谷川清隆 訳

Publ. I.H.E.S. **71** (1990), 105-120

平面の面積保存微分同相写像の周期点と回転数
Periodic points and rotation numbers for area preserving diffeomorphisms of the plane

John FRANKS

要約. f は $\mathbf{R}^2$ の方向保存な微分同相であって保測であるとする. f が 2 つの不動点を有し, それらの無限小回転数 (infinitesimal rotation number) のどちらかは 0 でないと仮定するだけで, f の不動点のまわりに回転数の異なる周期点が無限個あることを証明する.

また f の不動点 z が「単純ヘテロクリニックサイクル」に囲まれていて, ゼロでない無限小回転数 r を持てば, 端点を 0 および r とする区間内のゼロでないすべての回転数 p/q に対して, このヘテロクリニックサイクルの内部, z のまわりに回転数 p/q の周期軌道がある.

この論文では $\mathbf{R}^2$ の保測な微分同相について, また与えられた不動点のまわりのあらかじめ指定した回転数の周期点の存在について調べる. 動機づけの問題として, 2 つの双曲不動点 p_1, p_2 が 2 重にサドル接続をし, その間に楕円不動点を持つような微分同相 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を取り扱う (Fig.1a参照). Poincaré および Birkhoff の古典的不動点定理を使って, この場合には 0 と z における無限小回転の間の各回転数 p/q の周期軌道がサドル接続で囲まれる円盤内にあることが示せる. これは点 z を「膨らませる」ことでできる. すなわち, サドル接続と z の膨らましに挟まれる円環の同相写像をつくり, Poincaré および Birkhoff の定理をこの円環に適用すればよい.

点 p_1 と p_2 のヘテロクリニック接続がもっと複雑な場合 (Fig.1b 参照), このやり方はうまくいかない. z を含むような不変な有限な円盤が存在しないかもしれないからである. しかし, 同じ結果が成り立つかどうか知りたい. この複雑な場合に, 双曲点に関しかなり控えめな仮定のもとで ((3.2) の「単純なヘテロクリニックサイクル」の定義参照), 回転数 p/q の周期点のあることが正しいことを示す. この結果は以下の定理 (3.4) である.

図 1a

2 節では, さらに一般的な設定で考える. すなわち方向保存で保測な微分同相 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ で 2 つの不動点 z_0 および z_1 を有するものを考える. (2.2) と (2.5) において示すとおり, 次の性質を満たす区間が存在する. この区間に含まれる任意のゼロでない p/q に対して周期点 x が存在し, その回転数 p/q が z_1 と z_0 の回転数の差である. このような区間は z_1 の無限小回転数と z_0 の無限小回転数を端点とするか, 0 と上記 2 つの回転数のどちらかを端点にする. いずれにせよ, z_1 と z_0 の無限小回転数がどちらもゼロでない限り, 少なくともどちらかの不動点のまわりには回転数の異なる無限個の周期軌道がある.

図 1b

Robert Mackay はきっかけとなる問題をわたしに示し, その答えの可能性についていくつか議論してくれた.

1. 背景と定義

$\mathbf{R}^2$ の保測な微分同相の周期軌道の存在を調べ, 与えられた不動点のまわりのそれらの回転を測ることに興味がある. 円環の同相写像に対して回転数の定義を思い出すことから始めよう. $f : B \to B$ は円環 B の同相写像で恒等写像にホモトープであるとする ($B = \mathbf{T}^1 \times \mathrm{I}$ と考える. ここで I は $[0, 1]$, $(0, 1)$ または $[0, \infty)$ である). $\pi : \tilde{B} \to B$ を普遍被覆とし, $F : \tilde{B} \to \tilde{B}$ は f の持ち上げとする. $x \in \tilde{B}$ なら, F に関する x の回転数は, 極限が存在するとして次のように定義される.

$$R_F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(F^n(x) - x)_1}{n}.$$

ここで $(\ )_1$ は $\tilde{B} = \mathbf{R} \times \mathrm{I}$ の第一成分への射影である. ($\tilde{B}$ を $\mathbf{R} \times \mathrm{I}$ と同一視するにあたって $\mathbf{R}$ の方向を指定する生成子 $H_1(B)$ を選ぶか, あるいは被覆 π の deck 変換の生成子 T を選ぶ必要がある.)

$R_F(x)$ が存在し, $\pi(x) = y \in B$ なら, $R_F(x)$ の小数部分は持ち上げ F の選択に依らず $\pi^{-1}(y)$ のすべての点に対して同じである. だからこれは $y \in B$ の「回転数」と呼ばれ $R(y)$ で表わされる. 数 $R(y)$ は mod 1 でのみうまく定義され, 「数」というよりは $\mathbf{T}^1$ の要素と考える方が正しい.

$\mathbf{T}^1$ の要素ではなくて実数であるような不変量を考えたい．うまく定義された $\mathbf{R}$ の要素を得るためには持ち上げ $F : \tilde{B} \to \tilde{B}$ を指定する必要がある．これをするのに自然なやり方は，連続道 $\gamma : [0,1] \to B$ で $f(\gamma(0)) = \gamma(1)$ なるものを選んで，γ の $\tilde{B}$ へのある持ち上げ (したがってすべての持ち上げ)Γ に対して $F(\Gamma(0)) = \Gamma(1)$ なる持ち上げ F を使うことである．2 つの「数」を区別するため，こちらの不変量に対しては γ に関する「全回転数」という名を付けることにする．もっと形式的には次のような定義をする．

(1.1) 定義. $f : B \to B$ は円環 B の同相写像であって恒等写像にホモトープであるとする．$\Gamma : [0,1] \to \tilde{B}$ は γ の持ち上げとし，$F : \tilde{B} \to \tilde{B}$ は $F(\Gamma(0)) = \Gamma(1)$ なる f の一意の持ち上げとする．γ に関する $x \in B$ の全回転数を $\mathcal{R}_\gamma(x, f)$ と書き，これを $R_F(x_0)$ (存在するとして) で定義する．ただし $\pi(x_0) = x$ である．

簡単にチェックできるとおり，この値は Γ の選び方にも $x_0 \in \tilde{B}$ の選び方にもよらない．

y が f の不動点であって γ がつねに y となる一定の道である場合，すなわちある不動点 y およびすべての $t \in [0,1]$ に対して $\gamma(t) = y$ となる場合にもしばしば興味がある．この場合，記号を乱用して γ のかわりに y と書く．つまり不動点 y に関する全回転数を $\mathcal{R}_y(x, f)$ と書く．

次に微分同相 f の不動点 z を「膨らます」過程を思いだそう．直観的には不動点 z を取り除いて代わりに「方向のみを有する円」を置いて微分同相をそこまで拡張するのである．正確には，$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ が微分同相で不動点 z を持つとき，$A = \mathbf{T}^1 \times [0, \infty)$ とおき，$h(x,t) = tx$ で与えられる同相写像 $h : A - (\mathbf{T}^1 \times \{0\}) \to \mathbf{R}^2 - \{0\}$ を考える．ただし $\mathbf{T}^1$ を $\mathbf{R}^2$ の単位ベクトル達と同一視する．$g : A \to A$ を次式で定義する．

$$g(x,t) = \begin{cases} (f(tx))/ \parallel f(tx) \parallel, \parallel f(tx) \parallel) & \text{if} \quad t > 0, \\ (Df_0(x)/ \parallel Df_0(x) \parallel, 0) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

これが連続関数を定義することを見るのはやさしい．というのは，$\lim_{t \to 0} f(tx)/t = Df_0(x)$ であるから

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(tx)}{\parallel f(tx) \parallel} = \lim_{t \to 0} \frac{f(tx)}{t} \frac{t}{\parallel f(tx) \parallel} = \frac{Df_0(x)}{\parallel Df_0(x) \parallel}.$$

明らかに g は A の同相写像であり，同相写像 h を通して $A - (\mathbf{T}^1 \times \{0\})$ を $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ と同一視すれば，この集合上で $g = h$ である．$g : A \to A$ を z を膨らませて得た同相写像と呼ぶことにし，同相写像 h を通して A と $\mathbf{R}^2$ の対応する点を同一視する．同様に任意の面の同相写像の不動点を膨らませて得られる同相写像を定義できる．

次に不動点 z のまわりの周期点 x の回転数を定義しよう．

(1.2) 定義. $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ は方向保存微分同相であって不動点 z と周期点 x を有するとする．$\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ は $f(\gamma(0)) = \gamma(1)$ なる道とする．$g : A \to A$ は z を膨らませて得られた同相写像とする．γ に関する z のまわりの x の全回転数 $\mathcal{R}_\gamma(x, z, f)$ は全回転数 $\mathcal{R}_\gamma(x, g)$ (存在するとして) であると定義する．z のまわりの x の回転数 $\mathcal{R}(x, z, f)$ は回転数 $R(x, g)$ である．これは $\mathcal{R}_\gamma(x, z, f)$ の小数部分に等しい．y が f の不動点のとき，γ がつねに値 y をとる一定道なら $\mathcal{R}_\gamma(x, z, f)$ のかわりに $\mathcal{R}_y(x, z, f)$ と書く．この値を y に関する Z のまわりの x の全回転数と呼ぶ．

不動点の無限小回転の速さを見積る必要がある．

(1.3) 定義. $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ は方向保存微分同相であって不動点 z を有するとする．$\gamma:[0,1]\to\mathbf{R}^2$ は $f(\gamma(0))=\gamma(1)$ なる道とする．$g:A\to A$ は z を膨らませて得られた同相写像とする．γ に関する不動点 z の全無限小回転数 $\rho_\gamma(x,f)$ を γ に関する任意の点 $x\in\mathbf{T}^1\times\{0\}$ の全回転数 $\mathcal{R}_\gamma(x,g)$ と定義する．z の無限小回転数 $\rho(x,f)$ は $R(x,g)$ である．これは $\rho_\gamma(x,f)$ の小数部分に等しい．

$\rho(x,f)$ の値は Df_z から簡単に得られる．たとえば z が複素数固有値 λ と $\overline{\lambda}$ を持てば, $\rho(x,f)$ は $\pm\arg(\lambda)/2\pi$ である．Df_z が双曲的のときは, 固有値が正なら $\rho(x,f)$ は 0 で, 固有値が負なら $1/2$ である．

次に Charles Conley[C] が発展させたリャプーノフ関数と鎖回帰性に関する基本的結果を簡単に概観しよう. 以下では $f:X\to X$ はコンパクト距離空間の同相写像とする．

(1.4) 定義. x から y への $\varepsilon-$ 鎖とは X 内の点列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ で次を満たすものである．

$$d(f(x_i),x_{i+1})<\varepsilon \quad \text{for} \quad 1\le i\le n-1,$$

および

$$d(x,x_1)<\varepsilon/2,\quad d(y,f(x_n))<\varepsilon/2.$$

すべての $\varepsilon>0$ に対して $x\in X$ からそれ自身への $\varepsilon-$ 鎖があるとき, 点 x は鎖回帰的といわれる. 鎖回帰点の集合 $R(f)$ は f の鎖回帰集合と呼ばれる．

x から y への $\varepsilon-$ 鎖の定義においては, 点列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ が $x_1=x$ および $d(y,f(x_n))<\varepsilon$ を満たすことがしばしば要請される．ここで与えた形からは鎖回帰性や鎖遷移性に関して同値な概念が得られる. ここでの形は f および f^{-1} に関して対称である. とくに上の定義によれば $x_1,x_2,\cdots,x_n$ が x から y への f の $\varepsilon-$ 鎖であれば, $f(x_n),f(x_{n-1}),\cdots,f(x_1)$ は y から x への f^{-1} の $\varepsilon-$ 鎖である. 両端の $\varepsilon/2$ は, x から y への $\varepsilon-$ 鎖と y から z への $\varepsilon-$ 鎖をつなげて x から z への $\varepsilon-$ 鎖をつくるために必要な条件である．

$R(f)$ が f のもとでコンパクトかつ不変であることは明らかである．すべての $\varepsilon>0$ に対して x から y への $\varepsilon-$ 鎖があり, y から x への $\varepsilon-$ 鎖があるとき, $x\sim y$ であるとして $R(f)$ 上に関係 $\sim$ を定義すれば, 明らかに $\sim$ は同値関係である．

(1.5) 定義. 上の同値関係 $\sim$ に対する $R(f)$ の同値類は $R(f)$ の鎖遷移成分と呼ばれる．コンパクトな不変集合 Λ は単一の遷移成分の部分集合のとき鎖遷移的といわれる．

次の結果はよく知られており容易である．証明は [F1] の (1.2) にある．

(1.6) 命題. X が連結で $R(f)=X$ なら X は鎖遷移的である．

(1.7) 定義. $f:X\to X$ に対する完備リャプーノフ関数とは次の条件を満たす連続関数 $g:X\to\mathbf{R}$ である．
a) $x\notin R(f)$ なら $g(f(x))<g(x)$;
b) $x,y\in R(f)$ なら $g(x)=g(y)$ であるための必要十分条件は $x\sim y$ であることである (すなわち, x と y とは同じ鎖遷移成分に属する);
c) $g(R(f))$ は $\mathbf{R}$ のコンパクトないたるところ疎な部分集合である．

次の定理は C.Conley[C] の結果である. 設定を流れから同相写像に変えた. この設定での証明は [F2] を参照されたい. 滑らかさについては [W] 参照.

(1.8) 定理 [C]. $f : X \to X$ がコンパクトな距離空間の同相写像であれば, f に対して完備リャプーノフ関数 $g : X \to \mathbf{R}$ がある. X が多様体なら g は C^∞ にとれる.

あらかじめ指定した回転数を持つ周期点の存在を証明するのに使う主たる道具は次の定理である ([F1] の (2.2) および (2.3) 参照).

(1.9) 定理 [F1]. $f : B \to B$ は円環 $B = \mathbf{T}^1 \times [0,1]$ の同相写像で恒等写像にホモトープとし, $\Lambda \subset B$ は鎖遷移的コンパクト不変集合であるとする. $\pi : \tilde{B} \to B$ を普遍被覆とし, $F : \tilde{B} \to \tilde{B}$ を f の持ち上げとする. $x, y \in \pi^{-1}(\Lambda)$ で

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{(F^n(x) - x)_1}{n} \le \frac{p}{q} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{(F^n(y) - y)_1}{n},$$

なら, f は任意の $z_0 \in \pi^{-1}(z)$ に対して $R_F(z_0) = p/q$ なる周期点 z を有する.

2. 周期点と回転数

この節では 2 つの不動点を有する平面の微分同相の回転数に関する結果を証明する. このような微分同相 f が与えられたとき, まず $f(\infty) = \infty$ とおいて $\mathbf{R}^2$ の一点コンパクト化 S^2 に f を拡張し, 次に 2 つの不動点を膨らませて円環の同相写像を構成できる. こうすれば, この円環同相に (1.9) を適用してもとの f に関する結果を得ることができる. 円環同相が (1.9) の仮説を満たすことは, 保測な同相写像を一点コンパクト化するとすべての点が鎖回帰であるような同相写像が得られるという驚くべき結果から得られる.

(2.1) 命題. M はコンパクトでない連結な多様体とし, $f : M \to M$ は開集合の上で正かつコンパクトな集合の上で有限な測度 μ を不変にするような同相写像であるとする. $X = M \cup \{\infty\}$ を M の一点コンパクト化とし, $f(\infty) = \infty$ とおいて f を X へ拡張する. このとき X のすべての点は $f : X \to X$ の鎖回帰集合 $R(f)$ に属する.

証明. x を M の点とする. x が鎖回帰的であることをしめさねばならない. ε が与えられたとし, U は x を中心とする半径 $\varepsilon/2$ の円盤とする. $n \in \mathbf{Z}, n \ne 0$ があって $f^n(U) \cap U \ne \emptyset$ なら, $d(x, x_1) < \varepsilon/2$ かつ $d(x, x_n) < \varepsilon/2$ なる軌道切片 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ がある. だからこの場合必要な ε-鎖が得られる. このような n がなければ集合 $f^n(U), n \ge 0$ は互いに素であるから

$$\mu(\cup_{n\ge 0} f^n(U)) = \infty.$$

したがってこの和は M のどんなコンパクトな部分集合にも含まれない. ゆえに X において x から ∞ への $\varepsilon-$ 鎖がある. 同様にして, 同相写像 f^{-1} を考えれば, x が鎖回帰的であるか ∞ から x への $\varepsilon-$ 鎖がある. ゆえにすべての場合 x は鎖回帰的である. □

上の結果は $f : M \to M$ に関して点 $x \in M$ が鎖回帰的であるとは言っていないことに注意しよう. 鎖回帰性は, どの metric を取ったかに依存するから, コンパクトでない空間においては位相的性質ではない. この問題はコンパクトな距離空間では起こらない. この論文ではこのような空間の同相写像の鎖回帰性を問題にする.

(2.2) 定理. $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ は方向保存同相写像であって開集合で正かつ有界な集合で有限な測度 μ を保存するとし, z_0, z_1 は f の不動点であるとする. $\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^2 - \{z_0, z_1\}$ は $f(\gamma(0)) = \gamma(1)$ なる道とする. p/q が整数でない有理数であって端点が $\rho_\gamma(z_0)$ および $\rho_\gamma(z_1)$ なる区間に含まれるとする. このとき f は

$$\mathcal{R}_\gamma(x, z_1) - \mathcal{R}_\gamma(x, z_0) = p/q,$$

なる周期点 x を有する. 一方, ある $u_0, u_1 \in \mathbf{R}^2$ に対して $\mathcal{R}_\gamma(u_i, z_i)$ が存在すれば, 端点を $\mathcal{R}_\gamma(u_0, z_0)$ および $\mathcal{R}_\gamma(u_1, z_1)$ とする区間に含まれる任意の非整数 p/q に対して,

$$\mathcal{R}_\gamma(x, z_1) - \mathcal{R}_\gamma(x, z_0) = p/q,$$

なる周期点が存在する.

証明. 端点を $\rho_\gamma(z_0)$ および $\rho_\gamma(z_1)$ とする区間に対して定理を証明する. もう一つの場合の証明もほとんど同じであるがもう少し簡単である. 円環 $A = \mathbf{T}^1 \times [0,1]$ の同相写像 $g : A \to A$ を次のようにして求める. まず 2 つの不動点 z_0 と z_1 を膨らませて, 2 つの開円盤を取り除いた平面の自己微分同相を求める. $\mathbf{R}^2$ の測度は g のもとで不変な測度に持ち上がる. 次にこの空間の一点コンパクト化が A であることに注目する. $g(\infty) = \infty$ とおいて g を λ に拡張する. (2.1) より g の鎖回帰集合は A 全体である. だから (1.7) より g は A 上で鎖遷移的である. $\pi : \tilde{A} \to \tilde{A}$ を A の普遍被覆とし, $G : \tilde{A} \to \tilde{A}$ を $G(\Gamma(0)) = \Gamma(1)$ なる g の持ち上げとする. ただし Γ は道 γ の持ち上げである. C_i は z_i を膨らませたときに加えられた円で平面から受け継いだ (反時計まわりの) 方向を有するものとすると, C_0 と C_1 はともに $H_1(A)$ の生成子であるが, 逆の符号を持つ. C_1 の方向を使って π の deck 変換の生成子を採用し, それによって $y \in \tilde{A}$ の回転数 $R_G(y)$ を定義する. y_i が $\tilde{A}$ の点で $\pi(y_i) \in C_i$ なら, 定義によって

$$\rho_\gamma(z_1) = R_G(y_1),$$

および

$$\rho_\gamma(z_0) = -R_G(y_0),$$

である. なぜなら $\rho_\gamma(z_i)$ は C_i の方向に相対的に定義されているから.

(1.9) より周期点 $x \in A$ があって, 任意の $w \in \pi^{-1}(x)$ に対して $R_G(w) = p/q$ である. 同じことだが, $\pi^{-1}(x)$ のすべての点は $T^{-p} \circ G^q$ の不動点である. ここで T は π の deck 変換の生成子であって C_1 の方向と矛盾しないものである. p/q は整数でないから $x \neq \infty \in A$ であることがわかる.

$x_0 \in \pi^{-1}(x)$ を選び $\alpha : [0,1] \to A$ を x から $g(x)$ への道として次のように構成する. $A - \{\infty\}$ の内部に $\pi(x_0) = x$ から $\gamma(0)$ に向かう道 φ を選ぶ. これに γ を付けて $\gamma(1)$ まで行き, さらにこれに $g \circ \varphi$ を逆にパラメーター付けしたものを付けて $\gamma(1)$ から $g(x)$ へ行く. 得られた道のパラメーターを付け変えて, それを α と呼ぶ. $\alpha_0 : [0,1] \to \tilde{A}$ を α の持ち上げで $\alpha_0(0) = x_0$ なるものとする. 標準的な被覆空間理論から簡単にわかるように

$$G(\alpha_0(0)) = G(x_0) = \alpha_0(1).$$

道 $G^i \circ \alpha_0,\ i = 0, 1, \cdots, q-1$ をつなげ, パラメーターを付け直して, 道 $\beta_0 : [0,1] \to \tilde{A}$ を構成する. このとき β_0 は x_0 から $G^q(x_0)$ への道で, $T^q(\beta_0)) = \beta_0(1)$ である. $\beta : [0,1] \to A$ を $\pi \circ \beta_0$

で定義すれば, β は A 内の閉道となり, $H_1(A)$ におけるそのホモロジー類 $[\beta]$ は $p[C_1]$ に等しい. ここで $[C_1]$ は C_1 のホモロジー類である.

$A_0 = A - \{\infty\}$ とする. このとき, 生成子を $[C_0]$ および $[C_1]$ として $H_1(A_0) = \mathbf{Z}^2$ である. $H_1(A_0)$ において類 $[\beta]$ は $r - s = p$ を満たすある整数 r と s に対して $r[C_1] + s[C_0]$ に等しい.

だから

$$\mathcal{R}_\gamma(x, z_1, f) = R_{G_0}(\beta_1(0)) = r/q.$$

同様に $\mathcal{R}_\gamma(x, z_0, f) = s/q$ が示せる. だから

$$\mathcal{R}_\gamma(x, z_1, f) - \mathcal{R}_\gamma(x, z_0, f) = (r - s)/q = p/q.\square$$

(2.3) 定義. $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ は方向保存同相写像で双曲不動点 z を有するとする. z の安定 (または不安定) 多様体の分枝とは z に $W^s(z) - \{z\}$(または $W^u(z) - \{z\}$) の成分の一つを加えたものである. あるパラメータ表式 $\varphi : [0, \infty) \to X, \varphi(0) = z$ に対して $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$ のとき, 分枝は正しく埋め込まれているということにする.

(2.4) 系. $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ は (2.2) の仮説を満たす方向保存同相写像で, 不動点 $z_i, i = 0, 1$ を有するとする. z_0 は正の固有値を持つ双曲点であって安定または不安定多様体のひとつの分枝は正しく埋め込まれているとする. p/q が 0 と $\rho_{z_0}(z_1, f)$ の間の非整数の有理数であれば, 全回転数 $\mathcal{R}_{z_0}(x, z_1, f)$ が p/q に等しい周期点 x がある. ここで $\rho_{z_0}(z_1, f)$ は z_0 に関する z_1 の全無限小回転数である.

証明. $W^u(z_0)$ のある分枝が正しく埋め込まれているとする. 別の分枝の場合も同様である. 道 $\gamma : [0, 1] \to W^s(z_0, f)$ で $f(\gamma(0)) = \gamma(1)$ なるものを選ぶ. これによって $\rho_\gamma(z_0, f) = 0$ および $\rho_\gamma(z_1, f) = \rho_{z_0}(z_1, f)$ が保証される.

$$\mathcal{R}_{z_0}(x, z_1, f) = \mathcal{R}_\gamma(x, z_1, f) = p/q.$$

(2.5) 系. $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ は方向保存同相写像で, 開集合上で正かつ有界集合上で有限な測度 μ を保存するものとする. z_0, z_1 は f の不動点とする. 端点を $-\rho(z_0)$ および $\rho(z_1)$ とする $\mathbf{T}^1$ の区間のうち少なくとも 2 つは次の性質を持つ. p/q がその区間の内部に含まれるゼロでない有理点であれば, f は

$$\mathcal{R}(x, z_1) - \mathcal{R}(x, z_0) = p/q.$$

なる周期点 x を有する. 同じことが, 0 および $-\rho(z_0)$ を端点とする区間のどれか 1 つ, および 0 および $-\rho(z_1)$ を端点とする区間のどれか 1 つにおいて成り立つ.

証明. 最初の主張 (端点 $\rho(z_0)$ と $\rho(z_1)$ を使う) は, (2.2) においてすべての回転数を $\mathrm{mod}\ 1$ で整理すれば得られるので (2.2) の直接の系である.

その他の場合を扱うために次のように進む. 空間をコンパクト化し, z_0 および z_1 を膨らませることにより, (2.2) において $g : A \to A$ を構成する. $G : \tilde{A} \to A$ は $\pi^{-1}(\infty)$ の点を不動点にするような g の持ち上げとする. 道 $\Gamma : [0, 1] \to \tilde{A}$ を選んで, その像が $\tilde{A}$ の内部に含まれ, かつ $\pi^{-1}(\infty)$ と素であるようにし, また $G(\Gamma(0)) = \Gamma(1)$ を満たすようにする. $\gamma : [0, 1] \to A$ を $\pi \circ \Gamma$

とする. $w \in \pi^{-1}(\infty)$ なら $G(w)=w$ であって, $R_G(w)=0$ であることを確認して欲しい. (2.2) の場合と同様, y_1 が $\tilde{A}$ の点で $\pi(y_1)\in C_1$ なら,

$$\rho_\gamma(z_1)=R_G(y_1),$$

である. すると (1.9) より, p_0/q_0 が 0 と $\rho_\gamma(z_1)$ を端点とする区間内にあれば点 $x \in A$ があって, $\pi(x_0)=x$ なら $R_G(x_0)=p_0/q_0$ である. そこで (2.2) とまったくおなじように進んで

$$\mathcal{R}_\gamma(x,z_1,f)-\mathcal{R}_\gamma(x,z_0,f)=p_0/q_0,$$

を示す. これを $\mathrm{mod}\ 1$ で整理すれば求める結果が得られる. 端点が 0 と $-\rho_\gamma(z_0)$ の区間に p/q が含まれる場合も同様に扱える. □

注意. (2.2), (2.4) および (2.5) において f が保測であるという仮説のみを使って不動点 z_1, z_2 が同じ鎖遷移成分に含まれることを証明した. あるいは同等だが, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, これらの不動点を膨らませたときに加えた 2 つの円の間の両方向に $\varepsilon-$ 鎖が存在することを証明した. だから保測の仮説は z_1 と z_2 が同じ鎖遷移成分に属するという仮説に置き換えることができる. たとえば, これらがともに同じヘテロクリニックサイクル (以下の (3.1) 参照) の部分であれば十分である.

3. ヘテロクリニックサイクル

(3.1) 定義. 微分同相 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ のヘテロクリニックサイクルとは f の双曲不動点の集合 $\{p_i\}_{i=1}^n$ および $x_i\in W^u(p_i)\cap W^s(p_{i+1})$(ただし $p_{n+1}=p_1$) なるヘテロクリニック点 $\{x_i\}_{i=1}^n$ のことである.

上の定義で $n=1$ の可能性も否定しない. このようなサイクルは正しくはヘテロクリニックというよりはホモクリニックと呼ぶべきであるが, 記述を簡単にするため, この場合もヘテロクリニックということにする.

(3.2) 定義. 微分同相 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ の単純ヘテロクリニックサイクルとはヘテロクリニックサイクルであって次の条件を満たすものである.
a) p_i における Df の固有値は正,
b) p_i および x_i で限られる $W^u(p_i)$ の孤達と x_i および p_{i+1} で限られる $W^s(p_{i+1})$ の孤達は $\mathbf{R}^2$ においてジョルダン曲線をなす,
c) このジョルダン曲線に囲まれる円盤を D とすれば, 点 $\{p_i\}_{i=1}^n$ は $D\cup f(D)$ の補集合のうち非有界な成分の閉包に含まれる.

$D\cup f(D)$ が位相円盤であれば条件 c) はつねに成り立つことに注意しよう. また条件 a) は f が方向保存であることを意味する.

次に非コンパクトな面 M^2(ただしコンパクトな境界があってもよい) 上の面微分同相の一点コンパクト化に対して鎖遷移成分を調べよう. $f:M^2\to M^2$ は微分同相であって双曲不動点 $\{p_i\}_{i=1}^n$ およびヘテロクリニック点 $\{x_i\}_{i=1}^n$ から成るヘテロクリニックサイクルを有するとしよう. $X=M^2\cup\{\infty\}$ を M^2 の一点コンパクト化とし, $f(\infty)=\infty$ とおいて f を X に拡張する.

(3.3) 補題. 端点を p_i および x_i とする $W^u(p_i)$ の孤達と端点を x_i および p_{i+1} とする $W^s(p_{i+1})$ の孤達の X における補集合の任意の成分を U とする. U 上に測度 μ があって開集合上で正かつ $V \cup f(V) \subset U$ ならつねに $\mu(V) = \mu(f(V))$ であるとする. このとき, $x \in U$ が $f : X \to X$ の鎖回帰点であれば, この点は $\{p_i\}_{i=1}^n$ の各点と同じ鎖遷移成分に属する.

証明. 明らかに点 $\{p_i\}_{i=1}^n$ は同じ鎖遷移成分 Λ に属する. これらは同一のヘテロクロニックサイクル上にあるからである. $x \notin \Lambda$ としよう. このとき (1.8) より滑らかな完備リャプーノフ関数 $g : X \to \mathbf{R}$ がある. $g(x) < g(\Lambda)$ と仮定する ($g(x) > g(\Lambda)$ なら f を f^{-1} で置き換えればよい).

$c \in \mathbf{R}$ を g の正則点で $g(x) < c < g(\Lambda)$ なる点とし, $C_0 = g^{-1}(c)$ とおく. すると C_0 は面 $X_0 = g^{-1}((-\infty, c])$ の境界であり, $x \in X_0$ である. C_0 の点は $R(f)$ に含まれないから, $f(X_0)$ は X_0 の内部にある. $p_i \notin C_0$ であるから, $n > 0$ があって $C = f^n(C_0)$ はすべての i に対して端点を p_i および x_i とする $W^u(p_i)$ の孤と素である. 任意の $z_1 \in C$ に対して $g(z_1) < c < g(\Lambda)$ であり, 任意の $z_2 \in W^s(p_i)$ に対して $g(z_2) > g(\Lambda)$ であるから, 明らかに C は同じくすべての i に対して $W^s(p_i)$ と素である.

C は面 $X_1 = f^n(X_0)$ の境界であり $x \in X_1$ であるから, $X_1 \subset U$ である. ところが $f(X_1)$ は X_1 の内部に厳密に含まれる. ところが $\mu(f(X_1)) = \mu(X_1)$ であるからこれは不可能である. これは $x \notin \Lambda$ なる仮定に矛盾する. □

さて単純ヘテロクリニックサイクルがある場合にあらかじめ指定した回転数の周期軌道の存在に関する結果を述べる準備ができた. この結果を得るための仮定は 2 節の結果の場合よりやや強いが, 得られる周期軌道はホモクリニックサイクルに囲まれる円盤の内部に完全に含まれるので, この周期軌道の位置についてもっとずっと多い情報が得られる.

(3.4) 定理. $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ は微分同相で, 開集合上で正かつ有界集合上で有限の測度を保存するものとする. f は円盤 D を囲む単純ヘテロクリニックサイクルを有するとし, z は D 内にある f の不動点とする. p/q は 0 と $\rho_{p_i}(z, f)$ の間にある回転数とする. ただし後者はある i に対して p_i に関する全無限小回転数である. このとき D の中に z のまわりの全回転数 $\mathcal{R}_{p_i}(x, z, f)$ が p/q に等しい周期点 x がある. x の軌道全体は D 内にある.

証明. X を一点コンパクト化 $\mathbf{R}^2 \cup \{\infty\}$ とし, $f(\infty) = \infty$ とおいて f を拡張する. 目標は, 微分同相 f を D に制限し, あらためて D の外ではすべての点の力学が簡単にわかるようにそれを X の同相写像 h に拡張することである. とくに h に対しては D の外のすべての点の未来の軌道がある i に対して p_i に漸近するか, 過去の軌道が ∞ を極限とするように arrange する. そのあとで h が求める回転数の周期軌道を持つこと (これは必然的に D 内にある) を証明する.

このプログラムに沿って進む. 単純ヘテロクリニックサイクルの性質 c) より, 点 $q_i \in W^s_\varepsilon(p_i)$ があって $D \cup f(D)$ の補集合のうち ∞ の成分に含まれる. J_i を端点が q_i および x_{i-1} の $W^s(p_i)$ の孤とする. $p_i \in J_i$ に注意する (Fig.2 参照). 埋め込み $\alpha_i : [0,1] \to X$ を選んで $\alpha_i(0) = q_i, \alpha_i(1) = \infty$ かつそのほかの t では $D \cup \{\infty\}$ と素にできる. 明らかに, これらの埋め込みは ∞ を除いて互いに素に選べる. p_i が $D \cup f(D)$ の補集合のうち ∞ の成分の境界にあることはまた x_i もそうであることを意味する. だから埋め込み $\beta_i : [0,1] \to X$ を選んで $\beta_i(0) = x_i$ 以外はすべて α_i と同じ性質を持つように, またこれらの像が ∞ を除いてすべての α_i と素であるようにできる.

埋め込まれた孤 J_i, α_i, β_i はジョルダン曲線を構成して円盤を囲む. この円盤と $D \cup f(D)$ の

交わりは孤 J_i である．この円盤を ∞ の近くの境界の部分に沿って縮め, 次の性質を持つ閉埋め込み円盤 E_i(Fig.2 参照) を得る．
a) $i \neq j$ なら E_i と E_j は素;
b) $E_i \cap (D \cup f(D)) = J_i$;
c) $D \cup (\cup_i E_i)$ は $\{\infty\}$ と素な閉位相円盤である．

次の補題をこの状況に適用しよう．

(3.5) 補題. E は $\mathbf{R}^2$ の位相円盤であってその境界は 2 つの埋め込み孤 I と J から成るとする．$h_0 : J \to J$ は部分区間への J の一対一縮小写像であって, 方向保存で不動点 p を有するとする．このとき E をその部分集合に埋め込む写像 h で次のような性質をもつものに h_0 を拡張できる：
a) $h(E) \subset (h(J) \cup E^0)$. ここで E^0 は E の内部;
b) E 内のすべての x に対して $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p$.
h_0 が I の端点達の近傍でも定義されていて, J とこれらの部分集合を E に埋め込むなら, I の端点達の (もう少し小さな) 近傍上で $h = h_0$ となるように調節できる．

図 2

証明. $E_0 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ および $J_0 = \{(x, y) \in E_0 \mid y = 0\}$ とおく．$g : E_0 \to E_0$ を $g(x, y) = (x/2, y/2)$ で定義する．同相写像 $\varphi : J \to J_0$ を選んで g と h_0 を共役にする．すなわち, φ を選んで $g(\varphi(x)) = \varphi(h_0(x))$ とする．φ を, 孤 I から孤 $\{(x, y) \in E_0 | x^2 + y^2\}$ の上への同相写像に拡張する．これで E_0 の境界から E の境界への同相写像を得たことになる．これを同相写像 $\varphi : E_0 \to E$ に拡張する．$h : E \to E$ を $h(y) = \varphi(g(\varphi^{-1}(y)))$ で定義する．このとき J 上で $h = h_0$ で, E 上で h は E_0 上の g に位相共役である．
h_0 が J 上ばかりでなく I の両端点の近傍でも定義されているとき, Z は I の両端点を含む I の 2 つの小さな区間であって h_0 がその上で定義されているとする．J 上で定義されている φ から出発して, これを $J \cup Z \cup h_0(Z)$ 上へ次のように拡張する．$\varphi(Z)$ は E_0 の境界の半円部分の端

点を含む 2 つの区間から成り, したがって $x \in Z$ に対して $g(\varphi(x)) = \varphi(h(x))$ であるようにするのである. そこで φ を上で述べたように E_0 全体に拡張し, $h : E \to E$ を $h(y) = \varphi(g(\varphi^{-1}(y)))$ で定義すれば, 求めていた埋め込みが得られる. □

(3.4) の証明に戻ろう. J_i を J とすれば円盤 E_i が (3.5) の仮説を満たすことに注意しよう. 我々の目標は微分同相 f を D に制限し, 次にそれを X の同相写像 h に拡張して D の外のすべての点の未来の軌道がある i に対して p_i に向かうか過去の軌道が ∞ を極限とするようにすることである. そのために $x \in D$ なら $h(x) = f(x)$ と定義し, $h : E_i \to E_i$ を (3.5) で与えられるように J 上の h の拡張とする. 構成法により, J_i または D_i の境界上の x_{i-1} の近傍または p_i の近傍の任意の x に対して $h(x) = f(x)$ を得る. ここまでで閉位相円盤 $D \cup (\cup_i E_i)$ 上で h を定義した. この円盤をすこし変えて h が境界を内部に写すようにする必要がある.

これをするため, q_i から孤 β_i 上で x_i に近い点まで延びる滑らかな孤 γ_i を選ぶ (Fig.3 参照). これをするのに, 端点を q_i および p_i とする $W^s(p_i)$ の孤および端点を p_i および x_i とする $W^u(p_i)$ の孤に非常に近く γ_i をとる. これらの 2 つの孤と γ_i および短い孤 β_i は十分に細い帯状領域を囲むこれを Y_i と記そう (Fig.3 参照). 孤 β_i が十分短ければ, この孤の上で $h = f$ である. γ_i をうまく選ぶことによって, x が γ_i の点なら $f(x)$ が $YI \cup D(\cup_i E_i)$ の内部にあるようにできる. さらに, x が γ_i の点であるか Y_i の内部の点なら, ある n に対して $f^{-n}(x) \notin Y_i$(したがって D の外にある) とできる.

図 3

Q は位相円盤 $D \cup (\cup_i E_i) \cup (\cup_i Y_i)$ を表わすものとする. Y_i 上で $h = y$ と置いて h を Q まで拡張する. このとき構成法により, $h(Q)$ は Q の内部に含まれる.

P を X における $h(Q)$ の補集合とし, P 上で h^{-1} を定義することにより X のすべてへの h の拡張を完成させる. だから P は位相円盤であり h^{-1} はすでにその境界上で定義されており, 事実, h^{-1} は P の境界をその内部へ写す. よく知られており, また (3.5) と同様の方法で簡単に証明できるとおり, これらの状況のもとでは h^{-1} は P をその内部へ写す埋め込みに拡張でき, ∞ が唯一吸引的な不動点である. h が ∞ の近傍で滑らかであるように, また ∞ の無限小回転数が無理数になるようにできる. いまや, $x \in E_i$ なら

$$\lim_{n\to\infty} h^n(x) = p_i,$$

であり, $x \in P$ または $x \in Y_i - D$ のときは

$$\lim_{n\to\infty} h^{-n}(x) = \infty.$$

である. いずれの場合も D の外側には ∞ を除いて周期点はない. D 上で $h = f$ であるから, そこでは保測である.

補題 (3.3) より, 点 $z \in D$ を膨らませ, z_0 が膨らましの際に付け加えられた円の鎖回帰点であれば, z_0 と p_i は同じ鎖遷移成分に属す. さらに ∞ を膨らませて同相写像 $h : A \to A$, $A = \mathbf{T}^1 \times [0, 1]$ をつくっても, z_0 と p_i はやはり同じ鎖遷移成分に属す. $\pi : \tilde{A} \to A$ を普遍被覆空間とし $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$ は h の持ち上げであって $\pi^{-1}(p_i)$ を不変にするとする. このとき $w \in \pi^{-1}(p_i)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(F^n(w) - W)_1}{n} = 0,$$

および $y_0 \in \pi^{-1}(z_0)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(F^n(y_0) - y_0)_1}{n} = R_G(y_0) = \rho_{p_i}(z, f).$$

である. だから (1.9) より周期点 $x \in A$ があって, $\pi(y) = x$ なら $R_f(y) = p/q$ である. 定義より明らかに

$$\mathcal{R}_{p_i}(x, z, f) = R_F(y) = p/q.$$

∞ を膨らませたときに加えられた円上の点はすべて回転数が無理数であるから, x はそれらの点ではない. だから $x \in D$ でなければならない. 同じ議論が $f^i(x)$ にもあてはまるから, x の軌道全体は D 内にあるはずである. □

4. 無限遠の回転数

2 節および 3 節で得られた結果を, 面 (非コンパクトな面も含めて) の保測微分同相の普遍被覆空間への持ち上げとして得られる面の微分同相に適用するといくつか面白い結果が得られる. この節では同じような設定で考えるが, 一つ新しい内容ー無限遠における回転数ーを加える.

M^2 を方向付き連結面とし, $\pi : U \to M^2$ をその普遍被覆空間とする. M^2 がコンパクトな境界成分を持つことも許し, また m^2 がコンパクトであることも許す. M^2 のオイラー標数が負であるか, M^2 が $\mathbf{T}^2$ であるか, $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$ なら, U の自然なコンパクト化がある. それを $\overline{U}$ で表わすと, これは位相円盤である. M^2 に境界がなければ, $\overline{U}$ の境界円は無限遠の「理想点」から成る. そうでなければ, それはそのような点いくつかと, π のもとで像が M^2 の境界に含まれる点を含む. F が M^2 の同相写像の U への持ち上げであれば, $\overline{U}$ のすべての点の同相写像へ拡張できる. F_t が M^2 上のイソトピーの持ち上げであって M^2 に境界がなければ, 無限遠の円への拡張は t から独立である (これらの事実のいくつかに関しては [Th] 参照).

(4.1) 定義. M^2 を上で記述した面とし, $f : M^2 \to M^2$ は不動点 z を有する方向保存微分同相であるとし, $\pi : U \to M^2$ を普遍被覆空間とする. $F : U \to U$ は f の持ち上げであって点 $z_0 \in \pi^{-1}(z)$ を不動にするとする. 不動点 z に関する無限遠の回転数は, $F : \overline{U} \to \overline{U}$ を無限遠の円に制限したときの F の回転数である.

簡単にわかるように, 無限遠の回転数は $z_0 \in \pi^{-1}(z)$ の選び方によらない. 別の任意の選び方からは別の持ち上げが得られるが, それも被覆変換によって F と共役であるからである. ゆえに 2 つの持ち上げは無限遠の円上で共役な同相写像に拡張できる.

(4.2) 命題. $\chi(M^2) < 0$ または $M^2 = \mathbf{T}^2$ または $M^2 = \mathbf{T}^1 \times [0,1]$ とし, $f : M^2 \to M^2$ は保測かつ方向保存の微分同相で不動点 z を持つとし, $\pi : U \to M^2$ を普遍被覆空間とする. $F : U \to U$ は f の持ち上げで, 点 $z_0 \in \pi^{-1}(z)$ を不動にするとする. このとき, 端点を z_0 の無限小回転数 $\rho(z_0)$ および z に関する f の無限遠における回転数とする $\mathbf{T}^1$ の区間の任意の p/q に対して, F の周期点 $x \in U$ があって $\mathcal{R}(x, z_0, F) = p/q$ である.

証明. $F : \overline{U} \to \overline{U}$ および M^2 上の測度を持ち上げて得られる不変 (無限) 測度 μ を考える. はじめに, $\overline{U}$ の任意の内点 x に対して $x \in R(F)$ であるか, 任意の ε に対して x から無限遠の円までのまた無限遠野円から x までの $\varepsilon-$ 鎖がある. この証明は (2.1) の証明とほぼ同一である. 不変測度のおかげで x の小さな近傍の中には写像を繰り返した後に帰ってくる点か, 任意のコンパクト集合の外に出ていく点が含まれる.

(1.6) を適用して F が $\overline{U}$ 上で鎖遷移的であることをいうために, 無限遠の円上の点は鎖回帰集合 $R(F)$ に含まれることを示せばよい. 無限遠の回転数が無理数なら, これは成り立つ. 円同相写像は無理数回転または Denjoy 型の例に共役のはずだからである. 無限遠の回転数が有理数なら, 無限遠の円上に周期点 p_0 がある. この場合この円上にイソトピーがあって, 無限遠の円上の与えられた同相写像から出発して finite order の同相写像でおわり, イソトピーの各段階で p_0 の軌道上の作用が同一である. そこで $\overline{U}$ の境界にカラー近傍 $s^1 \times [0,1]$ をつけ加えてそこに F を拡張し, カラーの同心円を保存しイソトピーによって指定された仕方でこれらの円に作用するようにする.

この和を D で表わし, 拡張された同相写像を $F : D \to D$ で表わす. この同相写像に対して, カラー近傍のすべての点は鎖回帰的であること, またこれらはすべて同じ回転数をもつこと, すなわち z に関する f の無限遠における回転数を持つことに注意しよう. (有理数の場合, カラーを加える必要はない. $D = \overline{U}$ とする.) いまや (1.6) が適用でき, F が D 上で鎖遷移的であると結論できる.

次に F の不動点 z_0 を D 内で膨らませて, 円環の同相写像を得る. 膨らませたときに得た円のすべての点は鎖回帰的である. なぜなら U 上の測度を持ち上げて z_0 を膨らませた U 上の測度にし, 上で述べた (2.1) の議論を繰り返せば, この円のすべての点 y は鎖回帰であるか, 任意の ε に対して y から $\overline{U}$ 内の無限遠の円まで, また無限遠の円から y への $\varepsilon-$ 鎖がある. ところがこのことは y が z_0 を膨らませた D 上で鎖回帰であることを意味する. だから (1.6) から明らかなように, 円環上の同素写像は鎖遷移的である.

だから (1.9) が適用できて, 回転数 p/q の周期点 x が得られる. この点はわれわれのつけ加えたカラー内にはあり得ない. カラー内のすべての点は回転数がいま考えている区間の両端に等しく, 内部では p/q だからである. したがって, U の点として考えた x が求める点である. □

References

[C] C.Conley, Isolated invariant sets and the Morse index, *C.B.M.S. Regional Conference Series in Math.*, **38** (1978), Amer. Math. Soc. Providence, R.I.

[F1] J.Franks, Recurrence and fixed points of surface homeomorphisms, *Ergod. Th. and Dyn. Systems*, **8** (1988), 99-107.

[F2] J.Franks, A variation on the Poincaré-Birkhoff Theorem, "Hamiltonian Dynamics", Contemporary Math. Amer. Math. Soc., **81**, 111-116.

[Th] W.Thurston, On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **19** (1988), 417-431.

[W] W.Wilson, Smoothing derivatives of functions and applications, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **139** (1969), 416-428.