$ および d は以下の条件を満たすとする．

$$d \leq \min[g/3m, \delta_r], \tag{7.1}$$

$$\varepsilon < g/4, \tag{7.2}$$

$$b \leq \min[d/4, \varepsilon/4m], \tag{7.3}$$

$$rN^{r-1}\nu \leq \varepsilon; \tag{7.4}$$

ここで ε は次で与えられる．

$$\varepsilon = \frac{C_r}{5}(\frac{d}{2})^{\alpha_r} \tag{7.5}$$

このとき D の直径は d より大きくない．

証明は技術補題 10.6 および 10.5 に依存する．帰謬法による．

D の直径は d より大きいとする．D は開線形連結集合であるから、D 内の曲線 γ があって、$\lambda = \lambda(Z_N, I)$ として、補題 10.6 の性質 10.6A-10.6C を満たす．補題 10.6 の 10.6D の正当性は (7.1)-(7.3) から出る．この補題から次を満たす点 $\tilde{I} \in \gamma$ が存在することを得る．

$$|\mathrm{grad}(H_0|_{\tilde{\lambda}})|_{\tilde{I}} > \varepsilon, \tag{7.6}$$

ここで $\tilde{\lambda} = \lambda(Z_N, \tilde{I})$ は $\tilde{I}$ を通る Z_N に対する高速ドリフト面である．

一方、$O(Z_N, \nu)$ の定義より、任意の $I \in O(Z_N, \nu)$ に対して r 個の線形独立なベクトル $k^i \in Z_N (i = 1, \ldots, r)$ を見つけて $|\langle k^i, \omega(I) \rangle| < \nu$ とできる．補題 10.5 より $|\mathrm{pr}_{\lambda_0}| < rN^{r-1}\nu$ がすべての $I \in O(Z_N, \nu)$ に対して成り立つ．ただし λ_0 は $k^i (i = 1, \ldots, r)$ の線形 hull であり、$\mathrm{pr}_{\lambda_0}\omega(I)$ は λ_0 への $\omega(I)$ の射影である．(7.4) を考慮に入れ、$\gamma \subset D \subset O(Z_N, \nu)$ なる事実を考慮して、すべての $I \in \gamma$ に対して

$$|\mathrm{pr}_{\lambda_0}\omega(I)| < \varepsilon \tag{7.7}$$

を得る．しかし $\mathrm{grad}(H_0|_{\tilde{\lambda}})|_{\tilde{I}} \equiv= \mathrm{pr}_{\lambda_0}\omega(\tilde{I})$ であるから、(7.6) と (7.7) は互いに矛盾する．これで命題 7.4 が証明された．

8 節．共鳴が重ならないための条件

I をある領域 G の任意の点とし b を正数とする．

8.1．定義． G と I を中心とする半径 b の球の交点は、0重共鳴$Z_N = \{0\}$ および I に対する G 上の 円盤 と呼ばれる．b はこの円盤の 厚さ と呼ばれる．この円盤の ベース とはそれの境界全体であり、ラテラル面 を空集合とみなす (定義 7.2 参照).

8.2．高速ドリフト円盤によるブロックのつり上げ． $\omega : G \to \mathbf{R}^s$ をある固定した写像とする．決まったパラメーター $N, \nu_1, \ldots, \nu_s$ を持つブロックへの (ω に相対的な)G の分割を考える (定義 6.5A 参照)．6 節と同様、$B(Z_N)$ は共鳴 Z_N に対応するこの分割のブロックとする．

Z_N は任意、I は $B(Z_N)$ の任意の点、b は正数とする．r で Z_N の多重度を表わし、$D = D(Z_N, I, b)$ で厚さ b および共鳴幅 $\nu_r (r \neq 0$ に対して$)$ の Z_n および I に対する円盤を表わす (定義 7.2 および 8.1 参照).

定義． $D = D(Z_N, I, b)$ を I におけるブロック $B(Z_N)$ の rigging の厚さ b の円盤と呼ぶ.

ω に相対的な G の分割で、パラメーター $N, \nu_1, \ldots, \nu_s$ を持ち、$\nu_{s-1} = \nu_s$ なるものを考える．$b > 0$ および $\nu_0 > 0$ を任意の数とする．

8.3．定義． 以下の 2 つの条件が満たされるとき、ω はパラメーター $N, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{s-1}, b$ を持つ重ならない共鳴に対する条件を満たすと言われる．

A. s 重のブロックは空である．

B. Z_N を多重度 $r(r = 0, 1, \ldots, s-1)$ の任意の共鳴とする．D は $B(Z_N)$ の rigging の厚さ b の任意の円盤で $\bar{D}$ が G に含まれるものとする．このとき $\bar{D}$ は任意の $Z'_N \not\subset Z_N$ に対して $O(Z'_N, \nu_r)$ と交わらない.

$$\overline{D} \cap O(Z'_N, \nu_r) = \emptyset \quad \text{for all} \quad Z'_N \notin Z_n.$$

8.4．命題． 連続写像 ω がパラメーター $N, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{s-1}, b$ を持つ重ならない共鳴に対する条件を満たすとする．パラメーター $N, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{s-1}, b$ を持つ ω に相対的な G の分割を考える．このとき次の主張が成り立つ．

A. この分割内の同じ多重度のブロックは共通点を持たない.

B. D を多重度 $r = 1, \ldots, s-1$ の任意のブロック $B(Z_N)$ の rigging の厚さ b の任意の円盤で $\bar{D} \subset G$ なるものとする．このとき D のラテラル面は多重度が r 以下のブロックの和に含まれる．

C. D を任意のブロック $B(Z_N)$ の rigging の厚さ b の任意の円盤とし、$\bar{D} \subset G$ とする．このとき $\bar{D}$ に対する ν_r 共鳴ベクトル $k \in \mathbf{Z}^s$ すべての集合でその階数が N より大きくないもの (定義 5.1B および 5.1A 参照) は Z_N に含まれる．ここで r は $Z_N (r = 0, 1, \ldots, s-1)$ の多重度である．

A は条件 8.3B と定義 6.5A および 6.1 からしたがう．

B を証明しよう．共鳴帯は開集合であるから、帯 $O(Z_N, \nu_r)$ の境界 $\partial O(Z_N, \nu_r)$ はそれと交わらない．これと条件 8.3B より D の lateral 面は $Z'_N \subset Z_N$ のときのみ $O(Z'_N, \nu_r)$ と交わる．したがってこの面は $G \backslash O_r$ に含まれる．ただし O_r は系 6.5B で定義されたものである．この系により多重度 r 未満のブロックの和は $G \backslash O_r$ を含むから B が証明された.

C の証明．ある $k \in \mathbf{Z}^s, |k| \le N$ に対して $|\langle k, \omega(I)\rangle| < \nu_r$ なる $I \in \bar{D}$ を見つけることができるとする．$k = 0$ なら、つねに $k \in Z_N$ である．$k \ne 0$ と仮定する．このとき」$I \in O(Z'_N, \nu_r)$ である．ただし Z'_N は k によって定義される 1 重共鳴である (定義 6.1 参照)．条件 8.3B より、$Z'_N \subseteq Z_N$ を得る．ゆえにこの場合要求どおり $k \in Z_N$ である．

いまや命題 8.4 は完全に証明された．

8.5 定義. 写像 $\omega : G \to \mathbf{R}^s$ がパラメーター $N, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{s-1}, b, d_0, d_1, \ldots, d_{s-1}$ を持つ非重複共鳴に対して拡張された条件を満たすと言われるのは、以下の 2 つの条件を満たすときである．

集合 $G - 2(d_0 + d_1 + \ldots + d_{s-1})$ の内部を G' で表わし、ω の G' への制限を ω' で表わす．このとき、

A. ω' はパラメーター $N, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{s-1}, b$ を持つ非重複共鳴に対する条件を満たす．

B. G' をパラメーター $N, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{s-1}, b$ を持つ非重複共鳴 ω' に相対的にブロックの分割を考える．この分割の任意のブロック $B(Z_N)$ に対して、$B(Z_N)$ の rigging の厚さ d のすべての円盤の直径は d_r 以下である．ここで r は $B(Z_N)$ の多重度である ($r = 0, 1, \ldots, s-1$)．

8.6．命題. H_0 は G 内で一般化急勾配であって、係数 $g, m, C_1, \ldots, C_{s-1}, \delta_1, \ldots, \delta_{s-1}$ および指数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$(定義 7.3 参照) を持つとする．$\omega : G \to \mathbf{R}^s$ で $\omega(I) = \mathrm{grad} H_0|_I$ で定義される写像を表わす．このとき、すべての $r = 1, \ldots, s-1$ に対して以下の条件を満たせば、ω はパラメーター $N, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{s-1}, b, d_0, d_1, \ldots, d_{s-1}$ を持つ非重複共鳴に対して拡張された条件を満たす．

$$d_r < \min[\frac{g}{3m}, \delta_r], \tag{8.1}$$

$$\varepsilon_r < \frac{g}{2}, \tag{8.2}$$

$$b < \min[\frac{d_r}{4}, \frac{\varepsilon_r}{4m}], \tag{8.3}$$

$$b < d_0, \tag{8.4}$$

$$\nu_{s-1} \le \frac{g}{2sN^{s-1}}, \tag{8.5}$$

$$\nu_r \le \frac{\varepsilon_r}{rN^{r-1}}, \tag{8.6}$$

$$d_{r-1} \le \frac{1}{2mN}\nu_r, \tag{8.7}$$

$$\nu_{r-1} \le \frac{\nu_r}{2}, \tag{8.8}$$

ここで

$$\varepsilon = \frac{C_r}{5}(\frac{d_r}{2})^{\alpha_r}. \tag{8.9}$$

8.7. 命題 8.6 の証明. これを証明するには、ω' が条件 8.5B、8.3A および 8.3B を満たすことを示せばよい．以下でこれを行なう．

8.7A. 円盤の直径評価. $r = 1, \ldots, s-1$ に対して、条件 8.5B は命題 7.4 および不等式 (8.1)-(8.3) および (8.6) から出る．$r = 0$ ならこの条件は (8.4) および定義 8.1 から出る．

次の補題とその系ではゾーンとブロックは集合 G 全体に refer する．

8.7B. 補題. 命題 8.6 の条件の下で、共鳴幅 $2\nu_{s-1}$ の s 重ゾーン $O(Z_N, 2\nu_{s-1})$ は空である．

この補題は技術補題 10.5 と (8.5) から出る．補題 8.7B を帰謬法で証明する．いま問題にしているゾーンが空でないとする．すると $I \in G$ および線形独立な s 個ののベクトル $k^i \in \mathbf{z}^s, |k^i| \leq N$ を見つけることができて $|\langle k^i, \omega(I)\rangle| < 2\nu_{s-1}(s = 1, \ldots, s)$ とできる．補題 10.5 より $|\omega(I)| < 2sN^{s-1}\nu_{s-1}$ である．(8.5) より $|\omega(I)| < g$ を得る．ところがこれは G 内で $|\omega(I)| \geq g$ という命題 8.6 の条件に矛盾するから補題は証明された．

8.7C. 系. 同じ条件の下で、s 重ブロックは空である．

まず定義 6.5A より、すべての Z_N および $0 < \nu < \nu'$ に対して $O(Z_N, \nu) \subseteq O(Z_N, \nu')$ であり、第二に $B(Z_N) \subseteq O(Z_N, \nu_r)$ である．ここで $N, \nu_1, \ldots, \nu_s$ は分割のパラメーターであり、r は Z_N の多重度である．ゆえに、いまの場合

$$B(Z_N) \subseteq O(Z_N, \nu_{s-1} \subseteq O(Z_N, 2\nu_{s-1} = \emptyset,$$

である．ここで Z_N は s 重共鳴である．

8.7D. 系. 同じ条件の下で、写像 ω は $r = s-1$ のとき条件 8.3B を満たす．

<u>証明.</u> Z_N を $(s-1)$ 重共鳴とし、Z'_N を $Z'_N \not\subseteq Z_N$ なる共鳴とする．このとき定義 6.5A より、

$$\overline{O(Z_N, \nu_{s-1}} \cap O(Z'_N, \nu_{s-1}) \subseteq O(Z''_N, 2\nu_{s-1}),$$

である．ただし Z''_N は s 重共鳴である．補題 8.7B より、左辺の交わりは空であり、定義 7.2 より、$\bar{D} \subseteq \overline{O(Z_N, \nu s - 1}$ である．ここで $\bar{D}$ はブロック $B(Z_N)$ の rigging の円盤の閉包である．ゆえに要求どおり、$\bar{D} \cap O(Z'_N, \nu s - 1) = \emptyset$ である．

系 8.7C より、ω' は条件 8.3A を満たし、系 8.7D より $r = s-1$ のとき条件 8.3B を満たす．

8.7E. $r = 0, 1, \ldots, s-2$ **に対して条件 8.3 が成り立つことの証明.** Z_N を多重度 r の任意の共鳴とし、D は G' の分割のブロック $B(Z_N)$ の rigging の厚さ b の円盤とする．I を $\bar{D}$ の任意の点とし、k は $|k| \leq N$ および $k \notin Z_N$ なる $\mathbf{Z}^s$ の任意のベクトルとする．8.7A 節により、$|I - I_0| \leq d_r$ なる $I_0 \in B(Z_n)$ を見つけることができる．ここで r は $B(Z_N)$ の多重度である．定義 6.5A および 6.3 より $|\langle k, \omega(I_0)\rangle| \geq \nu_{r+1}$ である．

G' 内で I と I_0 を結ぶ線分は G に含まれる．条件 7.3B と (8.7) を使って $|\langle k, \omega(I)\rangle| \geq |\langle k, \omega(I_0)\rangle| - m|k||I_0 - I| \geq \nu_{r+1} - mNd_r \geq \nu_{r+1}2$ を得る．

(8.8) よりすべての $I \in \bar{D}$ および $k \notin Z_N, |k| \leq N$ に対して $|\langle k, \omega(I)\rangle| \geq \nu_r$ である．ゆえに定義 6.5A および 6.2 より、$\bar{D} \cap O(Z'_N, \nu_r) \neq \emptyset$ なら Z'_N を定義する (定義 6.1 参照) ベクトルの系で各ベクトルが Z_N に属するものを見つけることができる．ゆえに要求どおり、$Z'_N \subseteq Z_N$ である．

命題 8.6 はこうして完全に証明された．

9 節．振動系におけるわな．主定理の証明の完結

任意の周波数系 $(X, \mathcal{J}, \omega)$(定義 5.1C 参照) を考える．d と T を正数とする．

9.1．定義． $(X, \mathcal{J}, \omega)$ が時間 T の間 d 安定であると言われるのは、以下の条件が成り立つときである．

$C > 0$ を任意の数として、

$$\mathcal{J}(v(0)) \in G - d \quad \text{and} \quad v(t) \in V - d/2 \quad \text{for all} \quad t \in [0, C],$$

を満たすこの系のすべての解 $v(t)$ に対して

$$|\mathcal{J}(v(t)) - \mathcal{J}(v(0))| < \frac{d}{2} \quad \text{for all} \quad t \in [0, \min[C, T]],$$

が成り立つ．ここで V は系のそう空間であり、G は写像 $\omega : G \to \mathbf{R}^s$ の定義域である．

9.2．命題． 系 $(X, \mathcal{J}, \omega)$ が以下の条件を満たすとする．

A. パラメーター $N, \nu, b,$ および T を持って禁止運動の条件を満たす (定義 5.1D 参照)．

B. G は開集合であり、$\omega : G \to \mathbf{R}^s$ は連続で、パラメーター $N, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{s-1}, b, d_0, \ldots, d_{s-1}$ を持つ重ならない共鳴に対する拡張条件を満たす．

C. 上のパラメーターは次の条件を満たす．

$$N \leq N_1, \tag{9.1}$$

$$\nu \leq \min[\nu_i, i = 0, 1, \ldots, s-1], \tag{9.2}$$

$$b \leq b_1. \tag{9.3}$$

このとき $(X, \mathcal{J}, \omega)$ は時間 T の間 d 安定である．ただし、d は以下の条件を満たす任意の数である．

$$d > 4b, \tag{9.4}$$

$$d \geq 4(d_0 + d_1 + \cdots + d_{s-1}). \tag{9.5}$$

命題 9.2 の証明のいたるところで、ブロックや円盤が出て来るが、これは G の分割のブロックであり、G 上の円盤である．

命題 9.2 の証明に、点 I のわなという概念が必要である．これは I の特別な形の近傍である．

9.3. わな. 写像 ω を固定し、G のブロックへの分割でパラメーター $N, \nu_1, \dots, \nu_s$ を持つものを考える．

I を G の任意の点とし、B は I を含む任意のブロックで多重度が I を含むブロックのうち最も低いものとする (一般にこのようなブロックはいくつかある)．$b > 0$ を任意に固定した数とする．

9.3A. 定義. I におけるブロック B_1 の rigging の厚さ b の円盤 D_1 は I に対する第一ランクの円盤と呼ばれる．D_1 のラテラル面のある点に対する第一ランクの円盤になっている同じ厚さの円盤 D_2 は I に対する第二ランクの円盤と呼ばれる．同様に、I に対する第 $(j-1)$ ランクの円盤のラテラル面上に位置する第一ランクの厚さ b の円盤は I に対する第 j ランクの円盤と呼ばれる．

9.3B. 定義. $I \in G$ に対するすべてのランクのすべての円盤の和を I に対する G 内の わな でパラメーター $N, \nu_1, \dots, \nu_s, b$ を持つものと呼び、$\mathcal{L}(I)$ で表わす．

9.3C. 補題. 連続写像 $\omega : G \to \mathbf{R}^s$ がパラメーター $N, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{s-1}, b, d_0, \dots, d_{s-1}$ を持つ重ならない共鳴に対する拡張条件を満たすとする．$d_0 + d_1 + \ldots + d_{s-1}$ を d' で表わす．このときすべての $I \in G - 4d'$ に対して、G 内の罠 $\mathcal{L}(I)$ でパラメーター $N, \nu_1, \dots, \nu_{s-1}, \nu_s = \nu_{s-1}, b$ を持つものの直径は $2d(-d_0$ より大きくない．

証明. 8.5A および 8.4A より、$G - 2d'$ の任意の内点に対する第一ランクの円盤の数は 1 である．D_1 を $I \in G - 4d'$ に対する第一ランクの円盤とする．このとき r を D_1 の多重度として 2 つの可能性がある．すなわち $r = 0$ および $r = 1$ である．前者の場合、$\mathcal{L}(i) = D_1$ である．なぜなら定義により多重度ゼロの円盤はラテラ l 面を持たない．ゆえに 8.5B より

$$\mathrm{diam}\mathcal{L}(I) = \mathrm{diam}D_1 \le d_0 \le 2d' - d_0.$$

である．

$r > 0$ とする．8.5A および 8.4B より I に対する第二ランクのすべての円盤の多重度は r 未満である．以下の主張を $j = 1, 2, \dots, r+1$ に関する帰納法で証明する．その際、同じ条件および同じ命題を使い、0 重円盤がラテラル面を持たないという事実を利用する．I に対するランク j のすべての円盤の多重度は $r - j + 1$ 以下であり、$r + 1$ よりランクの大きな円盤は存在しない．条件 8.5B を使えばを得る．

$$\mathrm{diam}\mathcal{L}(I) \le d_r + 2d_{r-1} + 2d_{r-2} + \ldots + 2d_0 = 2d' - d_0.$$

これで補題 9.3 は証明された．

9.4. 命題 9.2 の証明. $\mathcal{L}(I)$ は $I \in G - d$ に対する罠でパラメーター $N_1, \nu_1, \dots, \nu_{s-1}, \nu_s = \nu_{s-1}, b_1$ を持つとする．このとき補題 9.3C および (9.5) より

$$\mathrm{diam}\mathcal{L}(I) \le \frac{d}{2} - d_0. \tag{9.6}$$

である．ゆえに命題 9.2 を証明するには以下の結果を確かめれば十分である．

9.4A．主張． すべての $I \in G - d$ に対して、また $\mathcal{I}(v(0)) = I$ および」$v(t) \in V - d/2$ をすべての $t \in [0, C](C > 0)$ に対して満たすよいなすべて解 $v(t)$ に対して、

$$\mathcal{J}(v(t)) \in \mathcal{L}(I) \quad \text{for all} \quad t \in [0, \min[C, T]].$$

が成り立つ．

(9.6) より $\mathcal{L}(I) \subset G - \frac{d}{2} - d_0$ である．したがって、罠 $\mathcal{L}(I)$ を構成する円盤もすべて $G - \frac{d}{2} - d_0$ 内にある．罠の定義からわかるように、9.4A を証明するには、次の結果を確立すれば十分である．

9.4B．主張． D はある点 I_0 のあるブロックの rigging の任意の円盤とする．$\bar{D}$ は集合 $G - d/2$ の内部に含まれるとしよう．任意の解で

$$\mathcal{J}(v(0)) = I_0 \quad \text{and} \quad \mathcal{J}(v(t)) \in \overline{D}, \quad v(t) \in V - \tfrac{d}{2} \quad \text{for all} \quad t \in [0, C_1],$$

を満たすものを考える．ここで $C_1 > 0$ である．このとき

$$\mathcal{J}(v(t)) \in D \quad \text{for all} \quad t \in [0, \min[C_1, T]],$$

であるか、すなわち、これらの t に対して軌跡 $\mathcal{I}(v(t))$ は D の内部に含まれてその境界に接しないか、またはある $\tilde{t} \in (0, \min[C_1, T])$ を見つけることができて $\mathcal{I}(v(\tilde{t}))$ は D のラテラル面に属する．

9.4B を証明しよう．Z_{N_1} を B に対応する共鳴とする．条件 8.5A、命題 8.4C、および (9.5) より、$\bar{D}$ に対するすべての共鳴ベクトル $k, |k| \le N_1$ は Z_{N_1} に属する．ここで r は $Z_{N_!}$ の多重度である (??)．(9.1) および (9.2) より．$\bar{D}$ に対するすべての共鳴ベクトル $k, |k| \le N_1$ は Z_{N_1} に属する．

ここで、我が系はパラメーター N, ν, b および T を持つ禁止運動 (定義 5.1D 参照) に対する条件を満たす事実を利用する．U として $\bar{D}$ をとる．このときこの定義および (9.3)、(9.4) より $\mathcal{I}(v(t))$ は時間 $\min[c_1, t]$ の間、D をその base を通って離れることはできない (定義 7.2 よび 8.1 参照)．ゆえにそれはラテラル面を通ってしか D を離れられない．これが示すべきことであった．命題 9.2 は証明された．

9.5．主定理 (定理 4.4) の証明． ハミルトン関数 H を持つ系から得られる周波数系 $(X, \mathcal{I}, \omega)$(定義 5.2A 参照) を考えよう．命題 9.2、5.2B および 8.6 より、d および T が以下の条件を満たすとして、この系は時間 T の間 d 安定である．

9.5A．条件． 正数

$$\kappa, N, \nu, b, N_1, \nu_0, \ldots, \nu_{s-1}, b_1, d_-, \ldots, d_{s-1}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{s-1}, \tag{9.7}$$

で

$$\kappa < 1 \tag{9.8}$$

なるものを見つけて、d および T とともに (9.1)-(9.5)、(10.1)-10.4)、(5.2)-(5.4) および (8.1)-(8.9) を満たすことができる．ここで (8.1)-(8.9) の N と b はそれぞれ N_1 と b_1 に置き換える．

技術補題 10.7 は、定数 $M_0 > 0$ があって、任意の正の $M < M_0$ に対して、変数 (9.7) で書いた等式および不等式系 9.5A がそれぞれ (4.4) および (4.5) で与えられる $d(M)$ および $T(M)$ なる解を持つことを主張している．定理 4.4 の M_0 を補題 10.7 で存在が主張される定数にとる．すると問題の周波数系が時間 T の間 d 安定であることがわかる．ここで d および T は (4.4) および (4.5) で与えられる．

さて定理 4.4 の主張が正しくないと仮定しよう．このとき系の解 $v(t) = I(t), p(t), \varphi(t), q(t)$ で

$$I(0) = \mathcal{J}(v(0)) \in G - d, \quad p(t), q(t) \in D - d \quad \text{for all} \quad t \in [0, C],$$

なるものを見つけることができる．ただし、$C > 0$ であり、ある $t_1 \in [0, \min[C, T]]$ に大して $|I(t_1) - I(0)| = d/2$ である．ゆえに

$$|I(t_2) - I(0)| = d/2 \quad \text{and} \quad |I(t) - I(0)| \leq d/2 \quad \text{for all} \quad t \in [0, t_1].$$

を満たす $t_2 \in [0, t_1]$ を見つけることができる．したがって $t \in [0, t_1] = [0, \min[t_1, T]]$ に対して $v(t) \in V - d/2$ である．ここで V は (5.1) で与えられる．ところがこのような解が存在することは系が時間 T の間 d 安定であることに矛盾する．

10 節．非共鳴 harmonics の消去に関する補題、および主定理の証明に必要な技術的補題の陳述

10.1A. 定義. 上と同様 $\mathbf{Z}^s$ は整数成分の s 次元ベクトルの格子とする．

10.1B. 定義. ベクトル $k = k_1, \ldots, k_s \in \mathbf{Z}^s$ の階数とは $|k| = \sum_{i=1}^{s} |k_i|$ のことである．

U を複素 $\mathbf{C}^s$ 空間または実空間 $\mathbf{R}^s$ の任意の部分集合とする．H_0 を U 上の (すなわち U のある近傍内の) 微分可能なある決まった関数とする．

10.1B. 定義. ベクトル $k \in \mathbf{Z}^s$ が U に対する ν 共鳴ベクトルと呼ばれるのは、少なくとも 1 点 $I \in U$ において

$$|\langle k, \omega(I) \rangle| < \nu,$$

なるときである．ここで $\langle , \rangle$ はスカラー積であり、$\omega(I) = \mathrm{grad} H_0|_I$ である．

10.2. H の記述. 以下の補題 10.3 において H は

$$H = H_0(I) + H_1(I, p, \varphi, q)$$

の形の関数であり、$\varphi_1, \ldots, \varphi_s = \varphi$ に関して 2π 周期である．ここで I は s 次元、p と q は $n \geq s \geq 1$ として $(n - s)$ 次元ベクトルである．また以下の条件が成り立つことを仮定する (この条件は 4.3 節のものと若干異なる)．

10.2A. . H は複素集合

$$\Delta F : I, p, q, \in A, |\mathrm{Im}\varphi| \leq \rho,$$

上で解析的である．ここで A は閉集合であり、$\rho > 0$ である．

10.2B. $A_I = \{I | I, p, a \in A$ なる p および q が存在する $\}$ とおくと、ある $m < \infty$ に対して

$$\sup_{I \in A_I} \| \frac{\partial^2 H_0(I)}{\partial I^2} \| \leq m$$

である ((4.2) 参照)．

10.3. (非共鳴 harmonics の消去に関する) 補題. H は ΔF 上で定義されているとする．らだし H および ΔF は上で記述されたものである．M, N および ν は正数で、以下の 3 つの性質を満たすとする．

A.
$$\sup_{\Delta F} |\mathrm{grad} H_1| \leq M.$$

B. λ は A_I に対する高々次数 N の $\nu/2$ 共鳴ベクトル k ($|k| \leq N$) すべての線形ハルを表わす．このとき $\dim\lambda < s$ である．

C. $\kappa \in (0,1)$ があって、M, N および ν に対して

$$N > N_0, \tag{10.1}$$

である．ただし

$$\begin{aligned} N_0 = & \ N_0(s,\kappa) = \\ = & \ \{\frac{27(1-\kappa)(s+1)}{\kappa \log 2} \log[\frac{3(1-\kappa)(s+1)}{2\kappa}(\frac{9}{\log 2})^{\frac{1}{1-\kappa}}(16L_1)^{\overline{(1-\kappa)(\varepsilon+1)}^{\kappa}}]\}^{\frac{1}{\kappa}}, \end{aligned}$$

$$32mL_2(\frac{9}{\log 2})^{2s+2}\frac{MN^{2(s+1)(1-\kappa)}}{\nu^2} < 1, \tag{10.2}$$

$$\frac{4n}{\sqrt{n}}(\frac{\log 2}{27})^s \frac{\nu}{N^{s(1-\kappa)}} < 1, \tag{10.3}$$

および

$$L_1 = 6e(\tfrac{6s}{e}), \quad L_2 = 4\pi s\sqrt{s3^{2^s}},$$

である．

$$b = \rho L_3 \sqrt{\frac{MN^{(s+2)(1-\kappa)}}{\nu}}, \tag{10.4}$$

とおく．ただし

$$L_3 = \frac{8}{3}\sqrt{[2\pi n\sqrt{3n}3^s]}(\frac{9}{\log 2})^{(s+2)/2}.$$

このとき解析的正準微分同相写像 $B : J, P, \psi, Q \mapsto I, p, \varphi, q$ で、以下の性質を持つものがある．

D. B は ΔF に含まれる集合を集合

$$\Delta F_1 = \{I, p, q \in A - b, |\mathrm{Im}\varphi| \leq \rho_1\},$$

の上に写す．ここで

$$\rho > \rho_1 > 0.$$

E. B と恒等写像 $\mathcal{E}$ の計量 C での差は次のように評価される

$$\| B\mathcal{E} \| < \frac{b}{15},$$

ここで

$$\| B\mathcal{E} \| = \sup_{B^{-1}(\Delta F_1)} |B(J, P, \psi, Q) - J, P, \psi, Q|.$$

変数 J, P, ψ, Q では、ハミルトン関数 H は

$$H' = \overline{H}(J, P, \psi, Q) + R(J, P, \psi, Q),$$

なる形をしている．ここで $\bar{H}$ および R は以下の性質を持つ．

F. $\bar{H}$ のフーリエ級数は数 k が $\lambda \cap \mathbf{Z}^s$ に属するようなハーモニクスのみを含む．すなわち、$\bar{H}$ は次の形をしている．

$$\overline{H} = \sum_{k \in \lambda \cap \mathbf{Z}^s} h_k(J, P, Q) e^{ik\psi}.$$

G. 実の ψ に対して、つまり、すべての点 $J, P, \psi, Q \in B^{-1}(\Delta F_1) \cap \{\mathrm{Im}\psi = 0\}$ において、ψ_j に関する R の微分 R_{ψ_j} の評価として次を得る．

$$|R_{\psi_j}| < 8\pi s^{1/2} M \exp(-\rho N^{1-\kappa}) \quad (j = 1, \ldots, s).$$

10.4. 注意. 事実、補題 10.3 の証明より、$\bar{H}$ が

$$\overline{H} = H_0(J) + \overline{H}_1(J, P, Q) + \mathcal{H}(J, P, \psi, Q),$$

なる形をしていることが出る．ここで $\bar{H}_1 = \dfrac{1}{(2\pi)^s} \oint H_1(J, P, \psi, Q)$ であり、$|\mathcal{H}|$ および $|\mathrm{grad}\mathcal{H}|$ は M 次である．詳しく言えば、$|\mathcal{H}| < 4\pi M\sqrt{s}$ および $|\mathrm{grad}\mathcal{H}| < \dfrac{8\pi M}{\rho}\sqrt{s}$ である．この詳しい評価は定理 4.4 の証明では使わない．

技術補題に戻ろう．

10.5. (整数格子の性質に関する) 補題. $\mathbf{E}^s$ からとったあるベクトル $x = x_1, \ldots, x_s$、ある $\nu > 0$ および $\mathbf{Z}^s$ からとった $|k^j| \leq N(j = 1, \ldots, r$ なる r 個の線形独立なベクトル k^j に対して

$$|\langle k^j, x\rangle| < \nu \quad (j = 1, \ldots, r),$$

である．ここで $\langle , \rangle$ はスカラー積である．k^j で張られる $\mathbf{E}^s$ の r 次元線形部分空間を λ で表わす．このとき λ への x の直交射影の長さは $rN^{r-1}\nu$ より小さい．すなわち、

$$|\mathrm{pr}_\lambda x| < rN^{r-1}\nu$$

10.6. 急勾配関数と概平面曲線. H_0 はある領域 $G \subset \mathbf{E}^s$ 内で一般化急勾配で、係数 $g, m, C_1, \ldots, C_{s-1}, \delta_1, \ldots, \delta_{s-1}$ および指数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$(定義 7.3 参照) を持つとする．$\lambda$ は $\mathbf{E}^s$ の任意のアフィン部分空間で、$\mathrm{dim}\lambda = r, r = 1, \ldots, s-1$ とする．γ は以下の性質を持つ連続曲線とする．

A. γ は $\mathbf{E}^s$ 内の平面 λ の b 近傍にある．つまり、$\gamma \subset \lambda + b$．ただし $b > 0$.

B. γ は 2 点 I_0 と I_1 を結び、I_0 を中心とする半径 d の閉球 $\overline{U(I_0, d)}$ に含まれる．また I_1 はこの球の境界に属する．

C. $\overline{U(I_0, d)}$ は G に含まれる．

D. d と b は以下の不等式を満たす.

$$d < \min[g/3m, \delta_r], \tag{10.5}$$

$$\varepsilon < g/4, \tag{10.6}$$

$$b < \min[d/4, \varepsilon/4m], \tag{10.7}$$

ここで

$$\varepsilon = \frac{C_r}{5}(\frac{d}{2})^{\alpha_r}.$$

このとき γ 上に

$$|\mathrm{grad}(H_0|_{\tilde{\lambda}})|_{\tilde{I}}| > \varepsilon,$$

なる点 $\tilde{I}$ を見つけることができる．ここで $\tilde{\lambda}$ は $\mathbf{E}^s$ のアフィン部分空間で、λ の平行移動によって得られ、$\tilde{I}$ を通る．

10.7. 補題. $s \geq 2$ を任意の整数とする．$g, m, C_1, \ldots, C_{s-1}, \delta_1, \ldots, \delta_{s-1}$ および ρ を任意の正数とし、$\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$ は 1 以上であるとし、$n \geq s$ とする．これらすべての数およびそれらの関数を定数と呼ぶ.

等式や不等式に対して単一の語「関係」を使う．上の定数、数 $M > 0$ および正数

$$\kappa, N, N_1, \nu, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{s-1}, b, b_1, d_0, \ldots, d_{s-1}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{s-1}, d, T, \tag{10.8}$$

を含む関係を考える．ただし $r = 1, \ldots, s-1$ である．

$$\kappa < 1, \tag{9.8}$$

$$N \leq N_1, \tag{9.1}$$

$$\nu_{s-1} \leq g/2sN_1^{s-1}, \tag{8.5}$$

$$\nu_r \le \varepsilon_r / r N_1^{r-1}, \tag{8.6}$$

$$\varepsilon_r = \frac{C_r}{5}(\frac{d_r}{2})^{\alpha_r}, \tag{8.9}$$

$$d_{r-1} \le \frac{1}{2mN_1}\nu_r, \tag{8.7}$$

$$b \le b_1, \tag{9.3}$$

$$4mbN \le \nu, \tag{5.2}$$

$$b = A_1\sqrt{\frac{MN^{(s+2)(1-\kappa)}}{\nu}}, \tag{10.4}$$

ここで定数 A_1 および以下に出てくる定数 A_2 と A_3 は (10.9) で与えられる.

$$N_0 < N, \tag{10.1}$$

ここで

$$N_0 = \{\frac{27(1-\kappa)(s+1)}{\kappa \log 2}\log[\frac{3(1-^k appa)(s+1)}{2\kappa}(\frac{9}{}\log 2)^{1/(1-\kappa)} \cdot A_2^{\frac{\kappa}{(1-\kappa)(s+1)}}]\}$$

$$A_3\frac{MN^{2(s+1)(1-\kappa)}}{\nu^2} < 1, \tag{10.2}$$

$$\frac{4n\sqrt{n}}{sm}(\frac{\log 2}{27})^s\frac{\nu}{N^{s(1-\kappa)}} < 1, \tag{10.3}$$

$$b < \rho/2, \tag{5.3}$$

$$T \le \frac{\rho}{16\pi s}b\frac{1}{M}\exp(\rho N^{1-\kappa}), \tag{5.4}$$

$$4(d_0 + d_1 L \ldots + d_{s-1}) \le d, \tag{9.5}$$

$$d_r < \min[g/3m, \delta_r], \tag{8.1}$$

$$\nu_{r-1} \le \nu_r/2, \tag{8.8}$$

$$\nu < \min[\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{s-1}], \tag{9.2}$$

$$\varepsilon_r < g/2, \tag{8.2}$$

$$b_1 < d_0, \tag{8.4}$$

$$b_1 < \min[d_r/4, \varepsilon_r/4m], \tag{8.3}$$

$$4b < d. \tag{9.4}$$

ここで

$$\begin{aligned} &A_1 = \tfrac{8}{3}\sqrt{[2\pi n\sqrt{(sn)}3^s]}(\frac{9}{\log 2})^{(s+2)/2}\rho \quad A_2 = 96e(\tfrac{6s}{e})^s, \\ &A_3 = \frac{128}{9}s^{3/2}(\frac{27}{\log 2})^{2s+2}m. \end{aligned} \tag{10.9}$$

このとき、次の性質を持つ定数 $M_0 > 0$(M_0 の値は補題の証明の中で与えられる) がある．すなわち、すべての $M \in (0, M_0)$ に対して量 (10.8) の値を見つけることができ、それと M を一緒にして上の関係を満たすことができる．ここで

$$d = M^{\dfrac{3}{(12\zeta + 3s + 14)\alpha_{s-1}}}, \quad T = \frac{1}{M}\exp[(\frac{1}{M})^{\frac{2}{12\zeta+3s+14}}],$$

ただし定数 ξ は (4.1) で与えられる．

11 節．主定理の証明に関する注意

この節では３節と同様次の形のハミルトン関数を持つ系について議論する．

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi). \tag{11.1}$$

11.1. harmonic のべき、およびその数の次数への依存性. $\sum \varepsilon h_k(I) e^{ik\varphi}$ を摂動 εH_1 のフーリエ級数とし、$I(t), \varphi(t)$ を系 (11.1) の任意の解とする．ハーモニック $\varepsilon h_k(I) e^{ik\varphi}$ のべきとは、このハーモニックの影響によって stipulate された $I(t)$ の変位の速さのことである．したがってハミルトン方程式より、この影響は $\varepsilon h_k(I)$ に比例し、およそ $\varepsilon |k| h_k(I)$ である．ハーモニックの振幅はその数の階数 $|k|$ の増大とともに急速に増大する．たとえば、H_1 が解析的なら、これ以後増大率は指数関数的であること、つまり、$|h_k| < Me^{-|k|\rho}$ を仮定する．ここで $M > 0$ と $\rho > 0$ は k に依らない．だからハーモニックのべきは $|k|$ が線形的に増大すると指数関数的に増大する．

11.2. harmonic の数の共鳴ゾーンの幅の依存性. k 番目のハーモニックは、ほとんどいたるところ $I(t)$ の小さな振動のみを引き起こす．このハーモニックは狭い共鳴帯、面 $\langle k, \omega(I) \rangle = 0$ の近傍、のみで $I(t)$ に目立つほどの変位を与える．

普通、このゾーンの thickness もハーモニックの数の階数 $|k|$ が線形に減少するにつれて指数関数的に減少する量によって抑えられている．あらゆる点から見て、この評価は 1.13 節の意味で無限に縮退した場合は別にして、任意の非摂動ハミルトン関数 H_0 を持つ系に対して成り立つ．H_0 が準凸ならゾーンの厚さはハーモニックの振幅の二乗根に近い．

ゾーンの厚さのゾーンの階数 $|k|$ へのこの依存性は主定理の証明においては考慮されなかった．(ゾーンの厚さは共鳴の幅 ν に結びついており、ν は $|k|$ とは独立に選ばれた．) この依存性を計算すれば、この定理で得られる安定性時間の評価 ((4.5) または (1.5) 参照) を決める定数 a の値の評価は改善されるだろう．

11.3. トラップの直径の共鳴の多重性への依存性および共鳴を構成するベクトルの極小次数 $|k|$ への依存性. 主定理の証明において初期条件 $I(0)$、$\varphi(0)$ を持ち、$I(0)$ が r 重ブロックに属するような解に対するわなの直径は量 d_r によって抑えられる．ここで $\varepsilon \ll 1$ に対して $d_{r+1} \gg d_r$ である．これはこのブロックに対応する共鳴の多重度が増大するにつれて罠の直径が増大することに反映される．

罠のサイズはこの共鳴を形成するベクトルの極小次数に依存する．次数が大きいほど罠の直径は小さく、そのうえ罠へのドリフトは遅い (11.1 節および 11.2 節参照).

11.4. 共鳴の重なり．アーノルド拡散. 主定理の証明における１つの重要なパラメーターは、問題となっている共鳴の最も高い次数 N である．これらの共鳴に対応するゾーンを使って、ブロックを構成し、そのそれぞれの中で高速ドリフトは平面 λ に沿ってのみ起こる．この平面はこのブロックに対する共鳴ベクトルで、次数が N 以下のものの線形ハルから平行移動で得られる．このブロックに対する共鳴ベクトルで平面 λ に平行でないものはすべて次数が N より大きい．ハーモニクスで数がこれらのベクトルであるものは、ブロックとこれらのハーモニクスに対応するゾーンとの交わりへの λ を横切るドリフトを引き起こす．N が大きければ、このドリフトの速さは小さい．ドリフトを引き起こすハーモニクスの振幅が小さいからである．この速さはこれらのハーモニクスの全パワーに近い量 ($\sim \varepsilon \exp(-N)$) で評価される．

N が大き過ぎないとき、各ブロック内で平面 λ の近くを動く点 $I(t)$ は $1/N$ とともに小さなトラップ内にある．N を大きくすることにより、λ を横切るドリフトの速さの評価が改善され、これによって $I(t)$ が罠で過ごす時間の評価が改善される．この理由により、N はできるだけ大きくとる必要がある．ところが以下の事情により、N を際限なく増やすことはできない．N が増大するとともに、共鳴ゾーンの網目はだんだん密になり、ある値から以降は、孤立した罠の系はその精密な外形を失い、作用変数空間への相空間の射影 G 全体に行き渡る遷移の小区分の集まりになってしまう．G の任意の 2 点に対して系の解の射影 $I(t)$ は、これらの遷移 (transition) に沿って動きつつ、片方の点の任意に小さな近傍からもう一方の点の同じ様な近傍に移り得る．これらすべては拡散の可能性を示している．拡散率あ小さな次数の 1 重共鳴の影響ゾーンでいちばん大きいようだ (図 4).

図 4

拡散の機構はまだ完全には説明されておらず、「一般の位置」(2.1A 節参照) にある系の不安定な解の存在を厳密に証明することはたいへん難しい．拡散機構の詳細に関しては [11]、[14]、および [29] を参照されたい．

11.5. $I(t)$ の動きを制限する要因． 主定理を証明するにあたって、ただ一つの要因である概積分の存在を考慮にいれた．言い換えると、平面 λ のうち、それを横切る点 $I(t)$ の平均運動 $J(t)$ の速さが非常に小さいものだけを考えた．ここで $I(t), \varphi(t)$ は (11.1) の解であり、J, ψ は補題 10.3 で構成された変数である (3.2 節参照)．しかし、もうひとつ明白な制限がある．注意 10.4 より、$J(t), \psi(t)$ は $H_0(J)$ とほんの少ししか違わない $H_0(J) + \varepsilon\mathcal{H}_1(J, \psi)$ なる形をしたハミルトン関数を持つ系の解である．ここで $\mathcal{H}_1$ はある関数である．ゆえに $I(t)$ がいま問題にしているブロックにあるとき $J(t)$ は H_0 のレベル面の近くを動く．

$I(t)$ の動きに関するこの制限を考慮して、評価 (4.5) を決定する定数 a の値を改善することもできたはずである．不思議なことに、この要因を考慮に入れると、以下のような状況において、主定理の場合よりも安定性時間の評価がかなり良くなる．すなわち、準凸の非摂動ハミルトン関数 H_0 を持つ系の解で、初期条件 $I(0)$ が極大の多重度 (すなわち、s を周波数の数として $s-1$) の共鳴ゾーンにあり、また次数が小さいときである．補題 10.3 により、これらの解に対して (4.5) の形の評価が簡単に得られる．その際、主定理におけると同様、s が増大すると a は $1/s^2$ ではなく $1/s$ のように減少する．同じ議論を使って、すべての解に対して良い評価が得られるとは思えない．

この事実は、実際に観察され、非ハミルトン的摂動で作られる共鳴関係の安定性との関係で面白い (2.1D 節参照)．極大多重度かつ小さな次数の共鳴ゾーンにおいてハミルトン摂動のみによって作られる拡散が全空間におけるよりも遅ければ、現実の系のそのようなゾーンへの遷移は作用変数すべてに関して大きな安定性をもたらす．

11.6. 共鳴領域における解のふるまい．共鳴解を調べるのに都合のよい座標． 今までのところ、系 (11.1) の解 $I(t), \varphi(t)$ の射影 $I(t)$ のふるまいに主として興味を持ってきた．解はどのようにふるまうのか? H_0 が準凸であると仮定し、$r = 1, \ldots, s-1$ として任意の r 重ブロックを

考える．$I \in B$ なる点 I, φ からなる相空間の領域 $B \times T^s$ において、系 (11.1) はある意味では ε 程度のポテンシャルエネルギーを持つ力の場にある r 次元トーラスに沿っての質点の運動を記述する系に近い．

これを見るために、$B \times T^s$ 内にある種の座標 J, ψ を構成する．この座標はこの領域の解を詳しく調べるのにを有用であろう．まず補題 10.3(ここでは J', ψ' と表わした) において構成された座標に変換する．次に $J = KJ', \psi = (K^T)^{-1}\psi'$ の形の線形変換を行なう．ここで K は整数要素の unimodular 行列であり、$(K^T)^{-1}$ は K の転置逆行列である．またこの形の変換は正準変換である．$k', \ldots, k^r$ は B^r を定義するベクトルとする．K を選んで、座標 J では高速ドリフトの平面 λ(すなわち、$k', \ldots, k^r$ の線形ハルから平行移動で得られる平面) が $J_{r+1} = \mathrm{const}, \ldots, J_s = \mathrm{const}$ で与えられるようにする．この行列はつねに存在する (たとえば 28]、7 章 1 節を参照)．

B に対応する共鳴面 $\mathcal{R}$ は座標 J' では

$$\mathcal{R} = \{J' | < k^i, \frac{\partial H_0(J')}{\partial J'} >= 0, i = 1, \ldots, r\},$$

なる形をしているが、座標 J ではもっと簡単な形

$$\mathcal{R} = \{J | \frac{\partial H_0(K^{-1}J)}{\partial J_i} = 0, i = 1, \ldots, r\}, \tag{11.2}$$

をしていることに注意しよう (3.3D 節参照)．

系のハミルトン関数を J', ψ'((3.2) 参照) で表わし、残りの項 $R(J', \psi')$ を捨て、変数変換 $J', \psi' \to J, \psi$ を行なう．このとき $\psi_{r+1}, \ldots, \psi_s$ に独立名関数 $\mathcal{H}$ が得られる．補題 10.3 の証明より (注意 10.4 参照)、$\mathcal{H}$ は実は

$$\mathcal{H} = H_0(K^{-1}J) + \varepsilon\mathcal{H}_1(J_1, \ldots, J_s, \psi_1, \ldots, \psi_r),$$

の形をしている．ここで $\mathcal{H}_1$ はある関数である．

$\mathcal{H}$ は $\psi_{r+1}, \ldots, \psi_s$ に依存しないから、変数 $J_{r+1}, \ldots, J_s$ はハミルトン関数 H を持つ系の第一積分である．この系は本質的には自由度 r の系である．(関数 $J_{r+1}, \ldots, J_s$ はもとの系 (11.1) に概積分が存在するために決定的である．) λ を B と交わる任意の高速ドリフト平面とし、$c_{r+1}, \ldots, c_s$ は定数で

$$\lambda = \{J | J_i = c_i (i = r+1, \ldots, s)\}$$

を満たすとする．$c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_s$ を λ と $\mathcal{R}$ の交点の座標とする．このとき λ と B の交点における変数 $J_1, \ldots, J_r$ のベクトルの値は定数ベクトル $c_1, \ldots, c_r$ の近傍にある．この近傍の直径は、ブロック B を構成するときに使った $\mathcal{R}$ に近いゾーンの厚さと同じ程度の大きさである (which is part of it は訳してない)．厚さは ε とともに小さいと仮定する．

$\mathcal{H}$ の引数 $J_{r+1}, \ldots, J_s$ の値を $J_i = c_i$ と置いて固定し、$\lambda \cap B$ 内の結果として得られる関数を以下のようにもっと簡単に近似する．(11.2) より、$J_{r+1}, \ldots, J_s$ のこれらの値を使って、点 $c_1, \ldots, c_r$ における $H_0(K^{-1}J)$ の $J_1, \ldots, J_r$ による展開は、3 次またはそれ以上の項を無視すれば、$a_0 + \sum_{i,j=1}^r a_{ij}(J_i - c_i)(J_j - c_j)$ の形をしている．ただし a_0 と a_{ij} は定数である．摂動 $\varepsilon\mathcal{H}_1$ を関数

$$\varepsilon\mathcal{H}_1(c_1, \ldots, c_s, \psi_1, \ldots, \psi_r),$$

で近似する．これを $\varepsilon U(\psi_1,\ldots,\psi_r)$ と表わす．その結果、$J_{r+1},\ldots,J_s$ の値を固定すれば、$\mathcal{H}$ は関数

$$a_0+\sum_{i,j=1}^{r}a_{ij}(J_i-c_i)(J_j-c_j)+\varepsilon U(\psi_1,\ldots,\psi_r), \tag{11.3}$$

に近いことがわかる．ここで U は引数に関し 2π 周期である．H_0 は準凸であるから、定数 a_{ij} から作った対称行列 (a_{ij}) は決まった符号を持つ．

ハミルトン関数 (11.3) を持つ系が記述するのは、一定計量を持つ r 次元トーラス上でポテンシャルエネルギー εU の力の場の質点の運動である．ここで ψ_i はトーラスの点の座標であり、$J_i-c_i, i=1,\ldots,r$ は運動量の成分である．ゼロ運動量は共鳴曲面 $\mathcal{R}$ 上にある作用変数の空間の点に対応する．

12 節．多体問題への主定理の応用

12.1．惑星系． ニュートンの法則にしたがって互いに引き合う $s+1$ 個の質点系を考える．それらのうち 1 つの質量 (太陽) は残り (惑星) のどの質量よりはるかに大きいとする．この系は以下の系に相対的に摂動を受けていると言うことにする．その系とは、惑星が固定中心にニュートンの法則により引かれ、相互作用はない系である．非摂動系における惑星の運動は摂動系において質量をゼロにもっていったときの運動の極限である．非摂動系の惑星運動は惑星質量に依存しないことに注意しよう．

太陽の質量と重力中心の質量はともに 1 であるとし、惑星の質量 m_i の比を固定する．すなわち、$m_i=\ u\kappa_i(i=1,\ldots,s)$ とする．ただし、$\kappa_i>0$ は定数であり、μ は小さなパラメーターである．

非摂動系は求積により積分可能であるから、徹底的に調べられている．どの惑星のエネルギーも無限遠に逃げるには足りないとし、引力中心に関する各惑星の角運動量はゼロでないとする．このとき各惑星は引力中心を焦点のひとつとする閉楕円軌道上を動く．この運動の重要なパラメーターは軌道の半長軸 a_i、離心率 $e_i'i=1,\ldots,s)$ および軌道面間の角度 $b_{ij}(i,j=1,\ldots,s)$ である．

非摂動系の相空間の点は重力中心に相対的な惑星の位置と速度で特徴づけられ、摂動系の場合、系内のすべての天体の重心に関する惑星の位置と速度で特徴づけられる．このことから両系の配位空間と相空間を同一視できる．とくに非摂動系の引力中心を摂動系の重心と同一の点と仮定し、それを O で表わす．

V_e は、非摂動系のすべての惑星の楕円軌道に対応する相空間の領域とする．a_i,e_i および b_{ij} を V_e の関数とみなす．これらは非摂動系の第一積分である．非摂動系の解においては、これらの関数は時間とともに変化する．系の天体間の距離が小さすぎなければ、変位の速さは μ 程度の大きさである．少なくとも 2 つの天体の距離が小さいと、この速度は大きく、距離がゼロに近づくにつれて無限大に向かう．

以下の定理 12.3 の主張によれば、V_2 にはいくつかの部分領域があって、そこから出発する各軌道上の関数 a_i の値は $1/\mu$ に比べて指数関数的に大きな時間の間、ほとんど変化しない．そのうえ、この期間全体にわたって、天体間の衝突や近接衝突は不可能である．これらの部分領

域は惑星運動領域と呼ばれる．というのは、これらはわが太陽系の天体の運動に似ているからである．これからこれらの」部分領域を定義しよう．

12.2. 惑星運動の領域. G_i を O に相対的な i 番目の惑星の角運動量ベクトルとし、G_H を O に相対的な非摂動系全体の角運動量ベクトルとする．すなわち、$G_H = \sum_{i=1}^{s} G_i$ および $N = \frac{1}{\mu}G$ である．簡単にわかるとおり、V_e 内で $|G_i| = m_i\sqrt{a_i(1-e_i^2)}$ である．ゆえに V_e 内での N の長さは a_i, e_i, b_{ij} および κ_i のみに依存し、μ には依らない．

$\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ および $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_s$ を任意のベクトルとし、γ を数とする．以下で定義される V_e の部分集合を $B(\alpha, \beta, \gamma)$ で表わす:

$$\begin{cases} \alpha_i \le a_i(v) \le \beta_i, \quad (i = 1, \ldots, s), \\ |N(v)| \ge \gamma. \end{cases} \tag{12.1}$$

ここで $v \in V_e$ は相空間の点である．この部分集合は μ に依らない．非摂動系の不変量である．また明らかに $B(\alpha, \beta, \gamma)$ を定義する条件は a_i, e_i および b_{ij} に関する条件である．

α および β は

$$0 < \alpha_1 \le \beta_1 < \alpha_2 \le \beta_2 < \cdots < \alpha_s \le \beta_s, \tag{12.2}$$

なる任意に固定したベクトルとする．γ のいろいろな値に対して $B(\alpha, \beta, \gamma)$ の形を見つけよう．γ が十分に大きければこれは空である．簡単にわかるように、$B(\alpha, \beta, \gamma)$ が空にならないような γ の最大値がある．それを $\gamma_m(\alpha, \beta)$ と書こう．($B(\alpha, \beta, \gamma_m(\alpha, \beta))$ の点に、同じ平面の半径 β_i の円軌道の惑星運動が対応する.) もうひとつの γ の臨界値は $B(\alpha, \beta, \gamma)$ の (相空間全体の) 境界が互いのあるいは引力中心 O との惑星の衝突に対応する点を含むような γ の最大値である．この値を $\gamma_0(\alpha, \beta)$ と書く．明らかに $0 < \gamma_0(\alpha, \beta) < \gamma_m(\alpha, \beta)$ である．

12.2A. 定義. 集合 $B(\alpha, \beta, \gamma)$ で (12.1) を満たし $\gamma_0(\alpha, \beta) < \gamma < \gamma_m(\alpha, \beta)$ を満たすものは惑星運動領域と呼ばれる．

12.3. 定理. B を任意の惑星運動領域とする．このとき定数 $\kappa = \kappa_1, \ldots, \kappa_s$ および B のみに依存する正定数 C_1, C_2, C_3 および μ があって以下の性質を満たす．

μ を $(0, \mu_0)$ の任意の点とする．$v(t)$ はこの μ の値を持つ非摂動系の解であって、$v(0) \in B$ なるものとする．

$$T = \frac{1}{M} \exp \frac{1}{M^a}, \tag{12.3}$$

とおく．ここで

$$M = C_1\mu, \quad a = \frac{2}{6s^2 - 3s + 14}. \tag{12.4}$$

このとき系の天体は時間期間 $[0, T]$ の間、衝突できない．その上、すべての $t \in [0, T]$ に対して

$$\begin{aligned} &|a_i(v(t)) - a_i(v(0))| < C_2\mu^b (i = 1, \ldots, s), \quad \text{where} \quad b = \tfrac{3}{2}a \\ &|N(v(t)) - N(v(0))| < C_3\mu^b, \end{aligned} \tag{12.5}$$

である．すなわち、軌道半長軸の長さ a_i と角運動量の和 N はほとんど変化しない．
　12 節の残りは定理 12.3 の証明に費やす．

12.4. ポアンカレ変数． この副節では、ある種の変数、いわゆるポアンカレ変数を使えば、運動方程式が定理 4.4 と同じ形のハミルトン関数を持つハミルトン方程式であることを証明する．

12.4A. 補題． 惑星運動領域はすべてコンパクトである．

証明. 惑星運動領域 B はすべて有界である．一方、B は V_e の内部に含まれる．というのは、そうでないとすると、B の境界は惑星のどれかひとつが中心 O と衝突することに対応する点を含んでしまうからである．ゆえに B は V_e 内で閉じている ((12.1) 参照) ばかりでなく、完備な相空間全体の中で閉じている．これで補題は証明された．

　系の天体を含むユークリッド空間 $\mathbf{E}^3$ に、原点を O とする任意の直交座標を導入する．$x_i = x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ を i 番目の惑星の座標とし、$x_0 = x_{01}, x_{02}, x_{03}$ を太陽の座標とする．このとき、摂動系の運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U は

$$T = \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=0}^{s} m_i \frac{\dot{x}_i^2}{2}, \quad U = -\textstyle\sum_{0\le i<\le s} \dfrac{m_i m_j}{|x_i - x_j|} \tag{12.6}$$

なる形をしている．系の重心は 0 にあり、また太陽の質量 m_0 を 1 ととっているから

$$x_0 = \textstyle\sum_{i=1}^{s} m_i x_i, \quad \dot{x}_0 = -\textstyle\sum_{i=1}^{s} m_i \dot{x}_i, \tag{12.7}$$

である．これらの方程式を使ってラグランジュ関数 $L = T - U$ を $x, \dot{x} = x_1, \dots, x_s, \dots x_1, \dots, \dots x_s$ で表わそう．$P_i = P_{i1}, P_{i2}, P_{i3}$ を $x_i = x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ に対応する一般化運動量とする．すなわち、

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i + m_i \textstyle\sum_{j=1}^{s} m_j \dot{x}_j \quad (i = 1, \dots, s). \tag{12.8}$$

系の全エネルギー $E = T + U$ を $P, x = P_1, \dots, P_s, x_1, \dots, x_s$ で表わし、$E(P, x)$ を

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} \frac{P_i^2}{m_i} - \sum_{i=1}^{s} \frac{m_i}{|x_i|} + \mu^2 R_\mu(P, x), \tag{12}$$

の形に表わす．

　B' を任意の惑星運動領域とする．この領域の定義、B' がコンパクトであること、および (12.6)-(12.9) を使えば、次の補題が簡単に証明できる．

12.4B. 補題． $R(\mu, x, \dot{x}) = R_\mu(P(\mu, \dot{x}), x)$ として、R を μ, x および $\dot{x}$ に対して定義して、パラメーター μ の複素線上、$\mu = 0$ の近傍と $x, \dot{x}$ の複素空間における B' の近傍との直積のいて解析的であるようにできる．

　さてポアンカレ変数 $Y = \lambda, \xi, p, l, \eta, q$ を定義する．ベクトル λ, ξ, p, l, η および q のそれぞれは s 次元である．たとえば、$\Lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_s$ である．まず、非摂動系に対してポアンカレ変数を定義する．各 $i = 1, \dots, s$ に対して $\lambda_i, \xi_i, p_i, l_i, \eta_i, q_i = Y_i$ は $x_i, \dots x_i$ および κ_i のみに依存し、μ と i には依存しない関数として与えられる:

$$Y_i = \Phi(\kappa_i, x_i, \dot{x}_i). \tag{12.10}$$

これらの関数は [9](144 および 135 ページ参照) にある．これの記述を繰り返すことはしないが、以下で数回これを引用する．

摂動系のポアンカレ変数を Y_μ で表わす．これは以下の条件で定義される．両方の系 (摂動系および非摂動系) において、これらの変数の惑星の運動量及び座標への依存性を定義する関数は μ の同じ値に対しては同じである．非摂動系において、運動量は $m_i\dot{x}_i$ の形をしている．ゆえに (12.10) より、変数 $Y_\mu = Y_{\mu 1}, \ldots, Y_{\mu s}$ は次の形をすている:

$$Y_{\mu i} = \Phi(\kappa_i, x_i, \frac{P_i}{\mu x_i}) \quad (i = 1, \ldots, s). \tag{12.11}$$

関係 (1.28) により、これらを x と $\dot{x}$ で表わすことができる:

$$Y_{\mu i} = \Phi(\kappa_i, x_i, \dot{x}_i + \mu \textstyle\sum_{j=1}^{s} \kappa_j \dot{x}_j) \quad (i = 1, \ldots, s). \tag{12.12}$$

$\mu = 0$ のとき、公式 (12.12) は非摂動系のポアンカレ変数を定義することに注意する ((12.10) 参照).

たとえ $\mu = 0$ のときでもポアンカレ変数は V_e 全体 (非摂動系の惑星の楕円軌道に対応する相空間の領域) では定義されない．以下では、これらの変数が定義される V_e のある部分集合を考える．

ν を $\mathbf{E}^3$ の任意のゼロでないベクトルとし、$\delta > 0$ とする．$K(\nu, \delta)$ で相空間の次のような部分集合を表わす．すなわち、その各点に惑星の位置と速度が対応し、しかも i 番目の惑星の角運動量 G_i とベクトル ν の間の角度がすべての $i =, \ldots, s$ に対して $\pi - \delta$ 以下である．

$$K(\nu, \delta) = \{v | G_i(v) \neq 0, G_i(v), \nu \leq \pi - \ delta (i = i, \ldots, s)\} \tag{12.13}$$

e_1, e_2, e_3 を $\mathbf{E}^3$ のわれわれの直交座標のベクトル基とする．B' を任意の惑星運動領域とする．定義より、$B' \subset V_e$ である．ゆえにポアンカレ変数の記述より ([9] 参照)、$\mu = 0$ のとき、これらの座標は角 $\delta > 0$ に対して $B' \cap K(e_3, \delta)$ 上で定義され解析的である．その上、次の補題が成り立つ．

12.4C. 補題. 各 $\delta > 0$ に対して、変数 $x, \dot{x}$ の複素空間内に $B' \cap K(e_3, \delta)$ の近傍 $U_{x\dot{x}}$ があって以下の条件を満たす．パラメーター μ の複素直線上に $\mu = 0$ の近傍 U_μ があって、μ, x および $\dot{x}$ の関数 ((12.12) 参照) としてのポアンカレ変数 $Y = Y_1, \ldots, Y_s$ が $U_\mu \times U_{x\dot{x}}$ において解析的である．加えて、$Y_\mu(x, \dot{x}) = Y(\mu, x, \dot{x})$ は各 $\mu \in U_\mu$ に対して $U_{x\dot{x}}$ 上の座標である．

補題の証明はポアンカレ変数の μ への依存性 ((12.12) 参照) および $B' \cap K(e_3, \delta)$ がコンパクトであることより従う．後者は B' のコンパクト性 (補題 12.4A)、各惑星運動領域に対する不等式 $\min_{B'} \left|\frac{1}{\mu} G_i\right| > 0 (i = 1, \ldots, s)$、および集合 K((12.13) 参照) の形から出る．ここで $|\frac{1}{\mu} G_i$ は i 番目の惑星の角運動量である．

ポアンカレ変数の記述より、$\mu = 0$ に対して $\lambda_{\mu i} = x_i \sqrt{a_i}$ である．次の補題はこの補題と補題 12.4C から出る．

12.4D. 補題. 各 $\delta > 0$ に対して数 $C_4 > 0$ および $\mu_1 > 0$ があって、すべての $\mu \in (0, \mu_1)$ に対して

$$\max_{b \in B' \cap K(e_3, \delta)} |\Lambda_{\mu i}(v) - \kappa_i \sqrt{a_i(v)}| \leq C_4 \mu \quad (i = 1, \ldots, s).$$

である．ここで

$$\Lambda_{\mu i}(v) = \Lambda_{\mu i}(x(v), \dots x(v)).$$

(12.11) を使って P, x をポアンカレ変数 $Y = Y_\mu$ で表わす．関数 $H_\mu(Y_\mu) = \dfrac{1}{\mu} E_\mu(P(Y_\mu), x(Y_\mu))$ を $H = H_\mu$ って表わし、$\mathcal{R}_\mu(Y_\mu) = R_\mu(P(Y_\mu), x(Y_\mu))$ を $\mathcal{R}_\mu$ で表わす ((12.9) 参照)．次の補題はポアンカレ変数の記述 ([9] 参照) およびエネルギー関数 $E = E_\mu(P, x)$ の形 (12.9) より従う．

12.4E. 補題. ポアンカレ変数 $Y = Y_\mu$ が定義される領域では、H は

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{s} \frac{\kappa_i^3}{2\Lambda_i^2} + \mu \mathcal{R}_\mu(Y).$$

の形をしている．ここで $\mathcal{R}_\mu(Y)$ は $l = l_1, \dots, l_s$ に関し 2π 周期である．変数 Y での運動方程式はハミルトン関数 $H(Y)$ を持つハミルトン方程式の形をしている．

最後の主張は次の事実から出る．すなわち、変数変換 $P, x \to Y_\mu$ は正準変換ではないが、変数 $Y = Y_\mu$ において 2 形式 $dP \wedge dx = \sum_{i,j=1}^{s,3} dP_{ij} \wedge dx_{ij}$ は

$$\mu \sum_{i=1}^{s} (d\Lambda_i \wedge dl_i + d\xi_i \wedge d\eta_i + dp_i + \wedge dq_i).$$

補題 12.4E によれば、$H = H(Y)$ は λ と l が作用および角変数をするとして主定理と同じ形をしている．

次のようにおく．

$$H_0(\Lambda) = -\sum_{i=1}^{s} \frac{\kappa_i^3}{2\Lambda_i^2}.$$

12.4F. 補題. ポアンカレ変数 Y の μ, x および $\dot{x}$ への依存性を与える関数は原点を O とする $\mathbf{E}^3$ の座標系の選び方に依らない．任意に固定した B' と δ に対して、座標 $x, \dot{x}$ における $B' \cap K(e_3, \delta)$ の形もこの座標系の選び方に依らない．その上、H_0 と $\mathcal{R}_\mu$ はこの選び方に依らない．

最初の主張はポアンカレ変数の定義 ([9] 参照) および (12.12) から出る．第二の主張は B' と K の定義から出る．第三の主張は最初の主張および (12.9) の右辺の 3 項すべての形が原点を O とする $\mathbf{E}^3$ の座標系の選び方に依らないことから出る．

12.5. 主定理の応用. 主定理においてハミルトン関数の定義域はある種の直積の形をしていた．ここでは相空間の特別な形の部分集合を考える．これらのそれぞれに対して、ポアンカレ変数を構築してその値域をこの直積の形に、また定義域をこの部分集合にとれる．主定理の結論がこの部分集合においても成り立つことを証明する．

次の補題は定義 12.2A を使って簡単に証明できる．

12.5A. 補題. B を任意の惑星運動領域とする．このとき別の惑星運動領域 B' があって、その内部 $B'^{(0)}$ は B を含む．すなわち、$B'^{(0)} \supset B$.

$\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_s$ を s 次元ベクトル、$\nu \neq 0$ を 3 次元ベクトルとする．V は集合

(12.14) $$W(\alpha, \nu) = \{v \in V_e | a_i(v) = \alpha_i (i = 1, \dots, s), N(v) = \nu\}$$

を表わすとする．W がある惑星運動領域に含まれればコンパクトである (この領域がコンパクトだからである (補題 12.4A 参照))．

相空間の距離とは $\mathbf{E}^3$ 内のユークリッド計量から誘導されるユークリッド計量のことである．2 点間の距離は惑星の座標 x_i の差と速度 $\dot{x}$ の差の 2 乗の 2 乗根である．X を相空間の部分集合として、$X+\delta$ は X の δ 近傍を意味する．

B と B' を $B'^{(0)}B$ なる任意の惑星運動領域とする．

12.5B. 補題. 正の定数 δ_1 と δ_2 があって、各集合 $W \subset B$ に対して

$$W+\delta_1 \subset B' \cap K(\nu, \delta_2),$$

である．ここで ν は $W=W(\alpha,\nu)$ なるベクトルである．

補題は惑星運動領域の定義、集合 W と K の定義 ((12.14) 参照)、および B と B' のコンパクト性から出る．

$W=W(\alpha,\nu)$ を (12.14) の形の任意の集合とする．$\mathbf{E}^3$ 内に、e_3 をベクトル $\frac{1}{|\nu|}\nu$ ととり、残りの 2 つの基ベクトルを任意に選んで、原点を O とする座標系を定義する．12.4 節とまったく同じように、この系に対応するポアンカレ変数を $\mathbf{E}^3$ 内に導入し、それを $Y_{\mu W}$ と書く．W がある惑星運動領域に含まれるとする．補題 12.4C、12.5B、および 12.5A より、$Y_{\mu W}$ は、$\mu=0$ のある近傍内のすべての μ に対して W のある近傍で定義される．

Y_{0W} は $\mu=0$ のときの変数 $Y_{\mu W}$ を表わす．次の補題は [9] におけるポアンカレ変数の記述 (とくに 12.4 節の関係式 $\Lambda_{0i}=x_i\sqrt{a_i}(i=1,\dots,s)$ を使う必要がある) から出る．

12.5C. 補題. W をある惑星運動領域に含まれる (12.14) の形の任意の集合とする．このとき変数 $Y_{0W}=\Lambda,\xi,p,l,\eta,q$ で書くと、この集合は次の形をしている

$$W=\{v|\Lambda(v)=\text{const},(\xi,p,\eta,q)(v)\in\tilde{D}_{\xi p\eta q}\},$$

ここで $\tilde{D}_{\xi p\eta q}$ は変数 ξ,p,η,q の $4s$ 次元空間のある部分集合である．

次の補題により主定理を W の近傍に応用できる．

12.5D. 補題. b を任意の惑星運動領域とする．このとき正定数 $C_1,c_5,\mu_2,\delta_3,\delta_5$ および ρ があって、B に含まれる (12.14) の形の各集合 W に対して、それぞれ変数 Λ および ξ,p,η,q の s 次元および $4s$ 次元空間の開集合 D_Λ および $D_{\xi p\eta q}$ で以下の性質を持つものを見つけることができる．

a) D_Λ の閉包はコンパクトで座標超曲面 $\Lambda_i=0(i=1,\dots,s)$ と交わらない．

b) F を主定理におけるのと同じ形をした複素集合とする．すなわち、

$$F=\{Y=\Lambda,\xi,p,l,\eta,q|\mathrm{Re}\Lambda\in D_\Lambda,\mathrm{Re}\xi,p,\eta,q\in D_{\xi p\eta q},|\mathrm{Im}Y|\le C_1\}.$$

このとき H_0 と $\mathcal{R}_\mu$(補題 12.4E と 12.4F の前に定義されている) はこの集合上で解析的であり、次を満たす．

$$\sup_{Y\in F}\parallel\frac{\partial^2 H_0(\Lambda)}{\partial\Lambda^2}\parallel\le C_5,\quad \sup_{Y\in F,\mu\in(0,\mu_2)}|\mathrm{grad}\mathcal{R}_\mu(Y)|\le C_1.$$

c) 各 $\mu \in (0, \mu_2)$ に対して、集合

$$\{v|\lambda(v) \in D_\Lambda - \delta_3, (\xi, p, \eta, q)(v) \in D_{\xi p, \eta q} - \delta_3\}$$

は $W+\delta_4$ を含む．ただし $\Lambda, \xi, p, l, \eta, q = Y_{\mu W}$ である．ここで $D_\Lambda - \delta_3$ は変数 $\Lambda = Lambda_1, \ldots, \Lambda_s$ の s 次元ユークリッド空間の点集合であって、その δ_3 近傍とともに D_Λ に含まれる．集合 $D_{\xi p \eta q} - \delta_3$ も同様に定義される．

証明. B' を $B'^0 \supset B$ なる惑星運動領域とする．W を (12.14) の形の任意の集合で $W \subset B$ なるものとする．補題 12.5B および 12.4F より、B のみに依存する定数 $\delta_2 > 0$ および $\delta > 0$ があって、変数 $x, \dot{x}$ の複素空間内の W の δ 近傍は、補題 12.4C で存在を保証されている $B' \cap K(e_3, \delta_2)$ の近傍に含まれる．補題 12.4C および 12.4F より、B に依存する $\mu = 0$ の複素近傍 U'_μ があって、ポアンカレ変数 $Y_{\mu W}$ がすべての $\mu \in U'_\mu$ に対して W の複素 $\delta/2$ 近傍で定義される．この $\delta/2$ 近傍内に、写像 $Y_{\mu W}^{-1} : Y \to x, \dot{x}$ によって変数 Y 空間のユークリッド計量から誘導される計量はすべての $\mu \in U'_\mu$ および $W \in B$ に対して同値である．

補題 12.5C および 12.4F より、定数 $\delta_4 = \delta_4(B) > 0$ および開集合 D_Λ および $D_{\xi, p\eta q}$ があって、$\mu = 0$ に対して、集合

$$\{v|\lambda(v) \in D_\Lambda, (\xi, p, \eta, q)(v) \in D_{\xi p, \eta q}\}$$

は $W + \frac{\delta}{4}$ に含まれ、$W + 2\delta_4$ を含む．ただし $\Lambda, \xi, p, l, \eta, q = Y_{\mu W}$ である．ゆえに主張 c) が出る．第二の評価は補題 12.4B と 12.4F から出る．最初の評価および主張 a) は補題 12.4D および惑星運動領域の定義から出る．これで補題 12.5D が証明された．

関数 $H_0 = H_0(\Lambda)$ は座標超曲面 $\Lambda_i = 0 (i = 1, \ldots, s)$ の外では準凸である (準凸関数の定義は 1.11 節参照)．ゆえに座標超曲面の外にある任意のコンパクトな集合には近傍があって、その中では H_0 は各急勾配指数が 1 に等しいような急勾配関数である (1.11 節参照)．次の補題はこのこと、補題 12.4E、12.5D、12.4D および定理 4.4 から出る．

12.5E. 補題. B を任意の惑星運動領域とする．このとき正定数 C_1, C_2, μ_3 および δ_4 があって次の性質を満たす．W は (12.14) の形の任意の集合で $W \subset B$ なるものとする．μ は $(0, \mu_3)$ の任意の点、$v(t), 0 \le t \le \tau$ は μ のこの値を持つ摂動系の任意の解で、その軌跡は $W + \delta_4$ に完全に含まれ、$\tau > 0$ は任意とする．このときすべての $t \in [0, \min[\tau, T]]$ に対して

$$|a_i(v(t)) - a_i(v(0))| < C_2 \mu^b \quad (i = 1, \ldots, s)$$

である．ただし、b と $T = T(C, \mu)$ は (12.3)、(12.4) および (12.5) で与えられる．

12.6. 指数関数的に大きな時間区間における惑星の軌道長半径の長さ、および惑星の角運動量の和の安定性.

12.6A. 補題. B を惑星運動領域とする．このとき正定数 δ_5 および C_3 があって以下の性質を満たす．$\mu > 0$ を任意の数とし、$v(t), 0 \le t < \tau$ は μ のこの値を持つ摂動系の任意の解で、その軌跡は $B + \delta_3$ に完全に含まれ、$\tau > 0$ は ∞ もとれるとする．このときこの解上で、時刻 t と初期値における惑星の角運動量の和 N の差は μ 程度の大きさの量によって抑えられる．すなわち、

$$\sup_{t \in [0, \tau)} |N(v(t)) - N(v(0))| < c_3 \mu.$$

<u>証明.</u> B' を $B'^0 \supset B$ なる別の惑星運動領域とする．B と B' はコンパクトであるから $\rho(\partial B', B) > 0$ である．この距離を δ_5 ととる (?)．このとき仮定により、いま考えている解 $v(t)$ の軌跡は B' 内にある．

G を O に関する摂動系の角運動量ベクトルとし、G_i を i 番目の惑星の角運動量として $G = \sum_{i=0}^{s} G_i$ とし、G_0 を太陽の角運動量とする．B' はコンパクトであるから、(12.7) より定数 $C_3 > 0$ を見つけて

$$\max_{v \in B'} |G_0(v)| < \frac{C_3}{2}\mu^2. \tag{12.15}$$

とできる．非摂動系の角運動量 G_H は G_i および N と $G_H = \mu N = \sum_{i=1}^{s} G_i$ で関係していることを思いだそう．(12.15) より、次を得る．

$$\max_{v \in B''} |G - G_H)| < \frac{C_3}{2}\mu^2.$$

ところが G は摂動系の第一積分である．ゆえに補題の主張が得られる．

$W = W(\alpha, \nu)$ を (12.14) の形の集合とし、B を惑星運動領域、$O_{\mu WB}$ を次式で与えられる W の近傍とする．

$$O_{\mu WB} = \{v : |a_i(v) - \alpha_i| < C2\mu^b (i = 1, \ldots, s), |N(v) - \nu| < C3\mu\},$$

ここで $b, C_2 = C_2(B)$ および $C_3 = C_3(B)$ は補題 12.5E および 12.6A で与えられる定数である．

12.6B. 補題. B を惑星運動領域とする．このとき各 $\delta > 0$ に対して定数 $\mu_4 = \mu_4(\delta) > 0$ を見つけて、各 $\mu \in (0, \mu_4)$ および $W \subset B$ に対して $O_{\mu WB} \subset W + \delta$ とできる．

12.6C. 定理 12.3 の証明. これは補題 12.5E、12.6A、および 12.6B から従う．

B を惑星運動領域とする．C_1, C_2 および C_3 として補題 12.5E および 12.6A で存在を証明された定数をとる．$\delta = \frac{1}{2}\min[\delta_4, \delta_5]$ として $\mu_0 = \min[\mu_3, \mu_4(\delta)]$ ととる．ここで $\mu_3, \mu_4(\delta), \delta_4$ および δ_5 は補題 12.5E、12.6A および 12.6B で存在を保証された量である．

定理 12.3 を背理法で証明する．正しくないと仮定しよう．このとき μ がある $\bar{\mu}, \bar{\mu} \in (0, \mu_0)$ に等しい摂動系の解 $v(t)$ があって、$v(0) \in B$ でありかつ以下の性質を持つ．$\bar{W}$ を (12.14) の形の集合で $\bar{W} = W(\bar{\alpha}, \bar{\nu})$ なるものとする．ここで $\bar{\alpha} = a(v(0))$ および $\bar{\nu} = N(v(0))$ である．このとき $\tau \in [0, T]$ を見つけて、すべての $t \in [0, \tau)$ に対して $v(t) \in O_{\bar{\mu}\bar{W}b}$ かつ $v(t) \in \partial O_{\bar{\mu}\bar{W}b}$ にできる．ここで $\partial O_{\bar{\mu}\bar{W}b}$ は集合 $O_{\bar{\mu}\bar{W}b}$ の境界で、(12.15) で定義される．ところがこれは補題 12.5E および 12.6A に矛盾する．だから定理 12.3 が証明された．

References

[1] N. N. Nekhoroshev, Behaviour of nearly integrable Hamiltonian systems, *Funktsional. Analiz i Prilozhen* **5** (1971), 82-83. = *Functional Analysis and Appl.* **5** (1971), 338-339.

[2] H. Poincaré, Les Méthodes nouvelles de la mécjanique céleste. 3 vols., Paris 1892, 1893, 1899.

[3] G. Birkhoff, Dunamical Systems, *Amer. Math. Sco. Publ.* **9**, Am. Math. Soc., New York, 1927.

[4] C. L. Siegel, Uber die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nahe einer Gleichgewichtslosungen, *Math. Ann.* **128** (1952), 144-170. MR **16**-704, MR **16**-704.

[5] C. L. Siegel, Vorlesungen uber Himelsmechnik, Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg 1956. MR **18**-178.

[6] A.N. Kolmogorov, On the conservation of conditionally periodic motions for a small change in the Hamiltonian, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **98** (1954), 527-530. MR **16**-924.

[7] A.N. Kolmogorov, The general theory of dynamical systems and classical mechanics, Mezhdunarodnyi Matematicheskii Kongress y Amsterdame, (internt. Congress Mathematicians, Amsterdam), Fizmatgiz, Moscow 1961, pp. 187-208.

[8] V. I. Arnold, Proof of a theorem of A¿N¿ Kolmogorov on the invariance of conditionally periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian, Uspekhi Mat. Nauk **18**:5 (1963), 13-40. Mr **29** # 328. = Russian Math. Surveys **18**:5(1963), 9-36.

[9] V. I. Arnold, Small denominators and problems of stability of motion in calssical and celestial mechanics, Uspekhii Mat. Nauk **18**:6 (1963), 91-192. = Russian Math. Surveys **18**:6 (1963), 85-191.

[10] V. I. Arnold and A. Avez, Ergodic problems of classical mechanics, Benjamin, New York - Ameterdam 1968. MR 38 # 1233.

[11] V. I. Arnold, Instability of dynamical systems with many degrees of freedom, Dokl. Akad. Nauk SSSR **156** (1964), 9-12.

[12] J.Moser, On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus, *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen, Matrh.-Phys.* Kl II, 1962, 1-20.

[13] J.Moser, A rapidly convergent iteration method and non-linear partial differential equations, I, II. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **20** (1961), 265-315; 499-535.

[14] G. M. Zaslavskii and B. V. Cherikov, Stochastic instability of non-linear oscillaitons, *Uspekhi Fiz. Nauk* **105**:1 (1971), 3-40.

[15] V. I. Arnold, A stability problem and ergodic properties of classical dynamical systems, Proc. Internat. Congress Mathematician (Moscow 1966), "Mir", Moscow 1968, 387-392. MR **39** # 574. = Amer. Math. Soc. Transl. (2) **70** (1968), 5-11.

[16] J. Glimm, Formal stability of Hamiltonian systems, Comm. Pure Appl. Math. **17** (1964), 509-526. MR **32** # 7876.

[17] N. N. Nekhoroshev, Stable lower estimates for smooth mappings and for gradients of smooth functions, Mat. Sb. **90** (1973), 432-478. = Math. USSR-Sb. **19** (1973), 425-467.

[18] J. K. Moser, On the elimination of the irrationality condition and Birkhoff's concept of the complete stability, Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) **5** (1960), 167-175. MR **24** # A3375.

[19] M. M. Khapaev, Generalization of Lyapunov's second method and the investigation of some resonance problems, Dokl. Akad. Nauk SSSR **193** (1970), 46-49. MR **44** # 4300. = Soviet Math. Dokl. **11** (1970), 868-872.

[20] V. V. Beletskii, Dvizhenie sputnika otnositel'no tsentra mass ν gravitatsionnom pole(Motion of a satellite relative to its centre of mass in a gravitational field), Izv. Moskov. Gos. Univ., Moscow, 1975.

[21] J. Moser, Lectures on Hamiltonian systems, Mem. Amer. Math. Soc. **81**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1968.

[22] J.K. Moser, Stabilitätsverhalten kanonischer Differentialgleichungssysteme, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys.* Ki. IIa 1955, 87-120.

[23] J.K. Moser, New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems, Comm. Pure Appl. Math. **11** (1958), 81-114. MR **20** # 3354.

[24] G. Contopoulos, On the existence of a third integral of motion, *Astronomiacl J.* **68** (1963), 1-14.

[25] M. Hénon and C. Heiles, The applicability of the third integral of motion; some numerical experiments, *Astronomical J.* **69** (1964), 73-79.

[26] A. D. Bryuno, Formal stability of Hamiltonian systems, Math. Zametki **1** (1967), 325-330. = Math. Notes **1**, (1967), 216-219.

[27] V. I. Arnold, Mathematicheskie metody klassicheskoi mekhaniki(mathematical methods of classical mechanics), Nauka, Moscow, 1974.

[28] N. Bourbaki, Eléments de mathématique. Partie I. Les structures fondamentales de l'analyse. Livre III, Topologie générale, Chaps. III-VIII, Actualities Sci. Ind. No. 916 and No. 1029, Hermann, Paris 1942 and 1947.

[29] B. V. Cherikov, Investigation of the theory of a non-linear resonance and the stochastic property, Dissertation, Sibirsk. Otdel. Akad. nauk SSSr, Novosibirsk, 1969.

[30] V. I. Arnold, Small denominators, I. Mappingthe circle onto itself, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **25** (1961), 21-86.

[31] H. Rüssman, Über invariante Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisringes(Kleine Nenner. I) Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. IIa 1970, 67-105.

[32] H. Rüssman, Kleine Nenner II. Bermerkungen zur Newtonschen Methode, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II 1972, 1-10.

[33] E. Zehnder, Generalized implicit function theorems with applications to some small divisors problems. I, *Comm. Pure Appl. math.* **28** (1975), 91-140.

[34] E. Zehnder, Generalized implicit function theorems with applications to some small divisors problems. II, *Comm. Pure Appl. math.* **29** (1976), 49-111.

[35] A. I. Neishtadt, Passage through a resonance in a two frequency problem, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **221** (1975), 301-304.

[36] A. I. Neishtadt, Certain resonance problems in nomn-linear systems, Dissertation, Moscow State Univ., Moscow, 1976.

[37] V. I. Arnold, Nekotorye zadachi teorii differentsial'nykh uravnenii. Tezisy lektsii(Lectures notes: Some problems in the theory of differential equations), Moscow, 1974.