天体力学とハミルトン力学系用参考資料

谷川清隆[1]

国立天文台

目次

1. Jack Wisdom,
   Urey Prize lecture: Chaotic dynamics in the Solar System, *Icarus* **72**, 241-275(1987)
2. M. Lecar, F. Franklin, and M. Murrison,
   On predicting long-term orbital instability: a relation between the lyapunov time and sudden orbital transitions, *AJ* **104**, 1230-1236(1992).
3. A. Morbidelli and A. Giorgilli,
   Superexponential stability of KAM tori, *Journ. Stat. Phys.* **78**, 1607-1617(1995).
4. Pablo M. Cincotta,
   Arnold diffusion: overview through dynamical astronomy, *New Astronomy Reviews* **46**, 13-39(2002).
5. Paul E. Nacozy,
   On the stability of the solar system, *Astronomical Journal* **81**, 787-791(1976).
6. N. Murray, M. Holman, and M. Potter,
   On the origin of chaos in the asteroid belt, *Astronomical Journal* **116**, 787-791(1998)
7. A. Milani and A. Nobili,
   太陽系における安定カオスの一例
   An example of stable chaos in the Solar System, *Nature* **357**, 569-571(1992).
8. A. Milani and A. Nobili,
   小惑星帯の安定カオス
   Stable chaos in the asteroid belt, *Icarus* **125** (1997), 13-31
9. Alessandro Morbidelli and Claude Froeschlé,
   リャプーノフ時間と巨視的不安定時間の関係

[1] email: tanikawa@cc.nao.ac.jp

On the relationship between Lyapunov times and macroscopic instability times,
Celestial Mechanics and Dynamica Astronomy **53** (1996), 227-239.

10. Harold F. Levison and Martin J. Duncan,
短周期彗星の長期力学的ふるまい
The long-term dynamical behavior of short-period comets, *Icarus* **108**, 18-36(1994).

11. J. Laskar,
大域的カオスと内惑星の間隔
Large scale chaos and the spacing of the inner planets, *Astronomy and Astrophysics* **317** (1997), L75-L78.

12. G. Contopoulos and N. Voglis,
規則的な軌道とカオス的な軌道を見分ける高速法
A first method for distinguishing between ordered and chaotic orbits, *Astronomy and Astrophysics* **317** (1997), 73-81.

13. Jack J. Lissauer,
太陽系のカオス運動
Chaotic motion in the solar system, *Reviews of Modern Physics* **71** (1999), 835-845.

14. Boris V. Chirikov,
多次元振動子系の普遍的不安定性
A universal instability of many-dimensional oscillator systems, *Physics Reports* **5** (1979), 263-379.

15. Duncan, M.J. and T.Quinn,
The long-term dynamical evolution of the solar system, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **31**, 265-295(1993).

16. Lecar, M.L., F.A. Franklin, M.J. Holman, and N.W. Murray,
Chaos in the solar system, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **39**, 581-631(2001).

17. Wisdom, J.,
The resonance overlap criterion and the onset of stochastic behavior in the reistricted three-body problem, *Astron. J.* **85**, 1122-1133.

18. Morbidelli, A.,
ASTEROIDS: Living in the Kingdom of Chaos, American Astronomical

Society, DPS meeting #32, #05.01(2000).

19. N.W. Murray and M.J. Holman,
Diffusive chaos in the outer asteroid belt, *Astron. J.* **114**, 1246-1259(1997).

20. K. Tsiganis, H. varvoglis, and J.D. Hadjidemetriou,
Stable chaos in high-order Jovian resonances, *Icarus* **155**, 454-474(2002).

Urey Prize lecture: Chaotic dynamics in the Solar System

Jack Wisdom, *Icarus* **72**, 241-275(1987)

1. 序

太陽系は時計仕掛けであると一般に受け止められている (影の声: 中国の暦の歴史はそうでないことを示す). 惑星の動きの中に規則を見つけたい. ニュートンの法則として結実した. ニュートンが真実をかいま見たのは確かだ. 予測可能性の勝利. 18 世紀に太陽系儀として体現された. ルイ XV 世, ベルサイユ宮殿.

その起源から, mechanics は予測可能性と結びついていた. ニュートン方程式の解の正則性には誰も疑義を挟まなかった. 三体問題の解析解を見つけることが極めてむずかしいのは何か目に見える以上の事実が鍵として隠れているのではないか. 人は愚かさゆえに決断的になることもある (??) 力学の解の真の性格が見えて来るまでに 200 年も要したのは不思議ではない.

ポアンカレは 2 つの重要な発見. 運動が正則であるという仮定は, 積分の完全な集合を意味する. ほとんどの力学系は求積に帰着できる積分を持たない. また, もうひとつ, 不安定な周期軌道のまわりの運動は想像を絶する複雑さを持つことを示した. ポアンカレが言うには, 「この図の複雑さに打たれる. それを trace しようとは思わない. 三体問題, あるいは一般に積分を持たない力学系の問題の複雑さについてどんな描像も与えることができない... 」 ポアンカレの発見は完全には理解されず, むしろ誤解された.

Fermi(1923) は解析積分がないというポアンカレの証明に基づいて, ハミルトン系はエルゴード的であることを示そうとした. 太陽系はフェルミからすると, 反例に見えた. Fermi の証明が間違っていたことは太陽系に住むわれわれにとって幸いであった (影の声: なんと傲慢な statement であろうか. 自然は Fermi の証明が正しかろうが間違っていようが, 厳然としてここにある.)

1960 年代になって力学系の真の姿が見えてきた (Arnold and Avez, 1968; Chirikov, 1979). 解析の最前線では, 準周期運動の持続性の定理が証明された. Kolmogorov(1954) が大筋を描き, Arnold と Moser が 1961 年に独立に証明した. この KAM 理論は, 十分小さく滑らかな摂動の下で, 可積分運動が大きな測度で準周期運動として, 正則運動として残ることを示す. ポアンカレの定理により大局的積分はなくなるが, 解の大部分は, 非摂動解と同様な正則性を持つ. 正則な解の集合はきわめて複雑な構造をしている. 正則解は, 解の周波数比が有理数によって十分よく近似できる場合には消えてしまったり, 性格を変

えてしまう. 有理数が稠密であることに注意する. KAM 定理は実際上の有用性を持たない. 定理の条件を満たす摂動の大きさは極く小さい. Hénon(1966b) は KAM 定理の適用可能な摂動の相対強度を 10^{-48} と見積もった. とはいうものの, KAM 定理は力学系の理解へ基本的な貢献であった. 準周期運動は実際摂動の下で生き残る. Arnold(1961) は, 惑星質量, 離心率, 軌道傾斜角が十分小さければ, 太陽系は測度論的に準周期的であることを示した. しかし, 現実の太陽系はこの定理の適用範囲外にある.

力学系の理解にコンピュータが重要. Lorenz(1963), Henon and Heiles(1964) の萌芽的研究. 簡単な力学系から込み入ったふるまいが出ることを示した. 系自身が複雑である必要はない. いまや, ロレンツ系は散逸系の原型, Henon–Heiles 系は保存系の原型. ロレンツ系は地球大気の打ちきりモデル, Henon–Heiles 系は銀河のモデルで, エネルギーと角運動量以外の積分を探すためのもの. 散逸系, 保存系ともに, 不規則な運動は「カオス的」(chaotic) とよばれる. その特徴は, (1) 不規則に見える. 定量的判定基準なしに目で見ただけでカオス的と判断できる場合が多い. (2) 客観的判定基準は, 近くの軌道が離れていく度合. 指数関数的ならカオス的. (3) カオス軌道は初期条件に敏感に依存する, と言っても同じこと. リャプノフ特性指数. (4) 自由度 2 の保存系では, 準周期運動とカオス的運動は横断面上の点の現われ方の違いで区別できる. かたや滑らかな曲線に乗り, かたや面積を埋めるように見える.

Henon–Heiles 系は本論文の主旨に合っている. 太陽系はほぼ保存系であるから. Henon–Heiles 系のハミルトン関数は

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2\right) + x^2 y - \frac{y^3}{3}.$$

2 つの調和振動子を非線形結合させたもの. 自由度は 2. カオスに必要な最小の自由度. Hénon–Heiles の結果: 正則軌道と不規則軌道が入り混じっている, 不規則軌道の割合はエネルギーとともに増加する. 他の系での経験によれば, Henon–Heiles 系は例外ではない. ほとんどすべての自由度 2 のハミルトン系は同様のふるまいを示す. 19 世紀の摂動論は破綻した. 摂動論では進めなくなった. 運動の型はわかったが, 相空間のカオス領域についてはほとんどわからない. ほとんどすべてのハミルトン系が Henon–Heiles 系と同様であることは深い影響を科学に与えた. 共通に何かがある. ある分野での結果が別の分野で使える. 保存系のカオス的ふるまいは, 銀河力学, プラズマ物理学, 粒子加速器, 機械系 (mechanical systems), そして太陽系.

太陽系は力学のゆりかご. この力学系は非線形力学における発見によって何も起こらないわけがない. 太陽系力学は

- 惑星および衛星の軌道および自転力学

- その相互作用
- 潮汐相互作用による軌道と自転の進化

をカバーする. 主として 共鳴の力学 である. 共鳴はほぼいつもカオスゾーンと結びついている. 太陽系ではどんな状況でもカオス運動が期待される. 本論文では, 近代力学の結果をいくつも太陽系への応用を概観する. まず, 自転力学から始める.

2. ハイペリオンのふらつき (tumbling)

土星の衛星ハイペリオンのカオス的自転は太陽系のカオスのもっとも劇的な例のひとつである (Wisdom et al., 1984). ハイペリオンでは,

- 数公転の間に自転速度と自転軸が変化する.
- 軌道周期は 21 日,
- 形は非対称 $190 \times 145 \times 114$, 軌道離心率は 0.1,
- タイタンと 4:3 の平均運動共鳴,
- 自転が潮汐効果によって鈍化して公転と同期するまでの時間は太陽系の年齢程度.

現在それに近い.

自転が潮汐進化でなければカオス的でなかったろう. また, 潮汐による自転鈍化のスピードがもっと速ければ, ハイペリオンの自転は安定な尽数関係状態に落ち着いていたはず.

ハイペリオンのカオス自転は簡単モデルで説明できる. ハイペリオンの軌道は固定した楕円とする. 自転軸は最大慣性モーメント軸方向 (対称物体なら最短軸), 自転軸は公転面に垂直. 固定公転軌道という仮定は, 自転速度の変動時間スケールがハイペリオンの公転軌道の変動時間スケールに比べてはるかに短いからである. 自転軸配置は潮汐進化の自然な帰結である. 自由回転物体の場合, 回転ベクトルが主軸のひとつの方向に向いていない限り, 回転ベクトルは物体上を動きまわる. 物理物体の場合, 遠心力による固体潮汐のために変形し, その変形のため回転ベクトルは物体上を動きまわる. また回転ベクトルが変化することにより, 折れ曲がりができて変形する (Burns and Safronov, 1973). 絶えざる折れ曲がり (bending) と引き延ばし (stretching) によって物体のエネルギーは散逸するが, 自由物体の場合外部トルクがないので角運動量は保存される. そこで回転は, 角運動量が与えられたときの, 極小エネルギー状態へと進化していく. この状態は, 最大慣性モーメント軸のまわりの回転である. 角運動量の大きさは関係

$$L^2 = L_a^2 + L_b^2 + L_c^2$$

である. ここで, L_i は主軸上の角運動量成分. エネルギーは単に

$$E = \frac{L_a^2}{2A} + \frac{L_b^2}{2B} + \frac{L_c^2}{2C}$$

ただし, A, B, C は主軸 a, b, c のまわりの主慣性モーメント. 最初は球の方程式であり, 後者は三軸不等楕円体の方程式である. 角運動量はこれらふたつの曲面の交わり上にくるように制限される. エネルギーが散逸するにつれて, 楕円体のサイズは縮まり, 角運動量は楕円体の最長主軸方向 – これは最大慣性モーメント軸に対応 – に動いていく. この過程は, 半分水の入った紙ボトルをはじめに最大軸のまわりに自転させて投げ上げてみるとわかる. 軌道上にある天体の場合, 衛星におよぼす惑星の潮汐はさらに衛星の自転を進化させる. Darwin(1879) は, このような潮汐を, 天体本体と, 潮汐で赤道部にできるふくらみ (bulge) に分けることで説明できることを示した. できたバルジはそれを作ったポテンシャルより少し遅れる. これは強制減衰振動子の運動に直接的に似ている. この場合, 強制振動周波数が振動子の自然周波数より短いと, 周期外力に対し応答は遅れる. 回転物体の場合, 潮汐バルジはこのとき自転方向に少しだけ運ばれる (?). 非対称的に配置された潮汐バルジに働く重力によって, 物体は自転は鈍化し, 自転同期となる方向に進む (軌道が円運動のとき). 同時に自転軸の傾きも変化する. 自転軸と軌道面への垂直軸との角度がゼロに向かう (軌道の変化を無視して). 自転軸の傾きがゼロになると, 自転速度は平均軌道運動の 2 倍になる (詳しくは, たとえば, Peale, 1977 を見よ). だから, 最大慣性主軸のまわりに, 軌道面に垂直に自転する衛星の自転力学の簡単モデルを考えることは自然である. この力学モデルは, 水星の自転周期が公転周期と尽数関係にあることが発見されて (Pettengill and Dyce, 1965) から, 展開された自転–軌道結合 (Goldreich and Peale, 1966 を見よ) 理論で使われたものと同じである.

まるくない天体に働く差分重力はその天体にトルクをおよぼす. 上で説明した単純モデルにける天体の向きに関する運動方程式はきわめて簡単である.

$$C\frac{d^2\theta}{dt^2} = -n^2(B-A)\frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2(\theta - f)$$

図 1 に自転–軌道幾何のおおよそを示した. 自転軸を軌道面に垂直に固定すると, 衛星の向きは単一の角度 θ で記述される. これは最小慣性モーメント軸 (三軸不等楕円体の最大軸) と慣性的に固定された近点線 (惑星と近点を結ぶ線) のなす角度である. 軌道上での衛星の角位置も軌道の近点から測る. この角度は近点離角であり, ここでは f と記す. 主慣性モーメントは $A < B < C$ であるから, C が自転軸のまわりの慣性モーメントである. 衛星の軌道平均運動は n

であり, r は惑星からの瞬間距離である. a は軌道半長径. 運動方程式は外部トルクと角運動量変化をつなぐ. 同じことであるが, 外部トルクを自転軸のまわりの慣性モーメントと向きの加速度の積とつなぐ. 重力は逆 2 乗則に従うから, 惑星に近い方の衛星のバルジに働く引力は逆側に働く引力より大きい (物体を三軸不等楕円体として). したがって, これらの力から生じるトルクはバランスしない. このトルクはしばしば「重力勾配トルク」とよばれる. 惑星からの距離の逆 3 乗依存のトルクは重力勾配としてのトルクの起源を反映する. 同様に, 物体が自転軸に関して軸対称なら, ネットなトルクはない. 物体の非対称形状が運動方程式に入るのは, 軌道平面内での主慣性モーメントの差 $B-A$ としてである. 瞬間的には, トルクはいつも衛星の長軸が衛星と惑星を結ぶ線に向かうように働く. 角度 $\theta - f$ は長軸と惑星–衛星線の間の角度である. この方程式はポテンシャルエネルギーの方向依存部分における質量分布の最低次モーメントを保つだけである (?). 無視された効果は, 衛星の半径と軌道半径の比に関して高次のものである. この近似では, 物体はすべて 180° 回転しても同値な配置になるような対称性を持つ. 角度の差に 2 を乗じる因子はこの対称性を反映している.

問題が「可積分」と言われるのは, どの自由度に対しても時間に依存しない積分があるときである. すると, リュービルの定理により, 問題が求積に帰着されることが保証される. 解が標準的な関数によって表されることは期待できない. けれども解の本質は見つけられたのだ. n 個の独立な積分を持つ n 自由度の問題がたかだか n 個の独立な周波数を持つ正則な準周期軌跡を持つことは保証される. 自由度 1 んお問題はどれも可積分である. 繰り返すが, 解がすでに知られた関数で表現できるかどうかはわからない. 自由度 1 のハミルトン系の場合, 解は単に相平面上のハミルトン関数のコントアである. 自由度が 1 より大きなハミルトン問題, あるいは自由度 1 でも時間に陽に依存するハミルトン問題は一般に求積に帰着できない. 生成的に, このような系は混合相空間を示す. つまり, カオス的なふるまいを示す初期条件があると思えば, 正則な運動にいたる初期条件もある.

自転–軌道結合の運動方程式は自由度は 1 でしかない. それは方位角 θ である. しかし, 方程式は惑星への距離 r および真近点離角 f の非一様ケプラー運動を通して陽に時間に依存する. だから, 自転–軌道結合問題は可積分を保証された問題の類の外にある. 強調すべきなのは, 問題の可積分性を壊すのは, 離心率がゼロでないことであることである. 離心率をゼロにしておけば, 惑星 衛星間の距離は軌道半長径に等しいままであり, 真近点離角は平均運動かける時間になるのである. 角度 $\theta' = \theta - nt$ に関する運動方程式は

$$C\frac{d^2\theta'}{dt^2} = -\frac{3n^2(B-A)}{2}\sin 2\theta'.$$

因子 2 を除いて, これは振り子の運動方程式である. 因子の 2 も変数変換で消すことができる. もちろん運動方程式は楕円関数を使って陽に積分できる. しかし, 厳密な解は必要ない. 解の性質を変える重要な様相は, この問題が積分

$$E = \frac{1}{2}C\left(\frac{d\theta'}{dt}\right)^2 - \frac{3n^2(B-A)}{4}\cos 2\theta'.$$

を持つことである.

図 2

離心率がゼロでないとき, 時間への陽の依存性を運動方程式から消すことはできない. 自転–軌道問題はそれなりに複雑であり, 生成的に混合相空間を示すことが期待される. 相空間の構造は横断面を計算することにより, 一番簡単に理解できる. 簡単化した自転–軌道問題では, 横断面は回転状態は断続的に, つまり 1 軌道あたり 1 度だけ見ることによって作ることができる. 運動方程式を数値的に積分し, 衛星が近点を通過するたびに向きの変化率 $d\theta/dt$ を向き θ に対してプロットする. ハイペリオンの横断面 ($\sqrt{3(B-A)/C} \approx 0.89$, 軌道離心率 $e \approx 0.1$) を図 2 に示した. 横断面を作るのに多数の軌跡を使った. これで主たる運動のタイプが見える. 点が 1 次元曲線を浮かび上がらせるのであれば, 運動は準周期的である. 点が面を埋め尽くすように見えれば運動はカオス的である. 実際にやってみると, これら 2 つのタイプの運動は用意に見分けがつく. ただ, ときには, はじめ準周期的と思われた軌跡が, 拡大して見ると非常に細いカオスゾーンを動くのが見つかることがある. これは別に驚くことではない. というのは, 正則なふるまい領域は現実には信じられないほど豊かな構造を持っているからである. どんどん拡大していくと, カオスゾーンを相空間のどの点の近くにも見つけることができる. 実際上の話をすると, この豊富な構造を問題にすることはよくない. 物理的な問題では正則領域とカオスゾー

ンへのおおまかな分割がもっと重要である (影の声: 豊富な構造を定量的に扱う手法がないんだね). 図 2 を作るのに使った軌道のうち 3 個はカオス的であった. 横断面の中央に散らばる点はすべて同じ軌跡に属するものである. この大きなカオスゾーンは慣性系で回転なしのところから, 平均角運動の 2.5 倍のところまで広がっている. 図の上部中央の $\times$ 印を生成する 2 つの軌跡もカオス的である. ほかの軌跡は, 拡大してみない限り準周期的であり, 準周期運動の主領域を占めている. カオスの海の島は各種尽数関係にある自転–軌道状態に対応する. 横断面の下部の $\theta = 0$ あたりの島は同期島であり, ハイペリオンは平均して土星に同じ顔を向ける (決して土星に対して回転しない). 大きなカオスゾーンの上部にある島は 2 状態である. ハイペリオンは平均して 1 軌道周期間に 2 回自転する. ほかにも多数の島がある. 横断面底 $\theta = \pi/2$ 付近の曲線は非尽数関係準周期回転を表す. 縦軸の範囲を広げれば, この曲線が図を横切って横に広がっていることがわかる. ここでは 0 と π の間の領域の横断面しか示さなかった. θ に π を加えても力学的には同値な状態が得られるだけである. ただし, $\theta = 0$ および $\theta = \pi$ における同期状態は, 土星に反対の面を向けるという意味で違う状態である.

この還元した問題は非線形自転–軌道結合問題をある程度味わっているが, この問題に入り込んでいる近似を再吟味する必要がある.

...

3. 不規則形状衛星

4. カオス軌道と 3/1 カークウッド間隙

相空間が分割されることが発見されるとすぐに, 同じ技術が力学的天文学の古典的軌道問題に応用された. 円制限三体問題の相空間 (Henon, 1966a,b; Jefferys, 1966) および Hill 問題 (Henon, 1970) である. これらによって, 規則的 (regular) および不規則的軌跡へと同様に分割されることが示された. とくに Hill 問題の研究から, 分割相空間のかなり nice な物理的応用が導かれた. 惑星からの距離がある程度遠い衛星の場合, 逆行軌道のみが準周期的であることがわかった. 同じ距離では, 順行軌道はエスケープするか, カオス的ふるまいをする. だから, 木星の最外側衛星グループの軌道は, 順行であったなら安定ではないだろう.

力学的天文学の最も有名な問題のひとつは小惑星の分布に関係する. 小惑星の軌道半長径の分布は一様でない. 間隙がいくつかあり, 集中するところも

ある. これらの間隙の起源に関してはたくさんの推測が行われてきた. この非一様性の原因への鍵は, D. Kirkwood による発見の時から気づかれていたが, 木星との平均運動尽数関係で生じていることである. つまり, 間隙内の小惑星の平均運動に小さな整数を乗じると, 木星の平均運動に別の小さな整数を乗じたものにほぼ等しいのである. カークウッドは木星による繰り返しの引っ張りにより, どうにかして小惑星が共鳴近傍を離れて行くと示唆した. この説明は今日素朴すぎるように見えるが, 間隙の発見以来提案された幾多の仮説に比べて真実に近いかもしれない. しかし, このような単純な説明はいずれは失敗するように運命づけられている.

問題: ある共鳴は間隙になり, 別の共鳴は集まるのは何故?

はっきりしていることは, 共鳴の力学を理解しない限り間隙の理由を理解する望みはないことである.

いままでは平均法を使って研究された. 長期的変動を抜き出すために系を平均するという発想はガウスやラグランジュに遡る. 彼らは太陽系の長期的進化を調べるために運動方程式を平均経度で平均した. この手続きは直観的には意味がある. つまり, 高速変動は周期的効果を持ち, 平均すればゼロになる. 一方ゆっくりした変動は積み重なって永年変動となる. 平均法は, Lindstedt, Poincaré, von Zeipel らの古典摂動論において中心的役割を果たす. 任意の次数における誤差は, 指定した時間に対してはある量より小さいという結論を使って見積もることができる. しかし, Poincaré は古典摂動展開は漸近級数であって, 一般に発散することを示した. のようなわけで, 古典摂動論から導いた解と現実の軌跡との関係ははっきりしない. 長期間でみると, 現実の軌跡は摂動論から与えられる解とは何の関係もないかもしれない. たとえ初期に誤差が評価可能であるにしても. 古典摂動論では, 問題がどれも可積分であって, ハミルトン関数の非可積分部分は次々といくらでも高次へと押しやることができると基本的に仮定している. このような変換の無限列のあとで, 残った可積分問題を解いて解を得, 逆変換で元に戻る. 問題がすべて可積分であると仮定されるから, 古典摂動論からは準周期運動しか生じない. カオス的軌跡に関する古典摂動展開は単純に間違えた定性的ふるまいをするはずである. では, 平均法をどうすればいいのか (What is to be made of averaging then)? KAM 定理の証明が建設的な証明である. 準周期運動は, 新しい収束摂動スキームを用いて構成することにより存在することが証明される. 新しい摂動スキームでも平均法が役割を果たす. つまり, 証明の条件が満たされると, その平均ステップの正当性は疑いがなくなる. というのは, 摂動展開が収束するからである. 十分小さな質量, 離心率および軌道傾斜角の場合の太陽系の安定性の証明へ, アーノルドが証明を拡張するにあたって, 準周期解の構築はラグランジュ解から始まる.

こうして (Thus), 証明の窮屈な仮定の下で, ラグランジュ解の現実解への関係が完全に知られる. ラグランジュが使った平均法は, アーノルドの証明の条件が満たされたときに厳密に正当化される. 平均法は今日尊重されたいと願っているが, ほとんどの場合, 平均化原理の正当性は証明のない予想にしかすぎない. Arnold(1974) が言うには,「この原理は定理でもないし, 公理でもないし, 定義でもない. むしろ物理的命題である. すなわち, 曖昧に定式化され, 厳密に言えば正しくない主張である」ラグランジュ解が惑星運動への第一近似として良いものであるのは観測的事実である. ただ, 太陽系の長期安定性は, アーノルドの証明のための条件が満たされないので, 未解決問題である. 平均法は様々な状況下で成功裏に使われてきた. たとえその正当性がしばしば問題にされるにしても, その有用性は疑いもない (影の声: 読み方のせいか, 摂動論への態度が揺れて見える).

平均運動共鳴近くの小惑星運動の最初の解析的研究は Poincaré(1902) が行った. ポアンカレは円平面三体問題の枠組で $2/1$ 尽数関係にある小惑星の運動を調べた. ($2/1$ 尽数関係においては, 小惑星の平均運動は木星の平均運動のほぼ 2 倍である.) ポアンカレは平均化原理を使った. 彼は長周期共鳴効果を分離するために, 離心率の最低次の項のみを残して運動方程式を解析的に平均した. 実質的に彼は $2/1$ 尽数関係近くの運動を摂動関数の唯一の最大項によって近似した. ポアンカレの取扱いは他の共鳴にも容易に一般化できるし, 任意に多くの高次の共鳴項を accomodate できる. 平均したあとで, 円制限三体問題の $2/1$ 尽数関係近くの運動のハミルトン関数は経度の共鳴の組合せ $l - 2l_J + \varpi$ のみの 1 自由度しか持たず, 平均問題は可積分となる. (l と l_J は小惑星と木星の経度であり, ϖ は小惑星の近日点経度である.)

ある程度まで,「直観」は新しい問題を理解するプロセスである. われわれはすでによく理解した問題を使って理解し, またしばしば見られるように, われわれが世界について考察するときの考察法の一部となっているような問題を頭に浮かべる. 軌道共鳴についてのたいていの人の直観は, ポアンカレの問題に基づいている. ポアンカレの平均ハミルトン関数の解または等エネルギー曲線は何度も公表されてきた. カークウッド間隙の起源に関する各種仮説の吟味は, ポアンカレの問題の文脈で行われてきた. しかし, ポアンカレの問題から導かれる直観は小惑星の分布を説明するに至っていない. 満足すべき説明がないために, 間隙の起源を太陽系の起源, 太陽系の形成過程にまで遡らせるのが最近の傾向である. ふたたびこれらはポアンカレ問題の文脈で追求されている. 残念ながら, ポアンカレの可積分モデルは定性的には数百年にわたって共鳴内の小惑星のふるまいを表現するが, 長期進化に関しては不満足なものである. 定性的にも深刻な欠陥を持っている. 新しい「直観」が必要である.

新しいパラダイムは力学系を勉強することによって用意される. Henon–Heiles 系のようなすでに古典となった問題を勉強して得た経験により, 新しい「直観」が注入される. この直観を構成するいくつかの大きな要素は, 以下のとおりである. 自由度が 1 より大きなハミルトン系はある種の初期条件に対してはほとんどいつもカオス的ふるまいを示す. 相空間は一般にカオス領域と正則領域に分けられる. そして, カークウッド間隙の問題にとって一番重要なことに, 共鳴はほぼいつもカオスゾーンを伴う. 間隙の起源に関してこれ以上仮説を考える前に, 平均運動尽数関係近くの運動の定性的性質を理解することが重要であることは明確である. 各尽数関係の近くのカオス領域の広がりはどれほどか. 正則およびカオス軌跡の特徴は何か.

これらの問題に答えようとするとただちに困難に直面する. まず, カオス領域のひろがりを解析的に予言することがかなり難しい. この広がりを決める唯一の信頼すべき方法は数値研究を行うことである. これはただちに次の困難へ導く. 軌道の数値積分はきわめて時間のかかるものである. これは天体力学の問題に関係する複数の時間スケールの間の不一致に基本的には起因する. これ自身はケプラー問題の基本的縮退の反映である. ケプラー問題は自由度は 3 であるが, 唯一の周波数, 軌道周波数しか持たない. 外部摂動がないとき, ケプラー軌道は閉じる. 交点の動きも近点の動きもない. 縮退が解けるのは摂動を考慮したときだけである. すなわち, 交点と近点は, たとえば他の惑星からの外部摂動によってのみ動く. 交点や近点の動きの周波数は摂動天体までの距離に依存し, その大きさは, 軌道周期に摂動天体と中心天体の質量比を乗じた値程度である. 木星と太陽の質量比は約 $1/1047$ である. だから, 惑星の交点と近点は木星周期の千倍あるいは数万倍の周期で動く. 解の定性的性質が見えて来るまでにどのくらい長く積分すべきか? これはたいへんむずかしい見積もりであり, 実際にいくつかの数値研究にとってつまずきの元になる障害であった. 後知恵ではあるが, 運動の定性的性質を決めるためには, 問題の最長の「基本的」周期の数倍だけ数値積分することが必要であることが期待されるようだ. 小惑星問題の場合, この時間期間は 10 万年あたりにある. 10 万年あるいはそれより短い期間の積分を使った数値研究は平均運動尽数関係の近くの相空間構造を真に決定することに成功するはずがない. というのは, これは歳差 1 周期にも満たないからである.

数値研究で積分期間が短い理由ははっきりしている. 運動方程式をきちんと積分するためには, 考えている問題の最短周期も漏らさないように積分刻みを短くする必要がある. これはいまの場合最小の軌道周期である. VAX 計算機で小惑星を 1 万年計算するとおよび 1 時間かかる. だからもっと短い系統的研究でも, きちんとした積分 (full integration) をするにはあまりにも高価であ

る．小惑星の軌跡を長期にわたって積分するために広く行われてきた妥協は, Schubart(1964) の工夫した手続きを使用することである．平均という厳密でない原理にふたたび基づいて, Schubart の手続きは運動方程式を平均して一番高速な項, 軌道周期に関係する項を消してしまうのである．共鳴項と長周期項は残しておく．数値的平均の方が解析的平均より良いようだ．というのは, 摂動関数の解析的記述は, 興味のある領域においてはしばしば得るのが難しく, その正当性にも疑問がある．Schubart の方法を使って, Giffen(1973) は平面楕円問題で 2/1 尽数関係近くの運動を調べた．彼はカオスゾーンを見つけ, これが間隙の形成に関係しているかもしれないと示唆した．その後の Froeschlé and Scholl(1976, 1981) の研究が示すところによると, 確かにカオスゾーンはあるが, それは非常におだやかなカオスであり, カオス的ふるまいは小さな離心率に限られている．主として Schubart プログラムを使ったかれらの系統的研究により, さらにカオス軌道が発見されたが, 数はそれほど多くない．かれらの結論は, カオス的ふるまいは間隙を作るのに重要な因子ではないというものであった．残念なことに, 彼らの積分は典型的には 1 万年であった．

Henon and Heiles はハミルトン系から生成される横断面の重要な特徴として面積保存を指摘した．彼らは, 平面からそれ自身の上への面積保存写像の繰り返しによって, 本質的に同じ構造が高速に研究できると示唆した．実際彼らは任意に選んだ面積保存写像に対して同様のふるまいを見つけた．ただし, 計算スピードは 1000 倍も速い．ハミルトン系から生成された写像は面積保存であるから, 一般に面積保存写像に関して成り立つ性質は, ハミルトン系においても成り立つのは明らかである (影の声: 面積保存写像とハミルトン系は 1 対 1 対応ではない．したがって厳密に言えば, Wisdom のこの陳述は根拠が薄い．しかし, 両者の重なりは大きいだろう)．事実．ハミルトン系で知られていることのほとんどは面積保存写像の研究から来た．ハミルトン系の一般的性質を調べるのに, どうして微分方程式を使って苦労するんだ? 一方, 特定の力学系に興味があるなら, 同値性にはまったく実質的な意味はない．対応する写像の具体系はほとんど得られないのである．横断面を計算するには, やはり交差と交差の間の軌道を積分する必要がある．

Chirikov(1979) はいくつかの問題に関して近似写像の作り方を示した．Chirikov の強調するところによると, 共鳴問題の大きな族は振り子的なハミルトン関数で近似することができる．たとえば, 同期自転近くの自転–軌道結合問題に関しては上で示された．隣り合う共鳴が同じ程度の強さであるなら, 相空間の共鳴領域の内での定性的ふるまいは, 平面から平面の上への「標準写像」

$$I' = I + K \sin\phi$$
$$\phi' = \phi + I',$$

のふるまいに似ることが期待できる, と議論した. ここで K はパラメータである. 標準写像は, まず平均法により非共鳴項を取り除き, 次に新しい非共鳴項を加えて摂動がディラックのデルタ関数の周期列となるようにしたものである. この新しい問題はデルタ関数の間も, そしてそれを横切っても積分でき, 写像のあからさまな代数的表式が得られる. 平均化原理に訴えて, 一番重要なのは近くの共鳴であり, 遠くの共鳴は高速変動を与えるだけなので, その精密な形は不必要であると議論できる. 標準写像のごく一般の応用は, 振り子としてよく近似できる共鳴のセパラトリックス近くの運動である. 自転–軌道結合問題の同期状態の近くの狭いカオスゾーンの幅への応用として上で述べたのはまさにこれである. 別の応用として, 標準写像は自転–軌道問題自身への第一近似とも考えられる. ただし ϕ は角度 $\theta - nt$ であり, I は角運動量である. この近似はそれほどよくない. というのは, 自転–軌道共鳴の強さは軌道離心率のさまざまのべきに依存し, 大きさも一様でないからである. 望むならもっとよい近似も得られるであろうが, 計算時間は自転–軌道問題の場合は問題にならない.

楕円三体問題における尽数関係近くの運動は振り子によってよく近似できるような問題のカテゴリーに入らない. だから標準写像ではだめである. しかし, 同じ原理を使って平均運動尽数関係の近くの運動を近似する写像を構築することができる (Wisdom, 1982, 1983). 高周波の項, 軌道周波数, は平均してまず取り除き, 共鳴項と永年項を残しておく. 新しい高周波項を加えてデルタ関数を形づくる. 新しい方程式はデルタ関数を通って, またその間で積分されて相空間からそれ自身の上への写像が得られる. 新しい写像は 4 次元 (平面楕円三体問題の場合) であり, これを相次いで作用させることにより, 木星の 1 軌道周期分だけ力学状態を進める. 写像近似は通常の数値積分よりかなり速い. Scholl(個人的情報, 1982) の用意した比較によれば, Schubart の平均プログラムよりも数百倍速い. したがって, 写像が微分方程式のふるまいを代表しているとすれば, ずっと長期の, 徹底的な系統的研究ができる. 写像を導くにあたっては, 平均化原理を仮定した. したがって, 平均されていない微分方程式への関係は, ちょうどポアンカレやその他の人々の解析的モデルや Schubart の数値的平均化プログラムを使った数値的研究と同じ関係にある. これらはみな平均化原理を仮定している. 写像は, デルタ関数を導入して摂動が特異になった分, すこし疑わしいだけである. しかし, 標準写像の経験からすると, これはそれほど警戒すべき点ではない.

図 5 は, 平面楕円三体問題で計算した $3/1$ 尽数関係近くのカオス軌跡の軌道離心率の時間変化を示す. この大きさで離心率が動くことは以前から知られていた (Scholl and Froeschlé, 1974) が, 軌道が 10 万年以上にわたって低い離心率の状態にとどまり, 「突然」大きい離心率へと動き始めることはまったく

期待されていなかった. これはポアンカレの問題の「直観」の一部ではなかった. このような軌跡はこの文脈では記述されていない. 自然な結論は, このふるまいは方法から出た人工的なもの, である. しかし, その後の平均化されない完全な微分方程式の数値積分は, このふるまいが実際に起こることを検証した (Wisdom, 1983; Murray and Fox, 1984). 少し気になるのは, 写像のこのような軌跡と微分方程式の軌跡に直接の対応関係がないことである. これは 2 つの事実の帰結である. 写像は単なる近似であり, このような軌跡はカオス的である. 軌跡がカオス的性格を持つと, 初期条件や力学系の特徴のほとんどの小さな違いが, たちまちまったく異なる進化にいたる. これは物理的な応用では重要ではない. なぜなら, 重要なのはカオスゾーンの広がりだけだからである. 写像の軌跡は微分方程式の軌跡と同じ種類のことを行う. 違いは, 単に片方からもう一方の遠い未来のふるまいを予言できないことである.

図 6 はこの軌跡の軌道半長径のふるまいを示す. 1 万年の積分では, 軌道に関してほとんど何もわからないことに注意して欲しい. 3 万年と 5 万年の間に, 軌跡はまだ共鳴の片側に留まっている. 数値探索でこのふるまいが観測されたなら, この軌道はおそらく非共鳴, 準周期的巡回軌道と分類されたであろう (経度の共鳴組合せはこん場合巡回 (circulation) である). 30 万年にわたって運動を見るとまったく違って見える. しかし, これは軌跡を百万年にわたって計算してからようやく運動の真の姿が見えてくる. 平面楕円三体問題の 3/1 共鳴近くのカオス軌跡の離心率に関して図 7 は, 比較的まれな, しかし面白いふるまいを見せ, 一方, 図 8 はもっと典型的なふるまいを見せる. どちらの軌跡も写像で計算した. 図 7 に示された離心率の跳びはどれも同じ大きさであるが, 時間間隔は不規則である. 驚くべき結果は, 図を 2 つの異なる跳びの間で拡大すると離心率の跳びはほぼ同じ間隔で重なるのである. 図 8 に示されたもっと典型的なふるまいは, 不規則な小離心率区間の間にばらまかれるように不規則な大離心率がスパイク状に分布することである.

この時点で, 数値誤差に関していつくか述べておく必要があろう. まず, カオス軌跡を長期数値積分するとほぼ可逆でない. 20 万年を越えてカオス小惑星軌跡を 64 ビット積分すると, 逆戻ししても初期条件を回復できない. これは指数関数的発散というカオス軌道の特徴のおかげである. 近隣軌跡の指数関数的発散のため丸め誤差が指数関数的に成長する. 可逆であるためには, 百万年積分を 200 桁で行う必要がある. 100 桁は行きで失われ, 残りの 100 は帰りで失われる. 離心率の跳び現象は疑いもない. これは非常に早い段階で現われるからである. ただ長期計算がどこまで信用できるかは明らかでない (?). 写像は単に慣用的でないだけではない. これは数値的に自己無矛盾であることが示される点を超えて使われている. このことは正当化できるか? できない. 厳密にはむ

りだ. 正当化は, 力学系の一般研究の幅広い経験から導かれる「直観」から来る. 長期積分の結果が信用できるかどうかは, そこから何を引出したいかによる. 伝統的天体力学は非可逆な軌跡を使うことにおぞけをふるう. 現代の非線形力学者はは云う「なるほど. それで何をしたいんだね. 」たとえば, いままでに何千もの横断面が出版された. けれどもカオスゾーンに数百点が打たれると, 計算に使われた軌跡はもはや数値的に可逆でない. とはいえ, 軌跡が非ハミルトン的にふるまっているという兆候もないし, ほとんどの非線形力学者はこのような軌跡がそのようにふるまうのは正しいことであると信じている. こうして, 計算にあたって細心の注意を払っている限り, 真の軌跡は計算された軌跡のすぐそばの領域を埋めると信じられている. ほかの性質は 数値誤差には無関係である. たとえば, 指数関数的発散率は積分精度には依存せず, 理論的推定が可能な場合, 数値的な値は, やはり細心の注意を払う限りは理論値と一致する (Benettin et al., 1978). 数値計算の正しさへのこの信仰を正当化するために頼りにされる注目すべき定理がある. あらっぽく云うと, 近隣の軌跡の発散率が下から抑えられている系の場合, すべての時間にわたって計算された軌跡を shadow する真の軌跡が存在するということが証明されている. すなわち, 積分期間がどれほど長かろうと, 計算軌跡と基本的に同じ振舞をする真の軌跡がつねに存在する! いま取り扱っている系がこのカテゴリーに入るなら, 非線形力学者は無事に計算できる. 残念ながら, すべての計算が正しい牧歌的世界はいまだ虹の彼方にある. ほとんどのハミルトン系はこのカテゴリーに入らないし, ハミルトン系に関してこのような一般定理が証明されることも望み薄いである. とはいうものの, 上で述べたことがほとんど正しい, あるいは実質的にただしいという信仰が広く行きわたっている. だが, 長期的な相関を決めるには, 長い桁を使う以外に方法はない.

すでに述べたとおり, 不規則的跳びの基本現象は伝統的数値積分でもたくさん検証された. 10 万年程度より短い軌道切片は数値的に無矛盾であり, この期間は離心率の典型的跳びを含むには十分の長さである. もっと長い時間にわたる軌跡の様子を受け入れるために, どんな計算法を使うにせよ, 非線形力学から発展した「直観」そのものにある程度訴える必要がある. 幸いなことに, 結果がいつも正しい力学の神様への熱烈な信者が祈りのために手を組み合わせる, というだけではない (?). むしろ, できる限り広く力学系の文脈の中に現象を持ち込み, ふるまいが特別なものではなく, 他の力学系にも見つかるようなものであることを示すべきである. 楕円問題のおかしな軌跡を「理解する」ひとつのやり方は, それを横断面上の設定に置くことであろう. ここでは相空間の幾何学的な構造を見ることができる. しかし, ちょっとみたところ, 楕円問題から横断面を作れそうにない. 自由度が多すぎる. 楕円問題は 2.5 自由度を

持つ. 直交 x, y 座標で自由度 2 を持ち, 木星のケプラー軌道が時間にあからさまに依存する. 図 2–4 に示した横断面を計算するために還元自転–軌道問題で使ったストロボスコピック横断面は 4 次元になってしまう. このような断面なら, たとえば, 木星が近日点を通過するたびに x と y と速度を与えるだろう. 非線形力学者はまだ 4 次元写像の経験が少ないので, このような軌跡から「直観」を養うのは難しい. しかし, 平均平面楕円系はたったの 2 自由度であって, 横断面も作れる. 唯一の困難は, さまざまな運動を捉えるうまい断面を選ぶことである. 断面のうまい選び方は, 以下で記述する摂動的な取扱いが行われたあとならはっきりする (Wisdom, 1985b). 断面はポアンカレ変数 $y = e\sin(\varpi - \varpi_J)$ を $x = e\cos(\varpi - \varpi_J)$ に対してプロットして得られる. プロットするのは平均経度の共鳴組み合わせ $l - 3l_J$ が特定の値になったときである. この時間は小惑星の離心率 e にも近日点経度 ϖ, ϖ_J にも依存する. この断面上で, 離心率は原点からの動径距離である. この断面は Giffen が使ったものに強く関係する. 彼は, 軌道半長径が最大になるたびにこの変数をプロットした. しかし彼は, 適当な数の点を得るまでに積分時間が掛かりすぎるという理由でこの断面を放棄してしまった. 図 7, 8 に示した軌跡の横断面に似たものをそれぞれ図 9, 10 に示した. これらは写像で計算した. 奇妙な intermittent なふるまいの原因はいまや明らかである. 原点を取り巻くカオスゾーンがあって, 離心率が 0.3 に達する細い分枝を持つ. 軌跡はカオスゾーンをうろつき回る. ときどきこの細い分枝に入り込む. 期待されるとおり, 不安定な周期軌道があって, 出入口であちこちへの道の案内人となっている. 断面をプロットしてしまえば, 何の神秘もない. 軌跡がカオスゾーンをうろつき回るにつれての離心率の不規則な進化は, 他の任意のカオスゾーンにおけるカオス軌跡の不規則なうろつきに似ている. 跳びが似ていることも, 高離心率へ伸びているその部分のカオズゾーンの細さを反映しているだけである. ひとつの跳びから次の跳びまでの時間を予言することが難しいのは, 他のどんな力学系とも同じである (たとえば Channon & Lebowits, 1980 を見よ). ただ, 運動の範囲は断面によって定義される. 図 8 に見えるもっと一般的なふるまいの特徴は図 10 に示される横断面の特徴へと trace される. カオスゾーンが大きいので, 離心率は不規則に変る.

基本的な現象を「理解する」もうひとつのやり方は, 軌跡の特定の解析的あるいは半解析的近似を通して行うことである. Goldreich の示唆にしたがって, 離心率の跳びを半解析的に近似する (Wisdom, 1985b). 離心率の変動が 2 つの時間スケールを持つように見えることがしばしばある. 高速振動が長期の跳びに重ね合わされている (図 5 を見よ). このことから, 跳びは共鳴時間スケールにわたって平均し, 永年時間スケールを残すことで近似できるかもしれないと示唆される. 平均は, 高速共鳴が, 定数がゆっくり変る振り子の運動方程式

にしたがうような変数へと問題を変換して行うことができる. 系が永年時間スケールで進化するにつれて定数は変化する. 振り子の周波数が長周期運動の周波数と十分区別がつく限り, 振り子運動の振幅は, 断熱不変量である振り子の作用を保存しながら変化する. 長期進化を支配する方程式は振り子の秤動の時間スケールにわたって運動方程式を平均して得られる. 振り子の解は楕円関数を使って知られているから, 共鳴時間スケールでの平均は解析的に遂行できる. この手続きから 1 自由度の問題が得られ, それは数値的に積分できる. 近似が破れるのは, 振り子の振幅が, 作用の保存により π 近くまで強制されたときである. というのはそのとき, 振り子の周期は発散し, 共鳴周期は永年時間スケールよりずっと短いとは言えなくなるからである. 振り子の振幅が π に近くに留まる限り, 軌跡はこの方法で近似することはできない. ある時間後に, 軌跡は予測不能なこの領域から出て, 予測可能な領域に行く. そこでは保存される振り子の作用変数は新たな値を取る. 面白いことに, 運動が予測不可能な領域は相対的に小さい. だから, カオス小惑星の不規則運動は, かなり予測可能なのである! 図 10 の断面に対応するガイド軌跡を図 11 に示した. 斜線領域は近似が破れる領域である. 運動のこの図は相空間の大きな部分における軌跡の断片をうまく記述する. この図はまた, カオスゾーンの広がりを決定する新しい方法を示唆する. ガイド軌跡が予測不可能領域に入らなければ, 軌跡は 2 時間スケール法でうまく記述できる. 予測不可能領域に入り込む軌跡だけがカオス的ふるまいをする候補である. もちろん摂動法が破れたからといって軌跡がカオス的であることを意味しない. 結局, 古典摂動論が発散するところで, KAM 摂動理論は準周期解に収束する. しかし, この場合, 予測不可能領域に入ることはカオスの出現と相関するように見える. これらのゾーンに入り込む軌跡で満たされる領域に斜線を引くと, これは計算で得たカオスゾーンによく対応する (図 12. 詳しくは Wisdom, 1985b を見よ).

カオス的小惑星の異常なふるまいはいくつかの理由で信じられる: 基本現象は通常の数値積分で繰り返し再現されてきた. 第二に, 横断面が作れ, それによって異常なふるまいを自由度 2 のハミルトン系のよく調べられた王国に持ち込める. 離心率のふるまいはこれらの横断面のカオスゾーンの形を反映しているにすぎない. 最後に, ふるまいが信じられるのは, 半解析的取扱いで近似することができ, それによってカオスゾーンの形を再現できるからである. 数値的には非可逆である.

現象の正当性はいまや確立された. これは $3/1$ カークウッド間隙の形成問題にふさわしいか? 離心率の大きな増加が間隙の形成に重要なのは, 間隙の位置において, 0.3 より大きな離心率なら火星軌道と交差するからである. カオス軌道はすべて火星軌道交差であることがわかる. 準周期秤動天体に対しても

あたはまる. だから, 3/1 尽数関係近くの小惑星は火星との近接衝突または直接衝突で取り除かれた可能性がある. 火星によって取り除かれて間隙となるまでのカオス小惑星の寿命が問題. あらっぽい見積もり (Wisdom, 1983) によると, 火星だけなら, 太陽系の年齢で 3/1 カークウッド間隙を掃除する. この計算の要素 (?) は火星軌道交差としてどれほど長く小惑星がとどまるかである. これは数値的に求めたカオス軌跡を使っては, 問うには危険な種類の問題である. というのは, 長期相関はうまく求められていないからである. しかし, それを見積もるもうひとつの方法がある. カオスゾーンの外側境界と TRIAD 小惑星および Paloner-Leiden 小惑星の分布を比較することである. よく一致することがわかる (図 13). この図は間隙の形成にカオス軌跡が重要な役割を果たすことを強く証拠づける.

5. 隕石の配達

火星による取り除き寿命は決定的な点ではない. なぜなら, 数値積分が現実的になればなるほどカオス軌跡は高い離心率を獲得することがわかったからである. 新たな効果とは, 3 次元運動を入れたこと, 他の惑星摂動を入れたことにより, 木星軌道が変化したことである. 写像で計算すると, 離心率は 1 の近くまで達する. これはもちろん写像が成り立つ範囲を越えているであろう. 離心率に関し 2 次の項までしか考慮していないのだから. ...

6. 2/1 カークウッド間隙とヒルダ小惑星

2/1 尽数関係の近くの小惑星軌道半長径の分布に間隙がある事実と, 3/2 尽数関係近くの分布には増大がある事実は説明が必要である. ポアンカレ問題から得られる直観で進むと問題はとくに尖鋭である. 両方とも 1 次の共鳴である. つまり, 摂動関数の最大項がともに軌道離心率の 1 乗に比例する. 数値係数の大きさは微妙に違うにしても, 運動方程式における解析形は同一である. ポアンカレ問題の解の定性的性質は 2 つの場合で同じである. ポアンカレ問題から得られる直観は単純にパラドックスへ導く. あるいは太陽系形成論に戻るのか?

2/1 カークウッド間隙の問題と Hilda 小惑星の数量の問題は小惑星分布におけるもうひとつの謎と関係する. 2/1 共鳴を越えると小惑星の数がはっきりと減少することの説明は知られていない. 判りやすい説明は, 木星の摂動が強すぎてこの領域では運動が不安定というものであるが, これはきちんと調べられていない. Lecar & Franklin(1973), Froeschlé & Scholl(1979) の数値研究によると, 2/1 と 3/2 共鳴の間の領域はとくに不安定かつカオス的である. もっと

長く現実的な数値積分をやればこの領域が不安定であることが出るかもしれない. 3/2 共鳴を越えた領域の不安定性は共鳴重合基準 (Wisdom, 1980) で説明可能である. 最大のカークウッド間隙, 2/1 尽数関係付近, は主小惑星帯の外側境界に近い. 2/1 間隙の形成と外側帯の掃除とが関係するのかはっきりしない.

必要な最初の一歩は, やはり共鳴の力学を探検することである. 残念なことに, 2/1 と 3/2 共鳴の力学は 3/1 共鳴よりかなり複雑である. 3/1 が相対的にやさしいのはいくつかの理由がある. 2 次の共鳴として摂動関数の最大項が離心率の 2 乗に比例する. この離心率は木星離心率, 小惑星離心率, あるいは両者の組み合わせでもよい. 次に貢献する項は離心率に関し 4 次である. 摂動関数は軌道傾斜角についても 2 次である. 純粋に組み合わせ的な「事故」により, 3/1 共鳴は力学を複雑にする他の共鳴から遠い. 3/1 共鳴の相対的に単純な解析性のために, 写像が成功したのであり, 摂動論も成功したのである. ちょっと見ると, 1 次の共鳴はもっと簡単である. 結局, 2/1 共鳴近くの運動のポアンカレの表現は摂動関数のひとつの項しか含まない. ところが, 現実ははるかに複雑である. ポアンカレ問題は可積分であった. だが, Giffen の仕事によりすでに知られているとおり, 平面楕円問題において 2/1 尽数関係近くのふるまいはカオス的である. 2/1 力学の本質は離心率の 1 乗に比例する摂動関数の両方の項を含むような少しだけ複雑な問題にすれば理解できるはずだという望みが持たれてきた. だが, この問題も可積分である (Sessin & Ferraz-Mello, 1984; Wisdom, 1986; Henrard et al., 1986). 観測されるカオス的ふるまいを含むような共鳴の表現を達成するには高次の項が必要である.

カオス的ふるまいは離心率の 2 次の項を入れると現われはじめる. Murray(1986) は 2/1 および 3/2 共鳴についての写像を導いた. この写像は, 3/1 写像の導き方を参考にして 2 次の項を含む. この写像を使っての 2/1 および 3/2 共鳴の系統的研究により, 両方の共鳴にある大きなカオスゾーンが明らかにされた. しかし, 2/1 共鳴の 2 次写像から与えられる離心率の跳びは 0.1 以上の初期離心率に対して大きすぎる ($e > 0.8$). また 3/2 共鳴の大きなカオスゾーンは, Hilda 群がそこにいるという物理的な根拠により疑わしい. 実際, 離心率の大きな増加および 3/2 カオスゾーンは摂動関数を 2 次で打ち切ったことによる人工的な現象であった. この人工物は写像法そのものから来るものではないことを強調したい. むしろ, これらは低次の摂動関数によっては問題がよく表現できなかったことによる. Henrard et al.(1987) は非常に高次の項を含めると運動はよく表現されることを示した. だから解析的記述は極めて難しく, 写像は 3/1 を導いたときと同じやり方では高次の摂動関数に対しては写像が作れない.

唯一別のやり方は数値積分である. 数値研究はいままでに Froeschlé & Scholl(1976, 1981) が行った. だが, これらの研究は他の間隙の場合と同様,

同じ制限に苦しんだ. 第一に, 積分は短か過ぎる. たったの 12000 年である. Froeschlé & Scholl の積分はカオス的ふるまいを見つけなかった. 短時間の積分で検出できるカオスゾーンは小さい. 新しいもっと長期の数値積分が望まれる.

主尽数関係近くの相空間の構造は Digital Orrery で計算中である. このサーベイの予備的結果はまことに興味深い. 図 15 は 2/1 尽数関係近くのカオスゾーンを示す. この図で, + は初期条件 (離心率 e と木星の軌道半長径を基準にした軌道半長径) を表す. この記号の軌道は平面楕円問題でカオス的である. 軌跡はすべて木星の平均経度と同じ初期平均経度を持ち, 初期近点経度は木星の近点経度に等しい. 積分は 10 万年. 初期条件の網目は図に見える. 研究はまだ完全ではないが, カオス領域の概形は見えている. この図は 2/1 尽数関係の近くに大きなカオスゾーンがあることを指し示す. 離心率が 0.1 より小さいと, カオスゾーンは 2 次写像で見つかったカオスゾーンとよく一致する. 対応する 3/2 尽数関係近くの領域は図 16 に示した. 3/2 共鳴の名目的位置は $a_J = 0.76$ である. この領域はカオス的ふるまいがないことを注意しておく. こうして, 2/1 および 3/2 尽数関係近くの相空間の構造には 質的な 違いがあり, それは小惑星の分布の違いに対応する. 2/1 共鳴には大きなカオスゾーンがあり, この共鳴の場所にはカークウッド間隙がある. Hilda 群は 3/2 共鳴の近くにあり, この領域はカオス的ふるまいがない.

上で指摘したように, 一致は定性的にはよいが, 観測分布との定量的比較によると, 一致は完全ではない. 図 17 は 2/1 共鳴付近の番号付き小惑星の分布図である. ただし, 経度は数値サーベイの初期条件経度と一致するように実際のデータを進化させた. (こうしないと, 観測分布との比較はシャープにはできない. いままでのところ, 補正は 2 次写像に対して行われた. いくつかの例によると, 補正は精密である.) 図 15 のカオスゾーンとの比較は間隙の高軌道半長径側では一致が完全であることをします. しかし, 反対側では一致はよくない. 低離心率 ($e \approx 0.05$) の領域があって, そこには小惑星がないのに, 平面楕円問題においてカオス性を示さない. この不一致は形成時の機構のせいか? この結論に飛びつくにはまだ早い.

不一致を説明するいくつかの道があり得る. 平面楕円問題の枠内でサーベイを行った. 3 次元楕円問題で行った, 狭いサーベイでも結論は変らない. 他の惑星の摂動で木星軌道が変動することが重要かもしれない. これが不一致の源であるかどうかを決めるために, Digital Orrery で 3 つの積分を行った. テスト粒子を不一致と思われる領域に置く. 4 つの巨大惑星を考慮する. 初期軌道半長径, 離心率は, $(0.624, 0.075), (0.626, 0.075), (0.628, 0.005)$ とする. 最初の 2 つは規則的軌跡を持つが, 三番目はカオス的であった. テスト粒子のひとつの軌跡がカオス的であったことから, 不一致はサーベイに使った平面楕円近似が不

適当であることを反映しているに過ぎないようだ. この先の研究が望まれる.

図を完成させるために, Hilda 群の相関のない分布を図 18 に示した. Hilda 群のもとでの相空間は, 期待されたとおり, 準周期的である. ただ, Hilda 群は準周期領域の広がりによって要請されるより, やや固まって存在するように見えることを注意しておく. おそらく, これも平面楕円近似の悪さを反映しているのであろう. これも先の研究がまたれる.

カオス的ふるまいを小惑星分布の間隙と結びつけることそれ自身は間隙の形成を説明しない. 3/1 共鳴の場合, 本質的な材料は, カオス軌跡, また共鳴準周期的軌跡が火星や地球軌道と交差することであった. これらの惑星が掃き清める作用をして 3/1 間隙ができる. 同様の機構が火星や地球からかなり遠い間隙の形成を説明するとは考えにくい. 2/1 共鳴の近くには大きなカオスゾーンがある. これ h が定性的には 2/1 カークウッド間隙に対応する. カオス軌道に乗って移動してしまう不運な小惑星はどうなるのか?(??) いつもどおり, 第一ステップは運動の性質を決めることである. Froeschlé & Scholl(1976, 1981) はこの問題に答えようとつとめた. 平面楕円近似で 2/1 尽数関係近くの平均した, また平均しない Giffen のカオス軌跡を 10 万年積分した. Giffen の軌跡が動き回るカオスゾーンは離心率がほぼ 0.15 未満に制限されることがわかった. これはカタストロフを起こすような離心率ではない. これは小惑星全体の平均的離心率である. カオスゾーンと間隙を結びつけるには, この問題を再評価する必要がある. 明らかに, 平面楕円問題は力学を表現するのに十分正確でない. Digital Orrery はこの問題とかかわるように導入された. 5 個のテスト粒子を 2/1 カオスゾーン内に初期条件に取り 5 百万年数値積分した. テスト粒子は 3 次元運動, 4 大惑星からの摂動を受ける. 初期離心率は 0.1 または 0.05. 各テスト粒子が到達した最大の離心率は 0.38, 0.185, 0.23, 0.48, 0.53 である. 面白いことに, 二番目の軌跡は 4 百万年にわたって不一致領域にとどまった. 最後の 2 つの軌跡は図 19 にあるように驚くべきふるまいを示した. このこんがらがった図は 5 番目のテスト粒子の離心率を軌道傾斜角に対してプロットしたものである. はじめは軌道傾斜角は低く, 離心率も 0.25 以下に限られている. これは Froeschlé & Scholl が平面楕円問題で見つけたとおりである. 積分時間にわたって軌跡は次第に高離心率へと向かう道を歩むように見える. 軌道傾斜角は最高で 0.44 ラジアンのあたりを通りながら (?) こうして運動の 3 次元性が決定的である. (Froeschlé & Scholl(1983) は 3 次元問題における大離心率を見つけた. ただし, 彼らは計算を物理的にありえないほど高軌道傾斜角で始めた.) 離心率のピークでは, 5 番目の軌跡は火星軌道交差になりかける. これはカオス軌跡上の小惑星を取り除く機構として可能である. だが, わたしはまだ納得していない.

Orrery 上での数値積分はいままでのところ 12 階の Stormer 予測子を積分子として使ってきた. この積分子は低離心率で安定な性質を持つ. 惑星軌道を計算するならこれでいいだろう. 高離心率では, Stormer 法は安定性がよくない. 離心率が上がると, 限界刻み幅はどんどん短くなる. 上で記述した粒子の積分は 1 日の刻みで行った. 離心率が 0.6 未満ならそれで安定であった. 図 19 の軌跡は計算そのものの信頼性の境界線上にある. 現象を検証するにはもっと仕事が必要である.

7. 外惑星と冥王星

太陽系の安定性を決定することは力学的天文学の昔からの問題のひとつである. 惑星質量, 離心率, 軌道傾斜角が十分小さい場合の太陽系が大きな測度で安定であるというアーノルドの証明はこの問題への厳密な答えに向かっての巨大な一歩ではあったが, 現実の太陽系の安定性の問題はいまだ未解決である. たしかに, 太陽系の長大な年齢からすると, 高度の安定性が要請されるが, 弱い不安定性も存在する. 小惑星の運動に関する経験からすると, 弱い不安定性が突然の劇的軌道変化となって姿を表すこともある. 太陽系の安定性は始めからありき, と考えることはできない. 他の力学系と同様, 太陽系の安定性は数値実験でいちばんよく吟味できる.

Digital Orrery の最初の応用は外惑星の長期進化であった. 長年の間, Cohen et al.(1973) の百万年積分が太陽系の最長積分タイトルを保持していた. Orrery を使って, 積分期間は 2 億 1 千万年まで拡張された (Applegate et al., 1986). (影の声: 何故 Kinoshita & Nakai, 1984 の 5 百万年計算を無視するの? Review を書くときの自然な悪意!) これらの主結果をもまとめよう.

外惑星の運動の解析近似として最良のものがひどく必要とされることが積分結果から示された. Bretagnon(1974) はラクランジュ解への 200 以上の補正をリストした. その他にも木星型惑星の運動への貢献がある. それはこれらの補正のうちの 7 つを除いてもっと大きい. 高次の項は Bretagnon の考慮した項よりもっと重要である. 近似解析理論を構築することはコンピュータ代数を使ってもむずかしい仕事である. Duriez(1979), Bretagnon(1982) のもっと最近の仕事は解析理論を改良した. Laskar(1986, および最近の仕事) の新しい半解析理論は数値積分とよく一致し, 独立な検証となっている. 木星型惑星の運動は驚くほど複雑である. 木星のパワースペクトルのサンプルを図 20 に示した. ここにはこの世界の真のハーモニクスがある. 数値誤差は Applegate et al. (1986) が議論している.

冥王星の運動は極めて複雑である. 冥王星の軌道は独特である. 離心率は大きく ($e \approx 0.25$), 軌道傾斜角も大きい ($i \approx 16^\circ$). 冥王星と海王星の軌道は互い

に交差する. これは 3/2 平均運動尽数関係にともなう共鳴引数の秤動によってのみ許される条件である. この共鳴により, 冥王星と海王星が合のときには冥王星は遠日点におり, 近接衝突を避けている. このような共鳴の力学は良く理解されている. これはポアンカレ問題の応用である. 冥王星軌道の本当の複雑さは, 共鳴引数の秤動周期, 約 19857 年, よりもはるかに長い期間にわたって軌道を調べるときに立ち現われる. 次のレベルの複雑さは, 冥王星の近日点引数が $\pi/2$ のまわりを 3 百 80 万年の周期で秤動することである. これは Williams & Benson(1971) によってされた. 彼らは冥王星の進化を Schubart の使ったのと似た平均スキームで調べた. Orrery の積分はこの秤動を確認し, 一方その描像が不完全であることを見つけた. 近日点引数の秤動振幅は 3 千 4 百万年の周期で変調されている. この新しい周期の出現は驚くべきことではない. 共鳴時間スケールで平均したあと, 冥王星の長期進化は 2 自由度のハミルトン関数に支配される. 長周期問題の準周期軌跡はこうして 2 つの独立な周波数を持つことが期待される. 変調がなければ, 単一の周波数だけが存在するだろう. 真に驚くべき結果は, 冥王星の運動にもっと長い周期が存在することである. 事実, 冥王星の離心率への 2 番目に大きな貢献周波数は 1 億 3 千 7 百万年に対応する. この小さな周波数は, 冥王星の昇交点経度の巡回周波数と木星型惑星の基本周波数の間の近似的尽数関係から出る. これは驚くべき結果であるが, 冥王星の運動にはもっと驚くべきことがある. 図 21 は冥王星の軌道傾斜角の 2 億 1 千 4 百万年にわたる変化を示す. もっと長い周期が存在する. もしかすると永年傾向かも. 力学系において, カオス的ふるまいがもっとも目立つゾーンは共鳴に結びついている. もちろん共鳴は不規則運動をもたらすとは限らないが. 冥王星の運動は共鳴に関し怪しいほど豊富である. 新しい共鳴は積分期間が延長されるたびに発見されてきた. アーノルド拡散とよばれる多次元不安定性を生じさせるのに必要なのはたったの 3 つの共鳴であることを指摘しておく (Chirikov, 1979 を見よ). しかし, 冥王星に関するリャプノフ特性指数の計算はいまのところカオス的ふるまいの客観的証拠を出していない. 冥王星の運動の真の性質を見るためにはもっと長い積分が必要である.

8. まとめと結論

• 非線形力学の助けなしには太陽系の力学はわからない. ハミルトン系ではカオスは普遍的. 太陽系は力学系のひとつ. だから太陽系のカオスはふしぎでもなんでもない (影の声: この認識のために太陽系のカオスを研究し損ねた. 当り前と思うと研究しない?)

• ハイペリオンの不規則自転は非球状性, 大きな軌道離心率, 自転の潮汐進化.

- 軌道のカオス的ふるまい. 3/1 カークウッド間隙
- 2/1 間隙と 3/2hilda 群
- 太陽系の安定性. 冥王星の運動. 冥王星と海王星. 超長周期現象.

On predicting long-term orbital instability: a relation between the lyapunov time and sudden orbital transitions

M. Lecar, F. Franklin, and M. Murrison, AJ **104**, 1230-1236(1992)

要約

惑星系の安定性に関する 2 種類のタイムスケールの間に log-log で直線関係を見つけた仕事である。タイムスケールのひとつはリャプノフ時間 T_L であり、もうひとつは大惑星の軌道と交差するまでの時間 T_C である。この論文では 3 種類の小天体の安定性を数値積分で調べた。(1) 小惑星、(2) 木星・土星間の仮想的小惑星、(3) 惑星のまわりの衛星 (制限三体問題)。得られた関係式は $T_C \propto T_L^b$, $b \sim 1.8$ である。

第一の例: 木星より内側の小惑星, 平面問題. 木星に近接衝突して, 木星軌道と交差.

第二の例: 木星・土星間の仮想的小惑星, 平面問題. どちらの軌道とも交差する.

第二の例: 連星の小さい方の星をまわる小天体, 1000 個の軌道. 3 次元
結果の図あり.
リャプノフ指数の計算法は?

Superexponential stability of KAM tori

A. Morbidelli and A. Giorgilli , *Journ. Stat. Phys.* **78**, 1607-1617(1995)

KAM 曲線の近傍ではトーラスからの距離を新しい摂動パラメータとして取るのが自然である. ρ をその距離とする.

主張: アーノルド拡散のスピードは

$$\exp\left[\exp\left(-\frac{1}{\rho}\right)\right]$$

主たる不変 KAM 曲線 (head torus) はその周辺の力学を支配する. トーラスの近傍はたくさんのほかのトーラスを含む.

不変トーラスの集合の補集合の相対測度は $\exp(-1/\rho)$

不変トーラスを含むような領域では, 系は実質的に可積分な系としてふるまう. たとえ自由度 3 以上であっても.

補遺 **I.** 大規模カオスと惑星間隔 by Laskar

内惑星の間隔は, 軌道のカオス性から来た可能性がある.
角運動量 deficit(AMD) – 非円運動, 非平面運動であること

序.

惑星間隔はケプラー (1595) 以来の謎.

Arnold diffusion: overview through dynamical astronomy

Pablo M. Cincotta [2] , *New Astronomy Reviews* **46**, 13-39(2002)

要約

本論文の目的は安定性の陰にひそむ基本的発想を概観することである. その際, カオスにいたる機構としてよく知られる共鳴重合とアーノルド拡散の間の違いを強調する. ここでは力学的天文学に関連する多次元自励ハミルトン系に議論を制限する. アーノルド拡散は標準的な数学的言語で概観する. 発見的論拠, グラフ, 幾何学的考察および数値計算を駆使する. この方向での先駆者は Chirikov(PhR 52(1979)263) の仕事をたどり, アーノルド拡散を理解するために注意を加えたり, 例や議論を繰り出すつもりである. この不安定性と格闘するにあたって一番の困難は問題の解析的および数値的な側面にあることをまとめる. アーノルド拡散が, たとえば楕円銀河の力学的進化に少しでも関係するのかという議論も行う.

目次

1. 序

2. 設定, 定義, 記法

3. カオスへの遷移

4. ストカスティック層

5. アーノルド拡散率

6. いくつかの数値実験

7. 議論

[2] /home/tanikawa/Honyak/yak/ds/kam/cinc

1. 序

太陽系の惑星の運動, 太陽や木星の影響の下での小惑星の運動, 球状星団や銀河内の星の運動, これらは力学的天文学の古典的問題例である. それぞれは固有のむずかしさを持っている. 孤立した楕円銀河を考えて見よう. この天体は質量分布する約 10^{11} 個の星とガスを含む. 加えて, 楕円銀河の多くは自転するという観測的証拠もある. したがって, テスト粒子の力学方程式 (回転系における) は, これらの星との相互作用や, ガスの力学的応答を考慮すべきである. 結合微分方程式は簡単には解けない. 問題を簡単にするため, 1 段 1 段よさそうな仮定を導入していく. 銀河全体の質量へのガスの貢献は小さいから, 自転はむしろゆっくりであって, ガスも自転も無視しよう. こうして, 銀河は非自転力学系となる. しかし 10^{11} 個の星の生成する重力場は場所の複雑な関数であり得る. このような場の作用の下でのひとつの星の運動を解く努力は, たとえば N 体プログラムによって数値的に解くべきであろう. 理論的な手法で何らかの進展を得るには, もっと仮定が必要であろう. まず, 位置の知られた関数として滑らかな平均重力場を仮定し, その中での星の問題に制限する. 銀河の場合, これは平均場を知られた関数とすることはよい近似である. しかし, 楕円銀河は 3 軸不等ポテンシャルでよく近似され, 星の軌道は一般に未知である. したがって, 新たな仮定を加える必要がある. こちらの線に沿うなら, 問題をさらに近可積分系へと還元する. 「近可積分」とは, あらっぽく言えば, 現実のハミルトン関数が, 軌道を知られた関数で書けるハミルトン関数に非常に近いことである. このような簡単化にも拘らず, 問題はまだ解かれていない. たとえば運動の安定性はとても完全に解かれたとは言い難い. 過去 40 年の間, 数学者 (そして少数の物理学者) は, いわゆる「安定性問題」に取り組むための数学的道具立てを発展させるために努力してきた. ほかの研究者はこの数学的道具立てを使って, 銀河の場合, 系の横断時間より長く, ハッブル時間より短い, 物理的に興味のある時間尺度における運動の安定性について情報を得るために異なるシナリオを吟味してきた.

安定性問題は現在ハミルトン力学の研究テーマとして最重要なもののひとつであり, 通常 (物理や天文の社会では), 「カオス的あるいはストカスティックな運動」あるいは単に「カオス」と参照されている. 1980 年代の初期以来, カオスに関係する込み入った概念を述べる論文が天体物理学の文献として増加している. 理論の本体はほとんど数学者の領分に入るにも拘らず, である. この意味では, カオスは太陽系の力学へは少なからぬ衝撃を与えたことは特筆してよい. ようやく最近になって楕円銀河の構造, 進化や力学にカオス運動が本質的役割をはたすことが認識されはじめた (Udry and Pfenniger, 1988; Merritt and Friedman, 1996; Merritt and valluri, 1996; Valluri and Merritt,

1998; Merritt, 1999). しかしながら, 棒渦状銀河のような高速回転系に対しては, カオスの大々的存在は何年も前から観察されていたことを注意しておく (Martinet, 1973; Hasan and Norman, 1990 およびその中の参考文献). ただ, カオスは回転系の場合のみ取り入れるべきであるという考えが広く流布していたのである.

安定性問題への新規加入者は, 参考文献のほとんどすべてが数学に属することを知るであろう. したがって, たとえば関数解析, 微分幾何学, あるいはトポロジーに関する技術的な知識 (これらは天体物理では一般的ではない) が主題を習うのに要請される. いくつかの物理の上級教科書が力学系の安定性に関連する問題を広く扱っている. たとえば, Rasband(1983, 1990), Gutswiller(1990), Jackson(1992), Lichtenberg and Lieberman(1992)(LL92), Reichl(1992). このリストはもちろん完全ではない. それぞれ少しずつ違う手法の教科書の例を挙げただけである. しかし, われわれが興味を持つ対象, 自由度 3 以上の自励ハミルトン系に関しては, 詳しい議論はどの教科書でも不足している. これらの教科書では, その主題を飛ばし, Chirikov(1979)(CH79) を参照している. Chirikov は彼の先駆的な仕事において, 発見的な手法で, 「古典的」あるいは「古い」数学的言語を使って, 多自由度の場合を完璧に概観している. その最後の節において, N 次元 (影の声: 自由度でしょ) 自励ハミルトン系 ($N > 2$) の独特の性質, いわゆるアーノルド拡散について議論している.

アーノルド拡散 (Arnold, 1964, 本論文の 7 節, 冒頭の remark を見よ) を大局的不安定性と解釈すると, 現実の物理的過程というよりは, 理論的予測としか見えない. これにはいくつかの理由がある. 解析分野においては, 鍵となるのはアーノルド拡散を論争の多いテーマにすべき未解決な数学的詳細がいくつもある. Lochak(1999) の論文は純粋に数学的な手法を用いたが, 数学的素養を強く持たない読者でもこの問題が直面する技術的な困難を実感できる. 不足気味の数値的証拠によれば, アーノルド拡散はある種の (人工的な) 力学系では働く. にもかかわらず, 天体物理や太陽系力学の文献にはこの不安定性への言及がたくさんある. ところが, 多くの場合, アーノルド拡散とは何かということとそれがどのように働くかの間には違いがある. なかんづく, Merritt and Valluri(1996) の示唆によると, この機構 (あるいは彼らがアーノルド拡散とよぶもの) は, 楕円銀河の進化の最終段階のゆっくりとした混合 (mixing) の原因である. 一方, Udry and Pfenniger(1988) の議論によると, 彼らの 3 次元モデルにおける異なる (大きな) ストカスティック領域の共存は, アーノルド拡散が働くとしたときに期待されるふるまいに矛盾する.

30 年以上も前のアーノルド拡散に関する最初の報告以来, 理解可能な数学的言語で書かれたこの不安定性に関する文献は少ない. Chirikov の論文は例外

的なよい論文である. ただ, Chirikov の概観論文を完全に理解するのは簡単でないし, 多自由度振動子系のアーノルド拡散の節はとくにむずかしい. そこで, 天体物理の標準言語でこの主題のトピックスのいくつかを取り上げる.

本論文では新しい概念はひとつも導入しない. やることは, いくつかの注意を述べ, 有用な議論を行い, アーノルド拡散に関する Chirikov の見解を明らかにするのに必要な例や数値シミュレーションを紹介する. 上記参考図書や Chirikov 論文で議論されている疑問点を詳しく考察するつもりはない. 厳密な証明に関しては, 読者はそれらに記載されている数学文献を参照されたい.

以下では, 安定性問題への Chirikov 的手法を議論する. まず, 「非共鳴」および「共鳴」摂動論および作用, 周波数空間の幾何学に関する主たる結果を概観する. 次に, 正則運動からストカスティック運動への移行について手短に議論する. その後, 主テーマ, アーノルド拡散にやってくる. そこでは, Chirikov が示した, グラフ的かつ幾何学的考察, 数値シミュレーション, 簡単モデルおよび天体物理学論文 (程度) での厳密な数学的定式化を用いて, アーノルド拡散に挑戦する. 最後に, 恒星系の進化にアーノルド拡散が何らかの役割を果たす可能性について論じる.

2. 設定, 定義, 記法

取り組むべき基本問題は

$$H(\mathbf{I},\theta) = H_0(\mathbf{I}) + \epsilon V(\mathbf{I},\theta) \tag{1}$$

なる形の N 次元 (自由度) 自励ハミルトン関数に支配されると仮定する. ここで

$$\epsilon V(\mathbf{I},\theta) = \epsilon \sum_m V_m(\mathbf{I}) \cos(\mathbf{m}\cdot\theta) \tag{2}$$

ただし, $(\mathbf{I},\theta)$ は, 無摂動ハミルトン関数 H_0 の通常の N 次元作用・角変数であり, $\mathbf{m}$ は N 次元整数ベクトル, V_m は実関数, そして「摂動パラメータ」ϵ は実数である. 運動方程式は $\dot\theta = \partial H/\partial \mathbf{I}; \dot{\mathbf{I}} = -\partial H/\partial\theta$ である. ハミルトン関数 (1)–(2) は天文学系を記述するためにしばしば利用される. H_0 はある種のおもちゃ模型であり, 摂動 ϵV は現実的なモデルを得るために付け加える. だからたとえば, ある種の楕円銀河は, 中心にカスプを持ったり持たなかったりする滑らかな球ポテンシャルの和 (中心集中部分, ブラックホールをシミュレート) プラス多重極展開として表現される. H_0 は球状モデルを含んでもいいし, カスプを含んでもいい. 一方, ϵV は多重極展開のいくつかの項を考慮する (7 節も参照). 無摂動運動の場合の作用・角座標への変換は行われているとする. これは任意のハミルトン関数に対してこれはいつも可能とはかぎらない. 事実, 作用・角座標は銀河力学においては適切な変数ではないようだ. というのは, 任

意に恒星系が与えられたとき, $H_0(\mathbf{I})$ のような大局的な無摂動ハミルトン関数が存在するかどうか明らかでないからである. しかし, 今回の議論では, 存在するとする.

$\epsilon = 0$ なら $H = H_0(\mathbf{I})$ であり, 運動は任意の初期条件に対して絶対的に安定である. なぜなら, N 個の積分 I_i の完全な組が得られ (H_0 は θ に関しては巡回的), ハミルトン関数は完全可積分だからである. 安定 とは, すべての時間にわたって積分が, 初期条件のごく近傍に閉じ込められているときである ($\epsilon = 0$ なら $\mathbf{I}$ は正確に積分であり, 時間変化しない). 位相ベクトルは時間に線形に進化する. 周波数ベクトルは $\omega(\mathbf{I}) = \partial H_0/\partial \mathbf{I}$ であり, $\omega(\mathbf{I})$ が 1 対 1 関数であるようにするため, $\det(\partial\omega_i/\partial I_j) \neq 0$ を仮定する.

一般に, 運動は準周期的であり, N 次元トーラスを稠密に埋める. N トーラス (N 個の円周の直積) は, 積分 I_i あるいは周波数 ω_i の N 個の値を固定する初期条件によって完全に指定される. 換言すれば, トーラスを定義する座標は作用または周波数である. 周波数の 共鳴条件 とは, 方程式 $\mathbf{m} \cdot \omega(\mathbf{I}) = \mathbf{m} \cdot \dot{\theta} = 0$ で与えられる. ここで $\mathbf{m}$ は整数ベクトルであって, 力学変数の共鳴値の組を決める. 実のところ, ひとつの $\mathbf{m}$ に対して共鳴条件を満たすベクトル $\mathbf{I}$ あるいは ω は無数にある. $N-1$ 個の作用 (または周波数) の成分を決めると, 残りのひとつは共鳴条件から決まる. このようにして, ひとつの共鳴値 $\mathbf{I}^{\mathrm{r}}$ あるいは ω^{r} を選ぶ. 作用 (または周波数) のこれらの特殊の値のどれひとつに対しても, N トーラス上で軌道は稠密ではない. 一般に $N-1$ トーラスを稠密に埋める. 2D 系という特別な場合には, 共鳴条件は配位空間で何回か回転したのちに軌道が閉じることを意味する: つまり周期軌道となる.

たとえば, 球状系においては空間運動をいつでも平面に還元することが可能で, エネルギーと角運動量を固定することにより, 与えられた軌道が特定の 2 トーラス内を動くことを保証することができる. 残りの初期条件はトーラス上の軌道の位置を指定する. 共鳴条件を与えると, 周期軌道に対して 共鳴トーラス(あるいはエネルギーと角運動量の共鳴値) を得る. これらは本質的には可積分系の主結果である (完全な記述を知りたいなら, たとえば, Rasband, 1983; LL92; Reichl, 1992; 形式的な手法好みの読者なら Giorgilli, 1990 がおすすめ).

可積分系に関する上記のうまい記述は楕円銀河のような現実系にはふつうあてはまらない. もっと現実的なシナリオは, $\epsilon \neq 0$ としたハミルトン関数 (1)–(2) である. 摂動 (2) が存在するために一般に, ハミルトン関数の可積分性が破れ (V の位相依存性のため), 無摂動 I_i が変化する. 作用に大きな変化が生じたとき, あるいは Chirikov の言葉でいえば, 「gross」不安定性が生じたとき, 運動の安定性が破れたと言える.

ハミルトン関数 (1)–(2) における星の運動を記述するために, 近似解を得るための摂動技術を適用する. どんな摂動論小さな摂動パラメータを要請するから, 我々も $\epsilon \ll 1$ と仮定する. すなわち, 近可積分系を考える. いわゆる 漸近級数 による摂動手法とは, あらっぽく言えば, 無摂動作用の変動を摂動パラメータのべき級数で計算することである. 基本的には, 各段階において, 摂動項 ϵV が階数 $\epsilon^k,\ k = 1, \ldots, k$ から独立であって, 「実際の」摂動 (すなわち位相に依存する摂動部分) が階数 $(\mathrm{order})\epsilon^{(k+1)}$ になるように選ばれた相続く正準変換 $(\mathbf{I}, \omega) \times (\mathbf{I}_1, \omega_1) \times \cdots (\mathbf{I}_n, \omega_n)$ によって摂動運動の解を求める. したがって, 最初のステップにおいて, 摂動の階数 ϵ の大きさの項を消すための正準変換を探す. 新しい変数 $\mathbf{I}_1, \theta_1$ において, ハミルトン関数 (1)–(2) は

$$H'(\mathbf{I}_1, \theta_1) = H'_0(\mathbf{I}_1) + \epsilon f(\mathbf{I}_1) + \epsilon^2 V'(\mathbf{I}_1, \theta_1)$$

なる形を取る. ここで, f は正準変換と V の形に依存する関数であり, $\mathbf{I}_1, \theta_1$ は無摂動値 $\mathbf{I}, \theta$ への階数 ϵ 程度の補正であり, V' は構成法より, 新しい位相で平均するとゼロになる. これはとくに天体力学において標準的手続きである (漸近級数技術に関してもっと詳しいことは, CH79 や LL92 を参照せよ).

よく知られているように, ...

3. カオスへの遷移

4. ストカスティック層

5. アーノルド拡散率

6. いくつかの数値実験

7. 議論

On the stability of the solar system

Paul E. Nacozy, *Astronomical Journal* **81**, 787-791(1976)

序

太陽系の安定性に関する文献では, 2 つの側面を考える:

(1) 大惑星の軌道半長径に永年的な傾向はあるか;

(2) 軌道半長径に永年項がないとして, 惑星のほかのケプラー要素の長期的ふるまいはどうか?

軌道半長径の著汽笛不変性に関しては, Tisserand が 1876 年に証明した Poisson の定理が多くの点において古典的かつ基本的である.

定理 (Poisson). (惑星質量のべきで展開した軌道半長径の級数展開表現に基づいて,) 摂動質量に関して 1 次および 2 次 (order) に関しては級数の中に永年項は存在しない.

Haretu は 1885 年に 3 次に永年項を見つけた.

Poisson の定理と Haretu の発見の意義は明らかになっておらず, その説明もさまざまである. ある人によると, Haretu の結果は重要であり, 太陽系が不安定であること, いずれは分裂する方向に向かっていると考える. 別の人は, その永年項は, 高次の他の永年項のひとつであって, 全部を合わせると, 周期関数になる, と考える. また別の人は, 質量のべきで展開した無限級数は, Poincare(1892) が示したように, 一様収束でないから, 厳密に解を表すものではないと考える.

最近 P.J.Message(1976) は新しい解析的手法を用いて, 任意の次数まで軌道半長径に永年項がないことを示した. この成果はすばらしいことであり, いくつかの混乱に終止符を打った. 明らかに, Haretu や他の人々がみつけた永年項は周期解の近似に過ぎず, 短期間にしか適用できない. その項が現われたのは, おそらく解くのに使った方法によるのである. Message の重要な仕事では, 級数解の収束性を問題にせず, 級数内に永年項のあるやなしやのみを問題にした.

新しい数値解法を使った 最近の解析によると, 非常に長い期間にわたって惑星の軌道半長径の現実解には永年的な傾向は見られないことを指摘しておく. この点は本論文の主眼であり, あとで詳しく論じる.

惑星の他の軌道要素の長期的ふるまいの解析解に関しては, Brouwer & van Woerkom の仕事が古典的かつ基本的である (1950). かれらの示したところによると, 軌道半長径が有界で永年的傾向を持たないと仮定すると, すべての大惑星の運動は有界であり, 純粋に振動的な関数によって表現される. かれらの仕事は, 1872 年に Stockwell が, そして 1895 年に Harzer が適用した Lagrange-Laplace 法の精密化および拡張である. Brouwer & van Woerkom の解を Cohen,

Hubbard, & Oesterwinder が外惑星の百万年の数値積分によって確認したすばらしい結果がある. Brouwer–van Woerkom の解のさらなる精密化が Anolik, Krasinsky, and Pius(1969) によって行われた.

百万年よりはるかに長い期間にわたる Brouwer–van Woerkom の解の正当性に関しては, Clemence(1961) が言うには, 解は「... 少なくとも数百万年間は物理的になんらかの意味をもつだろう. ただ 1 億年を越えたら正当性を失うかもしれない」. この陳述は百万年の数値解が得られる前のものなので, やや保守的に過ぎるかもしれない.

1. 最近の解析的および数値的研究

Kolmogoroff, Arnol'd, および Moser の仕事 (Moser, 1973, 1974 を見よ) は, 太陽系の安定性を決定する問題をよりよく理解する手助けになる解析的な結果を用意した.

上で述べたとおり, Poincare は惑星運動の級数表現が一様収束でないことを示した. しかし, Kolmogoroff, Aonol'd, および Moser は, ある非共鳴条件が満たされ, 摂動質量が十分小さければ, 級数のあるものは実際に収束し, すべての時間にわたって惑星問題の解を厳密に記述することになることを示した. これらの解は,「準周期運動」を与える, という意味で安定である. 準周期運動は有限個の多重周期を持つ準周期関数 $X(t)$ によって表現することができる (たとえば Hagihara 1975 を見よ). 関数 $X(t)$ は有界であり, この意味で安定な運動を生じる.

自由度が 2 の平面制限三体問題の場合, Kolmogoroff, Arnol'd, および Moser の示すところによれば, 2 つの主星の質量比が十分に小さければ, 相空間の特定の領域のすべての初期条件から有界な解が得られ, 運動はすべての時間にわたって準周期的である. 自由度が 2 より大きな系の場合, 摂動質量が十分小さい限り, 相空間のある領域のたいていの (most) 初期条件から, すべての時間にわたる安定な (準周期的) 有界運動が得られる. 同じ領域の他の初期条件からは非有界, 不安定運動が得られる.

Moser(1974) によると, 収束性の証明において, 有界運動が生じるための摂動質量の大きさの下限が計算されるが, この下限はあまりにも悲観的すぎる. Henon and Heiles(1964), Jefferys(1966), Contopoulos(1967) やその他の数値計算によれば, 有界運動を許す最大の質量は, Kolmogoroff, Arnol'd, および Moser の定理が与える下限よりも何桁も大きい.

Henon and Heiles, Jefferys, Contopoulos らの行った横断面法による数値計算は, 自由度 2, 平面円制限三体問題に関する KAM 定理の数値的対応物である. これらの仕事により, 特定の初期条件および十分小さな質量比の場合, もうひ

とつの積分の存在証拠が与えられる. かれらの結果によると, ある小さな値を越えて摂動質量 (制限三体問題の質量比) を増やすと, 積分は消滅する. 十分小さな質量の場合の余分の積分の存在は, 質量が十分小さい場合の自由度 2 の力学系の級数表現の収束性に関する KAM 定理と無矛盾である.

Cohen–Hubbard–Oesterwinter による外惑星の百万年の解はすばらしい. かれらの解の一番面白い様相は, 外惑星の運動が有界, 準周期的に見え, 積分範囲内では, 永年傾向も長周期的傾向も軌道半長径, 離心率, 軌道傾斜角に見られないことである. 永年的な傾向が実際に存在するなら, 百万年よりはるかに長い期間, 数値積分する必要があることをかれらの計算は示した. Hagihara(1961) の述べるところによると, 惑星の軌道半長径に永年傾向が存在するとして, またそれが摂動質量の 3 次以上の次数であるならば, 少なくとも数億年, おそらく数十億年間計算しなければ永年傾向は見えてこないだろう. このくらいの期間の数値積分は可能である. しかし, それを実行したり, 十分な誤差評価を行うのは現在の計算環境では非常に高価であり, 計算もひとつの初期条件でしか行えないであろう.

2. 本研究の動機

上で議論したとおり, 今日の解析的および数値的解および手法は太陽系が準周期的運動を行って, 運動は有界かつ安定であるのかどうか, に関しての決定的な答えを出すには至らない. 非有界かつ不安定な運動を検出するためには現在の計算機水準では実行不可能な長期計算が必要とされる. 加えて, 大惑星の現実の質量は, 準周期運動を保証する KAM 定理の限界をはるかに越えている. また, 惑星の現実の軌道傾斜角が, 準周期運動を許す相空間の領域にあるのかあるいは準周期運動を許さない集合に属するのか未知である.

これらの疑問に答える試みとして, 以下の 2 つの前提を満たす数値研究を始めた. 最初の前提は, 惑星質量がもっと大きかったら惑星系の力学進化はもっと短い時間尺度で起こる. 摂動質量は数値積分では簡単に増やすことができる. 質量をかなり増やすことにより, ずっと少ない計算時間で永年的傾向を検出できるかもしれない.

この手法は直接的であり, 相互作用を増加させるために力学系において多用されてきた. 著者は 1965 年に外惑星系にこれを適用するよう提案した (Nacozy, 1965). だが, 当時これは採用されなかった. 後に 1972 年になって, 故 G.Kuper 博士が三体系の分裂に関する V.Szebehely 教授の講演 (Szebehely, 1974) に刺激されて同様のアイデアを得, 最初に木星–土星–太陽の三体系に適用すべきであると示唆した. Kuiper は, 質量を増やすことにより, はるかに長い期間, すなわち存在する計算機で可能な計算時間よりも長い期間にわたる, 現実惑星質量の運動をシミュレートすると予想した.

惑星系が軌道半長径に不安定かつ非有界な永年的傾向を持つなら, この運動およびこの傾向は, 惑星が大きな質量を持つときにはより早く現われるであろう. さらに, 軌道半長径の級数解の中の永年項として表現される軌道半長径の永年傾向があり, また質量に関してこれらの項が 3 次であるならば, Kuiper(1973b) が指摘したように, 質量が 10 倍増えたときには 1/1000 の時間で 3 次の永年項が見えてくる. 質量を増加して永年傾向が見え, またその率がわかるなら, 惑星系のずっと小さな永年傾向を見積もることができるかもしれない. (影の声: **resonance** との関係は? 質量を増やしたとき, 共鳴の位置はずれるかずれないか? 40 億年計算が出現した 2002 年現在の問題意識.)

第二の前提は次のとおりである. 数値計算において摂動質量を増やすこと, またいつ永年傾向が現われるかに注意することは, KAM 定理に関係する. 彼らによれば, ほとんどの初期条件に対して, 太陽系に似た系は惑星の「質量が十分小さいければ」安定 (準周期的) である (Moser, 1974). しかし, 他の人の数値研究 (Henon and Heiles, 1964; Jefferys, 1966; Contopoulos, 1967) からは, 質量パラメータがあまり大きくなると安定性は保てないことも知られている.

だから, 質量を変化させ, 数値積分で解を求めることにより,

(1) 惑星質量の値が「十分小さい」とき, 惑星の初期条件が, 有界運動を許し, 準周期運動となるような相空間の領域内にあるかどうかを決定した.

(2) 有界性と安定性破壊の原因となる臨界質量はいくらかを決めたい.

(3) 現実の惑星質量がその臨界質量にどれほど近いかを決めたい.

(4) 初期条件や質量の小さな変化にどれほど敏感に結果が依存するかを決めたい.

3. 本研究: 質量の変更

A. 有界運動

Kuiper(1973b, p.331) の指摘によると, 「... 木星–土星 (–太陽) 系の安定性は明らかに惑星系が持続するための主たる基準である...」 だから, 木星, 土星, 太陽の一般三体問題を考察することから研究を始めた. 将来の研究では, 天王星と海王星を入れるつもりである. 解析のために, 木星と土星には γ 倍の質量を与える. 木星と土星の初期条件は Eckert et al. が与えたもので, 元期は 1940 年である. 使った数値積分法および解の誤差解析は別の論文で行う (Nacozy, 1976).

まずは $\gamma = 1$ で, 現在を元期として, 1 万年未来に向けて計算して解を得た. 解は, Cohen et al.(1972) の積分解に定性的に非常によく似ている. また定性的な違いがあるとすれば, それは天王星と海王星が存在しないことによるであろう.

$\gamma = 0.1, 1, 2, 10, 15, 20, 25, 26, 27, 27.5, 28, 28.25, 28.50, 28.75, 29$ に対して 5 千年ありは 1 万年間未来に向けて積分解を求めた. これらの解はすべて 2 つの特徴を持っている. すなわち, (1) $\gamma = 1$ の場合と同様また Cohen et al. の解と同様, 永年傾向を持たず, 準周期的運動を示す. (2) 周波数は基本的には不変である. 振幅は γ の大きさに比例するように見える. 第一の特徴を確認するために, $\gamma = 25$ の解を 10 万年に延長した. 10 万年解の誤差解析と図は別の論文 (Nacozy, 1976) である程度議論した. 木星や土星の軌道半長径, 離心率, 軌道傾斜角の永年傾向は $\gamma = 25$ の 10 万年解には見えなかった. 永年的傾向が $\gamma = 1$ の解に存在し, それが摂動質量のべきに比例するなら, γ が大きい場合には拡大されて現われるはずである. 実際, 指数が 3(3 次の永年傾向) なら, $\gamma = 29$ の解が $\gamma = 1$ の解に比べて 25000 倍大きな永年傾向を持つはずである. $\gamma = 1$ の永年傾向が 1 億年で検出可能なら, $\gamma = 29$ の計算では, 4000 年で検出可能なはずである. $\gamma = 25$ なら 7000 年で検出できるはずである. $\gamma = 1$ で 10 億年で検出可能なら, $\gamma = 25$ では 7 万年で検出できるはずである.

Nacozy(1976) で詳しく論じているように, $\gamma = 25$ で, 初期値が少しだけ違う解を 10 万年追いかけた. 2 つの解の違いは数値積分の間の許容誤差の違いだけである. 2 つの解を求めたにはいくつかの理由がある. これについては Nacozy(1976) で論じた. 中でも重要な理由は, 以下のとおりである. 局所打ちきり誤差を違えた 2 つの解を得ることは, 少しだけ初期値の違う解を得ること, また同じ局所誤差をもつ解を得ることに関係する. そして, 2 つの解の初期値と最終値の違いを調べることにより, 初期値の違いへの解の依存性の敏感さを見ることができ, 解の安定性に関するなんらかの情報が得られる. 10 万年計算の初期条件および最終条件はほんの少ししか違わない. その上, 2 つの近い解は似ているから, 2 つの解の近傍の初期条件から出発する無数の解を代表している可能性が高い.

ほかにもたくさんある可能性のうち, 可能性の低いものは以下のとおりである. (1) 永年傾向が存在するが, 摂動質量には比例しない. (2) われわれの計算した初期条件には永年傾向は存在しないが, 近くの初期条件集合には存在する. (3) 質量に比例する永年傾向は存在するが, $\gamma = 25$ で検出するにはまだ小さい (おそらく, 質量の高次のべきに比例する).

B. 不安定性の点火

γ の値を $\gamma = 29.25$ にまで増やすと, 軌道要素のすべてに対して永年傾向がただちに見え, 土星は 1 万年で系から飛び出す.

$\gamma = 29.315$ にすると, 土星は 6000 年で放出され, $\gamma = 29.375, 29.50$ にすると, それぞれ 4000 年, 3000 年で放出される. γ を 29.50 より大きくした計算のすべてにおいて永年傾向がただちに現われ, 土星は 3000 年以下で放出される. γ が

29.25 と 100 の間では, 木星–太陽の連星に対して土星は負のエネルギーを持ち, 離心率が 0.1 以上の楕円軌道で放出される. γ が 100 と 1000 の間では, 木星–太陽の連星に対して土星は正のエネルギーを持ち, 双曲線軌道で放出される. 計算に使った $\gamma > 29.25$ の具体的な値は, $\gamma = 29, 315, 29.375, 29.50, 30, 35, 50, 75, 100, 125, 250, 500, 1000$ である. 最後の場合, 木星の質量はほぼ太陽質量である.

ここでの決定的な結果は, 有界かつ安定な運動のみを許す γ の範囲があり, 一方, 非有界かつ不安定な運動を示す γ の範囲があって, 両者の間に, 鋭い突然の移行 (catastrophe) があることである.

C. 他の数値研究との比較

Henon and Heiles, Jefferys, および Contopoulos の仕事では, 制限三体問題しか考えなかった. 彼らは, 摂動パラメータがある臨界値を越えたときに準周期運動の突然の破壊がおこることを指摘した. Szebehely(1972) および Harrington(1972) の仕事では, 一般三体問題を考えたので, 大惑星系にもっと強く関係する. Szebehely によれば, 同じ程度の質量と取ると, たいていの初期条件からは非有界運動が得られる. Harrington(1972) の仕事のひとつによれば, 等質量の三体問題の場合, 連星ができ, 第三体が遠くを円軌道でまわれば系は安定か t 有界である. 第三体の極限的距離 (順行運動の場合) は連星間隔の 2.5 倍未満ではない. 後の仕事で, Harrington(1976) は, 第三体の質量を減少させると極限距離も減少することを示した. 後者の結果は, 太陽, 木星, 土星を含む簡単な惑星系に関する本論文の結果に関係する.

他に関係する論文としては, Birn(1973) および Ovenden, Feagin, and Graf (1974) がある. 両者はともに, 摂動質量と系の分裂の関係を調べた.

4. 将来の研究

本研究を補完し拡張すること, また現実の大惑星系へと結果を適用することの信頼度を高めるために, 今後の研究がいくつか考えられる.

天王星と海王星を入れて, 今回の計算と同様な計算を行って解析すべきである. 天王星と海王星を加えることが木星–土星系の安定性を強めるのか弱めるのかを確かめるのはたいへん面白いことである. 系が分裂するための γ の値は増大するのか減少するのか.

また, 内惑星の安定性を調べるための解析を行うべきである. van Flandern and Harrington(1976) の最近の仕事によると, 水星は主として金星の作用のみによって不安定な運動を示し得る. (影の声: 本当かな? 我々の計算結果とは違うぞ.) 木星–土星系に関して行ったわれわれの研究を, 外惑星すべて (少なくとも木星と土星) を入れて内惑星系で行うべきである. 外惑星は楕円リングとして平均的に扱ってもよいだろう.

また, 木星と土星に関して行った本研究に似た解析も考えられる. すなわち, (1) 木星と土星を取り換える, (2) 木星と土星の離心率と相互軌道傾斜角を増加させる, (3) 木星と土星の平均運動の比を $5/2$ に近づけたり遠ざけたりしてみる. これらのそれぞれが安定性を強めるのか弱めるのかを見たい. このようなことを行うと, 現在の惑星系がいまの状態にいることが偶然なのか選択によるものなのかがわかるかもしれない.

さらに別の研究の可能性としては, 木星と土星の初期条件を本研究での初期条件の近傍においてもっと徹底的に, 系統的に調べることがある. いくつかの初期条件からは, 任意の γ に対してただちに永年的傾向が得られるかもしれない. あるいはある初期条件からは, 臨界 γ の値として, 他の初期条件に比べて小さい値が得られるかもしれない. N. Sigrist(ETH, Zurich) が著者に伝えたところによれば, Kolmogoroff, Arnol'd, Moser の定理は, γ が増加したとき, 準周期運動を保証する初期条件の測度が減少すること, 逆に非準周期運動の測度が増大することを予測している. ゆえに, 系の分裂をもたらすような初期条件は, γ の値を大きく, たとえば $\gamma = 28$ あるいは 29 の近くに取ることによって得られるであろう.

5. 結論および予想

A. 永年傾向の欠落

$\gamma = 25$ の解の場合, そして γ が約 29 より小さいすべての解に対して, 有界かつ安定な運動が存在し, 木星と土星の軌道半長径, 離心率, および相互軌道傾斜角に, 少なくとも 10 万年の間, 永年傾向が現われない. おそらく, その初期条件の近傍でも同じことであろう.

永年傾向が存在しても, 10 万年解で検出するには小さすぎるなら, また永年傾向が質量に比例するなら (これは本当らしいが), $\gamma = 1$ の現実の木星–土星系の解に関して, 永年傾向は少なくとも数千万年またはそれ以上の期間にわたって検出できないであろう. これは Cohen et al. の百万年解およびその拡張と無矛盾である.

加えて, 現実の木星–土星–太陽系は相対的に強い安定性を持っている. というのは, この系は不安定境界から 29 倍小さいからである. また, 安定性の強さから, 天王星と海王星を加えても, また非重力効果を加えても安定性を変えるとは考えられない.

$\gamma = 25$ に対する解, およびおそらく $\gamma = 29$ 未満の γ のに対する解は, 本研究で得られた木星–土星–太陽系の近傍の多数の解を代表している可能性が高い. というのは, 10 万年にわたって得られた 2 つの相隣る解が非常に似ていたからである. しかし, 木星–土星–太陽系の近傍のいくつかの系は非有界かつ不

安定であるかもしれない. これの説明として KAM 定理がある. つまり, 質量が十分小さいけれども自由度が 2 より大きい系の場合, 有界運動という意味で安定であるからであるのはすべての初期条件ではなく, たかだか, 「たいていの」初期条件」だからである.

B. γ が増加したときの突然の遷移

$gamma$ が 29 より大きいと, 永年傾向と非準周期運動を持つ不安定性が現われる.

有界かつ安定な状態から非有界かつ不安定の状態へのこの突然の遷移現象は, Henon and Heiles, Jefferys, Contopoulos らが制限三体問題で発見した現象に関係するかもしれない.

突然の分裂は, 他の物理系に存在するカタストロフに関係するかもしれない.

On the origin of chaos in the asteroid belt

N. Murray, M. Holman, and M. Potter, *Astronomical Journal* **116**, 787-791(1996)

1. 序

太陽系のもっとも目覚しい様相のひとつは, カオティックなことである. Sussman & Wisdom(1988) による外惑星の数値積分の示唆によれば, 冥王星の運動はカオス的である. その後, Laskar(1989), そして Sussman & Wisdom (1992) は, 太陽系全体がカオス的であることを示した. カオスの源は知られていない. (影の声: どういうこと? 可積分でなければカオスでしょ?ここで source ってなにを指しているのか.) 一連の論文において, われわれは話を単純な場合, すなわち小惑星帯のカオス, に制限し, この問題に挑戦した.

最初に, 小惑星を質量ゼロの天体として, 木星の影響のみを考えた (Holman & Murray, 1996). 楕円三体問題の場合, いわゆる「平均運動共鳴」内の個々の subresonace の重合 (overlapping) が, 軌道半長径の細いバンドに見られるカオスの原因であることを示した. この結果は小惑星帯のカオスをすべて説明するわけではない. というのは, 平均運動共鳴は全部の軌道半長径を覆うわけではないからである. 実際, 楕円三体問題数値積分が強く示唆するところによれば, KAM 曲線が小惑星外帯には存在する. これはもっと完全なモデルを使って得られる結果に反する. 4 つの巨大惑星を含むわれわれの積分からは, 小惑星外帯には KAM 曲線が存在しないことが強く示唆される. 外帯に見られるカオスのほとんどは, 小惑星と木星だけを巻き込む平均運動共鳴に帰着させることはできない. としたら, このカオスはどこから来たのか?

本論文では, 離心率 e_J の変調 (modulation) および木星の他の要素の (小さいけれども) 変調による木星の軌道周期 T_J の変化 (??) によって楕円三体問題の平均運動共鳴の両側にサイドバンドができることを示す. これらの「サイドバンド」あるいは「三体共鳴」こそが, 小惑星帯の天体の数値積分に見られるカオスの多くの原因である. Holman & Murray は, 木星の重力場内の小惑星が経験するポテンシャルは

$$\phi_{k+q/k} \approx \frac{GM_J}{\pi a_J} \sum_{p=0}^{q} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p \left(\frac{\epsilon_j}{2}\right)^{q-p} \frac{1}{q} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \times \cos[k\lambda - (k+q)\lambda_J + q\varpi_J + p(\varpi - \varpi_J)] \tag{1}$$

の形の項を持つことを示した. ここで k, q, p は整数である. 量 λ, λ_J は小惑星と木星の平均経度であり, ϖ, ϖ_J は対応する近点経度である. 展開パラメータ

は $\epsilon = e/\varepsilon$ と $\epsilon_J = e_J/\varepsilon$ である. ただし,

$$\varepsilon \equiv \frac{a_J - a}{a_J} \tag{2}$$

である. 式 (1) を導くにあたって, インパルス近似を使うために, ε が小さいことを仮定した.

式 (1) の...

2. ポテンシャル理論

太陽と木星の重力場内の粒子が経験するポテンシャルに関する Holman and Murray(1996) の結果を, 木星の要素が変化することを考慮して拡張する. はじめに, どのようにしてそのような変化が生じるかをスケッチする.

2.1. 木星の軌道要素への土星の影響

簡単のために, 平面運動に話を限る. 正準ケプラー運動量

$$L_J = \sqrt{\mu_1 a_J}$$
$$\rho_J = (\mu_1 a_J)^{1/2}[1 - (1 - e_J^2)^{1/2}] \simeq L_J \tfrac{1}{2} e_J^2$$

...

3. 三体共鳴の力学

4. 三体共鳴理論の数値テスト

図 1 は小惑星外帯のテスト粒子のリャプノフ時間を初期軌道半長径の関数としてプロットしたものです. 積分は 4 巨大惑星からの摂動のみを考慮する. 図の上部に沿って, いくつかの平均運動共鳴を認めるこ t ができる. また三体共鳴のいくつかに関係するカオス領域が見える. たとえば, $a/a_J \simeq 0.705$ では, $7/4$ 共鳴のサイドバンド $f_{1,2}$ がある.

Nature **357** (1992), 569-571

太陽系における安定カオスの一例
An example of stable chaos in the Solar System

A. Milani and A. Nobili

要約

惑星の多くは軌道運動にカオス不安定性を持つことが示されてきた. だが長期的な意味でのこれの重要性は完全には理解されなかった [1]. たとえば水星の離心率はリャプノフ時間の 40 倍の期間に 25 %も変わるが [2,3], 50 リャプノフ時間にわたって積分した冥王星の軌道は目立つ変化を示さない [4]. 本論文では, 木星に近い小惑星 522 Helga の軌道がカオス的であること, リャプノフ時間がなんとたったの 6900 年であることを示す. 巨大外惑星の摂動を入れてリャプノフ時間の 1000 倍にわたってこの小惑星の軌道を積分したが, 何の不安定性もなかった. 522 Helga 軌道のカオスは木星との 7:12 共鳴によって引き起こされる. だが相空間内のカオス領域は小さい. 軌道の離心率と歳差は木星との近接衝突を避けるように動くので安定性が保証される. 固有離心率の大きな小惑星は真に不安定であろうと考える. これは Helga の近くの空間的小惑星分布と矛盾しない. Helga は安定カオス軌道にある明白な小惑星の最初の例であるが, 太陽系力学においては「安定カオス」は普通に見られる現象であると考える.

本文

リャプノフ指数が正の力学系はカオス的であると定義される. 最大リャプノフ指数のしるしは

$$\gamma(t) = \log \frac{|v(t)|}{|v_0|} \tag{1}$$

をモニターして得られる. ここで $v(t)$ は変分方程式の解であり, $v(0) = v_0$ はでたらめに選んだ初期値である. 図 1a は小惑星 522 Helga 軌道に対するそのような関数のひとつである. 定義により, 最大リャプノフ指数は $\lim_{t\to\infty} \gamma(t)/t$ である. Helga の場合, 7 百万年にわたる積分からの最適フィットは傾き $1.45\times10^{-4}\mathrm{yr}^{-1}$ であり, これからリャプノフ時間はたったの 6900 年である. このリャプノフ時間がすべての時間にわたって維持されるかどうかは思案の外であるが, $\sim \exp(1000)$

倍も 2 つの軌道が発散することは極めて強い局所的不安定性の存在を示す. 3 次元的なかなり完全な物理モデルの範囲内で 522 Helga の準拠軌道を変分方程式の解と同時に計算した. ゼロ質量の小惑星への外惑星・木星, 土星, 天王星, 海王星の重力摂動をすべて考慮した. 内惑星からの摂動は外小惑星帯の Helga では重要でないので無視した. しかし, 無視した摂動の永年効果を減らすために, 初期条件はすべて内側太陽系の重心に準拠した (?). したがって, 観察されるカオス的ふるまいは単純化したモデルの抽象的な性質ではなくて現実の小惑星に内的なものである. 事実, もっと単純なモデルでも定性的に似た結果を与えるだろうが. しかしリャプノフ時間の実際の値は物理モデルにも初期条件にも敏感に依存する. 初期要素が 10^{-5} 違っただけで 20 %の違いが指数に現われる. 一方, 有限時間にわたるリャプノフ指数の計算は近似にしか過ぎない. 異なる時間区間での計算によって軌道のカオス性が確認できるが, 見積もった指数の正確な値を再現するのはむずかしい.

図

522 Helga の軌道要素からは大規模な不安定性の兆候は見えない. 比較的大きな軌道半長径の変動 (図 1b) が見られ, これは小惑星と木星との 7:12 共鳴に入ったり出たりと結びついている. 引数 $7\lambda - 12\lambda_J$ (λ, λ_J は小惑星と木星の平均経度) は低速変数であり, 7 百万年で ~ 830 回転しかしない. 秤動 (libration) の時期と周回 (circulation) の時期が交互に現われる. これはカオス軌道の特徴である. 永年摂動はもっと長いタイムスケールで働くので, 6900 年という短いタイムスケールで働くカオスに関係するのは平均運動共鳴だけである.

軌道半長径は 3.628 から 3.632AU の間を動き, 離心率はゼロと 0.094 の間を動き, 軌道傾斜角は小さい ($< 3°.9$). Helga は原理的には木星に ~ 0.9AU のところまで近づき得る. こんなに近くまで接近すると, 7 百万年もの積分時間の間, 巨視的な安定性を維持することが理解できない. ところが, Helga は木星に 1.31AU 以内には近づかないことを知った. その理由は図 2a を見るとわかる. 原点からの距離は, その時刻における小惑星の接触 (osculating) 離心率であり, 偏角は小惑星と木星の近日点の間の角度 $\varpi - \varpi_J$ である. 木星の近日点を固定したもっと単純なモデルでは, 図は固定した中心のまわりの円環状になるだろう [5]. 中心点の原点からの距離は木星に強制されて生じる小惑星の場所での離心率 e_F であり, 円環の平均半径は小惑星の固有離心率 e_P である. 接触離心率は大きな変動を示す (角度 $\varpi - \varpi_J$ の値に依存して最小値 $|e_F - e_P|$ から最大値 $e_P + e_F$ まで) が, 問題となる物理量は固有離心率であり, それによって原点と軌道の進化がわかる.

図 2a の示すところによると, 木星の離心率に比例する e_F の変化に応じての円環の動きは他の惑星 (主として土星) の木星への摂動を感じる. したがって, e_F が大きいか小さいかに依存して, 偏角は $0°$ のまわりの秤動と周回 (circulation) を行う. $0°$ のまわりの秤動するということは, Helga の近日点と木星の近日点が互いにロックされてしまい, Helga の遠日点と木星の近日点とで合になる (このとき近接衝突が最小距離になる) ことは決してない. 力学的保護のこの機構は ϖ 秤動とよばれている. 偏角は回転するにつれて, 2 つの近日点は $180°$ 離れ, そして小惑星が遠日点にいるときに木星が近日点にいて同じ方向で並ぶ可能性もある. しかしこの配置では, 接触離心率はつねに最小値に近く, 木星の離心率は最小に近い. この機構は $e - \varpi$ 結合 (coupling) とよばれている. 図 2a は, ϖ 秤動あるいは $e - \varpi$ 結合が 7 百万年の数値積分の間働いていたことを示す. その結果, Helga と木星の間の最小距離は 1.31AU と 1.57AU の間で振動し, 巨視的な安定性を説明する.

図 2a にはさらに重要な情報が含まれている. これから固有離心率が計算できる. 変数 $e\cos(\varpi - \varpi_J)$ から木星離心率の整数倍 ke_J を引くことにより, 動く円環を固定した円環に変換して数値的に決める [7]. 定数 k は, 原点を中心とす

る新しい分布 (図 2b を見よ) に変換されたときに図 2a のデータが最適フィットするように決める. 図 2b の円環の半径は固有離心率である. これが定数でないことは明白である. その平均値は 0.039 であって, 標準偏差は 0.0015 である. 主小惑星帯の固有要素は解析的に [8] 比較的に安定して計算できる. ただ, 平均運動共鳴に近いと不可能になる. こうして, 固有離心率は, 固有傾斜角と同様, 狭い範囲にあって安定である. だからカオス領域は非常に小さい. Helga の e_P が小さいこと, ほとんどの期間 $e_P < e_F$ であることが, 長期にわたる巨視的安定性の真の説明である. というのは, 両方の保護機構が働いて木星への最小接近距離を増加させるからである. すなわち, 関係 $e_P < e_F$(ϖ 秤動) と $e_p \geq e_F$($e - \varpi$ 結合) の直接結果である. 元の固有離心率が強制離心率よりかなり大きな領域では天体はすべて放出されてしまったはずである. これは Helga のまわりの領域の小惑星数が非常に少ないことから示唆される [9]. Helga を保護するのに効いた機構はカオス的ふるまいの原因である 7:12 共鳴とは何の関係もないことを強調しておく.

太陽系におけるもっとも目覚しいカオスの例は大近接衝突 (さらには衝突特異性) の領域を含むカオス領域の現象であり, カオスは現実の天体が存在しない理由を説明しない [10-13]. 惑星自身もカオス軌道に乗っている [14-16]. だがカオスの重要性は異なる. 4 個の巨大外惑星の場合, カオス領域は非常に薄い (離心率で 10^{-5}). 対照的に, カオスによって 40 リャプノフ時間 [2,3] の間に水星の離心率は 0.05 変わるが, これはとても弱いカオスとは言えない. 冥王星の軌道はリャプノフ時間の 40 倍にわたって計算されている [4]. この軌道のカオス性は確認されているが, 何の不安定性の証拠もない. リャプノフ時間が比較的短いことは, 頑丈なカオスを意味すると考えられてきた. しかし冥王星のカオスの最善の候補と考えられる高次の永年共鳴のカオス領域は小さいように見える [17]. カオスの例は太陽系のいたるところ見出されるが, その真の意味は理解されていない [1]. われわれの結果によればリャプノフ指数がほとんど意味を持たない明白な例がある. Helga は安定カオスの例となっている. 現実的な物理モデルの範囲内で 1000 リャプノフ時間にもわたってカオスが強いのに安定であることの理由は理解できた. 安定カオスが出現する厳密な理論はまだ知られていないが, カオスを引き起こす共鳴が主たる保護機構でないなら, カオス領域は, 摂動が増大するような領域を含まず, したがって巨視的不安定性は期待されないであろうと議論できる. したがって, 太陽系の力学の他の多くの問題において安定カオスが生じていると思われる.

Icarus **125** (1997), 13-31

小惑星帯の安定カオス
Stable chaos in the asteroid belt

A. Milani, A. Nobili, and Z. Knezevic

要約

たいていの小惑星は正のリャプノフ特性指数 (LCE) を持つのが特徴である. つまり軌道はカオス的である. 実際, 多くの小惑星の最大 LCE は非常に大きく, 対応するリャプノフ時間は, 本論文で報告するとおり, 10 万年より (しばしばはるかに) 短いという驚くべき事実がある. この発見事実は, リャプノフ時間より何桁も長い時間にわたる数値計算によって観察される全体としての軌道の安定性と一見矛盾する. さらに重要なことに, これら小惑星の天文学的に見積もられた年齢とも矛盾する. この現象は, 他にも例が知られているとおり, 安定カオス とよばれる. とくに, Veritas 族の領域を調べる. ここはカオス運動のほかの原因がなく, 安定カオスの諸様相をそのまま調べることができる場所である. 安定カオスは, 木星との高次の平均運動共鳴と小惑星の近日点の永年摂動とのコンビネーションで引き起こされることがわかった. これらの摂動により, 多数の臨界引数が共鳴に入ったり出たりし, 軌道はある高次の共鳴から別の共鳴に, 不規則なふるまいで移り得る. カオスが永年摂動により駆動されているので, リャプノフ時間がこれらの摂動のタイムスケールに非常に近いことは驚くに当たらない. リャプノフ時間の極端に短い小惑星の準運動積分の安定性は弱く, 離心率と軌道傾斜角がゆっくり拡散していく. 軌道半長径の拡散は原則的にはない. ただ変動は大きい (2 つの高次の共鳴の間を動く). これらの小惑星は安定カオスの場合とみなすことができる.

1. 序

カオス力学の概念は小惑星に応用されて成功した. カークウッド間隙や外小惑星帯などの主特徴がある程度理解された. これら間隙や数の少ない場所は, 相空間のカオス領域に端を発する巨視的不安定性からの結果として現われるはずである. カオス領域は小惑星が存在しない場所として出現する. 一方, 規則領域は小惑星が実際に観測される場所である. カオスはかならず不安定性を引き起こすべきであるということは一般に受け入れられている. 実際, 何人かの著者 (Milani and Nobili 1984, 1985 も含めて) はリャプノフ時間を, 最小

の時間で巨視的不安定を引き起こすべき初期条件を選ぶための指針として使った. この描像は, 以後,「秩序 = 安定性」および「カオス = 不安定性」という元の図式に合わない様々な中間的ふるまいによって豊富になった. 小惑星 522 Helga は, リャプノフ時間約 7000 年のカオス軌道に乗っていて, しかも見たところ長期安定である. この小惑星は最初の安定カオスの明白な例として報告された (Milani and Nobili, 1992). 実際, 522 Helga の軌道要素は 1000 リャプノフ時間ほどにわたって目立つ軌道進化を示さない. それ以来, 軌道安定性に比べてはるかに短いリャプノフ時間を持つ小惑星が発見された (例えばトロヤ雲, Milani, 1993). これは安定カオスが小惑星帯では普通に見られる現象であることを示唆する.

いままで信じられて来たよりも, カオスと安定性の間の関係がそれほど単純でないことが判ってきたが, それには 3 つの理由がある. 第一に, デジタル計算機とアルゴリズムの発展により, 科学者は小惑星の軌道を数百万年にわたって計算するのが当り前になり, 結果を蓄え処理する仕方も洗練された. 第二に, 増大した計算パワーのおかげで, たとえば制限三体問題のような, 非現実的に単純化したモデルに訴える必要がなくなった. $(5+1)$ 体問題そのものを普通に計算できるようになった. その際, 太陽と 5 惑星の軌道も小惑星と一緒に積分してしまう. ハミルトン力学系の安定性はその自由度の数に強く依存するので, このことはとくに重要である. たとえば, 自由度が 2 しかない系 (円平面制限三体問題) においては, 相空間の領域を 2 つに分ける不変多様体がある. だから無限時間にわたる安定性を証明できる. 自由度が 3 以上のハミルトン問題ではこれが成り立たない. したがって, あまり単純化しすぎると, モデルは小惑星軌道の現実的モデルの長期的なふるまいを完全には表さなくなってしまう. 第三に, たいていの小惑星の固有要素を計算する解析的道具が手に入る. 固有要素とは, 現実の小惑星軌道を記述する元の力学系を近似するある可積分力学系の作用変数である. これらは元の力学系のきちんとした積分ではあり得ないから, 時間とともに変化する. ただ変化はゆっくりであったり, 微小であったりする. だから, 固有要素の時間変化は不安定性の定量的尺度として使える. カオス的拡散などに典型的な初期のゆっくりした変化をこれによって捉えることができる. このようにして, 軌道変化を検出するには, 近接衝突のような接触要素の大きな変動の出現まで待つ必要がなくなった.

本論文では, 顕著に短いリャプノフ時間 ($< 10^5$ 年) の小惑星帯領域からの小惑星のリストを報告する (2 節). リストは網羅的ではない. すべての場合を検出することではないし, それはできないことであるし, むしろ安定カオスが存在し普通の現象であることを示したいからである. Veritas 族を詳細な研究のために選んだ. なぜこの族かというと, これは固有要素空間で群を形成し, 巨

大惑星からの摂動も非常に似ており, 安定性やカオスに関する限り, 驚くほどさまざまな振舞を示すからである (3 節). 相空間で強いカオスを示す領域の構造は典型的に不連続のようすである. とくに固有軌道半長径に関してそうである. 固有要素を使うと, 安定カオスの場合, 自由度の違う系のふるまいが非常に違うことがわかる. 固有軌道半長径には検出可能な拡散はなく, ある種の場合には固有離心率と固有軌道傾斜角にはかなりの拡散が生じる. 異なる共鳴状態や非共鳴状態の間を行き来する激しいふるまいを示す軌道の場合を注意深く解析すると (4 節), 中くらいから高次の平均運動共鳴, たとえば 21:10, と小惑星の離心率や近日点経度への永年摂動との相互作用から, 最も強いカオス効果が出ることがわかる. この結果, 共鳴の両側に非対称が生じる. 強い効果は共鳴の上側 (すなわち共鳴の場所よりも軌道半長径の大きい側) に出る. 安定カオスでの非常に短いリャプノフ時間は永年引数 (たとえば近日点) の周期に関係する.

小惑星帯に現われる安定カオスの異なるすべての形を系統的に調べることは本論文の視野を越えているが, 以下の一般的結論は予想される. ...

2. 小惑星帯全体のカオスの証拠

数百の小惑星の軌道を $> 1\mathrm{Myr}$ 計算した.

3. 詳しい研究のためのカオス領域の選択

4. 安定カオスのパラダイムとしての Veritas 族

かなり高次の共鳴しか Veritas 族の小惑星の近くには見つからない (図 1). これらは 3.172AU あたりの 21:10 と 3.177AU 近くの 44:21 であり, これらは 490 Veritas と 3542 1964TN2 がうろつき回る領域を限っているように見える.

5. 理論は予測能力を持つか?

6. 結論

図 1

2. ネホロシェフ領域 (regime)

Celestial Mechanics and Dynamica Astronomy **53** (1996), 227-239

リャプノフ時間と巨視的不安定時間の関係
On the relationship between Lyapunov times and macroscopic instability times

Alessandro Morbidelli and Claude Froeschlé

要約

ハミルトン系の一般理論を基に, リャプノフ時間と大局的拡散時間の関係を考察する. 2 つのレジームがあることを見つけた. すなわち, ネホロシェフ・領域と共鳴重合領域である. 最初の場合, 拡散時間はリャプノフ時間に比べて指数関数的に長い. 第二の場合, 関係は多項式である. ただ「普遍的な」べき乗法則がなぜ存在するのか, その理由を見つけることはできなかった. 今回の理論的考察を確かめる数値的証拠を示す.

1. 序

最近多数の論文 (Franklin, Lecar and Soper, 1990; Franklin, Lecar and Murison, 1992; Franklin, Lecar and Murison, 1994; Franklin, 1994) においてリャプノフ時間と巨視的不安定時間の間を結ぶ普遍則の数値的証拠を見つけたとの主張が行われている. 詳しくいうと, 太陽系の不安定領域においた仮想的天体の軌道をいくつか積分して, 著者達は関係式

$$\frac{T_I}{T_0} = \alpha \left(\frac{T_L}{T_0} \right)^{\beta}, \tag{1}$$

が一般に満たされることを見出した. ただし, 厳密な関係に比べて 2 桁ほどのデータの分散があるにはあるが. 公式 (1) において, T_L はよく知られたリャプノフ時間, つまり最大リャプノフ指数の逆数であり, T_I は巨視的不安定時間, すなわち, 何らかの強い「事件」, たとえば摂動惑星との近接衝突によってテスト粒子の力学的な性質ががらりと変わってしまうまでの時間である. T_0 は適当な規格化時間であり, α と β は正の定数である. とくに, Murison et al.(1994) によると β は 1.74 ± 0.03 である. Duncun and Levison(1992) は外惑星系の不安定領域に関して似たような結果を出した. ただし, 定数は $\beta = 1.9$ であった.

同じ頃, Milani and Nobili(1992) は小惑星 522 Helga の場合を考えた. リャプノフ時間は 6900 年であるにも拘らず, 相変わらず Helga は小惑星帯の一員

である．これにより「法則」(1) が破れている．Milani and Nobili の結論によると, 双曲的なふるまいにも拘らず巨視的な不安定をひき起こさない「安定カオス」が存在する．Milani and Nobili が議論したのは 522 Helga の場合のみであったが, かなりの数の小惑星が短いリャプノフ時間を持つことが知られており, これはそれらの長寿命とよい対照をなす (Milani, Levison, 個人情報; Milani et al., 1995).

上で紹介した 2 つの相反する結果を巡って支持者の間で行われたその後の科学論争は非常に厳しいものがあった．本報告では, みんなが正しかったことを示すことにより, これら 2 つの陣営を和解させたい．実際, ハミルトン系の拡散は互いにまったく異なる様相を示し得る．最初の様相は共鳴非重合かつ多数の不変トーラスの存在が特徴であり, ネホロシェフの定理で記述される様相である．この場合, T_I と T_L の間の関係は指数関数的, つまり $T_i \sim \exp(T_L)$ である．第二の様相は, 共鳴重合および不変トーラスの非存在が特徴である．この場合, T_I と T_L の間の関係は (1) のように多項式型になり得る．ただ, 指数 β の値に関して「普遍則」が成りたつことは示すことはできなかった.

次の 2 つの節では, この 2 つの様相を示すパラメータ領域を別々に解析する．厳密に言えば, 何一つ証明するわけでもない．やるのは, KAM 定理 (Arnold, 1963; Kolmogorov, 1954; Moser, 1962), ネホロシェフの定理 (1977; 1979), および最近の Morbidelli and Giorgilli(1995b) の定理が提供する厳密な結果の光の下でのよさそうな考察を行うことである．Chirikov(1960; 1979) の仕事にも刺激を受けた．理論的考察を裏付ける単純なモデルによる数値実験も示す.

最後の節は小惑星帯の構造に関する推測も含めて, 結論にあてる.

本論文では, Murison et al.(1994) や Milani and Nobili(1992) が用意した特殊な例を詳しく議論するつもりはない．その上, 小惑星帯の特別な場合に関して数値計算をするつもりもない．拡散時間とリャプノフ時間の基本的性質をハミルトン系の一般論から概説するだけである．これによって, 太陽系の力学に関する仕事をしている人々がその結果を解釈する際の手助けになればいいと願う．小惑星帯の力学構造の詳しい研究を近い将来に行う計画を立てている．数値実験の直接解析に役立つネホロシェフの定理の 1 変種を用意する.

図 1

2. ネホロシェフ領域 (regime)

ハミルトン系の相空間は力学的ふるまいのはっきり異なる領域に分割することができる. いわゆる「非共鳴領域」があって, これは低次の共鳴がないことが特徴である. 「単一共鳴領域」–これは低次の共鳴がひとつだけあることが特徴, そして「多重共鳴領域」–これは 2 つ以上の低次共鳴のある領域. 最後の領域はいわゆるアーノルド網 (作用空間で共鳴の位置を示す線で構成される網) の節の近傍に対応する. 図 1 を見よ.

ネホロシェフの偉大な貢献は, 力学を大域的に記述したことであり, 異なる領域の特徴としての各種ふるまいをぜんぶ結びつけたことにある. 詳しく言うと, ネホロシェフの定理では

$$H_0(p) + \varepsilon H_1(p, q)$$

の形の, 近可積分ハミルトン系を考える. ここで $H_0(p)$ は可積分ハミルトン関数であって, 作用 p のみに依存する. 定理によると, 摂動のサイズ ε が十分小さければ, 初期条件 $p(0)$ がどんなであろうとも, 作用変数の変化は指数関数的に長い時間

$$|p(t) - p(0)| < O(\varepsilon^a) \quad \text{for all} \quad |t| < T \sim O(\exp(1/\varepsilon)^\beta) \tag{2}$$

の間, 小さいままとどまる. ここで a と b は適当な正係数であって, 自由度の数 n に依存する (最適の値が $a = b = \frac{1}{2n}$ であると Lochak, 1993 は予想している). 簡単のため, 以下では自由度への依存性は無視する.

ネホロシェフの定理からすると, 摂動が十分小さければ, 巨視的不安定時間 T_I は摂動のサイズ ε の逆数に関して少なくとも指数関数的に長い, つまり $T_i \sim \exp(1/\varepsilon)$ であることが言える.

リャプノフ時間に関して言えば, これはある領域から別の領域にうつると値がまるっきり変わってしまう. 「非共鳴領域」においては, リャプノフ指数は非常にゼロに近いはずである. 低次の共鳴と高次の共鳴の間の閾値が, ネホロシェフが構成したように $1/\varepsilon$ であるとすれば, 非共鳴領域のリャプノフ指数は $\exp(-1/\varepsilon)$ より小さいはずである. 実際, 次数 $1/\varepsilon$ までのフーリエ項をすべて消去して非共鳴正規形を構成することができる. ハミルトン関数の解析性から, 正のリャプノフ指数を生成する残余項は $\exp(-1/\varepsilon)$ 程度の大きさである.

「単一共鳴領域」に関して言えば, 計算はもっと複雑で, リャプノフ指数の期待値に関する厳密な数学的結果はない. 低次共鳴の幅は $\sqrt{\varepsilon}$ 程度であり, 前パラグラフで示したように, 非共鳴項は指数関数的に小さく (すなわち $\exp(-1/\varepsilon)$ へと) できる. このとき, 指数関数的に小さな残余を取り除くと, 系は可積分となり, セパラトリックスから離れたところでは新たな作用–角変数を導入することができる. 指数関数的に小さな残余はセパラトリックスのまわりに, Neishtadt(1984) が示したように, 指数関数的に薄いカオス層を作りだす. この薄いカオス層内でのリャプノフ指数の値の問題は込み入っており, いまだに未解決である. 逆に, この層の外ではリャプノフ指数は「非共鳴」の場合と同様指数関数的に小さいはずである.

「多重共鳴領域」においては, ひとつの共鳴に作用する摂動は $\sqrt{\varepsilon}$ 以下に小さくすることはできない. というのは, 同じサイズ $\sqrt{\varepsilon}$ の自分以外の共鳴が存在するからである. このとき, $\sqrt{\varepsilon}$ のサイズの領域にわたってリャプノフ指数は $\sqrt{\varepsilon}$ に比例すると期待できる. このことは Benettin and Gallavotti(1986)(Benettin の個人情報) のやり型に従って「準厳密な」仕方で導くことができる. 簡単に言うと, 2 つの相互作用する共鳴モデル

$$H = p_1^2 + p_2^3 + \varepsilon F(q_1, q_2) \tag{3}$$

は, 作用 p と時間を $\sqrt{\varepsilon}$ でスケールすると, ε に依存しなくなる. 詳しく言うと, 変換 $p = \sqrt{\varepsilon}p', q = q', H = \sqrt{\varepsilon}H', t = (1/\sqrt{\varepsilon}t')$ は正準であり, (3) を ε に依存しないハミルトン方程式

$$\frac{dp}{dt'} = -\frac{\partial H'}{\partial q'}; \quad \frac{dq}{dt'} = \frac{\partial H'}{\partial p'}; \quad \text{with} \quad H' = (p_1')^2 + (p_2')^2 + F(q_1', q_2') \tag{4}$$

へと変換する. (4) 式では, カオス層の厚さもリャプノフ指数の値も ε に依らないのは明らかである. すると, 元の変数と時間に戻って, カオス層の厚さとリャ

プノフ指数の値が $\sqrt{\varepsilon}$ でスケールされることをまっすぐ示すことができる.

図 2

リャプノフ指数に関するこれらの陳述は厳密な証明に基づいていないから, このあと, 数値実験を使って前進する.

Froeschlé 写像

$$
\begin{aligned}
y' &= y + a\varepsilon \sin(x+y) + b\varepsilon \sin\left(\frac{x+y+p+q}{2}\right), \\
x' &= x + y, \\
p' &= p + c\varepsilon \sin(q+p) + b\varepsilon \sin\left(\frac{x+y+p+q}{2}\right), \\
q' &= q + p
\end{aligned}
$$

ただし $a = 1, b = 0.7, c = 1.3$ である. 2 つの主たる共鳴の間のノードに対応する多重共鳴領域を考察する. その位置は作用 $y = 0$ および $p = 0$ で決まる. 摂

動パラメータ ε を固定して, 作用線 $y = (73/50)p$ 上にテスト軌道の初期条件を選ぶ. その上, 初期位相を $x = q = 0$ に固定する. こうすると, ちょうど二重共鳴 $y = p = 0$ 上の二重双曲周期軌道上に乗る. すなわち, $\varepsilon \to 0$ の極限でも, (x, y) および (q, p) に関して不安定な周期軌道の上に乗るのである. 10^{-1} から 10^{-6} まで動かした ε の各値に対して得た結果は図 2 のごとくである. リャプノフ指数はゼロに近い (計算誤差の範囲で) が, $y = 0$ のまわりのカオス領域に入るや否や鋭く立ち上がる. カオス領域では, リャプノフ指数はほぼ一定である. 図 3(a) に, ε の関数としてリャプノフ指数の平均値を log–log スケールで図示した. 誤差棒はカオス領域にわたるリャプノフ指数の標準偏差として計算した. データに一番良く合う直線の傾きは 0.47 であった. これによると, リャプノフ指数の値は上でわれわれが導いたように, ほぼ $\sqrt{\varepsilon}$ に比例する. 図 3(b) は ε の関数としてカオス層のサイズを示す. カオス層の大きさは区間 $(-y_a, y_a)$ の長さで見積もった. ただし, $-y_a$ と y_a はリャプノフ指数が鋭く立ち上がる場所の y の値である. たとえば, 図 2 の場合, カオス層のサイズは区間 $(-1.44, 1.44)$ の長さ, つまり 2.88 である. 図 3(b) では, データに最良フィットするのは, log–log スケールで傾き $\frac{1}{2}$(実際は 0.52) の直線である. これはカオス層のサイズが $\sqrt{\varepsilon}$ 程度であるとのわれわれの予想と一致する.

図 3

したがって, これらの数値結果は, 大きさが $\sqrt{\varepsilon}$ 程度の多重共鳴領域においてはリャプノフ指数の値は $\sqrt{\varepsilon}$ に比例するというわれわれの考えを確認したこ

とになる. すると, ε が十分小さくて, ネホロシェフの定理が適用できる場合は,

$$T_I \sim \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\right); \quad T_L \sim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}; \quad \text{i.e.,} \quad T_I \sim \exp(T_L).$$

このことからすると, 微小摂動の極限において Murison et al. の「法則」は間違っている.

与えられた系がネホロシェフレジームにいることをどうやって知るのか? 通常の数学的証明からは, 非現実的に小さな摂動のサイズのところに閾値がある. ところが, 厳密な数学的証明においてはすての定数は過大評価されているので, ネホロシェフ定理によって提供された記述は, 定理が形式的に証明された際のものよりずっと大きな摂動に対しても適用できる.

与えられた力学系がネホロシェフレジームにあるかどうかをチェックする数値的な道具はネホロシェフの定理と KAM 理論を結ぶ最近の定理 (Moribidelli and Giorgilli, 1995b) が提供する. その論文では, ネホロシェフ定理が相空間のある開部分上の自励ハミルトン系に適用できるなら, 「非共鳴領域」にたくさんの不変トーラスがあるはずであることを証明した. 不変トーラスの存在は数値的に簡単にチェックできる. というのは, 不変トーラスでは, リャプノフ指数はすべてゼロだからである. リャプノフ指数がゼロの軌道がひとつもなければ系がネホロシェフレジームにいるはずがない. 逆に, たくさんの軌道のリャプノフ指数がゼロならば, 系がネホロシェフレジームにあると期待してよいし, リャプノフ指数が正の軌道はすべて「安定カオス」の例であると考えて良い. その上, Morbidelli and Giorgilli(1995a) が証明したとおり, 不変トーラスの開近傍ではネホロシェフの定理はいつでも適用可能である.

図 4

2.1 ネホロシェフ領域と縮退

太陽系はハミルトン系としては縮退している (非摂動ハミルトン関数が一部の作用のみに依存する) ので「高速」角度と「低速」角度を持つという特殊な系であるという反論がありそうである. 実際上, 低次の平均運動共鳴から遠い縮退系 (カークウッド間隙) にも簡単にネホロシェフの定理は拡張できる.

一方, Milani and Nobili(1992) や Milani et al.(1995) によって指摘された「安定カオス」はどれかの平均運動共鳴に近く, 二重共鳴には近くないようで, 上で調べた例と直接的に結びつける (reconduce)(?) ことはできない. しかし, 縮退は「第二」の共鳴の役割をする. 実際, 縮退があると, 低速角 (天体力学におけるいわゆる永年角) があり, これらは共鳴角度として働く. 詳しく言うと, Moribidelli et al.(1995) が詳しく説明したように, 永年角が平均運動共鳴を振動させる. したがって, 永年項の作用の下での平均運動共鳴の力学は, 局所的には変調された振り子 (modulated pendulum) に同値である. 後者は変調された (modulated) 標準写像

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + a\varepsilon(1 + b\cos(2\pi\varepsilon n))\sin(q_n + p_n), \\ q_{n+1} &= q_n + p_n \end{aligned} \tag{6}$$

でよく近似できる. 実際, 平均運動共鳴項の係数は ε 程度であり, 変調周波数 (つまり永年角の周波数) も ε 程度の大きさである. よく知られているように, 変調された振り子には大きなカオスゾーンがある (平均運動共鳴についても同じ) から, 巨視的領域の上でリャプノフ指数が正であることが期待される. われわれは変調標準写像を調べた. パラメータは $a = 1, b = \frac{1}{4}$ で ε は 10^{-1} と 10^{-4} の範囲で動かした. 条件 $q = \pi$ で各種の p に対して $N = 50/\varepsilon\mathrm{h}$ ほど写像を繰り返し, リャプノフ指数の平均値 (正の場合) を計算した. 結果は図 4 に報告した. 誤差棒はリャプノフ指数の平均値からの標準偏差として求めた.

図 3 に関していうと, きれいな線形関係であった. 最適フィットは傾き 0.86 であった. これからすると, 平均運動共鳴の近くは, 縮退のおかげで, 非縮退の場合の二重共鳴に似ている. 同じ考察は, ε が小さい場合のリャプノフ時間と不安定時間の指数関数的関係についても適用できる. これによって, 小惑星帯で最近発見された「安定カオス」の場合が一般的な言葉で説明できたと信ずる.

図 5

3. 共鳴重合領域

低次の共鳴が重なるとき, すなわち,「非共鳴領域」が定義できなくなるとき, ネホロシェフの定理は適用できない. この場合, Chirikov の判定基準 (Chirikov, 1960) により, KAM 定理の不変トーラスがすべて破壊されたことを正しく決定する. 高速「拡散」へのドアは開かれたのである.

このとき, 巨視的不安定時間 T_I とリャプノフ時間 T_L を結ぶ法則が ネホロシェフ・レジーム での法則と異なるのは何の不思議もない. 例として, 新たな法則がべき則であることを示す簡単なモデルをスケッチしよう. 自由度 1 の時間依存ハミルトン系

$$H_0(p) + \varepsilon H_1(p, q, t)$$

を考える. ε を大きく取り, 共鳴の数も十分多くて, トーラスはすべて破壊されており, Chirikov 判定基準が適用できる. その様子は図 5 に示した. この場合, 各共鳴の振幅は $\sqrt{\varepsilon}$ 程度であり, ひとつの共鳴内の秤動時間は $1/\sqrt{\varepsilon}$ 程度である. このとき,「拡散」過程を乱歩としてモデル化できる. すなわち, 各 $1/\sqrt{\varepsilon}$ 単位時間に, 長さ $\sqrt{\varepsilon}$ の歩幅で前後に動く. 乱歩の法則よ made り, 拡散距離がステップ数の自乗根に比例する. だから, $p = 0$ から $|p| = 1$ まで, ステップ幅 $\delta p = \sqrt{\varepsilon}$ で拡散するには, $1/\varepsilon$ のステップ数が必要である. 各ステップは $1/\sqrt{\varepsilon}$ 後に行われるから, $p = 0$ から $|p| = 1$ までの巨視的拡散時間は $1/\varepsilon^{3/2}$ である.

最後に, 前節と同じ考察により, リャプノフ時間が $1/\sqrt{\varepsilon}$ に比例することが言えるから,

$$T_I \sim \frac{1}{\varepsilon^{3/2}}; \quad T_L \sim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}; \quad \text{i.e.,} \quad T_I \sim T_L^3$$

が成り立つ.

図 6

この考察をチェックするため, 標準写像でいくつかの数値計算を行った.

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} + \varepsilon \sin(K(p_{n-1} + q_{n-1})), \\ q_n &= p_{n-1} + q_{n-1} \end{aligned} \tag{7}$$

$K = 200$ とした. このとき, ε を 0.03 から 1 の範囲から取って,

$$\langle p^2 \rangle \equiv \frac{\sum_{n=1}^{N} p_n^2}{N}$$

を測り, $N = 10^5$ 写像繰り返しに対してリャプノフ指数を計算した. 図 6 に, log–log スケールで, $\langle p^2 \rangle$ とリャプノフ指数を ε の関数として, また $\langle p^2 \rangle$ をリャプノフ指数の関数として描いた. 3 つの図において, データはどれも直線に適合する. 最適適合の傾きは 1.77, 0.65, 2.72 である. これはわれわれの予想した $\frac{3}{2}, 12, 3$ に近い.

この実験によって,「共鳴重合領域」resonannce overlapping regime においては, T_I と T_L の間の関係が多項式型 (すなわち, β を正数として $T_I \sim T_L^{\beta}$) であることを確認した. しかし, 上の簡単なモデルだけでは, 関係が 3 次であるべきとは言えない. 共鳴の重なり具合とか, 自由度の数に応じてモデルごとに違う可能性がある. 実際上, 異なる仮定からは異なる拡散モデルが得られる可能性がある (たとえば, Lichtenberg & Liberman, 1983 を見よ). その上, 力学系においては, いわゆる「ストレンジ運動学」, つまり, T_I と ε の間の異なる多項式関係を持つ超拡散過程 (Shlesinger et al., 1993) が成り立つ可能性もあることを思い起こす必要がある.

図 7

多項式関係 $T_I \sim T_L^{\beta}$ がモデル依存であること, 少なくとも正指数 β に関してはそうである, というわれわれの考えを確認するため, 同様の数値実験を行った. ただし, 今回のモデルは

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} + \varepsilon \sum_{j=-K}^{K} \sin\left(p_{n-1} + q_{n-1} - 2n\frac{j}{K}\pi\right), \\ q_n &= p_{n-1} + q_{n-1} \end{aligned} \tag{8}$$

である. $K = 80$ と取った. 今回も, $\langle p^2 \rangle$ とリャプノフ指数を写像の $N = 10^5$ 回の繰り返しのもとで計算した. 結果は図 7 に示した. 傾きの最適値は今回はかなり違って, 左から 2.01, 0.28, 6.79 であった.

これらの結果からすると, 解析に使ったモデルとカオス拡散の基礎にある機構を完全に理解しない限り, 測定した T_L から出発して T_I に関する予想値を導くのは非常にむずかしいようだ.

Murison et al.(1994) は数値計算によって $T_I = T_L^{\beta}$ なる関係を発見し, β は 2 に近いとした. 実験は太陽系の不安定領域で行われた. そこでは軌道が惑星軌道と交差し得る. とすると, この強く摂動を受けた領域では不変トーラスは存在だろう. この事実を確認するのは, Murison 達が積分した軌道はみなリャプノフ指数が正であったことである. つまり, 不変トーラスは, もし存在するとしても非常にまれであったはずである. さもないと, Murison 達は少なからぬ確率で不変トーラスに近い軌道をいくつか計算したはずであり, その場合, リャプノフ指数はゼロに近かったはずである. 不変トーラスが存在しないと, 共鳴は重合しているはずである (そうでないと, 共鳴と共鳴の間に十分の空間があって, そこに不変トーラスが存在し得る). Murison 達が T_I と T_L の間に相関を見つけた領域は 共鳴重合領域 であるとわれわれが信ずる理由がこれである. しかし, この特定の場合にどれが重合している共鳴であるかは実際の計算で確かめたわけではない.

4. 結論

本論文では, 理論的考察と数値実験により, ハミルトン力学系に 2 つのまったく異なるレジームが存在することを示した. ネホロシェフレジーム とよぶところでは, 巨視的不安定時間 T_I とリャプノフ時間 T_L の関係は指数関数的である ($T_I \sim \exp(T_L)$). 逆に, 共鳴重合レジーム においては関係は多項式的 ($T_I \sim T_L^{\beta}$, β は正) である.

この考察からすると, Murison et al.(1994) の結果も Milani and Nobili(1992) の結果もともに理解できる. Murison 達の実験は太陽系の不安定領域で行われ,

惑星軌道との交差にいたった. この領域では, 不変トーラスはおそらく失われ (ゼロリャプノフ指数はない), したがって現実に 共鳴重合レジーム に入っていたと期待される. 逆に, Milani and Nobili の実験は, ネホロシェフレジーム なる特徴を持つ領域における共鳴ケースであると思われる.

主張したいのは, べき則 (1) は太陽系における特定の領域での天体の数が少ないことの予知に使われるべきものではないことである. というのは, カオス的現象を引き起こす力学機構が完全には理解されてからである. 事実, 共鳴重合レジーム においてさえ, (1) 式の「定数」α と β は場合ごとに異なり得る. その上, Murison et al.(1994) のように, 実験がまったく一様な領域で行われたとしても, 適合した「法則」からのデータの分散は数桁におよぶ.

最近の論文で, Ferraz-Mello(1994) は, 2/1 共鳴において, $T_L^{1.8}$ が太陽系の寿命よりも短いようなテスト粒子はすべてに対してリャプノフ時間 T_L を得た. Murison らの法則 (1) を信じて, 2/1 カークウッド間隙の存在問題が解けることを願った. 本論文の結果からすると, リャプノフ時間を基にしてこのような結論を出すにあたってはきわめて慎重であるべきだ. 2/1 カークウッド間隙はいまだ未解決であるとわれわれは考える.

現状を述べるなら, 主小惑星帯の構造がどちらに属するかを言うのはむずかしい. 主小惑星帯がネホロシェフレジームにあると予想する. ただし, 低次の平均運動共鳴や, ν_6 永年共鳴, および小惑星帯の木星に近い部分を除く. リャプノフ時間が短いにも拘らず, ずっと小惑星帯のメンバーになっている天体は, 2 次永年共鳴の間の交差点, あるいは高次の平均運動共鳴にあるのだろう. 逆に, リャプノフ指数がゼロに近い小惑星は不変トーラスに近いはずである. 主小惑星帯のすべての小惑星のリャプノフ時間を計算し, 色つきのチャートに表したら面白いと思う. ネホロシェフレジームが主小惑星帯の真の構造であるなら, アーノルド網の概形を認識することになる. でないとすれば, 図は色が入り組んだ混乱したものになるだろう.

短周期彗星の長期力学的ふるまい
The long-term dynamical behavior of short-period comets

Harold F. Levison and Martin J. Duncan, *Icarus* **108**, 18-36(1994).

要約

太陽系のテスト粒子の集まりの長期にわたる力学的進化を追うための新しい計算プログラムを開発し、それを慎重にテストした. この積分子はいままでのものに比べて 1 桁速い. 粒子と惑星の近接衝突も効率的に精度良くあつかえるし, 混合変数シンプレクティック積分子の特徴も兼ね備えている.

新しいプログラムを使ってすでに知られている短周期彗星 ($P < 200$ 年) の軌道を太陽と (水星および冥王星を除く) すべての惑星の影響のもとで 10^7 年間数値積分する. 周期に基づいた分類のもとで, ほとんどの彗星は木星族 ($P < 20$ 年) とハレー族 ($P > 20$ 年) 軌道の間を力学的寿命の間に行き来することが判った. しかし, ティスランパラメータ T はほとんどの彗星で実質的に変化しないことが判った. したがって, Carusi et al.(1987) によって提唱された分類を採用することにした. その分類とは, $T > 2$ の彗星を木星族彗星 (JFC) とし,$T < 2$ の彗星をハレー族彗星 (HFC) とするものである. 未来への積分では 92% の彗星が太陽系外にはじき跳ばされ, $\approx 6\%$ が太陽をかすめて破壊される. 太陽をかすめる (sun-grazing) 彗星の数は既存の解析理論から期待されるよりもはるかに多い. 知られている短周期彗星すべてが破壊されるか太陽系からはじき跳ばされるまでの今後の寿命の中央値はほぼ 4.5×10^5 年である. 木星族彗星の軌道傾斜角分布が平らであることは, 年齢とともに強調される. JFC は HFC とは力学的に異なるから, これらがわれわれに見えるようになったとき, いま観測されるより平らな分布をしているはずである. 衰えるまっでの物理的寿命として納得できる値を使ったとして, いま知られている JFC よりも $5 - 20$ 倍の見えなくなった JFC が存在するはずと計算できる. 見えなくなった JFC の平均 $\cos(i)$ はこの天体に関して得られているデータと両立する.

1. 序

彗星の起源と進化を理解することは太陽系の起源を理解するために決定的である. なぜなら彗星は天王星や海王星, あるいは関係はやや薄れるが, 木星や土星のもととなった氷の微惑星の残りと思われているからである. 彗星は地球上の揮発性物質の重要な供給源であったかもしれない.

短周期彗星 (周期 < 200 年, 以後 SPC と略す) が最近とみに興味深いのは, 起源に関して文献上で論争が行なわれているからでもある. これはオールト雲に起源を持つと信じられ, 惑星との重力相互作用で SPC に進化したと考えられてきた (Newton 1893; Everhart 1972 も参照). ところが最近の一連の議論によると, 球状のオールト雲から大多数の SPC の平らな分布を実現することは不可能である.

Fernández(1980) ははじめて木星族彗星 (彼の定義では $P < 20$ 年) が海王星の軌道のすぐ外の円盤上物質に起源を持つことを示唆した. Duncan et al.(1988, Quinn et al. 1990 も参照) は軌道半長径が $50AU$ 近辺で軌道傾斜角の小さな多くの天体は木星族彗星の軌道に矛盾しない軌道へと進化することを示した. そしてかれらはこの円盤上の彗星が木星族の源であろうと議論した. Stagg and Bailey(1989) はこの発想に反対する議論を展開した. Levison(1991) は短周期彗星のあつまり状態と進化に関する完全な情報が手に入らない限りこの論争に決着はつかないだろうと議論した.

SPC 集団の完全な軌道要素分布は不確かである. 発見されている短周期彗星は観測の選択効果に影響されている. 軌道半長径と近日点が小さく, おそらく軌道傾斜角も小さい天体が選択的に見つかる (Kresák 1981; Shoemaker and Wolfe 1982). この偏向を正すための努力がいくつかなされた (Shoemaker and Wolfe 1982; Fernández et al. 1992) が, いまのところ集団の完全な分布はほとんど理解されていない.

加えて, 短周期彗星の長期的ふるまいに関する理解は貧弱で, これらの寿命に関する見積もりはまだ粗っぽい. Öpik(1963) は統計的半解析理論を用いて 16 個の SPC の期待される寿命を見積もった. 彼の見つけたところによると, かれの取った例の寿命の中央値は約 2.5×10^6 年である. 直接の数値積分で短周期彗星の力学的ふるまいを調べる努力はたくさんある (Azimirchak-Polonskaya 1967; Belyaev 1967; Carusi et al. 1985; Nakamura and Yoshikawa 1991; および Tancredi and Rickman 1992). ただ, これらの研究では積分時間が彗星の寿命に比べてはるかに短く, 長くても 4000 年である. したがって, どの数値積分によっても SPC の力学的寿命を直接計算できていない.

ごく最近になってやっと数値的技術と計算機のハードヱアの進歩により, 彗星の長期にわたる数値積分が可能になった.

この論文では, 1991 年時点で知られている軌道周期が 200 年未満の 160 個の彗星の軌道をすべて計算する. 積分は過去と未来にそれぞれ 10^7 年行なう. ひとつの彗星につき 4 個の軌道を計算するので都合 640 個の軌道を計算する. 2 節では新しい計算技術を説明し, 積分のテストえお行なう. 我々の結果を理解するためにはこの節を読む必要がある. 数値計算技術に興味なない読者はこ

の節を飛ばしてもよい. 3 節では結果を述べる. 結論は 4 節で述べる.

1. RVMS 法

2a. 方法の記述

最近まで, 太陽系の年齢に近いほどの時間にわたって小天体の軌道を精度良く積分し, かつ 小天体と惑星の近接衝突を追う道具立てはなかった. この目的のために新しい積分子を開発した. これは非常に効率的な Wisdom and Holman(1991, 以後 WH91 と呼ぶ) の先駆的アルゴリズムを基にしている. この技術およびその変種は混合変数シンプレクティック法 (MVS 法) と呼ばれている (Saha and Tremaine 1993).

MVS 法ではハミルトン関数をふたつの部分の和として書く.

$$H = H_{Kepler} + H_{interaction}.$$

ただし H_{Kepler} は物体のケプラー運動を表し, $H_{interaction}$ は物体の相互作用による摂動を表す. H_{Kepler} も $H_{interaction}$ も可積分である (すなわち, 各ハミルトン関数から導かれた運動方程式は解析的に解ける). WH91 はふたつのハミルトン関数の表式を具体的に与え, 真のハミルトン関数の時間刻み Δt での運動方程式の解が, 2 次 (Δt^2) まで次のように近似できることを示した. はじめにハミルトン関数のひとつを $\Delta t/2$ だけ適用し, 次にもうひとつのハミルトン関数を Δt だけ適用し, ふたたびはじめのハミルトン関数を $\Delta t/2$ だけ適用する. どのハミルトン関数を最初に適用するかは重要でないことはすぐ判る.

ここで議論する N 体問題の場合, ケプラー部分を適用することは物体を 2 次曲線に沿って運動させることに等しい. 残りの部分を適用するのは単純である. なぜなら, 摂動ハミルトン関数は運動量に依らないから粒子の位置は変化せず速度だけ変化するのである. この手続きは $H_{interaction}$ が小さい限り非常によく機能する. 高次にまで一般化されているが (Forest and Ruth 1990; Yoshida 1990; Saha and Tremaine 1993), 高次のスキームは高価であって, 極度に高精度が要求されるとき (すなわち, ここで考えるような統計的研究よりはるかに小さな刻みを使うとき) のみ勝っている.

惑星摂動が小さいという仮定は近接衝突の際には破れる. この条件は伝統的に物体が惑星のヒル半径 r_H 内に入ったときに生じると考えられている (Lissauer 1993). ヒル半径 r_H とは

$$r_H = a_p \left(\frac{1}{3} \frac{M_p}{M_\odot + M_p} \right)^{1/3}. \tag{1}$$

ここで a_p は惑星の軌道半長径であり, $M_\odot$ と M_p はそれぞれ太陽と惑星の質量である. この状況のもとで, この状況のもとで惑星による加速はふつう太陽によるものよりはるかに大きい. したがってハミルトン関数の MVS 分離はケプラー部分が惑星を中心となるように行なう. このようにして任意の近接衝突を積分する. 他の方法とは対照的に, このアルゴリズムは大近接衝突のときにもっとも有効である. というのは, この場合他の天体からの摂動は十分小さくて軌道は二次曲線に非常に近いからである. だから使用する時間刻みは衝突の時間尺度にほぼ近い.

しかし惑星からの距離がヒル半径の 1 倍から 3 倍程度のとき問題が生じる. このとき太陽と惑星からの力が拮抗するからである. この領域の粒子の場合, 太陽中心の MVS を使う. ただ積分刻みを一定量減少させる. だからプログラムでは必要な場合に計算努力を集中させて複数時間刻みを使う (?).

経験により, 以下の 2 種類の手法を使う. 粒子が通常の時間刻みのはじまりに中間ゾーンに入っているか, 時間刻みの終りにこのゾーンに入るはずなら, 時間刻みを n_1 倍減らす. 粒子が時間刻みのはじまりに惑星のヒル球内に入るか, 時間刻みの終りに入ることが予想されるなら, 時間刻みは別の因子 n_2 倍減らす. 時間刻みを減らす因子の数値は経験から決める. $n_1 = 10$ と $n_2 = 3$ を採用した. 中間ゾーンの外側境界は $3.5r_H$ とした.

近接衝突中の惑星中心座標は, 正則化法として知られる近接衝突アルゴリズム (たとえば Stifel and Scheifele 1971) に似ているが, 数学的には異なる. したがって, これを正則化混合変数シンプレクティック (RMVS) 法と呼ぶ.

付け加えるべき点がある. 実行上, RMVS プログラムがケプラーハミルトン関数のもとで物体を進化させるときにほとんどの時間を使っていることが判った. この手法ではケプラー方程式の差分版を解くことが要請されており (WH91), 惑星中心軌道の場合, 粒子が非有界になることもあり得る. Danby(1988) で記述された普遍変数を含むアルゴリズムを採用した. いくつかの改良を行なった (放物軌道に近い場合のアルゴリズムの改良は離心率の小さい場合の非常に有効な取扱いなど). プログラムは要請に応じて配布している.

2b. RVMS プログラムのテスト

われわれの RMVS 積分子のようなプログラムをテストするのはたいへん複雑な仕事である. というのは, 解析解を持たないカオス系をモデルするために作られたプログラムだからである. したがって例題を用いて, 厳密解に対してプログラムのあらゆる側面をテストするということができない. だからプログラムをテストするための 3 つの方向を追求した. (i) 個々の副プログラム (サブルーチン) を全体に組み込む前に系統的にチェックした. (値からの計算のような) 複雑なルーチンの場合, 独立のルーチンをふたりが作り, 計算機のまるめ誤

差の範囲で一致するまでチェックした. (ii) 保存量のあるような数少ない特殊な場合があるが, その場合をチェックとして使った. 残念ながら, これは限られた場合にしか使えない.

Astronomy and Astrophysics **317** (1997), L75-L78

大域的カオスと内惑星の間隔
Large scale chaos and the spacing of the inner planets

J. Laskar

要約. 太陽系の方程式を 10 億年単位で広範囲にわたって積分した結果, 内惑星の間隔は惑星の軌道の大域的カオスの結果であることを示した. 惑星のさ迷い歩く範囲を制限するのは, 角運動量欠損 (AMD)(円でなくまた平面でないことから来る角運動量の部分) が準保存することだけである. → 内惑星の配置は力学進化の結果であり, 形成時のものでない可能性がある.

本文. 内惑星の軌道はカオスで, 外惑星の軌道はカオスでない (Laskar, 1989, 1990, 1994; Susman and Wisdom, 1988, 1992). 内惑星は動いても不思議ではない.

惑星系のリャプノフ時間は 5 百万年 (Laskar 1989, Sussman & Wisdom, 1992). 1 億年より長い時間では乱歩過程になるだろう. 制限するのはエネルギー保存と角運動量保存.

「角運動量欠損 (AMD)」という考え方： 角運動量を平面円運動成分とそれ以外の成分に分ける. 後者を角運動量欠損 (AMD) と呼ぶ. これ全体が保存する. 個々の外惑星はそれ自身の AMD を保存するだろう. 結局, 内惑星の AMD が全体として保存する. 個々の内惑星の AMD は必ずしも保存しない.

そこで惑星間の AMD のやりとりを調べる (図 1). 数値計算によると, 内惑星の AMD のやりとりは大きく, 外惑星とのやりとりは小さい.

(評：外惑星とのやりとりが小さいのは当然の気がする. 内惑星同士では,「相対ヒル半径」という考えとは合わないように見える)

筆者らの予想：

太陽系初期に内惑星領域に他の惑星があったとする. このときカオス運動は今より激しく, 太陽との衝突を起こしてしまうだろう. 現在の内惑星は生き残りである.

惑星間隔を見積もる：

条件 1) 各惑星の AMD が内惑星全体の AMD より小さい.

条件 2) 各惑星の sweep zone は重ならない. もっと強く, 内側の惑星の遠点が外側の惑星の近点の 90 % 以下である.

条件 3) 内惑星領域は小惑星以内 (1.85AU)

結果は図 2. 現在の惑星間隔とよく合っている. → 惑星間隔は力学進化の結果である.

Astronomy and Astrophysics **317** (1997), 73-81

規則的な軌道とカオス的な軌道を見分ける高速法
A first method for distinguishing between ordered and chaotic orbits

G. Contopoulos and N. Voglis

まとめ

規則的な軌道とカオス的な軌道を見分ける新しい方法を記述する. これは既存の方法より高速である. 既存の方法とは, (1) ポアンカレ後継点, (2) リャプノフ特性数, (3) 回転角の分布, を使うものである. ここで提案する方法は, ヘリシティ角 (helicity angle, ある決まった方向を向く軌道からの角度の小さなずれ ξ), またはねじれ角 (twist angle, あい続くヘリシティ角の差), および引き延ばし数 (stretching number, あい続くずれ $|\xi|$ の比の対数, 短期リャプノフ特性数とも呼ばれる) に基づく. この方法を自由度 2 および 3 のハミルトン系に対応する 2 次元および 4 次元写像に応用する.

序

秩序軌道とカオス軌道を見分ける今までの方法のまとめ.

1) ポアンカレ断面上の後継点の分布

後継点が閉不変曲線上にあれば秩序運動. 点がばらければカオス運動. 自由度 2 にしか使えない. 普通は数万の点があれば十分.

2) リャプノフ特性数 (LCN) $\chi = (\ln |\xi/\xi_0|)/t$ の極限値.

相空間がコンパクトなら特定のリーマン計量によらない (Benettin et al 1976). 実用上, 運動方程式とその変分方程式を同時に解く (Contopoulos et al 1978). χ はゆらぐ. 信頼できるリャプノフ特性数を求めるには 10^6 周期程度計算する必要あり.

3) 回転数

自由度 2 の系のポアンカレ横断面上の不動点のまわりの後継点の平均回転角. 点が不変曲線上にあればすぐ求めることができる. カオス軌道では平均回転角は定義できない. また中心が見つからなければ回転数は決まらない. 数値計算あり (Contopoulos 1966, 1971).

ヘリシティ角

ヘリシティ角 ϕ とは, 与えられた軌道からの変位ベクトルと固定方向 (たとえば x 軸) の間の角度. 自由度の大きな系の場合, 複数のヘリシティ角が定義できる.

自由度 2 でポアンカレ断面をとると, 断面上にヘリシティ角 ϕ_i がひとつ決まる. ねじれ角 $\Delta\phi_i$ は相続くヘリシティ角の差である. つまり

$$\Delta\phi_i = \phi_{i+1} - \phi_i.$$

ヘリシティ角の分布とスペクトル. 写像の N 回の繰り返しのあとで, ϕ と $\phi + d\phi$ の間にあるヘリシティ角の数が $dN(\phi)$ なら, 量

$$S(\phi) = \frac{dN(\phi)}{N d\phi},$$

がスペクトルを与える. このスペクトルは引き延ばし数 (stretching number) のスペクトルが不変である (Voglis & Contopoulos 1994) のと同じ意味で不変である. カオス軌道の場合, 同一の連結カオス領域内では初期条件によらずスペクトルは不変である (図 2 参照).

Reviews of Modern Physics **71** (1999), 835-845

太陽系のカオス運動
Chaotic motion in the solar system

Jack J. Lissauer

目次

I. 序

II. 力

III. 解析的結果および数値技術

IV. 正則 **vs** カオス軌跡

V. 共鳴とカオス

VI. カオスと惑星形成

VII. 散逸に誘導されるカオス

VIII. 惑星軌道の長期安定性

IX. 惑星スピン、他

I. 序

ニュートン力学, 予測可能性, 決定論的

相対論の予測可能性を否定しない. 量子論は不確定性原理, 予測不可能性. 惑星の運動は決定論的, つまり量子効果を無視すれば, 初期条件で未来が一意に決まる. しかし初期値に関する敏感な依存性あり. 実質的に予測不可能. 決定論的カオス とはこのこと. 宇宙の時間順序性に一撃.

振り子. かなめを中心に 1 次元運動する剛体. 一様重力場の中の振り子は正則, 予測可能運動の古典的な例. 二重振り子の動きは複雑. 低エネルギーまたは高エネルギーでは単純. 中間エネルギーで野性的な動き. ほとんど予測不可能 (Shinbrot et al., 1992).

球対称天体の 2 体問題. 三体問題はむずかしい, 四体, 五体問題はきわめて解析がむずかしい. ニュートンは相互作用のために太陽系はいずれ不安定になるのではないかと疑った. 安定化するために神の手が必要?

彗星, 小惑星は大きな惑星に近づくと軌道が大きく変る. 初期条件の違いは, 近接衝突で拡大される. 惑星交差軌道は何度も近接衝突を繰り返すので, 最終的な運命の違いは非常に小さな初期条件の違いからくる. (影の声: 近接衝突を過ぎると, 軌道同士の差は小さくなる (図 1). したがって, 近接衝突を過ぎないうちに別の phase に移らないと, この議論は使えないだろう.) こうして, 近接衝突はカオスの「自明な」例である. 低速接近も捕獲, 繰り返し近接衝突にいたるから, 込み入っている (図 2. Petit&Henon, 1986; Greenzweig and Lissauer, 1990; Kary and Dones, 1996 参照). この場合も近接軌道は発散する. inclined simple billiard problem でも似た状況 (Henon, 1988). シューメーカー・レビ 9 彗星を過去に数値積分しても信頼できる軌道は得られない (Chodas & Yeomans, 1996). 弱い長距離力もカオスの源.

本論文では, 太陽系や系外惑星系で生じているまた生じたことのあり得るカオス運動のタイプをまとめる. カオスと系の長期的安定性の関係を論じる. いままでの review 論文は Wisdom(1987a,1987b), Duncan and Quinn(1993), Laskar(1996), Malhotra(1998). もっと一般のテーマは, Danby(1988), C.D.Murray and Dermott(1999), Peterson(1993).

II. 力

ニュートン重力は太陽系のモデルとして非常に良い. ケプラー運動からのずれは, 摂動による. 一般相対論の補正は小さい. 水星の近日点前進. 10 倍以上摂動が重要. Misner et al.(1973). 量子効果はさらに小さい. 相対論的効果は火星の自転軸の傾きを不安定化する (Touma and Wisdom, 1993) は, むしろ共鳴の効果であり, 違うタイプの力を入れたからではない. 本論文ではニュートン力学のみを考慮する.

小粒子は放射圧を感じる．荷電粒子は惑星磁場で運動を変える (Burns et al., 1979; Burns, 1987)．彗星軌跡は自分の放出する揮発性成分の尾に影響される (Marsden et al., 1973; Yeomans, 1994)．物理的衝突は軌跡を変える．惑星の環を除いて衝突は稀．衝突は小惑星帯，カイパーベルトでは重要かも．ガス抵抗は惑星大気に入射したら重要．ガス円盤内でも重要．

III. 解析的結果および数値技術

惑星間相互作用は惑星質量，軌道傾斜角，離心率などのべきで展開される．小パラメータによるねき展開は小分母の困難に出会う．小分母により，高次の摂動項が大きくなる．Poincare(1892) はべき級数がしばしば発散すること摂動論が有限時間氏か使えないことを示した．

数学的安定性は惑星質量が非常に小さくて軌道要素がいまの太陽系に似ていれば言える (Arnold, 1962)．しかし，定理が適用できない初期条件がいたるところ稠密にある．だから，摂動があると，たとえそれがきわめて小さくても，系は安定でいられないかもしれない．天文学的安定性を問題にするとき，数学的定理は役に立たない．

天文学的な安定性とは，系が安定であって，惑星の衝突合体が起こらず，この結果が摂動に対して頑丈であることである．以後はこの意味の安定性のみを論じる．

三体問題のカオス領域は解析的にモデル化される (V 節を見よ)．しかし，多体問題で得られた解析的結果は適用範囲が狭い．数値研究の方が利用価値が高い．数値実験は過去 2, 30 年の計算機のハードとソフト (積分法) 発達の恩恵を受けている．とくに太陽系の積分アルゴリズムは，恒星系や銀河の積分に使われるものとは実質的に異なる．天体の数が少ない，ひとつの天体の力が他を圧倒する，軌道周期の何倍，何十倍も積分する (惑星系の力学的年齢とは，実年齢/軌道周期)．

効率的なスキーム: ケプラー部分と摂動部分に分ける (Wisdom and Holman, 1991; Duncan et al., 1998)．ケプラー部分は解析的に解く．相互作用も解析的に．2 つのハミルトン関数を交互に解く．時間刻みは大きくとれる．

IV. 正則 vs カオス軌跡

数値実験によると，ある初期条件では軌跡は 正則(準周期的) – 軌道変動は小さく，摂動計算で理解可能，別の初期条件では軌跡は カオス的 で狭い場所に閉じ込められない．カオス的な系の進化は初期条件に強く依存する．決定論的ではあるが予測不可能．カオスは多くの物理系で生じる．Lichtenberg & Liebermann(1992) を見よ．

正則運動とカオス運動の違いの眼目は，2 つの軌道の離れ方，リャプノフ指

数. 相距離 $d(t)$

$$d(t) \sim d(0)e^{\delta t}$$

δ は リャプノフ特性指数, δ^{-1} は リャプノフ時間スケール(図 4). e 倍になるまでの時間. リャプノフ時間は近接衝突が起こると定義されない. (影の声: 本当ですか?) なぜなら相続く近接衝突間の時間が不規則に変化するからである (Whipple and Shields, 1993). カオスの判定条件 (1) は系から放出された物体には適用できない. この場合, 指数関数的でない. (影の声: この statement の意味不明.)

指数関数的発散は初期値への敏感な依存性. 数リャプノフ時間で過去を忘れる. リャプノフ時間で 1 ビットの情報喪失. 10^{-10} の摂動でも, ~ 25 リャプノフ時間で 100%の違いとなる. リャプノフ時間が短いと, 大局的カオスが近い. 大局的不安定性時間はリャプノフ時間より何桁も長い (Duncan and Quinn, 1993; Holman and Murray, 1996). リャプノフ時間は不安定性のよい尺度でない (Murray and Holman, 1997).

V. 共鳴とカオス

太陽系では, カオス領域の分布はランダムではない. カオス軌道は一般に共鳴と関係する. 共鳴の場所では, 小さな衝撃が積み重なる. 共鳴は軌道半長径に比べて離心率や軌道傾斜角に効く. 平均運動共鳴 は天体の軌道周期に, 永年共鳴 は歳差周波数に関係する.

A. カオスの共鳴重合基準

大質量摂動天体と質量なしの粒子を考える. 円同一平面. 平均運動共鳴は軌道周期が $N : N \pm 1$ のところで生じる. 合 (最接近) はいつもテスト粒子軌道の同一位相でおこる. 引っ張り (tug) は coherent に行われる. この 1 次共鳴の強さと幅は, N とともに増大する. なぜなら, 摂動は, 近接衝突の度合が大きいほど強い. 1 次共鳴は摂動天体の近くでは近い. 共鳴領域は重なってしまう. このため, 粒子は各種共鳴による非線形摂動を受ける. 共鳴重合の領域は惑星軌道に関してほぼ対称. 半値幅 $\Delta a_{\rm ro}$ は

$$\Delta a_{\rm ro} \simeq 1.5 \left(\frac{m}{M}\right)^{2/7} a, \tag{2}$$

a は惑星の軌道半長径, m, M は惑星, 星の質量. (2) の関数形は Wisdom(1980) が導いた. 数値係数は計算による (Duncan et al., 1989).

B. 小惑星帯のカオス

小惑星の軌道半長径分布にはパターンがある. 木星との平均運動共鳴 (図 5). 1:1, 3:2, 4:3 では小惑星が集中している. 木星から遠い共鳴では小惑星の数

が減っている. 小惑星分布の説明は以下で.

トロヤ群. L_4, L_5 のまわりを秤動する. 木星に近接衝突しない. 回転系では惑星質量が $1/27$ 以下である限り安定. 秤動振幅が大きいものはすでに取り除かれている. いまでも端から浸み出しているだろう (Levison et al., 1997). 3:2 共鳴の Hilda 群と 4:3 共鳴の 279 Thule には防御機構が働いている. Hilda 群は臨界引数 $3\lambda' - 2\lambda - \varpi$ の 0° のまわりを秤動している. λ', λ は木星, 小惑星の経度, ϖ は小惑星の近点経度. 小惑星が木星と合のとき ($\lambda = \lambda'$), 小惑星は近点近くにいる ($\lambda' = \varpi$), だから木星から一番遠い. 共鳴固定の安定性を Peale(1976) が議論した. Ferraz-Mello et al.(1996) の計算の示唆によると, Hilda 小惑星は必ずしも永遠に結びついておらず, 太陽系の年齢程度で共鳴から逃げ出す.

3:1 平均運動共鳴の初期の研究によると, 5×10^4 年の時間スケールでは, 小離心率で出発すれば運動は正則で離心率も軌道半長径もあまり変化しない. これは低次の摂動展開結果と一致. Wisdom(1982) は $e < 0.1$ なら百万年変化せず, その後突然 $e > 0.3$ にジャンプすることを示した (図 6). カオスゾーンの外側境界を Wisdom(1985a) が決めた. これは 3:1 カークウッド間隙の観測境界と一致 (図 7). ほぼ円軌道で出発した小惑星が離心率を得て, 火星や地球軌道と交差する. だから, 地球型惑星の摂動は 3:1 間隙を掃除する効果を持つ. 小惑星のあるものは, 3:1 共鳴で大きな離心率を得て, 太陽に衝突したり, 太陽の熱で融けたりする (Gladman et al., 1997; Migliorini et al., 1997). 3:1 やその他の内小惑星帯は地球接近小惑星の源 (Wisdom, 1985a; Gladman et al., 1997). 他のいくつかの間隙も共鳴で説明できる (Holman and Murray, 1996). 土星の摂動による木星軌道要素の変動も共鳴領域の天体を不安定化させる (N. Murray et al., 1998).

外小惑星帯で小惑星の数が減っていることの説明はない (Gladman and Duncan, 1990; Lecar et al, 1992; Holman and Murray, 1996). これは太陽系生成時の問題かも (Torbett and Smoluchowski, 1980; Gomez, 1997; Lecar and Franklin, 1997; Liou and Malhotra, 1997). たとえば migration.

カイパーベルト. 小惑星帯と同様な摂動にさらされている (Duncan et al., 1995; Malhotra, 1996). 軌道の衝突進化 (Morbidelli, 1997). 最終的に短周期彗星へ (Levison and Duncan, 1997).

VI. カオスと惑星形成

微惑星から地球型惑星へ (Safronov, 1969). ガス惑星成長の初期段階は微惑星の集積, その後, それが核となって水素, ヘリウムを重力的にとらえる (Pollack et al, 1996, 影の声: 引用文献が違うでしょ. Mizuno を引用しなけりゃ). 惑星系の特徴は微惑星円盤, ガス円盤の性質を受け継いでいるはず. だが, 惑星成長にはカオスが効く (Lissauer, 1995). 微惑星がカオス的交差軌道を動きまわ

る. 重力による focusing で重い質量が速く成長する. 暴走成長 (Greenber at al., 1978; Wetherill Stewart, 1989). 原始惑星が近傍を食い尽くすと, 原始惑星同士は軌道交差しない. 弱い共鳴が積み重なって, 降着が進む (Chambers et al., 1996).

いっぽうにおける降着と他方における微惑星の大離心率軌道への放出は, 星の寿命ほどに系の配置が安定化するまで続く. 共鳴は尽数関係が成り立つところで生じる. 有理比は稠密に存在するからカオスへの道が無数に存在するか (平均運動共鳴, 永年共鳴)? 共鳴には強弱があり, ある共鳴の近くでは速く進化がおこる.

軌道変化は散逸と見ることもできる. ただいこれは純粋な乱歩ではない. 動きは速かったり遅かったり. 似たような軌道から出発するテスト粒子の集合内の粒子の寿命は, 同じ数の粒子が同じ期間に惑星交差する (Holman and Wisdom, 1993). 系が加齢するにつれて, 軌道が交差するようになるまでの期待時間は増大する. これは同位元素の崩壊現象とは違う. すべての周期軌道が不安定であるようなカオス系では, 指数関数的崩壊が起こるが, 非ゼロの安定領域を含む系の場合, 生き残り確率は代数的に減少する (Yalcinskaya and Lai, 1995).

カオスの「海」の構造をうつし出すのは, 大質量天体が少量ある系では簡単である. 逆に, 隣りあう軌道に軽い質量が大量にある系では, 個々の軌道がカオス的にふるまうにも拘らず, 軌道交差までの時間は予言可能である. Chambers et al.(1996) の数値計算

$$t_c = be^{c\Delta_0} \tag{3}$$

t_c が最初の衝突が起こるまでの時間, δ_0 は惑星の初期間隔.

Duncan & Lissauer(1997): 天王星の衛星群で, 質量だけ変えた計算.

$$t_c = \beta m_f^{\alpha} \tag{4}$$

m_f は乗じた質量因子. このべき則は交差時間で 7 桁の範囲で成り立つ (図 8). 軽い方の質量で傾きが急になる系もある. 個々の系の rms 分散は軽質量の場合, 2 倍程度, 大質量になると大きくなる. 内側衛星では $\alpha = -4$, 外側衛星では $\alpha = -10$. (3) と (4) の意味はまだ理解されていない.

Duncan and Lissauer(1997) の計算: 天王星の外側衛星はハミルトン力学系として, 太陽系そのものよりはるかに安定. 内側衛星は, 数百万年または数千万年で軌道交差するかも. 潮汐減衰で安定化するか, あるいは, 内側衛星は太陽系の年齢よりずっと若いか ($\sim 10^8$ 年, 大きな衛星の衝突破片か). 一番不安定なペアが合体すれば, 系全体はずっと安定になる.

軌道の非正則性は惑星系の潜在的 diversity を増大させる. 暴走成長とカオスを結びつけると, 初期条件のちょっとした違いが巨視的な違いとして現われる

ことを意味する. 実際, わが惑星系の原始惑星円盤と同様の初期条件で出発して, 質量も軌道もさまざまな, 3 ~ 5 の地球型惑星が得られる (Wetherill, 1990).

惑星の合体や放出にいたるカオス的相互作用は軌道離心率と軌道傾斜角を増大させる (Duncan and Lissauer, 1997). 太陽系の惑星 (および大衛星) の共平面円軌道からすると, 現在の配置は減衰機構が働いて得られたことが示唆される (多数の微惑星の降着と放出, ガスとの相互作用)(Levison et al., 1998). 最近発見された 70 Virginis(Marcy and Butler, 1996) や 16 Cygni B (Cochran et al., 1997) の系外惑星の大離心率惑星軌道は カオス散乱 によって説明できるかも (Rasio and Ford, 1996; Weidenschilling and Marzari, 1996; 16 Cygni B の惑星伴星の大離心率のもうひとつの説明は Holman et al., 1997 を見よ).

Levison et al.(1998) の計算によると, すなおな動きの巨大惑星系が 10^7 年という特徴的な時間で出現することが可能 (Lissauer, 1993). しかも 10^9 年ほどで, 野生的, カオス的になってしまう.

VII. 散逸に誘導されるカオス

系からエネルギーが失われると系の性格が変る. 系はアトラクターと呼ばれる安定状態へと落ち込む. 例: 強制力なしの振り子. 自明でない例としては, 離心軌道上の月がもうひとつの月と共鳴状態にあるが, いつも同じ距離で最接近する – 共鳴ロック (Peale, 1976). 非常に単純な非線形散逸系 2 つ以上のアタラクターを持つことがある. そしてパラメータによっては正則運動からカオス運動へ移行し得る. ロジスティック写像

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n). \tag{5}$$

$0 < A < 4$ のときは $[0, 1)$ からそれ自身の上への写像. $A \leq 3$ なら, 単一のアタラクターへ. A が 3 より大きいと, 複雑なふるまい. $3 < A \leq 3.45$ なら x は漸近的に 2 つのアトタクターを行き来する. A をさらに大きくすると, アトラクターが「周期倍分岐」する. $A = 3.57...$ で倍分岐が集積すると, カオスが始まる. さらに A を大きくすると, パラメータによって有限個のアトラクターを行き来したりカオス運動をしたり. 詳しい説明は教科書を参照せよ (Bergé et al., 1984; Schuster, 1989; Hilborn, 1994).

微惑星は摂動を受けたケプラー軌道, ガスは部分圧の存在のため, ケプラー速度より遅く動く. 微惑星は前方から風を受けて, 軌道が減衰する. 小さな微惑星ほど影響を受けやすい (Adachi et al., 1976). 動径方向の微惑星の動きにより, 原始惑星の feeding ゾーンが広がる. Weidenschilling and Davis(1985) は惑星との外側平均運動共鳴に捕まることを示した. これで降着が止まる.

Kary et al.(1993) の計算: 大惑星の摂動の下, ガス抵抗を受ける多数の微惑星の運動. 微惑星が惑星に近づくにつれて, 出会う共鳴はだんだん強くなる.

ガス抵抗, 惑星質量を決めると, 微惑星を捉え得る最遠の共鳴は, 惑星により微惑星に与えられる角運動量とガスに奪われる角運動量のつりあいで決まる. 惑星に近い共鳴は強いけれども重合を起こしているのでカオスを引き起こし, trap に寄与しない. 微惑星がゼロでない離心率を持っているので, 落ち込み得る共鳴に近づいたときに, その共鳴に落ち込むかどうかは, 軌道の位相に依存する. だから, どの共鳴に落ち込むかは確率的である. Kary et al. が見つけたところによると, 落ち込む共鳴の範囲の外側境界は惑星質量とガス抵抗に依存し, 内側境界は惑星質量のみに依存する. 共鳴重合条件のみである – (2) 式. ガス抵抗パラメータによっては, 遠くの共鳴に捕まることもあるが, 共鳴重合を起こしている惑星近くの共鳴には決して落ち込まない. これは驚きである (と Lissauer は考える).

ガス抵抗が小さいときの「特殊な」(peculiar) 共鳴に落ち込む粒子の合における平衡位置を吟味して, Kary et al.(1993) が見つけたところによると, カオスへの周期倍分岐が起こる (図 9). 共鳴の落ち込んだ粒子は, 惑星近くを通過するときにはいつも太陽から同じ距離にある, という軌道に落ち着く. これは写像 (5) において $A \leq 3$ の場合に相当する. こうして, 惑星は, 前回の通過時に粒子がガス抵抗で失った角運動量とエネルギーに見合うだけ粒子に角運動量とエネルギーを与える. しかし, いくつかの共鳴においては, ガス抵抗が小さいときにはこのような単一のアトラクターが存在するが, ガス抵抗が大きくなると単一の平衡通過距離が存在しなくなる. そうでなくて, 合のときに 2 つの距離を, 交互に経験する. もっとガス抵抗が大きくなると, 平衡位置は次々と分岐し, 星と惑星に相対的に同じ位置に戻るまでの時間がどんどん長くなる. その際, ガス抵抗の増大量はどんどん減少する. その比は 2 次関数極大を持つ関数に普遍的な値 4.669... に収束する (Feigenbaum, 1978). 系は周期倍分岐の集積値を越えるとカオス的になり, もはや共鳴捕獲は起こらなくなる.

これは筆者の知る限り, 周期倍分岐からカオスを示す唯一の天体力学系である. ただ, 周期的に kick される減衰 rotator と同じである.

VIII. 惑星軌道の長期安定性

太陽系の安定性の問題は 3 世紀以上にわたって調べられてきた. 最近何十年は, 解析計算は数値計算に置き換えられた. 4 外惑星の百万年の数値積分 (Cohen et al., 1973) は摂動計算と比較され, 4 外惑星の準周期的ふるまいを表現した. 加えて, 角度 $3\lambda - 2\lambda_N - \varpi$(冥王星 λ, 海王星 λ_N の経度, ϖ 冥王星の近点経度) は 2 万年で秤動することがわかった (Williams and Benson, 1971). これにより, いわゆる 2:3 平均運動共鳴で, 冥王星が海王星と近接衝突することを避けている. しかし, 長期計算によると, 冥王星の軌道要素は非常に長い周期で変化する兆候がある. そのリャプノフ指数は $\sim (20Myr)^{-1}$ (Sussman, and Wisdom,

1988).

Laskar(1989, Sussman and Wisdom, 1992) は内惑星の軌道もカオス的であって, リャプノフ指数はたったの $\sim (5Myr)^{-1}$ であることを見つけた. このカオスを初期条件および惑星質量の不確定性を結びつけると, 地球の軌道上の位置を 1 億年以上, 過去または未来にわたって追うことは不可能であることが言える (Duncan, 1994). モデル化されない摂動, たとえば, 小惑星の小さな引っ張り, 通過する星の摂動が, 定性的な振舞を変えないものの, 惑星の経度を実質的に変更してしまう (Tremaine, 1995).

観測されるカオスにも拘らず, 太陽系は天文学的には安定のようだ. 8 ないし 9 個の惑星は小離心率, 小軌道傾斜角のまま, 太陽が水素燃料を燃やし尽くし, 赤色巨星になるまで, 太陽に縛られているだろう (Duncan and Quinn, 1993; Laskar, 1997). とはいうものの, カオスによって, この 60 億年のあいだに水星が太陽あるいは金星に衝突したり, 太陽系から放り出されたりするかもしれない (Laskar, 1994). その上, 太陽が進化しなくても, また外部摂動がなくても, 太陽系は無限に安定ではない (Tremaine, 1995).

(4) 式で与えられる質量–カオス関係は惑星系の最終運命に関係する. 太陽のような星は, 主系列後に質量を失う (Sackmann et al., 1993). Duncan and Lissauer(1998) は惑星の相対質量を増やして軌道計算を行った. 天王星の衛星系に対しても, 質量–交差時間関係を得た. ただ, 関係の分散は大きく, 質量パラメータが小さいときの関係式からのはずれは大きい. この場合, 計算が長くなりすぎで, 計算例が少ない. 質量損失ありの場合, Duncan and Lissauer によると, 巨大ガス惑星の軌道は太陽が白色矮星になっても安定. 地球型惑星の軌道も安定. ただし, 計算は 10^9 年. 冥王星の軌道や小惑星の軌道は太陽が白色矮星になるとすぐ不安定になる. しかし物理的には太陽が赤色巨星になったときの影響が大きい.

IX. 惑星スピン、他

以上で太陽系のカオス的側面の記述が終ったわけではない.

衛星のペアの中には, 平均運動共鳴に入ったり通過するときにカオスゾーンを通過して, 潮汐加熱を受けたものもあるだろう (Dermott et al., 1988; Tittemore, 1990; Showman and Malhotra, 1997).

火星の自転軸はカオス的に変化すると信じられている (Touma and Wisdom, 1993). 他の地球型惑星の自転軸も過去に大きな変動を経験したらしい (Laskar and Robutel, 1993). 土星の衛星ハイペリオンはカオス的に tumble している (wisdom et al., 1984; Klavetter, 1989; Black et al., 1995).

多くの衛星は自転・公転が同期する前にカオス的自転を経験したであろう (Wis-

dom, 1987c). 不定型天体のまわりの天体の運動はカオス的である (Petit et al., 1997).

太陽系内のカオスの例はどんどん増え続けている.

Physics Reports **5** (1979), 263-379.

多次元振動子系の普遍的不安定性
A universal instability of many-dimensional oscillator systems

Boris V. Chirikov

目次

1. 序

2. 非線形振動とは何か? 2, 3 の例
- 2.1. 振り子
- 2.2. 正準変換と超収束
- 2.3. 3 乗力
- 2.4. セパラトリックス

3. 非線形共鳴
- 3.1. パラメトリック共鳴
- 3.2. 非線形共鳴の普遍的記述
- 3.3. 多次元振動の共鳴

4. 共鳴相互作用とストカスティック不安定性
- 4.1. 2 つの共鳴: 重合条件
- 4.2. 多重共鳴: 写像
- 4.3. 磁気ビン内の荷電粒子の運動
- 4.4. セパラトリックス近傍の運動
- 4.5. 多次元振動
- 4.6. コルモゴロフ–アーノルド–モーザー理論 (KAM 理論)

5. 振り子のストカスティック振動
- 5.1. 安定性の境界
- 5.2. Krylov-Kolmogorov-Sinai エントロピー (KS エントロピー)
- 5.3. 局所不安定性とストカスティック性
- 5.4. 拡散
- 5.5. 安定性の島

6. ストカスティック層
- 6.1. ひげ写像
- 6.2. ストカスティック層の厚さ
- 6.3. ストカスティック層の KS エントロピー
- 6.4. 安定性境界 (再)

7. アーノルド拡散
- 7.1. アーノルドの例

7.2. 拡散率の見積もり
7.3. さらに一般の場合
7.4. ネホロシェフ理論
7.5. 別のモデル
7.6. 数値実験
7.7. アーノルド拡散はどのように「働く」か?
8. 結論, 注意, 問題

1. 序

2. 非線形振動とは何か? 2, 3 の例

この節では, 1 自由度の非線形振動の簡単な例をいくつか紹介することから始める. 非線形振動子の最も重要な性質, いわゆる 非等時性, すなわち, 自由振動の周期が振幅あるいはエネルギーに依存すること, を見せる. 2.2 節では, 力学変数の正準変換に基づく近代摂動論の主たる発想とその実際への応用を記述する. この技術は以下で使う. 2.4 節では, 非線形振動子の特別な軌跡, いわゆる セパラトリックス を考察する. これは以後の議論で重要な役割を果たす.

2.1. 振り子

振り子の振動は振動, あるいは非線形振動の最古の例である. 何世紀にもわたる, この一見単純な系の研究史からは, その運動が驚くほど幅広いことがわかる. たとえば, 力学的安定性の新しい減少が発見されたのはそれほど昔ではない [16]. 本論文では, とくに, 振り子の性質の研究はまだ完全であることからほど遠いことを見る (5 節を見よ). 単振り子モデルはわれわれにとって特別な役割を持つ. 非線形振動の基本現象のひとつ – 非線形共鳴– がかなり一般的な条件の下でこのモデルで記述されることを見る (3 節).

...

2.2. 正準変換と超収束

2.3. 3 乗力

2.4. セパラトリックス

振り子に戻る. 回転と振動の境界軌跡 を考える. これは セパラトリックス または分離軌跡とよばれる. 異なる種類の運動を分ける. セパラトリックス近傍の軌道は, ちょっとした摂動によって回転から振動へ, また振動から回転へ運動を変えてしまうので, いかに不安定であるかがわかる. このゆえにこそ, セパラトリックス近傍の運動を研究することがたいへん面白い. この場所で非線形振動の不安定性が現われて広がるのであることが以下でわかる.

セパラトリックスは振り子エネルギー $H = U_0$((2.1) 式を見よ) に対応する. だからその相軌跡は ($M = 1; -\pi \leq \varphi \leq \pi$):

$$p_{\rm sx} = \pm 2\omega_0 \cos(\varphi_0/2). \tag{2.29}$$

正負の符号はセパラトリックスの 2 つの分枝に対応する. ...

式 (2.29) を積分すると [5],

$$\varphi_{\rm sx}(t) = 4 \arctan(e^{\omega_0 t}) - \pi. \tag{2.30}$$

...

アーノルドの用語 [5] では, セパラトリックス分枝は「ひげ」(whisker) とよばれる. これは「ひげ付きトーラス」に「つながれて」いる. いま考えている自由度 1 の保存系の場合, ひげ付きトーラスはゼロ次元であって, 点に縮退している. すなわち不安定平衡点 ($\varphi = \pm\pi$) である. 到着ひげと出発ひげあり. 時間反転すると役割は逆転する. ポアンカレの用語 [6] では, ひげは二重漸近軌跡. ひげはホモクリニック軌跡ともよばれる.

...

3. 非線形共鳴

自由度 1 の保存系の自由振動はいつでも安定 (運動が有限のとき). だからつまらない. 外から摂動を与えたらどうなる? ハミルトン関数は

$$H(I, \theta, t) = H_0(I) + \epsilon V(I, \theta, t) \tag{3.1}$$

となるだろう. ここでは, 外部摂動はハミルトン関数が時間依存であることを通して記述されている. 摂動は時間に周期 T で周期的であること, および基本周波数 $\Omega = 2\pi/T$ であることを以下では仮定する. 摂動スペクトルの周波数はこの場合 $n\Omega$ である. 任意の離散スペクトル (Ω_n) を持つ概周期摂動からは何の定性的に新しい効果は出ない. 連続スペクトルではあるが時間的に制限されている摂動 (摂動パルス) もあまり面白くない. というのは, 振動エネルギーに小さな ($\epsilon \ll 1$) 変化しか与えないからである. 最後に, 連続スペクトルを持つ定常摂動, たとえばパルスの不規則列, は系に拡散的な過程を引き起こす. 応用にたいへん重要なこのような過程の理論は線形および非線形振動論の大きな部分を占めるようになった. しかし, 後者の問題は本論文の枠をはみ出している. そこで, ここでは, 摂動が位相に周期的に依存することを仮定する:

$$\tau = \Omega t + \tau_0 \tag{3.2}$$

ここで τ_0 は初期位相である. 摂動を二重フーリエ級数に展開する:

$$H(I, \theta, \tau) = H_0(I) + \epsilon \sum_{m,n} V_{mn}(I) e^{i(m\theta + n\tau)}. \tag{3.3}$$

摂動フーリエ成分の効果は, その位相

$$\psi_{mn} = m\theta + n\tau, \tag{3.4}$$

の時間変化がゆっくりのものほど強い. 定位相の極限では共鳴に至る:

$$m\omega(I) + n\Omega = 0. \tag{3.5}$$

この関係は周波数 ω の共鳴値集合, あるいはエネルギー (あるいは I) の共鳴値集合を決める. しかしながら, 逆の極限, すなわち, (3.3) 式のがただひとつの項 (正確には 2 つの複素共役項) からなっている場合から始めよう. 換言すると, 本節では, 単一 (孤立) 共鳴の性質を考える. 多数の共鳴の相互作用は 4 節で考察する. パラメトリック共鳴の単純な例から始める (3.1 節). この例は加速器理論などにおいて何度も研究されてきた [21]. Ford と共同研究者の論文 [34,40] に非線形共鳴論への同様の手法をみることができる.

3.1. パラメトリック共鳴

この特別の非線形共鳴を選んだのは, 解析的な取扱いが一番容易だからである. ハミルトン関数を

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega_0^2\varphi^2) - \varphi^4/24, \tag{3.6}$$

とする振り子の微小振動を考える.

パラメトリック摂動が

$$\omega_0^2(\tau) = 1 + \epsilon\cos\tau, \tag{3.7}$$

の形をしているとする. 変数を I, θ に変えると,

$$H(I,\theta,\tau) = I + \epsilon I\cos^2\theta\cos\tau - \frac{I^2}{6}\cos^4\theta \quad\to\quad I + \frac{\epsilon I}{4}\cos(2\theta-\tau) - \frac{I^2}{16} \tag{3.8}$$

.....

3.2. 非線形共鳴の普遍的記述

3.3. 多次元振動の共鳴

4. 共鳴相互作用とストカスティック不安定性

共鳴の相互作用とは, いくつかの共鳴, すなわち, ハミルトン関数 (3.3) (または多次元の場合の (3.24) 式) のいくつかの摂動ハーモニクス, の系への同時の影響のことである. 各摂動ハーモニクスは相空間のそれぞれの領域において「自分の」共鳴を決める. 多数の共鳴が同時に影響するとしたらどんな運動になる? 最近まで, この基本的疑問には答えがなかった. ちょっと見ると, 系はある特別な共鳴にあり, 残りの項は非共鳴であって変数変換によって「殺す」ことができるように思える (2.2 節と 3.1 節を見よ). 実は長い間知られていたことであるが (たとえば [17] を見よ), 一連の変数変換を構築して, これは一般に無限個であるが, 非共鳴項を「殺す」ことができる. 極限として, 可積分系にいた

る. そしてそれは安定な系である. しかし, これはあくまでも形式的なトリックである. 現実の安定性は変数の無限列が収束するかどうかにかかっている. 言い換えると, 運動が形式的に安定であるような極限が存在するかどうかである. つい最近まで, このような極限は一般に存在しないと思われていた. すなわち, 生成的 (典型的) 非線形振動子は不安定であると思われていた ([6,27]). この種の発想は有名なポアンカレの定理 [6] に基づいていた. その定理とは, 生成的ハミルトン系はエネルギー以外の運動の解析積分を持たないというものである. 今日, ポアンカレの定理によるこのような理解が間違っていることを知っている (4.6 節). 最近, 力学系安定性の新理論が Kolmogorov[1], Arnold[2], おとび Moser[3](KAM 理論) によって展開された. 彼らは収束摂動級数を構築することに成功し, 一般に, 運動の安定性境界を決定する微小パラメータの臨界値が存在することを示した. KAM 理論の基本的発想は, 4.6 節で概説する. この理論の主結果 – 非線形振動に安定性境界が存在する – は力学系の一般論で基本的な重要性を持つ.

まったく別の線に沿って問題を攻撃できる. すなわち, 定性的に研究できる. もっと言えば, 十分強い摂動の下での運動の積分の崩壊と, その結果生じる不安定性の原因となる機構をグラフ的に調べるのである. 本節は問題へのこのような接近法の記述に費す. 運動の不安定性を引き起こすかなり一般的な機構が, いわゆる非線形共鳴の重合であることがわかる [8,9]. この機構を研究することにより, 厳密ではないにしても効率的な安定性の判定基準を定式化できる. このような判定基準を使えば, 多数の問題に対して安定性境界を見積もることができる [29–37, 59, 92–94, 131].

共鳴重合に起因する非線形振動の不安定性は系の不規則あるいはストカスティック運動として現われる特殊な性質を持つ. このような力学的 (機械的) 運動は, 統計力学を基礎づけるための長期にわたる探索研究の対象であった. これはまさに力学系のエルゴード理論 [28,2] が生まれた場所である. 非線形振動を研究して得られた驚くべき結果は, 極めて単純な力学系が統計的なふるまいを持ち得ることである [10,38,39,34]. 共鳴相互作用の統計的ふるまいは 5 節で議論する.

4.1. 2 つの共鳴: 重合条件

共鳴相互作用のもっとも単純な場合は, たった 2 つの共鳴の相互作用である. このような系の最初の例を詳しく解析的かつ数値的に研究したのは Walker and Ford[34] であるようだ. 以下では, もうひとつのもっと簡単な例を理論解析のために考察する. この例は 7.5 節で必要とされる.

3 次の非線形性を持つ振動子 (2.3 節) に 2 周波数 Ω_1, Ω_2 の駆動力が作用す

るとする. ハミルトン関数は

$$H(P,X,t)=\frac{1}{2}P^2+\frac{1}{4}X^4-X(f_1\cos\tau_1+f_2\cos\tau_2),\quad \tau_1=\Omega_1 t+\tau_{10},\quad \tau_2=\Omega_2 t+\tau_{20}, \tag{4.1}$$

ここで τ_{10},τ_{20} は初期位相であり, f_1,f_2 は小振幅摂動を表す. 変数を I,θ に変える. $X\approx a\cos\theta$(2.3 節) と仮定し, 2 つの共鳴項のみを残す:

$$H(I,\theta,\tau_1,\tau_2)\approx AI^{4/3}-\frac{1}{2}a\left[f_1\cos(\theta-\tau_1)+f_2\cos(\theta-\tau_2)\right] \tag{4.2}$$

2 つの摂動項のそれぞれは相空間の異なる領域において自分の共鳴に責任を持つ: $\omega_{1,2}(I)=\Omega_{1,2}$. 単独の共鳴があるときは, $f_1=0$ または $f_2=0$ である. 知られているとおり, このとき系は可積分であり, 運動は安定であり, 共鳴領域にロックされる. この領域の大きさは 3.2 節の技術を使って見つけることができる. いまの場合, $M^{-1}=\beta^2/a^2$, $\epsilon V_{mn}=af_0/2$ であり, 振幅 f_0 は小さな摂動パラメータである. 周波数での共鳴の半値幅は ((3.22) 式を見よ)

$$(\Delta\omega)_{\rm r}=\beta\sqrt{2f_0/a}$$

に等しい. 2 つの共鳴領域が互いに十分離れているとしよう. つまり, 差 $|\Omega_1-\Omega_2|$ が十分大きいとする. すると, 摂動が小さいことを考慮して, 初期値に応じて系の運動がどちらかの共鳴にロックされていると期待してよいであろう. 与えられた初期条件に対して第二の (非共鳴の) 摂動項に関して言えば, この項は, 単一共鳴の場合に比べて軌跡を少しゆがませるだけである. この期待は数値計算 (たとえば [34], あるいは 5.1 節を見よ) でしっかり確認されている. 一方, 周波数の差 $|\Omega_1-\Omega_2|$ を減少させて共鳴領域を近づけてやると, 第二の共鳴の影響が無視できなくなる. 共鳴が十分近づくと, 軌跡は共鳴のどちらかにロックされなくなり, 一般に系は片方の共鳴からもうひとつへと移り動く. このような運動は, 運動が定性的に別の性質を持たない限り, 不安定な運動とは分類できない (少なくとも 2 つの共鳴の場合; ただし, 4.2 節を見よ). 数値実験によれば, いま問題にしている運動は, まるで系がランダムな力に影響されるかのように (そんな力が働いていないにもかかわらず) 不規則になる ((4.1) 式を見よ). だからこそ, このような運動は ストカスティック振動 とか ストカスティック不安定性 とかよばれるのである. この主たる特徴は 5 節で考察する. このような運動の特殊性のひとつとして強い局所不安定性を挙げておく. つまり, 平均として初期に近い 2 つの解は指数関数的に離れていく (5.2 節).

ストカスティック不安定性の生起条件は共鳴のサイズ程度の距離に別の共鳴が近づいて来ることのようである. このような接近は自然に 共鳴重合 (resonance

overlap) とよばれる. もう少し正確に言うと, 共鳴重合が始まるのはそのセパラトリックスが接触したときである. いま述べた条件の下で, 系がひとつの共鳴から別の共鳴に移る可能性は明らかである. 問題は別のことにある. すなわち, セパラトリックスが隣の共鳴の影響で変形することを考慮しつつどうやって隣り合うセパラトリックスが接触することを計算するか, である. 一番簡単な方法は, 実にあらっぽいが, 無摂動共鳴パラメータを使うことである. つまり, それぞれの共鳴を, あたかも相手が存在しないとして考えるのである. もちろん, これによって大きさの程度の見積もり (order-of-maginitude estimate) が得られるだけであることははっきりしている. この単純な手続きは重合基準について語るときに人々が思い浮かべるものである. この判定基準は, まったくあらっぽいものであるが, かなり複雑な系に対しても (4.5 節) 簡単に実行できる手続きであることから, たいへん効率的なものである.

重合基準はもっと深刻な欠点も持っている. 共鳴の数の問題である. 系 (4.2) では第一近似で共鳴は 2 つしかない. これは位相 θ がゼロ次近似において時間に線形にしか依らないからである. 摂動に影響されて, 位相の時間依存性は非常に複雑になり, 新たな共鳴が生じる. 一般に, 共鳴 $m\omega + n_1\Omega_1 + n_2\Omega_2 = 0$ が任意の整数 m, n_1, n_2 に対して生じる.

- この共鳴集合はいたるところ稠密である (4.6 節). したがって, 1 次 (first order) の共鳴重合がないことは, 運動の安定性の必要条件であって, 十分条件でない.
- また, 重合基準は (摂動の強さに関して) 上限を与えるだけであると言える.
- その上, いったい安定な領域なんてあるのか, という基本的質問がある.
- いたるところ稠密な共鳴集合は, 系が完全可積分でない場合に任意の運動の不安定性をもたらすのか?

上で述べた疑問は, われわれが利用する可視化の考察によっては答えられないものばかりである. これらに答えるには, 数値実験も含めて実験, あるいは厳密な理論が必要である. 最初の道は実験に共通な制限を持つ. たとえば, 有限時間の実験で運動の安定性を納得させる必要がある (?)(5.1 節). もう一方の道は理論モデルの単純さで制限される (4.6 節). いま述べておくことができるのは, 運動の絶対的あるいは永劫安定性が証明できるのは自由度 2 の系だけであること. $N > 2$ の場合, ある意味で, 運動はいつも不安定である (4.6, 7.7 節参照).

ハミルトン関数 (4.2) に戻って, 重合基準を当てはめてみよう. $\Delta\Omega = |\Omega_1 - \Omega_2| \ll \Omega_1$ および $f_1 = f_2 = f_0$ を仮定する. 2 つの無摂動共鳴セパラトリックスが接触する条件は

$$(\Delta\omega)_{\rm r} = \frac{1}{2}\Delta\Omega$$

と, 簡単な形をしている. (4.4) および (4.3) 式より, f_0 の (理論的) 臨界値として

$$f_T \approx \omega(\Delta\Omega)^2/8\beta^2$$

ただし, $\omega \approx \Omega_1 \approx \Omega_2$ である.

この見積もりを数値実験結果 [41] と比較しよう. 実験では, ハミルトン関数の変動の速さと性質を使って不安定性の実験的指標とした. 共鳴重合の下ではストカスティックなふるまいを期待するから, 「拡散率」を計算した:

$$D_n = \overline{(\Delta\overline{H})^2/\Delta t}$$

ここで $\overline{H}$ は, 系 (4.1) のハミルトン関数を $\Delta t_n = 10^n$ 時間単位にわたって平均したものである. 平均したのはなぜかというと, 境界エネルギーの影響を小さくし, 蓄積する変化を取り出したいからである.

...

4.2. 多重共鳴: 写像

4.3. 磁気ビン内の荷電粒子の運動

4.4. セパラトリックス近傍の運動

4.5. 多次元振動

4.6. コルモゴロフ–アーノルド–モーザー理論 (KAM 理論)

5. 振り子のストカスティック振動

本節では, 写像

$$\overline{I} = I + K\sin\theta; \quad \overline{\theta} = \theta + \overline{I} \tag{5.1}$$

で表現される力学系を詳しく考察する. 簡単のため, これを標準写像とよぶ. 前節において, この写像が近似的にある現実の物理系を記述することを見た. たとえば磁気ビン内の荷電粒子がそれである (4.3 節). もっと重要なのは, 標準写像はかなり一般の非線形共鳴のセパラトリックス近くの運動を記述することである (4.4 節). そこで, 標準写像は全般にわたる研究に値する対象である. この写像は非線形写像の一般論の中で非常に特別な場合でしかないのだが. 各種の応用との関係では, 標準写像は多くの仕事で調べられてきた (たとえば [45–47] を見よ). とはいえ, これに関するわれわれの知識は完全であることからはほど遠い. 安定性境界 (摂動パラメータの臨界値 $K = K_1$) のような基本的性質でさえも数値実験によって近似的にしか知られていない. K_1 の解析的見積もりはまだたいへんあらっぽい. これらの問題は 5.1 節で考察する.

運動の性質の問題, また相平面のそれに関係する構造はもっと複雑であることがわかる. 安定性境界の近く $K \sim K_1$ では, 相空間の構造は極めて入り組んでいる (5.5 節). しかし, 不安定領域の奥深くに ($K \gg K_1$) に入ると, 単純な統計的記述が適用できる (5.4 節). この関係では, $K > K_1$ で生じる不安定性は系の不規則 (「ランダム」) 運動として現われる. これはストカスティック運動ともよばれる. このような運動の基本的性質は強い局所不安定性である. これは隣り合う軌道が指数関数的に離れていくことを意味する (5.2 節). 運動の統計的性質はその不安定性の結果である (?).

写像 (5.1) の平明な解釈は, 相続く「蹴り」を受けた振り子の運動である (4.2 節). ある条件の下では, これらの正則 (周期的)「蹴り」は振り子の「ランダム」(不規則) 振動を引き起こす. このグラフ的描像から本節のタイトルが来た. ストカスティック振動は振り子の運動として新しく幾分驚くべき種類のものであることを指摘しておく.

5.1. 安定性の境界

本節では, いわゆる運動の大局的不安定性 (? gross instability) について考察する. 系 (5.1) の無摂動運動の積分 I がいくらでも大きなうろつきを行う. 前の 4 節で, 不安定性の機構というものが, 系がある共鳴から別の共鳴へ移行することに関連することを学んだ. 標準写像の相空間の構造は θ に関してばかりでなく I に関しても周期的である (どちらも周期 2π である. (5.1) 式を見よ). 相平面はだから位相的にはトーラスに同値であり, 相対する辺を同一視した正方形である. ゆえに, この正方形上での運動を, とくに運動量の周期 $\delta I = 2\pi$ にわたって, つまり相隣る整数共鳴 $I_r = 2\pi n$ の間の区間を考察すれば十分である. したがって, 同値な写像

$$\overline{P} = \left\{ P + \frac{K}{2\pi q} \sin(2\pi K) \right\}; \quad \overline{X} = X + q\overline{P} \tag{5.2}$$

を使って標準写像 (5.1) を調べることができる. ただし, 中括弧は分数部分を表す. 新しい写像 (5.2) は変数変換 $\theta = 2\pi X; I = 2\pi q P$ によって, また区間 $(0, 1)$ において P の閉包を取ることにより, つまり, P と $P + m$ の値を任意の整数に対して同一視することにより標準写像 (5.1) から還元される. q も整数である. だから, 写像 (5.2) の相空間は単位トーラス, すなわち単位正方形であり (図 5.1 を見よ), これを 還元写像 とよぶ標準写像の整数共鳴 ($I_r = 2\pi n$) は還元写像の共鳴 $P_r = n/q$ と同一であるから, 系 (5.2) の単位正方形の中にはちょうど q 個の整数共鳴がある ($P_r = 0$ と 1 は同じ共鳴に対応する).

数値的に安定性境界を決めるには, $q = 2$ の値が最適である (2 つの整数共鳴 $P_r = 0(1); 1/2$). 臨界摂動強度 K_1 は以下のように決定された. 異なる K の

値およびさまざまな初期条件 (P_0, X_0) に対して, 系が $P = P_0 \approx 0(\sim 10^{-3})$ のまわりの初期区間から $P \approx \frac{1}{2}\left(|P - \frac{1}{2}| < 0.125\right)$ のまわりの区間に行くまでの運動時間 N(還元写像の繰り返し数) を計算した (??). 量 N は隣り合う整数共鳴の間の遷移時間 ともよび得る. 全運動時間 t(計算した繰り返しの全数) の間に系が $P = \frac{1}{2}$ のまわりの指定した区間に入らなければ, 運動は (時間区間 t にわたって) 安定と考えられる. 数値実験において微分方程式を使うよりも写像を使うおかげで, 計算誤差をまるめ誤差のみに抑えて長期運動を調べることができる. 還元写像を使っての典型的時間は約 10^6 回, 最大では 10^7 回の写像繰り返しである.

図 5.1 には, 時間区間 $t = 10^6 (K = 0.96)$ にわたって安定な運動の相図が示されている. 初期条件 $P_0 = 0.219 \times 10^{-3}$; $X_0 = 0.502 \times 10^{-3}$ の軌跡が相正方形の斜線領域を埋め尽くす. 両方の領域は同じ共鳴 $P_r = 0$ に対応する. 図の 1 つのビンはサイズ $1/128 \times 1/128$ である. 審美的理由から, ひとつの軌跡が通る, 隣のビンは実線で描く. 図 5.1 からわかるように, 軌跡は 10^6 回では隣りの整数共鳴の領域に入れない. ゆえに運動は有界であり, 上で述べた意味で安定であり, 大局的 (gross) 不安定性はない. つまり, 全区間 $\Delta I = 2\pi$ または $\Delta P = \frac{1}{2}$ にわたっては共鳴は重合していない. 一方, 図 5.1 の軌跡は曲線のようでなく, ある面積を埋めるから, 局所あるいは, 制限された運動の不安定性がある. この閉じ込められた不安定性については 6 節で詳しく考察する. ここで指摘しておきたいのは, 不安定領域は共鳴 $P_r = 0$ のセパラトリックスに沿った層をなしていることである.

図 5.2 には不安定運動の相図の例を示した. いまや共鳴は P の全区間にわたって重合している. つまり, 標準写像のひとつの軌跡が次から次へと共鳴を移り渡り, I の変化は無限に大きくなる, すなわち, 大局的不安定性が始まっている. しかし, 図 5.2 に見られるように, 不安定性が起こるのは, 斜線領域の特別な初期条件だけである. 同時に, 不安定な軌跡が入り込めない安定な領域がたくさんある. 2 つの最大の領域は整数共鳴の中心部に対応する: $P_r = \frac{1}{2}; 0$(後者は図 5.2 では 2 つに分かれている). その上, それ以外にたくさんの小さな安定領域がある. これについては 5.5 節で論じる. いままでのところ, 共鳴重合の条件の下でも, 不安定領域は相空間の一部, セパラトリックス近傍からなるだけである. だからこそ, 初期条件として共鳴のセパラトリックス近傍 $(P_0, X_0 \ll 1)$ を選ぶのである.

摂動パラメータに対する遷移時間の依存性を表すデータを図 5.3 に示す. この依存性のきわだった特徴は, ある K に対する N のするどい立上りである.

関数

$$N = \frac{A}{(K - K_E)^B} \tag{5.3}$$

を使ってデータを補間した. ただし, A, B, K は補間を通して決めるべき定数である. 最小自乗法での fit によると,

$$A = 103; \quad B = 2.55; \quad K_1 \approx K_E = 0.989 \approx 1. \tag{5.4}$$

図 5.3 によると, 量 K_E は安定性境界 K_1 の経験値と考えられる.

依存性 $N(K)$ のもうひとつの特徴はおおきなゆらぎである. $K \approx 1$ のあたりでゆらぎは 2 桁ほどにもなる! ある種の初期条件 ($K > K_1$ で) に対しては, 運動はもっと安定である (?). つまり $N > t$ である. この現象は, 見たところ, 非常に小さな安定領域に入り込むことに関係する. この問題は同様な写像で [26] において全般にわたって調べられた. ゆらぎを抑えるために, ちょっとだけ違った初期条件 ($P_0, X_0 \ll 1$. 図 5.3 を見よ) の 100 本の軌跡を平均した.

大きな $K \gg K_1$ では, 上で記述した N を測る方法は意味を失ってしまう. というのは, 共鳴は完全に破壊され, P の変動は「ランダム」あるいはストカスティックになるからである (5.2 および 5.4 節参照). 言い換えると, 飛び越えるべき共鳴がもはやないのである. 一方, 運動がこのようにストカスティックになると, このような領域に適用すべき別の方法がある. すなわち, 5.4 節で示すことになるが, ストカスティック運動は単純な拡散的法則で記述できる.

$$\langle (\Delta I)^2 \rangle = \frac{1}{2} t K^2. \tag{5.5}$$

ここで ΔI は時間 t の間の運動量の変化であり, 平均は異なる初期条件の遺跡の集まりに関して行う. しかし, 安定性境界の近く ($K \geq K_1$) では

$$\langle (\Delta I)^2 \rangle = \frac{(2\pi)^2}{N} t, \tag{5.6}$$

と書ける. ただし, 隣り合う共鳴の間の「ランダムな」遷移がどちらの方向へも等確率で起こることを仮定した ($t \gg N$). ゆえに平均遷移時間 N は関係

$$N = 4\pi^2 t / \langle (\Delta I)^2 \rangle$$

からも計算できる. この方法では K はなんでもよい. ただ, 実際に使うのは十分大きな K(小さな N, 図 5.3 を見よ) に対してだけである. というのは, この場合には十質的に長い計算時間, 最初の方法 ($t \gg N$) に比べて必要とされるからである. 第二の方法で得られた N の値は図 5.3 では □ で表されている. 各点

は 100 軌跡による平均をとっている ($P_0, X_0 \ll 1, t = 10^3$). 両手法は互いによく合っていることがわかる (領域 $K \sim 2.5$).

(5.5) と (5.6) を比べて, $K \gg K_1$ に対して

$$N = 8\pi^2/K^2$$

を得る. 一方, 図 5.3 のデータからは $K \to K_1$ のとき $N \to \infty$ より $K = K_1$ が決まる. したがって, 表式 (5.3) は実験データを補間するように選んだ.

永劫 ($t \to \infty$) 安定性の存在は厳密な KAM 理論の帰結である (4.6 節). しかし, この境界は有限な時間 $t \leq 10^7$ で図 5.3 のデータを使ってどの精度で決めることができるのか? N の大きなゆらぎのために, 誤差の信頼できる見積もりが難しい. しかし, $K = K_1$ の近くで N の立上りが急なので, 誤差はあまり大きくないと期待できる. 別の方法による摂動の臨界強度の測定によると (6.2 節を見よ), K_1 の誤差は数パーセント程度である.

重合基準 (4.20) によって見積もった値を実験データと比較しよう: $K_T = \pi^2/4 \approx 2.5$. 後者は実験見積もり (5.4) に比べてかなりの過大評価である. 図 5.2 を吟味したところによると, すくなくとも 3 つの理由がある.

1. 重合は整数共鳴だけではない. 見積もり (4.20) は整数共鳴のみを考慮に入れた. 高次のハーモニック共鳴の必要である. 図 5.2 では, 2 つの半整数共鳴 (ハーモニック数 $m = 2$) が安定性領域を通してよく見える. この半整数共鳴の内部には X 軸に沿って 2 つの安定領域がある. そのうちのひとつは直線 $X = 0 = 1$ によって 2 つの部分に分割されている. $m = 3$(3 個の安定性領域) の 4 つの共鳴も見える. また $m = 4$ の 2 つの共鳴が整数共鳴 $P_r = 0(1)$ の両側にあ r のが見える. 高次の共鳴が重合を早めることは明らかである.

2. 共鳴セパラトリックスは, 考慮に入れなかった共鳴相互作用により変形している (「ねじれて」いる).

3. セパラトリックスは曲線であるというより層である (図 5.1 も見よ, ストカスティック層, 6 節). これも重合を早める.

以下では単純な見積もり (4.20) を高次の共鳴を考慮に入れて改良しよう. 図 5.2 から明らかに, 共鳴重合へに影響が小さいので, セパラトリックスのよじれ (torsion) を考えない. セパラトリックスのストカスティック層の幅は 6.4 節で考慮する.

高次のハーモニクスを調べるために, 標準写像から同値の連続系でハミルトン関数を

$$H(J, \theta, t) = \frac{J^2}{2} + k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\theta - nt); \quad J = \frac{I}{2\pi}; \quad k = \frac{K}{(2\pi)^2}. \tag{5.9}$$

とするものに移行する (4.2 節を見よ). k は小さいとし, $H_0 = J^2/2$ を無摂動ハミルトン関数とし, 正準変換 $J, \theta \to J_1, \theta 1$ を導入して $\sim k$ 程度の摂動を「殺す」(2.2 節と 4.6 節を見よ). 通常の形の母関数

$$F(J, \theta) = \theta J_1 + k\Phi(J_1, \theta, t)$$

を探す. これより, ,

$$J = J_1 + k\Phi_\theta; \quad \theta_1 = \theta + k\Phi_{J_1}; \quad H_1 = H + k\Phi_t \tag{5.10}$$

を得る. これらの関係を (5.9) 式に代入して, $\sim k$ 程度の摂動を H_1 から消すための $\Phi(J_1, \theta, t)$ に関する偏微分方程式

$$J_1\Phi_\theta + \Phi_t + V(\theta, t) = 0; \quad V = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\theta - nt). \tag{5.11}$$

に到達する. .....

5.2. Krylov-Kolmogorov-Sinai エントロピー (KS エントロピー)
5.3. 局所不安定性とストカスティック性
5.4. 拡散
5.5. 安定性の島

6. ストカスティック層

6.1. ひげ写像
6.2. ストカスティック層の厚さ
6.3. ストカスティック層の KS エントロピー
6.4. 安定性境界 (再)

7. アーノルド拡散

共鳴のストカスティック層内の運動はある意味では普遍的不安定性の表現 (manifestation) と見ることができる. というのは, このようなストカスティック層はどんな非線形振動系にほぼ必ず存在するからである. しかし, 自由度の数が ≤ 2 であると, 摂動が十分小さい場合, 不安定な運動は非常に (指数関数的に) 小さな領域に閉じ込められ, 異なる共鳴のストカスティック層はそれぞれ安定な不変トーラスによって分離される (4.6 節を見よ) ので, 普遍的不安定性は重要性を持たない. したがって, この不安定性による無摂動運動の積分の変動はストカスティック層の中でやはり指数関数的に小さい.

ところが, 非線形振動子の自由度が 2 より大きくなると話がまったく別になる. このような場合, 異なる共鳴のストカスティック層は重なり得る. 層内部の運動はストカスティックであり, とくにエルゴード的であるから, 交差する層全

体にわたって広がっていくことは必然である (4.6 節). 多次元非線形振動のこのような不安定性はアーノルドによって予言され, はなはだ単純な例 [5] を通して展示された (7.1 節を見よ). アーノルドはまたこの不安定性の機構は多次元非線形振動において生成的であると予想した [67]. 重合基準による不安定性の解析が明らかにしたところによると, これはストカスティック不安定性である. だからこそ, これは アーノルド拡散 とよばれるのである [43,41]. アーノルド拡散は磁気ビン内の電子の実験 [101](この実験の解析は [43,138] で行われている) や電子–陽電子ビーム衝突の相互作用に関する実験 [102] によってすでに観測されているように思われる. 最近, 地球磁場のモデルで電子の運動実験がいくつか行われ [126], [101] の結果に近いものが得られた. 多次元非線形写像 [35] の数値実験では, アーノルド拡散と関係するように見える非常に弱い不安定性が観測された. 単純なモデルを使った数値実験で観測される同様な弱い不安定性の質に関するもっとはっきりした解析は [41] で報告されている. この不安定性の目立つ特性は定性的にも定量的にも (少なくとも大きさの程度に関しては) アーノルド拡散の解析理論が論ずるところのものと一致する. したがって, アーノルド拡散の存在は証明されたと信じることができる. [41] の数値実験では, 発展する不安定性の 拡散的 性質が確率されたことをはっきりさせておく. 不安定性の存在そのものの証明, しかも厳密な証明は, すでにアーノルド [5] によって最初の論文で与えられている. これも注意しておく.

7.1. アーノルドの例

[5] において, 自由度 2.5(5 次元相空間, (7.1) 式参照) を持つ系の単純な例が考察された. この系の運動はある種の初期条件の場合, いつも不安定であることがわかった. 系はハミルトン関数

$$H(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2, t) = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2) + \epsilon(\cos\theta_1 - 1)(1 + \mu B(\theta_2, t)), \quad B = \sin\theta_2 + \cos t \tag{7.1}$$

によって記述される. $\epsilon = \mu = 0$ のときは, 系は運動の積分を 2 つ, $I_1, I_2 =$ 一定 持ち, これによって, 2 つの周期 $\omega_{1,2} = I_{1,2}$ を持つ準周期運動の台としての不変トーラスを決める.

$\mu = 0; \epsilon \neq 0$ のとき, まだ $I_2 =$ 一定 と

$$H_1 = \frac{1}{2}I_1^2 + \epsilon(\cos\theta_1 - 1) = \text{一定}, \tag{7.2}$$

という 2 つの積分がある. 後者の積分は非線形共鳴 $\omega_1^\tau = 0$ を記述する. ここで関数 $H_1(I_1, \theta_1)$ は共鳴ハミルトン関数 (3.3 節, 3.2 節を見よ) である. 共鳴のセパラトリックスは $H_1 = 0$ に対応する (2.4 節を見よ). $\mu = 0$ では, 系はまだ完

全可積分であるから, これを無摂動ハミルトン関数と取る. すなわち,

$$H_0 = H_1 + H_2; \quad H_2 = \frac{1}{2} I_2^2 \tag{7.3}$$

元の (摂動) 系 (7.1) は次のように表現できる.

$$\begin{aligned} H &= H_0(I_1, I_2, \theta_1) + \mu V(\theta_1, \theta_2, t) \\ V &= \epsilon B(\theta_2, t)(\cos\theta_1 - 1) \end{aligned} \tag{7.4}$$

(θ_2, t に関して) 周期的な摂動 V は, 非線形共鳴 $\omega_1^{\mathrm{r}} = 0$ における位相振動に影響し (?), とくにこの共鳴のセパラトリックスのまわりのストカスティック層の形成をうながす (6 節). しかし本論文では, 摂動は I_1 を変えるだけでなく, V が θ_2 に依存することから ((7.4) 式)I_2 も変える. したがって, (I_2 の) ストカスティック層に 沿っての 運動も生じる. 層内部の運動のストカスティック性より, I_2 の変動もストカスティックであり, I_2 の拡散が生じる. その結果, I_2 は際限なく変化する. つまり巨視的な (gross) 不安定性が得られる.

図 7.1

共鳴 $\omega_1^{\mathrm{r}} = 0$ は 1 次近似における唯一のものではない. この近似における共鳴全体は図 7.1 に示されている. 6 個の共鳴が含まれる. すなわち,

$$\omega_1^{\mathrm{r}} = 0; \quad \omega_2^{\mathrm{r}} = 0; \quad \omega_1^{\mathrm{r}} \pm \omega_2^{\mathrm{r}} = 0; \quad \omega_1^{\mathrm{r}} \pm 1 = 0$$

共鳴線は 7 箇所で交わる: $\omega_1 = \omega_2 = 0$ および $\omega_1 = 0;\ \omega_2 = 0; \pm 1$. ゆえに, 拡散はこの共鳴集合全体にわたって広がる. しかし, $\mu \ll 1$ の場合, 拡散率は $\omega_1^{\mathrm{r}} = 0$ に沿って以外は無視できる (7.2 節を見よ). 系 (7.2) の不安定平衡点の場所 ($I_1 = \theta_1 = 0$) は, 元の系 (7.1) の全 (5 次元) 相空間において, 2 次元トーラスに対応し, その上の運動は位相 θ_2 と時間 t の変動によって決まる. これは, アーノルドによればまさにひげ付きトーラスである. このひげ付きトーラスに「結びつけられた」3 次元のひげが共鳴 $\omega_1^{\mathrm{r}} = 0$ のセパラトリックスに対応する. $\mu = 0$ の場合, 異なる I_2 の値を持つトーラスひげは $I_2 =$ 一定(不変) であるか

ら, それぞれ孤立している. しかし, $\mu \neq 0$ になると, I_2 が変化して, (I_2 の) 隣り合うひげ付きトーラスに属するひげは互いに交差するようになる. アーノルドのスマートな証明のすばらしい点は, 近いトーラスのひげの交わりという初等的な事実から出発して, 互いに (I_2 に関して) 任意に遠く離れたひげ付きトーラスの近傍を結ぶ軌跡の存在に至ったことである. 自明であることからはるかに遠いこのことを証明するのに, アーノルドは本質的には, ひげの小さな近傍の運動の局所不安定性を利用した. かれ自身はこのことをあからさまには言明していないが. 局所不安定性条件の下でのこのような不安定な軌跡を「構築する」ための基本的発想は 3.3 節で概説した. これはアーノルドの 遷移鎖 によって行われる.

7.2. 拡散率の見積もり
7.3. さらに一般の場合

7.4. ネホロシェフ理論

前節で求めたアーノルド拡散率の見積もりはもちろん厳密でない. 共鳴位相の力学の解析に失敗し, 代りにいくつかの前提を仮定しなければならないならばであるが (??). アーノルド拡散の「上」からの厳密な見積もりは Nekhoroshev[24] によって与えられた. 彼の理論は摂動を共鳴および非共鳴部分に分けて, 後者を相続く正準変換の列によって「殺す」ことに基づいている. 以下では, この理論の基本的発想を説明し, またその主結果を表現する.

ふたたび (7.21) のタイプのハミルトン関数から出発する. ただし, 振幅 V_g の項 (前節と違って単一の項である必要はない) は共鳴摂動を表し, 振幅 V_m の項は非共鳴摂動を表す. 共鳴項は条件

$$|m^g, \omega| < \eta, \tag{7.38}$$

で定義される. ここで η は最適化さるべき小さな量である. 十分小さな η に対して, 線形独立なベクトル m^g の極大数は $N-1$ に等しいことを指摘しておく.

7.5. 別のモデル
7.6. 数値実験
7.7. アーノルド拡散はどのように「働く」か?

8. 結論, 注意, 問題

The long-term dynamical evolution of the solar system

M.J. Duncan and T.Quinn, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **31**, 265-295(1993).

1. 序

太陽系の安定性はニュートン物理学の最も古い問題のひとつ. 太陽系は決定論的カオスの中にいる. 予測不可能性は太陽系の力学に深い影響. 時計仕掛けという 19 世紀および 20 世紀前半の思想が危うくなった. だが, カオスではあるが, 予測不可能なタイムスケールを何桁も越えて太陽系は巨視的には不変. 地球軌道を百万年にわたって正確に計算はできないが, 1AU のあたりで低離心率, 低軌道傾斜角にいる確率はたいへん大きい. 小天体では軌道変化が見えることもある. この変化の起源を理解し, 惑星形成の最終段階との関連を理解するのも重要.

惑星形成過程を概観しない. 形成後の惑星系の力学的進化を概観する. 摂動の下での小天体の運動のシミュレーション結果は, (a) 面白い, (b) 手が届く, (c) もっと一般の力学問題への理解につながる. 非線形力学系の進展は太陽系の理解の手助けになる.

はじめに重力 N 体問題のハミルトン系, とくに惑星系. 内部小惑星帯の永年摂動, 木星との平均運動共鳴近くのカオス運動, カークウッド間隙の起源木星の影響による外側小惑星帯の構造 (3 節).

巨大惑星の間また海王星を越えて向こうのテスト粒子の安定性の数値シミュレーション. 氷微惑星の巨大惑星による散乱とオールト雲の形成. 海王星の向こうのカイパーベルト天体は短周期彗星の源か.(4 節)

惑星系自体の安定性. カオス性. (5 節)

2. ハミルトン力学と太陽系

太陽系の天体が質点と見なせる限り, 太陽系は非線形ハミルトン系. 非線形力学系の数学的技術が使える. 以下の節で数値結果を理解するのに使う鍵概念をまとめる. Henon(1983) や Berry(1978) の概説論文参照. Wisdom(1987) の概説も参照せよ. 著者等の概説も PPIII(1992) にある.

N 粒子系の各粒子は 3 自由度を持つ. 系の状態は $6N$ 次元相空間にあり, 系の進化はこの空間内の軌跡 (曲線). 積分を持つ場合がある. 各自由度に積分が

あれば系は可積分. そのとき軌跡は「準周期的」. 一般の自由度 2 またはそれ以上の自由度の系では, 運動は準周期軌跡と不規則軌跡に分かれる.

不規則軌跡の特徴. それがカオス. 指数関数的発散. 発散の時間スケールは初期条件によらないことが多い. 準周期軌道では, 発散はべき的. 不規則軌跡では指数関数的. $d(t_0)e^{\Gamma(t-t_0)}$. $d(t_0)$ は初期の差, Γ はリャプノフ特性指数, Γ^{-1} はリャプノフ時間. $\gamma = \ln[d(t)/d(0)]/t$. カオス軌跡なら γ はある値をとり, 準周期軌跡ではどんどん小さくなり, 止まらない. 以下の節で例あり. 初期値に対する敏感な依存性. 10^{-10} の違いも, 20 リャプノフ時間で 100%の違いに成長する.

太陽系は近可積分系. 古典摂動論はゼロ次を可積分に取り, 惑星・太陽の質量比, 惑星軌道の離心率, 軌道傾斜角を摂動パラメータとして, 摂動項を高次へと追いやる. 摂動級数は発散する (Poincare, 1892). その後 KAM 定理. 近可積分系では, カオス領域は周波数が有理数で近似しやすいところ, つまり共鳴の近くに現われる. 平均運動共鳴. 永年摂動も重要. 準周期軌道とカオス軌道は入り組んでいる.

3. 小惑星帯の構造進化

小惑星帯にテスト粒子を置き, 長期進化を追う. 重力仮説 – 小惑星帯の実質的にすべての構造は惑星との相互作用に帰着できる. これは木星との平均運動共鳴, 永年共鳴の場所に間隙と逆に集中するところがあることで支えられる. 重力仮説はすべての詳細も説明するか? 間隙は惑星系形成の最終段階に関係しないか (Greenberg & Scholl, 1979).

古典的には永年摂動論. Brouwer & Clemence(1961). ハミルトン関数をケプラー部分と摂動関数部分に分ける. 次に摂動関数を展開する. そして惑星軌道要素の時間依存性のハミルトン方程式を解く. 摂動関数を惑星の平均運動にわたって平均することにより – 永年摂動論 – 良い結果が得られた. さらに摂動関数を最低次に限ると, 1 階の線形微分方程式が得られる. この系を対角化すると固有モードと固有周波数が得られる. 惑星軌道要素の進化は固有モードの和である. 高次を入れると線形でなくなるが, 線形解に似た形の解を見つけることがときにできる. ただし, 周波数は若干ずれ, 固有モードの組み合わせ項も現われる (Bretagnon, 1974). 5 節でこれの正当性を論じる.

惑星質量, 離心率の最低次で, テスト粒子の永年方程式は, 近点引数の歳差周波数に等しい自然周波数を持つ駆動調和振動子の方程式に似ている. 駆動周波数は惑星離心率と軌道傾斜角の固有周波数である. よく知られているように, 駆動調和振動子の解は三角関数の和であり, 自然周波数項の振幅が「自由」または「固有」離心率を決め, 駆動周波数を持つ項の振幅がその周波数と自然周

波数の差を分母に持つ. これは摂動関数を展開するときにしばしば生じることであり, 小分母の問題とよばれる. 2 つの周波数が近づく領域に (永年共鳴) 行くと, 強制振動の振幅は形式的に発散する. 小惑星帯における永年摂動は 19 世紀 (Le Verrier, 1856) にはすでに知られており, 2AU 近辺の小惑星帯の内側境界がそのような共鳴に近いことも明らかであった. Williams(1969, 1971) は強力な手法を提供した. $a < 2.6$AU の小惑星が 3 つの最強の共鳴のために減ることを示した. 同じやり方で内側小惑星帯で数が少ないことも説明された (Scholl et al., 1989).

3.1. カークウッド間隙

まず 1:1 平均運動共鳴のところにトロヤ群. 木星の前後 60° を中心に秤動し, 木星と近接衝突しない. 3:2 共鳴の Hilda 群. これも近接衝突を避けている. 臨界引数 $\sigma \equiv 2\lambda - 3\lambda' + \varpi$ のゼロのまわりを秤動する. 木星との合のときに, 小惑星は近点にいる.

外側小惑星帯の間隙と一般に外側帯の現象を共鳴で説明するのはもっとむずかしい. 3:1 共鳴はよく調べられた. Scholl&Froeschlé(1974) は平均平面楕円三体問題を使ってこの尽数関係を調べた. 5 万年では何も起こらないことを見た.

Wisdom(1982) が突破口を開いた. 3:1 尽数関係近くの共鳴構造を持つ代数写像. 驚くべき結果は, 百万年何も起こらず, 突然離心率が 0.3 を越える. この現象は平均平面楕円三体問題では見ることができないことを Wisdom は示した.

Wisdom の仕事への疑念は, 運動が非ゼロのリャプノフ指数を持つこと (Wisdom, 1983) および写像の示す性質を半解析摂動論が確認して (Wisdom, 1985) 晴れた, Wisdom の離心率変化の図 1 あり.

図 2 はリャプノフ指数の計算. 2 節の γ. 図の例はカオス軌道と正則軌道. 粒子は数百リャプノフ時間も低い離心率の状態にいる. Wisdom(1987) を見よ. 他にも例を挙げている. 相空間の構造.

Wisdom の決めたカオスゾーンの外側境界はカークウッド間隙の境界と一致した. データは番号付き小惑星と Palomer-Leiden サーベイのデータ. 小惑星は火星軌道と交差して取り除かれる. ただし直接計算ではこれは示されていない. また 3:1 以外はまだ研究中. 2:1 やその他の共鳴は (Lemaitre&Henrard, 1990; Yoshikawa, 1991). 小惑星の数が減っているところがシミュレーションでは減らない. 無視した効果が効いているのかもしれないし, 起源の問題かもしれない. 次の研究がまたれる.

3.2. 外側小惑星帯

3.28AU の 2:1 共鳴より外の小惑星帯が数が減っているのは長い間, 木星の影響と思われてきた (Nobili, 1989). 外側では強い共鳴がたくさんあるから自然か? 共鳴重合. Lecar&Franklin(1973) が木星摂動による数の減少を最初に数値的に調べた. 平面楕円三体問題で数千年積分した. 4.0AU より外側での減少はこの期間でも説明可能. 4.0AU より内側では減少は非常に小さい. Froeschlé&Scholl(1979) は 3 次元太陽–木星–土星系で 10^5 年軌道を積分した. 4.0AU 以内は減少が少ない. Milani&Nobili(1985) は木星軌道と交差することを見た. だが, 4.0AU 以内では, 離心率が大きく ($e > 0.15$) ないと交差しない.

Gladmnan&Duncan(1990) は太陽–木星–土星系で 80 テスト粒子を 1.2×10^7 積分した. 範囲は 3.1 ~ 3.9AU. 火星軌道と交差したり, 木星, 土星に近接衝突するもを除いていく. 平均運動共鳴, とくに 2:1, で数が減る. ところが他の共鳴では減らない.

Lecar & Franklin(1992), Franklin & Lecar(1992) は彼らの先駆的仕事を拡張した. 10^7 ないし 10^8 年間外側小惑星帯の天体を積分する. 結果は「重力仮説」に好意的でない. 軌道交差時間はリャプノフ時間の 1.8 乗に比例する. このことから, 彼らの結論は, 3.28AU の 2:1 共鳴の外, 3.54AU までは 45 億年では足りない. そこで, もっと長い積分をやれば結果が得られるかも. とすると, Dermott&Murray(1983) が強調するように, 惑星形成の最終段階に何かの制限条件を課せるかも. 長期計算が望まれる.

.....

Chaos in the solar system

M.L. Lecar, F.A. Franklin, M.J. Holman, and N.W. Murray
Ann. Rev. Astron. Astrophys. **39**, 581-631(2001).

Abstract

太陽系内のカオスの物理的基礎が以前より理解されつつある. いままでに調べられてすべての場合において, カオス軌道は共鳴重合に起因する. おそらく, もっとも明確な例は小惑星帯にある. 重合共鳴はカークウッド間隙を説明し, 小惑星外帯の非常に狭い間隙を予言し, その証拠を見つけるのに役立った. 新しい「短周期」彗星が毎年 1 つ程度発見される. これは「カイパ-ベルト」(40AU ないしそれ以遠) から来ると信じられている. 海王星との平均運動共鳴と永年共鳴で作られるカオス軌道を通ってやってくる. 最後に, 惑星系自身もカオスに無関係ではない. 内部太陽系では, 重合する永年共鳴がカオスの源ではないかと考えられる. たとえば, 水星は 10^{12} 年で金星と近接衝突し, 太陽に突っ込むかもしれない. 外部太陽系では, 三体共鳴がカオスの源として考えられている. ただし, 太陽系の寿命の 10^9 倍の時間スケールを持つ. 人間の時間スケールでは, 惑星は秩序正しく軌道上を運行し, これらの軌跡を数万年にわたって予測することができる. さまよい歩く天体がとっくにどこかへ行ってしまったからである. 太陽系は安定なわけではない. 単に歳を取ったのである.

1. 序

太陽系のカオスとして知られるすべての側面は, 共鳴重合 (resonance overlap) によって引き起こされる. 単一の共鳴による「小分母」はポアンカレの導入した変数変換で取り除ける. 結果は共鳴ハミルトン関数である. 共鳴重合を取り除く道具はない. Brouwer はこれに何か特別なことがあると感じた. 単一の軌道は重合した共鳴があっても積分できる. 共鳴重合を扱えないのは摂動論の欠陥に違いないと Lecar は考えた. しかし軌道の差は指数関数的に発散する.

リャプノフ時間を見積もり, 軌道交差時間もしばしば見積もる. 両方ともストカスティックパラメータ (共鳴重合を測る) に依存する.

太陽系の小天体はカオス的にふるまう証拠がある. 隕石は小惑星同士の衝突破片と考えられている. Vesta はたくさんの隕石と似た反射スペクトルを持つ. たびたび隕石が地球に衝突する. 過去百年のカオス的ふるまいの証拠を持っている. 火星起源の隕石あり.

Kirkwood(1867) は共鳴の場所の間隙に気づいた. その後, 単一共鳴を基礎に多くの説明が試みられた. しかし観測を説明しなかった. 共鳴重合によって小惑星は取り除かれたのである. Wisdom(1982, 1983, 1985) は最初

に 3:1 共鳴の間隙を説明した. 太陽との衝突もあり (Ferraz-Mello&Klafke, 1991; Farinella et al., 1994). 3 節で小惑星帯のカオスを概説する.

「短周期彗星」(周期 200 年以下) は年に 1,2 個. 黄道面に制限され, カイパーベルトから来ると信じられている. カイパーベルト天体の安定性も概説する.

長周期彗星はオールト雲 (2 万 AU) から来る. 星や銀河の摂動. 短周期彗星の場合と機構が違う. ここでは概観しない.

木星以遠の太陽系天体の安定性のサーベイは済んでいる. Holman & Wisdom (1993) は天体のいない領域は不安定であることを示した. 時間スケールは一般に太陽系の年齢よりはるかに小さい. ただし, カイパーベルトのいくつかの彗星軌道はいままさに内部太陽系に向かおうとしている. 彗星のカオス力学は 4 節で概説する.

小天体がカオス運動することは not too alarming である. 彗星と小惑星の個々の質量は地球の 1/1000 より小さく, 全部足しても地球より小さい. しかし, 惑星の運動の規則性に物事は依存する. 惑星運動がカオス的であり得るか? 答えは肯定的である. 時間スケールは長い. 太陽系の年齢の間, いまとほぼ同じ軌道. もっと長くいられるか? 惑星がいなくなる危険はあるか? (Ito&Tanikawa の数値積分) ここでも共鳴がカオスを導く. 働くのは永年共鳴.

初期には, 太陽系の安定性は軌道半長径の永年的ふるまいを見た. あるいは混合永年項. いまや離心率のカオス的増大が問題. 惑星の安定性は 4 節で.

お薦めの参考書: Newton's Clock: Chaos in the Solar System(Ivar Peterson). 概観論文は Duncan & Quinn(1992). 研究会の集録では, Chaos in Gravitational N-Body problem(1996, in Cel. Mech. & Dyn. Astron. Vol.64). Henon(1983) の review. Ott(1993) の教科書. Sagdeev et al.(1988) の本.

2. カオスと天体力学

力学 (mechanical) 系が全時間にわたって安定であるための厳密な条件は各自由度に積分の存在することである. 太陽と 1 惑星はそのような系である (ケプラー問題). 幸いなことに, 太陽は木星の 1000 倍もあり, 残りの惑星は合わせても木星質量以下であるので, 惑星を独立な二体問題と扱うことはたいへんよい出発近似である. 「ケプラー」軌道を使って, 互いの相互作用を第一近似で計算できる. 次々と近似を上げて太陽系の天体の運動を求める. これは 天体力学とよばれる. 古典的教科書は Brouwer&Clemence(1961). Murray&Dermott (1999).

天体力学の歴史の重要な部分は積分の探索. しかし失敗する. ポアンカレは太陽と 2 つの惑星問題で解析積分がないことを証明. 非解析積分は存在する. それは KAM 定理として結晶した. カオスの数学の基本定

理. 摂動が小さく, 結合が共鳴に近過ぎないなら, 「不変曲線」が存在する. 「近い」ということの正確な意味は? 共鳴は稠密だから問題. この問題は Reichl(1992) および Richtenberg&Lieberman(1992) で議論されている. 数学好みなら Moser(1973) あるいは Arnold(1978) を見よ.

KAM 定理は基本的であるが, 定理の条件は太陽系では満たされない. KAM 定理にはあてはまらない軌道を以下では考える.

本概説論文で記述する解析的仕事は摂動論に基づく.

...

2.1. カオスの起源: 「平均運動」共鳴の重合

重合共鳴により生成されるカオスをはじめに天文において調べたのは Wisdom(1980) である. 円制限三体問題において, 隣り合う 1 次の共鳴の重合の幅と程度を計算した. $\delta a/a \sim 1.3\mu^{2/7}$ で与えられる距離まで重合することを見た. 共鳴重合基準を最初に考えたのは Chirikov(1979). 1 次共鳴の幅は, ゼロ離心率の場合に, 制限三体問題で Franklin et al.(1984) が求めた. それによると, 平均運動共鳴の幅は

2:1 0.621 - 0.639
3:2 0.749 - 0.778
4:3 0.808 - 0.843
5:4 0.841 - 0.883
6:5 0.863 - 0.908

4:3 は 5:4 と重合し, 木星にもっと近い共鳴はすべて重合している. 4:3 共鳴は 0.825 にある. Wisdom の公式は $a > 0.82$ でカオスが始まることを予言する. 平均運動共鳴が重合するこの領域はリャプノフ時間 T_l と摂動天体と近接衝突するまでの時間 T_c が適用できる場所である. この関係は経験的に Lecar et al.(1992) が発見した: $T_C \propto T_l^{1.75}$.

Murray&Holman(1997) はこの関係をストカスティック性パラメータ $K = (\pi\Delta\Lambda/\delta\Lambda)^2$ で説明した. ここで $\Delta\Lambda$ は共鳴の幅, $\delta\Lambda$ は共鳴同士の間隔である. K_c は共鳴重合が始まるパラメータ値として (~ 1), $\Delta K = K - K_C$ とすると, $T_j \sim \Delta K^{-1.65}$ および $T_c \sim \Delta K^{-2.65}$, したがって $T_c \sim T_l^{1.6}$ を示した. これは 1 次共鳴が重合する領域 ($\mu^{2/7}$ 領域) で成り立つ. この領域の軌道は T_c が 3 桁も変る. しかし, この領域の外では, 5:3 共鳴 (2 次の共鳴) では関係の誤差は 10 倍, 7:4 共鳴 (3 次の共鳴) では 100 倍の誤差がある. 彼らは Helga(12:7 共鳴, 5 次共鳴) のクローンを 10 個積分した. そのうち 5 個はリャプノフ時間が 6000 年から 1 万 3000 年であった. これらは 10 億 ~ 40 億年で木星に衝突する. この場合, 関係が予言するのは $T_c \sim 6$ 百万年であるから, 1000 倍も違う. Murray&Holman(1997) はこのような高次共鳴においては, カオスの機構は subresonance の重合であり, 重合する同じ平均運動共鳴の subresonance の間の拡散は平均運動共鳴重合より遅いことを示した.

高次共鳴の幅は, ゼロ離心率のときは非常に狭いことは注意しておくべき. たとえば, Franklin et al.(1984) から, 1 次共鳴の幅はゼロ離心率の

とき $\mu^{2/3}$ に比例する. 2 次共鳴の対応する幅は μ に比例し, 3 次共鳴の幅は μ^2 に比例する. こうして, 2 次および高次の共鳴は狭すぎて低離心率では重合しない. しかし, 高次共鳴は 1 次共鳴のそでで起こり得る.

3. 小惑星帯の力学

小惑星の軌道半長径分布を理解すること, とくに木星と平均運動が尽数関係にある場所の分布を理解することは 130 年にわたってパズルであった. たいていの平均運動共鳴 n_A/n_{Jup} で間隙なのに, 2 つの場所では集中している. これがむずかしい. 過去 20 年間の進展はすごい. 広い意味ではすでに解かれた. 軌道不安定性の源を特定できるしその帰結の性質もわかるし, 関係する時間スケールもわかる. 数値的および解析的研究がともに貢献した. 小惑星分布の間隙を作る過程に関してはまだいくつか解明すべき点も残っているが, 重要なものは太陽系の現在の環境に関係づけることができる. 間隙を作るのに 10 億年かかる場合もあるが, 太陽系形成過程にまで戻る必要はない.

カークウッド間隙に関して時代を画した論文は Wisdom(1982) の $a = 2.50$ の 3:1 平均運動共鳴に関する論文. 彼の驚くべき結果は, 長期間離心率の小さな (< 0.1), 静かな状態が 10 万年続き, $e = 0.35$ に達する期間が 1 万年続く. この離心率の値なら火星軌道と交差する. 100 万年にわたる数値積分は 20 年前にはまれであった. Wisdom の新手法は平面楕円制限三体問題の写像を展開させたこと. 2 つの効率的技術で. 1 つは, 短周期項をデルタ関数で近似すること. もうひとつは, 離心率の 2 次のハミルトン関数を 3:1 共鳴で秤動する角変数で平均したこと.

その後の 2 つの論文で Wisdom(1983, 1985) は直接数値積分により, $e_{\max} = 0.35$ の存在を検証した. また 3 次元問題にして $e_{\max}$ が 0.6 になり得ることを示した. 地球軌道とも交差する. 同時に, カオスゾーンの広がりを計算し, 観測される 3:1 間隙に合うことを示した. この結果が引き起こした興奮の渦はいろいろな分野にこだました. 直接の力学過程として (a) ひとつの共鳴で間隙を作り, (b) 原理的に他のカークウッド間隙へも拡張でき, 余録として (c) 小惑星の破片を内惑星領域に隕石としてもたらすもの, – これは最後に解明された. Ferraz-Mello&Klafke(1991) と Farinella et al.(1994) は, 平面楕円三体問題の場合でも, 低 e のときにカオスゾーンは $e > 0.6$ のゾーンにつながっており, $e \to 1$ も起こり得ることを示した. 図 1 は Wisdom が 3:1 で見つけたカオス的ふるまいを手短に見せている. 図 1a は 3:1 共鳴における木星のアプス軸 ϖ の動きと低離心率天体 ($e = 0.05$) のアプス軸の動きを示す. 図 1b は両方の ϖ がほぼ一致したときに離心率のうねりが生じることを示す. 実は, $\varpi_A > \varphi_J$ のときに e が上昇する. アプス線や交線の動きが一致することは太陽系研究においては永年共鳴とよばれている. 小惑星帯のある種の場所での永年共鳴の重要性は以前から (Brouwer&Clemence, 1961) 認識されていたが, 平均運動共鳴の中でのその役割が評価されたのは, ここ 10 年である. 平均

運動共鳴で生じる摂動は, そこにある天体の軌道要素に大きく影響を与える. e や i の値に応じて, アプス線や交線のさまざまな動きを引き起こす. 木星–土星系のアプス線や交線の動きは Williams(1969) によって ν_5, ν_6 とか ν_{16} というようにラベルを付けられてかなりの精度で定義されている. 3:1 共鳴で秤動する $a_0 = 0.481$ および $e_0 = 0.05$ の天体のアプス運動を示す図 1a は ν_5 の周波数, あるいは ν_6 と共鳴状態になり得る.

多くの重要な平均運動共鳴内に閉じ込められている永年摂動の位置と限界を図に表すことは Moons & Morbidelli(1995 およびそこの参考文献) の論文で理論的根拠が示された. この仕事は平面問題だけに集中し, ν_5 と ν_6 しか考えなかったが, 重要な結果として, 高次共鳴 3:1, 5:2, 7:3 内において ν_5 と ν_6 永年共鳴が a と e の広い範囲にわたって存在すること, つまり, これら 3 つの平均運動共鳴内部に広がったカオス条件が存在することを示し得た. 図 2 は 5:2 共鳴に関するかれらの結果のサンプルである.

Moons & Morbidelli(1995) が発展させた描像を見て, Gladman et al.(1997) は各種平均運動共鳴内に置かれた多数の天体の運命を調べた. 真実の意味で, 彼らの論文は, 離心率の増大がカークウッド間隙の理由であるという Wisdom の元々の示唆を精密化し culmination したものである (Wisdom を褒めすぎ. Holman の師匠ではあるが. 先祖を褒めることにより, 自分を褒めたことになる. なるほど. これはもちろん使える). Wisdom の見つけた $e = 0.35$ を越えての増大は指摘されてはいたが, Gladman et al. は 3:1 共鳴内部にばらまかれた 1000 体, 5:2 内の 450 体, 7:3, 8:3, および 9:4 内の各 150 体の積分により精密な統計資料を用意した. かれらの定量的研究により, Wisdom(1983) の指摘した力学的遷移過程が記述された. すなわち, 地球型惑星との重力遭遇がエネルギーを十分に変化させ, 運動は正則からカオスへ, またある共鳴から別の共鳴へ移り得る. いまや, 3:1 間隙 (図 3 を見よ) の発展は不可避であることを主張する根拠を持つ. もちろん詳細は複雑であり, いくつかの時間スケールがからんではいるのであるが. 以下の 2 段落でその過程を概観しよう.

まず, $e < 0.25$ で 3:1 にいる天体の場合, ν_6 の永年共鳴が離心率を 1 近くにまで押し上げる. 数百万年で太陽に衝突してしまう. これは初期条件の 70%であった. そのうち 1/4 ないし 1/3 は直接衝突, 残りは地球あるいは金星に散乱されてから衝突する. 残り 30%は土星の外の不安定軌道となる.

第二は 3:1 共鳴の他の初期条件の天体の運命. 臨界引数が巡回するか, 50° 以上の秤動を行う, 任意離心率の天体を待つ運命. しかし, $e > 0.3$ の天体および小さな秤動を行うものは異なる結果が待っている. この概観論文を用意するにあたって, $0.3 < e < 0.6$ の軌道で, 中程度の秤動 $< 40^\circ$ をするものが 3:1 共鳴の安定な秤動メンバーであることを見た. これらは規則的 (regular) であって, 10^7 ほどの積分期間の間に角軌道要素の間に指数関数的成長のしるしが見えなかった. 図 4a–c はこれらの例である. 3 つとも積分の終了 20 億年まで規則的軌道として留まった. しかし, これ

らの安定軌道の離心率は 0.5 まで上昇した. だから火星との衝突の危険性があった. (火星は積分に含まれていない.) Gladman et al. は 3:1 にいた天体の 5%は「火星によって抜かれて」しまう. すなわち, 軌道は火星によってまず十分に摂動を受け, その後の近接遭遇によって, 太陽に衝突するか, 土星の外に散乱されてしまう. これが, そうでなければ安定なはずの高離心率軌道の運命である. 「そうでなければ」とは, 木星と土星だけしか存在しない場合を意味する. 彼らの議論によると, 3:1 小惑星数の減少のこの位相は 1 千万ないし 1 億年が必要である (1 億年後に残るのはほんの一握り) が, 最終結果は低離心率の相棒と同じである. 結論は以下のとおり:
3:1 共鳴に初期に存在した小惑星は自然な多重段階力学過程によって, ここから追い出される. この過程には金星から土星までが貢献する.

5:2 共鳴は 3:1 共鳴に比べて 1 次高次であるが, やや面白い違いはあるものの, 同様のふるまいが生じる. 3:1 の場合と同様, 離心率は 3 つのレジームに分かれる. (a) 低 e の軌道は ν_6 の影響で強くカオス的である. これは $a \simeq a_{5:2} = 2.78\mathrm{AU}$ およびすべての $e < 0.2$ の軌道にあてはまる. 図 5a–d に例がある. (b) $0.2 < e < 0.40$ の場合, 秤動振幅が 11° 未満である限り, 軌道は正則 (regular) である. (c) すべての高 e に対して, 軌道は少なくともときどき永年摂動に入り, e が > 0.7 にも達して非常にカオス的である. これらは 3:1 との類似性を強調するが, 第二のカテゴリーの天体には新しい特徴が 2 つある.

まず, これらの e は火星との近接衝突が起こるような値まで広がっていない. 次に図 5c,d が示すように, 多くの場合のうちのひとつのケースとして, 永年共鳴の存在は必ずしも極端なカオスに対応しない. 併せて考えると, 図 5a–d は 5:2 平均運動共鳴にある 2 つの天体の永年共鳴への異なる応答の例となっている. $\varpi_A - \varpi_J$ の振幅が大きいか, ν_6 項の周期と ϖ_A 振動の周期がたまたま一致すると, カオスがきびしく現われ, $\sim 1000 P_J$ ほどのリャプノフ時間となる. 対照的に, ϖ_A の振動が ν_6 の周波数に合わなかったり, 振幅が小さかったりすると軌道は正則である. ありそうな結論は, ν_5 は ν_6 よりずっと小さいということである. Moons&Morbidelli(1995) のおかげで, 永年共鳴の位置と, それが働く軌道要素の範囲に関して正確な知識を持っている. 足りないのは, その強さ – これらが平均運動共鳴内部でつくり出すカオスの measure – である. Murray&Holman (1997) は平均運動共鳴が重合したときのリャプノフ時間を計算する手法を開発した.
永年共鳴と平均運動共鳴が重合したときの場合が定式化できればすごい.

Gladman et al. は 5:2 からの天体の漏出は 3:1 の場合によく似ていることを見つけた. すなわち, どの天体も 1 億年以内に取り除かれた. われわれの示唆は違う. ゆっくりした拡散によりカオス領域に入って取り除かれない限り, $e < 0.40$ で秤動する多数の天体は残る. しかし, これには矛盾はない. Gladman et al. は 5:2 共鳴の役割として 3 個の近接する群の小惑星を内部太陽系に送り込むことを考えており, それに応じて初期条件を

選んだからである．このような分布の中に秤動天体を入れることは考えにくい．対照的に，3:1 におけるかれらのサーベイは，3 つの族の進化を追いはしたが，1000 個のランダムに選んだ軌道も入れた．小惑星センターのファイルは 5:2 の上記離心率範囲の候補を 30 も含んでいる．これらが小さく秤動して永年効果を避けるのかは知られていない．

Moons & Morbidelli(1995) はまた，4:1 平均運動共鳴内にある (弱い) 永年共鳴 ν_5 の図を得た．だが，4:1 自身はその位置 (軌道半長径) がもっと強い ν_6 や ν_{16} 永年共鳴の場所と一致するので重要でない．これら永年共鳴はどの平均運動共鳴とも独立に，2.1AU における小惑星帯の内側境界を定義する元であることがいまや知られている．

Moons&Morbidelli(1995) と Gladman et al.(1997) は 7:3 平均運動共鳴も調べた．前者の論文は ν_5 も ν_6 も 7:3 の中心に控えていて，ともに $e \to 0$ および e が 0.65 のときにその大きな部分を占める．本概説論文を用意するにあたって，この共鳴内に 120 個の天体を入れ，いたるところきびしいカオス ($T_l < 2000 P_J$) を見た．Gladman et al.(1997) は 7:3 における集中度の減少は 5:2 におけるよりゆっくり進むこと，初期天体のほぼ半分が 4 千万年の積分時間まで生き残ることを見つけた．われわれの結果はほぼ同じであるが，減少率が少なくともかれらの 2 倍であるらしい．いずれにせよ，図 3 が証言し，両方の論文が予言するように，7:3 は単に集中度が少し減ったのではなく，真に発達した間隙である．

5 次の共鳴 8:3($a = 2.71$AU) および 9:4($a = 3.03$AU) はほかの事に関しては完全な Moons&Morbidelli の論文で触れられていない．そこで，それぞれの共鳴に 50 体を入れ，カオスが重要であると思われる場所について何らかのアイデアを得ようとした．いくつか驚くべき結果が得られた．8:3 においては $e_p < 0.19$ の軌道は厳しくカオスである．$T_l < 2000 P_J$ であった．$0.19 < e < 0.35$ の範囲では，まったく規則的であった．ここでは $\log T_l > 4.5 (P_J)$ であった．もっと高 e になると次第にカオス的になる．ただ $e = 0.4$ 火星と衝突するから，ここはあまり重要でない．9:4 では，$e_P < 0.2$ でカオス的であり，$0.2 < e_p < 0.32$ ではカオスの度合は低い．それでも平均 T_l は 8:3 に比べて 3 倍ほど短い．$e > 0.32$ ではふたたびカオス的になり，$e > 0.45$ は火星交差軌道である．Gladman et al.(1997) は 8:3 と 9:4 では不完全にしか小惑星が放出されないことを見つけた．前者では 4 千万年に半分が生き残り，後者では 1 億 2 千万年に 3/4 が生き残った．これらの見積もりは，図 3 の分布と定性的に一致する．[9:4 と 11:5(3.08AU) の相互作用は，幅の広がりの原因であろう.]

もっと長期間の数値サーベイで拡散率を定量化することが望まれる.

3.1. 外側小惑星帯のカオス

3.28AU の 2:1 共鳴によって数の多い内部帯とはるかに疎な外部帯の分かれる (図 3)．外部帯は全体として系統的に内側よりカオス的であり得るか? 答えはもちろん肯定である．最近，そのカオスの広がりや程度を計算できるようになった．Holman and Murray(1996) は 25 個の外帯小惑星の

うち 22 個はリャプノフ時間が $6000P_J$ より短い示した. ただし, 内側帯にだっていままで考えていたよりカオスがあることは強調しておく. Murray et al.(1998) や Nesvorny&Morbidelli(1998) の独立の仕事によれば, 土星の経度や木星, 小惑星の経度のからむたくさんの三体共鳴 (Aksnes, 1988 を見よ) がカオスの主たる原因である. Nesvorny&Morbidelli(1998) は番号付き小惑星の約 250 個の軌道のカオスを三体共鳴まで追跡し (?), リャプノフ時間が 1000 ないし $10000P_J$ であることを見た. 本論文の著者の示すところによれば, これらの共鳴は外帯では密度が高く, 軌道を不安定化させる.

Holman and Murray(1996) や Murray and Holman(1997) は多数の高次共鳴の場所 (たとえば 12:7) で軌道のふるまいを吟味して外帯のカオスを調べた. リャプノフ時間と拡散時間スケールを解析的にも数値的にも計算し, 比較のため, エスケープ時間もいくつかに対しては計算した. 個々の平均運動共鳴の間の重合をカオスと関係づけた. 12:7 の場合を例として考えよう. 平面の場合, これは 6 個の (sub)resonance からなる. 2 つのアプス経度のさまざまな倍数になる. たとえば,

$$\sigma_k = 12\lambda_J - 7\lambda_A - k\varpi_A + (k-5)\varpi_J, \tag{9}$$

である. $k = 0, 1, \ldots, 5$ であり, λ と ϖ は平均経度とアプス経度である. たとえば k と $k+1$ で定義される 2 つの成分は重合し得る. Holman and Murray(1996) はその位置と幅を得て, 重合がカオスを引き起こすことを示した. いま考えている平均運動共鳴の中でのカオスを解析するこの手法は Moons & Morbidelli(1995) が使ったものと数学的に同値である. 彼らは式 (9) の $\sigma(k)$ で定義される共鳴と永年共鳴

$$\sigma_{\rm secular} = \varpi_A - \varpi_J = [\sigma(k+1) - \sigma(k)] \tag{10}$$

の間の重合を考察したのであった. 後者は Wisdom が 3:1 共鳴を解析するときに取った手法である (Wisdom, 1985). この手法では, ときに $\sigma(k)$ と σ(secular) に関係する時間スケールの間に適当な分離されていることが仮定される. そのため $\sigma(k)$ に関係する作用は断熱的に保存される. ただし, 軌道がセパラトリックスに近いときは別である. しかし, これらの時間スケールは小惑星帯のたいていの共鳴ではうまく分離していない.

図 6 は Holman & Murray のいくつかの結果を描く. (a) 外帯の小惑星はすでに 4 次の共鳴からは放出された (例外は 11:7). だからあまりはっきりしないがカークウッド間隙もある. (b) 5 次共鳴のエスケープ時間は太陽系の年齢にほぼ等しい. (c) 6 次共鳴の天体は 10^{11-12} 年ほどで放出される. ここでふたたび, 本論文の他のところで議論する問題にぶつかった. リャプノフ時間は数千 P_J を測る. ところが細心の注意で計算したエスケープ時間は太陽系の年齢を越える. 放出するのに必要なこの長時間からすると, 何か他の過程が貢献して, 広がった外帯から共鳴および非共鳴天体を取り除いたはずである. Holman & Murray(1996), Liou & Malhotra(1997),

Nesvorny & Ferraz-Mello(1997) は, 惑星の移住 (migration) に目を向けた. これによって, 外帯に各種の共鳴が入ったり出たりする (通過する). とくに後者の論文が強調するように, 木星土星の平均運動の 5:2 尽数関係の近くに変化があれば, 力学過程が起こり得る. Lecar & Franklin(1997), Franklin & Lecar(2000) は太陽系星雲の崩壊にともなって, 永年共鳴が小惑星帯を掃いて行くことを定量的に調べた. これらによると, この機構により 3 つが実現される: (a) 外帯における初期の小天体の大部分が取り除かれる, (b) 内帯の初期の値から 1000 分の 1 に減り, いまの観測に合う, (c) 知られた小惑星の特徴となっている離心率分布が説明できる. かれらはガス抵抗も考慮した.

3.2. 1 次平均運動共鳴におけるふるまい

最後に, Morbidelli&Moons がかつて「もっとも神秘なもの」とよんだ 2 つの 1 次共鳴のふるまいに戻る. はじめに 2:1 共鳴, $a = 0.630$ の大きな間隙の原因の議論から始め, 3:2 共鳴, $a = 0.763$ における小惑星の集中の議論を行う. この神秘のベールのすべてではないにしても一部は, モデルが現実的になって薄くなってきた. もっと正確に言えば, モデルの中で木星と土星が歳差する楕円軌道になっていないと, 1 次平均運動共鳴におけるふるまいをきちんと説明することはできない. 3:1 や 5:2 などの高次の平均運動共鳴内部での発展するカオス (developing chaos) 内の永年共鳴の重要性は, ここでもそれが一番重要であるという期待を抱かせる. しかし, 詳しい図 (Morbidelli & Moons, 1993) によると, 2:1 と 3:2 共鳴の中心部でカオスを生成する ν_5 と ν_6 の役割は離心率が $e > 0.45$ および 0.25 の軌道に対してのみあてはまる. 理由ははっきりしている. e が小さいと, 1 次共鳴は近点経度 ϖ_A を動かすけれども, そのスピードは 2 つの主項の速い方 (すなわち ν_6) – ϖ_J を測る– の動きよりもずっと速く動かす. $e = 0.15$ なら 30 倍ほどである. 図 7a に示されるように, 2:1 共鳴自身と重合したときにカオスの源になるような別の共鳴を探すべきである.

探すべきものは, (共鳴) 秤動とアプス周波数の倍数の間の尽数関係を含むものである. 前者は (9) 式に似た適当な臨界角度 σ の規則的な振動によって定義される. 厳密に周期的な解に対しては $\sigma = 0$ である. 平均運動共鳴にある現実の天体では σ ははっきりした周期と振幅で振動し, それは軌道要素, とくに軌道半長径と離心率の規則的な変動に対応する. σ の周期は e とともに上昇し, 2:1 と 3:2 では 15 から $75P_J$ の範囲にある. ここで P_J は木星の軌道周期 11.86 年である. アプス周期も e に依存する. e が非常に小さいときの $15P_J$ から急速に増大する. したがって, 1 から出発する尽数関係の列, 図 7 および 8 の $P_{\rm apse}/P_{\rm lib}$ が生じるはずである.

Giffen(1973) はこの尽数関係にはじめて注目した. カオスへの関係は強調されなかった. Henrard と共同研究者 (Henrard & Lemaitre, 1986; Lemaitre and Henrard, 1990) は最初にその重要性に気づき, 解析的に調べ始めた. Franklin(1994, 1996) は数値的に調べた. Henrard にしたがって,

$P_{\rm apse}/P_{\rm lib}$ の小整数尽数関係を第二共鳴 (secondary resonance) とよぶ.

これらのふるまいと重要性は, 平面の例を用いて図 7a–c に示した. 図が示すのは, これらが実際 2:1 共鳴内部のカオスの源であることである. 3 つの場合を示す. 2 つの摂動天体, 木星と土星が平面の歳差軌道を動く. (a) 現在の離心率 ($e_J = 0.044 \pm 0.016$; $e_s = 0.047 \pm 0.035$). (b) 現在の半分, そして (c) 現在の $1/10$.
このデータ列を使うと, 第二共鳴が低離心率の共鳴小惑星軌道 (現実には存在しないが) の間のカオスの原因であることを検証できる ($5/3$(斜め線) は第二共鳴を表し, 3:2(コロン) は平均運動共鳴を表すことにする). 図 7c は最強の第二共鳴のみが存在し, それらの幅が非常に小さいことを示す. 一方図 7a では, $e(J)$ と $e(S)$ が普通の値を持てば, 高次の第二共鳴 (たとえば $5/3$) は励起され, 低次の共鳴のすそが広がって重合が起こる.

図 7 の簡便な解釈からすると, 第二共鳴は $0 < e < 0.28$ 全体にわたってカオスの源になっている. これが本当なら, $15/1$ というような高次の第二共鳴も貢献する. いまのところこのような共鳴は無視しているが, これはそれ自身奇妙で不思議である. ただ $P_{\rm apse}$ は e(小惑星) の急速に立ち上がる関数であり, $P_{\rm lib}$ はほぼ一定であるから, 高次の共鳴がますます込み合うのも確かである. ある弱い第二共鳴のところでちょうど非常に規則的な軌道が存在することも奇妙である. そこに来るのにその共鳴が効いたということはあるにしても (?). $e = 0.2$ 近くのカオスの補足的な説明として, Morbidelli & Moons(1993) が述べたのは, ν_{16} 永年共鳴が $i \to 0$ の極限で存在し, $e = 0.21 + 0.04/-0.02$ の軌道に影響することである. しかし, 図 7 に至る計算は平面近似に厳密に限られているので, $e_0 < 0.15$ のカオスの起源は第二共鳴の世界の問題である. ただどの e まで効くかはそれほど明らかではない.

最近, Moons et al.(1998) はこの話題を広げた. 軌道傾斜角 $0, 10, 20, 30°$ における永年および第二共鳴族から生じるカオスゾーンを図にした. [Henrard(1990) の指摘によると, 第二共鳴は $\dot{\sigma} = \dot{\varpi}_A$ で定義される場合に限られず, $\dot{\varpi}_A$ と惑星のアプスおよび交点の周波数の線形結合をも含み得る.] 驚くべきことは, カオスゾーンの連結性である. a, e 平面で上記 4 つの i の値を含む面積の多くに広がっている. 軌道傾斜角に依存して, まったく規則的な軌道, $0.2 < e < 0.45$, を含む 3 つの島が存在する. これらの多くは火星軌道との交差を避ける近点配置を持つので, 安全圏にいる. Moons et al. はそれらのひとつに最近発見された 5 つの小惑星がいること, 残りの 4 つは空であることを指摘した.

カオスの源が同定されたので, 次は, 2:1 にいたと思われる初期の天体数は如何にして減っていったのか, という問題である. この話題は決着がついていない. 2 種類の長期計算によると, 数百木星軌道周期程度のリャプノフ時間の天体は 2:1 共鳴にはずっといられない. Franklin(1996) は $2/1, 3/1, 5/1$ 第二共鳴に置かれた天体が, どれも 8 億年に近い時間で逃げ出すことを見つけた. もっと高次の第二共鳴にいる天体, つまりリャプノ

フ時間が 3 桁長いものは 40 億年経っても残っていた. これらの積分は平面の歳差する軌道にいる木星と土星のみを考慮した. エスケープした 5 例の場合, エスケープのほんの数百万年前に火星軌道を交差するような軌道離心率を得た. このことからすると, 火星との衝突でなく, 共鳴からずるずると出ていくことが数の減少の理由である. 同時に Morbidelli(1996) はやや別の結論に達した. もちろんそれは間隙の存在と無矛盾ではある. $0.055 < e < 0.155$ なる 10 個の軌道の 3 次元計算により, 彼はどれも千万年ないし 1 億年の間に火星交差軌道となることを指摘した. (彼の積分では軌道交差が起こったら計算を止める.) もっと大きな e の軌道の場合, 多くは同じことが生じた. ただ 4 個は計算期間の 10 億年間残った. そのときに残っていた軌道はほぼ, 固有離心率が大きいほうへ拡散する強い証拠を示した.

もっと速く軌道交差にいたることを Morbidelli が発見したが, これは第三の次元を問題に加えたことによるだろう. 併行して, Henrard et al.(1995) は解析的に強い永年共鳴がいくつかの第二共鳴と重合することを示した. かれらの示唆によると, はじめ低 e の第二共鳴にいた天体は拡散あるいは乱歩により, 秤動振幅が増加し, はるかに大きな e および i の場所にある交点の永年共鳴に入っていく. 彼らの百万年という短い積分時間では例を出すのがむずかしかった. この時点でわれわれの議論においては, Moons et al. の 1998 年論文は特別な重要性を持った. なぜなら, 各種の源から生じるカオス面積は孤立した島ではなく, 連結である. したがって, 天体は低離心率から高離心率へ拡散し, 軌道半長径がほんの少し変っただけでエスケープする. これは上で述べた数値計算で発見されたことと一致する. Moons et al.1998) が見つけた規則軌道を含むこれらの 3 つの島がいかにそしていつ, 天体を失ったのかは, Morbidelli の長期計算にも拘らず, まだ未解決である. 惑星の移住 (Nesvorny & Ferraz-Mello, 1997) に結びつけて説明することに助けを求める前に, $0.2 < e < 0.45$ にあって中程度以下の秤動をする軌道の拡散過程を定量化するために超長期計算することの意義について議論しよう. 現在の不確かの状況にもかかわらず, 現在の軌道にいる木星や土星に結びつく厳密に力学的な効果が, もともと 2:1 共鳴にあった小惑星の密度を減らしたこと, またこのような過程にしても現在の分布にいたるまでは 10 億年を必要としたことは一般に納得できる議論である.

図 8a–c は図 7a–c に伴うものである. 3:2 平均運動共鳴に関する平行する結果である. ここでは広い間隙はなく, 200 天体が集中している (Hilda 群と呼ばれる). これらは (2,3 回以上の衝を観測された) 信頼すべき秤動軌道である. 2 つの共鳴で観測される見かけの違いは力学的ふるまいの違いを反映している. $P_{\rm apse}/P_{\rm lib} = 2/1$ の最強の第二共鳴は図 8 で容易に同定できるが, それはあまり深くなく (カオス性が弱い), 2:1 共鳴に比べてはるかに細い. 木星と土星の離心率を倍にしても (図 8c を見よ), その幅は 2:1 より狭い. Hilda 群の特徴は, 固有離心率 $e_p \leq 0.10$ の天体がないこ

とである. 図 8a によると, カオス軌道は領域 $e_0 \simeq e_p < 0.05$ を dominate しており, カオス軌道と規則軌道の混合が $e_0 = 0.05$ から $e_0 = 0.074$ の $2/1$ 第二共鳴の間にある. 規則軌道は, 他の第二共鳴の場所を除いてもっと高い e_0 にも伸びている.

Nesvorny & Ferraz-Mello(1997) は 2:1 と 3:2 共鳴の全体にわたって長期的ふるまいを比較した. かれらの手法は Laskar(1993) の議論した技術「周波数写像」(frequency map) に適用して共鳴天体の近点運動の (フーリエ) 周波数成分の拡散を決めることができる. その結果によると, 3:2 の心臓部 $0.05 < e < 0.35$ にいる軌道はすべて非常にゆっくり拡散し, 10 億年で約 10%が周波数がシフトする. 2:1 では, 3:2 にあって広い連続領域は多数の小さな島に置き換わり, そこでは拡散はゆっくりである. ところがそのまわりの海では拡散は 10 倍速い. これらの図はリャプノフ時間を計算するサーベイとも両立する結果である. ただ, もっと高速であるから, 結果も完全にできる. しかし, どちらの基準を使うかによって, disruptive 過程は 2:1 における軌道半長径や離心率の広い範囲にわたって 1 桁ないし 2 桁厳しかったり緩かったりする. この線に沿っての努力をすれば, この 2 つの共鳴における集中度の違いが時間スケールの問題であることが出るだろう. 十分長く待てば, Hilda 群もおそらく消滅し, 3:2 にもカークウッド間隙が現われるだろう. 太陽系の年齢にわたって $0.02 < e < 0.075$ の仮想的天体を 10 個軌道積分した. エスケープはなかった. 計算は 2 次元であった. 3 次元でもっと長く積分するといいな. しかし, 現在と未来の小惑星の集中度の統計をやっただけでは安心できない. もっと根本的なレベルでの理解が望まれる.

> 何故 3:2 の中心は, 2:1 とは違って, いくつかの島に分かれないのか. あるいは関連する疑問として, Henrard の第二共鳴はどうしてここではこんなに弱いのか?

後者は今後の研究の出発点としていいだろう. Henrard の研究により, 2:1 共鳴内で離心率と軌道傾斜角の関数として第二共鳴の多くの場所が指定されたが, その相対的および絶対的強度はまだ計算されていない. 多くの進展にもかかわらず, 2:1 共鳴においてすべての a および $e < 0.25$ に強いカオスをつくり, 一方 3:2 共鳴では狭い幅のカオスしか作らない本当の理由がわかっていない.

カークウッド間隙に関する最近の文献は全般にわたる. 詳細に興味のある読者は Wisdom, Henrard とその共同研究者, Morbidelli, Moons とその共同研究者, Holman&Murray(1996) らの論文や故 Michelle Moons の review(1997) を参照されたい.

4. 太陽系外縁部における小天体の長期安定性

大量の小惑星が火星と木星の間の空間を占めている. もっと大量のカイパーベルト天体が海王星以遠を占めている. とはいえ, これら天体は太

陽系の全質量からすると無視できるほどである. 主小惑星帯とトロヤ群小惑星は $\sim 10^{24} - 10^{25}$g を含み, カイパーベルトは地球質量未満しか含まない. 惑星の質量そのものに比べるとそれらは無視できる. この意味で惑星間空間は空である. この性質は惑星形成過程の結果であろうか? つまり,

> 形成過程は非常に効率的であって, 初期質量のほとんどは惑星に付け加わったり掃き清められてしまったのであろうか? そうではなくて, 現在の惑星の重力摂動が強くて惑星間空間の物質は太陽系の年齢以内に放出されてしまったのであろうか?

もちろんこれらふたつのアイデアは独立ではない. 原始惑星からの重力摂動は惑星形成時の主たる物理過程のひとつである. 原始惑星の存在により, 降着するしないにかかわらず微惑星の運動は影響を受ける. 惑星形成のシミュレーションは残念ながらいまの計算機能力をもってしてもむずかしい.

現在の惑星系が小天体に及ぼす重力効果を見積もるのははるかに容易である. 以下で見るように, 現在の惑星なら, 太陽系の年齢以内に惑星間空間の物質を放出するに十分な摂動を及ぼす. しかし, それ以外の物理過程が惑星間空間の物質不在に貢献しなかったかどうか言えない. また以下で見るように, 太陽系には, 太陽系年齢の間に重力摂動で物質を取り除けない領域もある. 力学的に長期安定でありながら物質のない領域, いまは存在しない天体があれば物質が取り除かれたはずの長期安定領域, また太陽系の年齢と同程度の力学寿命をもつ領域などがある. こういう領域でこそ, 惑星形成の条件に豊富な証拠を, 長期数値積分が提供する. 以下の節では, 内外の惑星の間の小天体の長期安定性に関する結果について議論する.

4.1. 木星と土星の間の領域

2:1 共鳴 ($a = 3.3$AU) を越えると急に小惑星の密度が減少する. これは Palomer–Leiden サーベイ (van Houten et al., 1970) でわかった. これを踏まえて, Lecar & Franklin(1973) はいまあるより外側にはじめに小惑星があったとして数値積分した. ついでに木星–土星間も調べた. 木星と土星は固定した楕円で平面. 100 粒子を 5.7AU から 9.1AU に置いた. 離心率は $0 - 0.1$. $500P_J$ の後で生き残っていたのは $6.8 - 7.5$AU のものだけ. Lecar&Franklin(1973) は, 木星–土星間では, 2 つの帯を除いて, 小惑星は数千年で減ってしまうと結論した. Everhart(1973) は独立に, $3000P_J$ の計算で同じ帯を見つけた. 帯の中では運動はカオス的であること ($7100P_J$ と $17000P_J$).

Franklin et al.(1989) は同じ問題に挑戦. ただし高速計算機. 平面問題だが木星土星の相互作用を入れた. 永年摂動論から 2 つの項 (Murray&Dermott, 1999). 惑星軌道交差で積分中止. 135 テスト粒子のうち, 生き残ったのはゼロ. 最長は 79 万 9 千 P_J, つまり 9.4×10^6 年. 低離心

率, 低軌道傾斜角の軌道は 10^7 年生き残れない, との結論. すべての軌道はリャプノフ指数が正であった.

Soper et al.(1990) はこれを拡張. リャプノフ時間とい放出時間の関係を見た. 積分の精度に結果が依らないことも確立した (どういうこと?). 精度がたいへん悪くても, 円制限三体問題の安定軌道は安定である.

Weibel et al.(1990) も同じ安定性を調べた. 改良点は木星, 土星の現実軌道を積分し, 3 次元でやったこと. 125 テスト粒子. 初期低離心率, 低軌道傾斜角. 2 万年以内に放出か惑星軌道交差. 少し 10^5 年生き伸びた. Weibel et al.(1990) は木星, 土星とも平均運動共鳴で力学寿命が変ることを見た.

4.2. 他の外惑星の間の領域

ほかの外惑星の間に 10^9 年生き伸びる小天体があるかどうかは問題とされた.

Duncan et al.(1989) は 2 つの惑星の間を公転するテスト粒子の運動を近似する代数写像を開発した. 合の間を追う部分と合におけるインパルス. 写像は惑星近くのカオスゾーンの大きさを再現した (Wisdom, 1980). また木星土星間の粒子の不定性も再現した. 計算が速いので 10^9 年も OK. これを使って土星–天王星, 天王星–海王星, 海王星以遠に安定バンドを見つけた.

Gladman & Duncan(1990) は精密, 直接積分をはじめて土星–天王星, 天王星– 海王星間, および海王星以遠に対して行った. 計算時間は 2 千 2 百 50 万年で, 1000 個のテスト粒子. 4 個の相互作用する巨大惑星の相互作用を入れた. 惑星の作用圏に入るまで積分. 大多数は $10^5 - 10^7$ 年で惑星と近接衝突することを見た. いくつかは生き伸びたが, 太陽系の寿命全体にわたって安定であるとは考えられない, とは Gladman, Duncan の意見.

Duncan et al.(1989) の仕事を拡張したのが, Holman & Wisdom(1993). 不変面の 5AU から 50AU のテスト粒子の安定性. 3000 個の粒子. 各 500 個を 6 種類の経度に. 海王星以内は 8 億年, 外は 2 億年. その後, 以内は 45 億年, 以遠は 10 億年計算した (Holman, 1995). Wisdom&Holman(1991) 積分子の開発によって, 桁でスピードアップ. Duncan & Quinn(1993) は外惑星を線形永年理論で近似して同様の結論.

図 9 は軌道半長径の関数としての力学寿命. 実線は各軌道半長径ビン内の 6 個のうちの最小寿命. テスト粒子の別の初期経度の衝突時間はドット. 生き伸びた粒子は中あき丸印. いくつかの力学的ようすがただちに見える.

各ビン内のばらつきは 2 桁にも及ぶ.

木星–土星間はほぼすべて $10^5 - 10^6$ 年で取り除かれる. 土星と天王星の間は 10^8 年でほとんど取り除かれる. 天王星・海王星間は 10^9 年. 惑星のラグランジュ点で秤動する粒子と海王星以遠の粒子を除いて, 生き残ったのは 1 つだけ.

Holman(1997) が示したように, この粒子だって安定でない. 24–27AU

で, 初期の低離心率, 低軌道傾斜角の粒子のごく少量 (0.3%) が 45 億年生き伸びた. この領域は無限時間安定ではない.

最近 Grazier(1999a,b) が木星–土星, 土星–天王星, 天王星–海王星領域のテスト粒子の安定性問題に帰ってきた. 10 万粒子を木星–土星, あとの 2 つの領域には 1 万個の粒子. 高次線形多段積分子で丸め誤差を最小化し, 時間刻みも小さく. 結果は以前のものを確認し, もっと詳しい不安定時間の場所依存性が得られた.

4.3. 内部太陽系

内部太陽系では対応する研究は少ない. Mikkola & Innanen (1995) が数百粒子を 3 百万年まで 0.3–4.0AU. 摂動天体は全惑星. 各粒子のリャプノフ時間, Wisdom-Holmann 写像 (Mikkola&Innanen, 1999). 図 10 が結果. リャプノフ時間は $10^2 - 10^6$ と幅広い. Mikkola&Innanen(1995) によると, 最長リャプノフ時間は主小惑星帯の近く. その外では早めに離心率が大きくなって軌道交差. 3 百万年で全部が取り除かれる訳ではないが, 残ったものもいずれは出て行くだろうと Mikkola らは考える. 2 つの狭い領域を発見. ひとつは金星–地球, もうひとつは地球の外. 低離心率, 低軌道傾斜角で長生きの場所.

Evans&Tabachnik(1999) は約 1000 粒子を 1 億年, 0.09–2.0AU. Mikkola & Innanen (1995) と同様, 9 惑星が摂動. 同じ軌道半長径で 5 この経度. 図 11 が結果. 1 億年で多くの粒子は取り除かれる. しかし長寿命領域あり. Evans&Tabachnik(1999) は対数的および巾的減衰方 s 区を当てはめた. 0.09–0.21AU, 1.08–1.28AU, ここは長寿命. 低離心率, 低軌道傾斜角の小惑星がいくつか後者の場所にあると, カタログからわかる.

4.4. カイパーベルト

太陽系の物質密度が外惑星の外で急に終らないはずであると考えて, Edgeworth(1943, 1949) と Kuiper(1951) は独立に海王星以遠の円盤物質を示唆した. Edgeworth(1943, 1949) はさらに, この円盤が彗星溜になっている可能性を指摘. 数十年後に, 数値研究 (Fernandez, 1980; Duncan et al., 1988; Quinn et al., 1990) により, 平面円盤がオールト雲 (Oort, 1950) より短周期彗星分布に合っていることを示した.

カイパーベルト天体の発見は 1992 年に Jewitt&Luu(Jewitt & Luu, 1993). いまや 400 個. 海王星以遠領域. 物理および観測に関しては Jewitt & Luu(2000) を見よ.

カイペーベルト天体の長期力学は成熟しつつある分野. カオスに関係する論文だけ review する. カイパーベルト天体の力学全般は Morbidelli(1998) や Malhotra et al.(2000) を見よ. 形成と衝突進化に関しては Farinella et al.(2000).

カイパーベルト天体の力学の重要性は Torbett & Smoluchowski(1990). Torbett(1989) を改良. 海王星以遠のテスト粒子のリャプノフ時間を大量に. 1 千万年計算. 固定楕円を運動する 4 大惑星を摂動天体とする. 近点

30–45AU に大きなカオス領域を見つけた．このゾーンのリャプノフ時間は 30 万年．Torbett & Smoluchowski によると，このゾーンのテスト粒子のごく一部は，ゾーン内で拡散．ベルト天体の一部は大きな軌道半長径へ散乱されて，彗星の溜となる可能性がある．

Holman & Wisdom(1993) と Levison & Duncan(1993) はカイパーベルトが短周期彗星の溜であることを示した．かれらの数値計算によると，海王星以遠は安定不安定領域がまざっている．カイパーベルトのある領域では，低離心率，低軌道傾斜角軌道の天体は $10^7 - 10^9$ 年で海王星との近接遭遇に至る．他の領域では，10^9 年より長く安定．これは本質的な点である．なぜ短周期彗星は太陽系の年齢程度の不安定時間の領域から来ているはずだからである．太陽系の年齢よりずっと短い力学寿命なら溜としても枯渇したはず．逆に，あまり長すぎると，彗星の溜としては不適格．カイパーベルト天体の小天体の摂動の下でのふるまいの詳しい計算によると，ここは短周期彗星の源 (Levison & Duncan, 1997; Duncan & Levison, 1997).

Duncan et al.(1995) は初期のカイパーベルトの力学寿命の研究を改良した．図 12 はその主結果である．長寿命領域は近点が 35AU となる軌道半長径と離心率の組み合わせである．例外は 40AU と 42AU の間の不安定バンド．ここは共鳴重合 (Knezevic et al., 1991; Morbidelli et al., 1995). 図 12 からいろいろわかるが，カイパーベルトのカオスや不安定性の力学は Duncan et al.(1995) では詳しくわからない．

もうひとつのカーパーベルトへのアプローチは力学構造を調べること．Morbidelli et al.(1995) は小惑星帯への手法 (Morbidelli & Moons, 1993: Moons & Morbidelli, 1995) をカイパーベルトに応用．円平面制限三体問題を特定の共鳴で平均し，自由度 1 へ．平均運動共鳴の幅は軌道半長径の関数として決まる．Morbidelli et al.(1995) は同様のモデルを使って，平均運動共鳴の外の永年共鳴の力学を調べた．かれらの指摘によると，低離心率および低軌道傾斜角での不安定領域 $40 - 42$AU は Holman & Wisdom(1993) で見えたが，これは ν_8 と ν_{18} 永年共鳴の相互作用で生じた．同様に，領域 $35 - 36$AU では，大域的カオスが ν_7 と ν_8 永年共鳴の相互作用で生じる．この手法の限界は，著者自身が述べるとおり，問題を自由度 1 で扱えるようにするため，各共鳴を孤立して調べることにある．大域的な力学は記述できるけれども，重合共鳴から生じるカオスは除外されてしまう．

Malhotra(1996) はカイパーベルトの平均運動共鳴に結びついた準周期領域の境界を図にするための別の手法を使った．円制限三体問題の横断面は 2 分された相空間を示す．準周期軌道領域にカオスゾーンがばらまかれている．与えられた平均運動共鳴の近くで，横断面は与えられた離心率に対して秤動振幅や軌道半長径振動の安定領域に対応する安定島を見せる．Malhotra は一連の横断面からの結果を使って，平均運動共鳴の安定境界を確立した．これらの境界は，Morbidelli et al.(1995) のものよ

りやや狭い．これは解析モデルがカオスゾーンを考慮できないからである．円制限三体問題の横断面を使う手法は 1 次平均運動共鳴の力学カオスの重要な効果をいくつか捉えるが, 基本的な制限をも持っている．海王星軌道の離心率を無視しているし, 平面問題であることも制限である．だから, 海王星あるいは別の惑星からの永年摂動を入れることができない．しかし, 横断面はカイパーベルトの重合する永年共鳴領域の力学を探求するために使える (Sidlichovsky, 1990).

カイパーベルトの安定性の一般的な枠組を確立することとは別に, 海王星との 2:3 平均運動共鳴の力学的ふるまいがいくつかのグループによって広く調べられた．この特別の共鳴はたいへん多くの関心を引いた．というのは, 冥王星以外にたくさんの天体がそこにいるからである．冥王星の軌道とそれが入っている共鳴は長く研究され確立されている (Malhotra & Willimas, 1997) が, 冥王星もどきの軌道パラメータの範囲は 2:3 共鳴のもっと広範な研究の動機となった．Morbidelli(1997) は共鳴の中での軌道拡散を調べ, 力学寿命が 10^6 年から太陽系の年齢以上まで広がっていることを見た．加えて, Morbidelli(1997) は, 2:3 平均運動共鳴秤動領域における ν_8 と ν_{18} 共鳴および古在共鳴の役割を調べた．この共鳴に関し関連する仕事は, Gallardo & Ferraz-Mello(1998), Yu & Tremaine(1999) が行っている．2:3 共鳴の異なるメンバーの間の力学散乱の重要性はいくつかのグループによって吟味された (Ip & Fernandez, 1997; Yu & Tremaine, 1999; Nesvorny et at., 2000).

カイパーベルトの他の平均運動共鳴は 2:3 共鳴ほどは調べられていない．が, これら共鳴全体がベルトの大局的構造や広がりを決めているはずである．散乱された円盤天体の最初のもの, 1996 TL66, の発見は, この種の天体が実質的にもっとあるにちがいないとの認識 (Luu et al., 1997) へ導き, また Torbett & Smoluchowsky(1990) の示唆, すなわち, カイパーベルト天体が散乱されてはるかに大きな日心距離にいるであろうことを確認した．これらとは独立な仕事, この発見に触発された, これらとは独立な Duncan & Levison(1997) の仕事で, 長期計算から, この蓄積の機構が示された．カイパーベルト天体は海王星と近接衝突を行い, 大きな離心率を獲得し, 安定ながら長寿命となり, 次に乱歩を行う．相続く海王星との遭遇が軌道半長径と離心率を変えるが近日点距離 (海王星近傍) を保つ．軌道半長径が共鳴の値に近づくと, 乱歩が変化する．ある場合には, Duncan & Levison(1997) が示したように, 一時的に共鳴に捕獲される．ときに離心率が減少して近日点距離が増大し, 海王星の影響から抜け出す．この効果は最初に Holman & Wisdom(1993) によって議論された．これらの軌道は, 共鳴に長期にわたって捕捉されているが, いずれ大きな離心率を得て, ふたたび海王星と遭遇し始める．これにより, 散乱円盤は彗星溜の役割をする．共鳴に長期捕捉される軌跡は長寿命ではあるがカオス性を示す．数値計算がこれを示したが, この捕獲に関する解析的な仕事はない．それが行われれば, 広がったカイパーベルトの物質分布がわかるかもしれ

ない.

5. 惑星のカオス

5.1. 数値積分

1980 年代までに, たいていのハミルトン系がカオス運動も規則的 (トーラス上) 運動も示すことが明らかになった. カオス運動は KAM トーラス上で緊密にからみあっている. しかし, 支配的な感じは, 太陽系は KAM トーラスのひとつの上にいるであろうというものであった (影の声: そうだったのかな.).

この期待は Applegate et al.(1986) の仕事を含む初期の太陽系の精密長期積分の試みによって支えられていた. Applegate らは水星を除いて 3 百万年の積分を行った. LONGSTOP プロジェクトは木星から冥王星までの太陽系外帯を標準的一般向け計算機で 9 百 30 万年積分した (Milani et al., 1986). これらや他の計算で惑星には何も起こらなかった. Applegate らは外惑星の 2 億年の計算もした. 運動は KAM トーラス上の運動なら期待されるはずの多重周期であった. ただ冥王星の軌道要素には非常に長周期の変動が見えた.

Sussman & Wisdom(1988) が冥王星の軌道がカオスであると示したとき, 驚きをもって迎えられた. かれらはディジタルオルリーとよばれる専用コンピュータを使い, 12 階の Stormer 積分子を使った. この仕事は惑星系のリャプノフ指数を計算する初めての試みでもあった. 距離が時間とともに指数関数的に, $d(t) \sim e^{t/T_l}$, 離れれば軌道はカオス的である. 多重周期軌道はべきで離れる. Sussman & Wisdom(1988) は冥王星のリャプノフ時間が $T_l \sim 2$ 千万年であることを見た. 後に, LONGSTOP 積分はリャプノフ時間は計算しなかったが, フーリエスペクトルを使って外惑星の軌道がカオス的であると示唆した (Nobili et al., 1989).

ほぼ同じ頃, Laskar(1989) は非常に違ったモデルを数値積分した. 彼は軌道要素のラグランジュ方程式の部分集合を解いた. ラグランジュ方程式は (5) 式に似ている. Laskar のモデルは冥王星を除いてすべての惑星の運動を記述する解析的に平均された方程式である. このモデルでは, 惑星質量の 2 次まで永年項を保持し, 離心率と軌道傾斜角は 5 次まで入れた (Laskar, 1985). かれはまた, 同じ次数まですべての平均運動共鳴の解析平均永年効果を取り入れた. これは平均経度を含むような三角関数項はすべて落としたことに相当する. しかし, このような三角関数の積に比例する項の永年効果は取り入れている. たとえば, 式 (5), (3), (8) を考えてみる. 摂動関数のどの項も M_2 に比例する. 質量の最低次で, 使った平均手続きは, (3) 式で cos の引数に平均経度を含む項をすべて落とした.

しかし, Laskar(1989) は質量に関し 2 次の項を考慮した. たとえば,

(5) の展開において式 (7) を使うことを考える. (5) 式の右辺は

$$4a_1\frac{a_1}{a_2}\frac{M_2}{M}\frac{n_1}{2n_1-5n_2+3\dot{\varpi}_1}\phi_{2,-5,3,0,0,0}(a_1,a_2)e_1^3\cos[2\lambda_1-5\lambda_2+3\varphi_1]$$
$$\times -2\frac{GM_2}{a_2}\phi_{2,-5,2,1,0,0}(a_1,a_2)e_1^2e_2\sin[2\lambda_1-5\lambda_2+2\varphi_1+\varpi_2] \tag{11}$$

に比例する項を含む. 恒等式 $\cos(a+b)\sin(a+c)=(1/2)\sin(2a+b+c)+(1/2)\sin(c-b)$ を使って, この項が因子 $\sin(\varpi_2-\varpi_1)$ を生じることがわかる. λ_1 も λ_2 も現われないから, この永年項は平均ハミルトン関数に寄与する. ほぼ共鳴の項, つまり pn_1-qn_2 が小さい項は, 相対的に (単純な M_2^2 の見積もりに比べて) 平均ハミルトン関数への寄与が大きい. Laskar(1989) のモデルは永年項および平均項を 15 万含む.

Laskar(1989) は 2 億年にわたる数値積分により, 太陽系全体はカオス的であることを見つけた. $T_l\approx 5$ 百万年. 「太陽系のカオス的ふるまいは主として内惑星間の永年共鳴からくる」と説明なしに述べた.

後の論文で, Laskar(1990) は永年角度の 2 つの組み合わせが秤動と巡回を交互に繰り返すことを示した. これは軌道がセパラトリックスを横切ることを意味する. こうするとカオスとなる. ある場合には, カオスの源となる. しかし, Laskar が考慮した 2 つの角度は $\sigma_1\equiv(\varpi_1^0-\varpi_5^0)-(\Omega_1^0-\Omega_2^0)$ と $\sigma_2\equiv 2(\varpi_4^0-\varpi_3^0)-(\Omega_4^0-\Omega_3^0)$ であった. 角 ϖ_4^0 は惑星離心率の 4 番目の正規モードに関係し, ほかの ϖ^0 にも同様な解釈があてはまる. ある例では (たとえば木星), $\varpi_5\approx\varpi_J$ であるが, ϖ 達はすべての正規モードの組合わせである. 同様に, Ω_4^0 は惑星軌道傾斜角の 4 番目の正規モードにともなう角度である. Laskar が同定した 2 つの共鳴は直接相互作用はしないから, 実質的なカオスを引き起こすとは思えない.

Laskar が利用したのは平均運動方程式系であるから, 平均しない運動方程式で彼の結果を検証する必要がある. Laskar et al.(1992) がこれをやった. 全太陽系を 6 百万年積分した Quinn et al. の数値解を調べた. この積分はカオスを検出するには短か過ぎるが, 共鳴引数 $2(\varpi_4^0-\varpi_3^0)-(\Omega_4^0-\Omega_3^0)$ が交互に秤動と巡回を繰り返すことを検証することはできた.

2 年後, Laskar(1994) は地球と火星に関係する第二の永年共鳴を見つけた: $\sigma_3\equiv(\varpi_4^0-\varpi_3^0)-(\Omega_4^0-\Omega_3^0)$. ある場合には, σ_2 が秤動して σ_3 が巡回し, 逆も起こる. このことから, この 2 つの共鳴の重合がカオス運動の原因であろうと彼は示唆した.

次の進歩は Sussman & Wisdom(1992) による. かれらは Wisdom–Holman シンプレクティック写像を使って全太陽系の 1 億年の計算を行った. $T_l\approx 5$ 百万年を得た. このタイプの積分は永年も平均も含めてすべての共鳴を説明する. 彼らは Laskar(1989) の同定した 2 つの共鳴が秤動と巡回をともに示すこと, だが, 地球–火星系では, σ_3 共鳴は決して秤動せず, 巡回することを見た. 彼らは注意深く, 地球と火星に関係する 2 つの共鳴の重合がカオスの原因であるという Laskar の解釈を否定するものではないと指摘した.

彼らはまた, 他の角度の組み合わせも秤動と巡回をともに示すことを見た. すなわち, $\sigma_4 \equiv 3(\varpi_4^0 - \varpi_3^0) - 2(\Omega_4^0 - \Omega_3^0)$ と $\sigma_5 \equiv (\varpi_1^0 - \varpi_8^0) - (\Omega_1^0 - \Omega_8^0)$ である. 5 個の角度のうち 4 個 (σ_3 以外ということ) は秤動から巡回, およびその逆の遷移をほぼ同じ時間で行う. このことから,

いまのところ見えない何かの機構がこの遷移を強制している

ようだ. この点は σ_1 と σ_2 があまり強く相互作用しないという観測によって強められる.

太陽系はカオス的 という Laskar の基本的な結果を確認したばかりでなく, Sussman & Wisdom は外惑星もカオス的, $T_l \approx 7$ 百万年, であることを見つけた. 彼らが巨大惑星数値積分で見つけたリャプノフ時間は積分刻みに依存するようだ. こまった. しかし, 一般 Stormer スキームでやると, $T_l \approx$1 千 9 百万年.

チェックのために, 2 億 5 千万年の数値積分を外惑星 (天王星なし) で行い, カオスの証拠がないことを見た.

これらの数値積分からすると, 太陽系はカオス的であり, どの惑星も放出されたり他の天体と衝突したりしない. この意味では太陽系は安定. この心地よい結論は Laskar(1994) のさらに長期 250 億年の積分 (冥王星なし) で強められた. どの惑星も放出なし, 衝突なし. 太陽系は 10^{10} 年安定.

Laskar の積分法によると, 水星の離心率は 0.1 と 0.5 の間を変化する. 平均は 0.2. かれの意見: 変化はカオスに駆動されて拡散的. これが本当なら, 拡散係数を見積もることができる. そして, $e \to 1$ となって太陽あるいは金星に衝突するまでの時間を見積もれる. 拡散係数は

$$D \approx (\tilde{G} - \tilde{G}_0)^2/T. \tag{12}$$

ここで $\tilde{G} \approx e^2/2$ で, T は積分期間, 250 億年. $e_0 = 0.2$, $e = 0.5$ を使って, 対応する $\tilde{G}_0 = 2 \times 10^{-2}$, $\tilde{G} = 0.125$ を得, $\tilde{G}$ のうろつきの最大値を見積もる. 拡散係数は e に依らないと仮定する. 正しくはないが妥当な仮定である. $D \approx 1.5 \times 10^{-2}/T$ が得られる. e が 1 にまで拡散する時間は

$$t_{\rm esc} \approx 1/D = T/1.5 \times 10^{-2} \tag{13}$$

すなわち, 20 兆年である. Laskar は数度計算を繰り返し, その度に地球の離心率を 10 億分の 1 だけ変えた. 詳細な軌道は変るが, 衝突も放出も起こらない.

水星は実際に大きな離心率に進化するのかという疑問が生じる. 何か力学的な障壁はあるのだろうか? Laskar(1994) は一連の計算によって, わが太陽系のものに非常に近い平均方程式の軌道で, 水星が太陽と衝突するものもあることを示した. 彼の言葉によると,「水星が扉から出て行くように仕向けた」 4 つの地球の平均軌道のコピーを作り, ここでも 10 億分の 1 だけ離心率を変える. 5 億年積分する. 水星の離心率が最大の解を残し, それを使って軌道の少し違う 4 つの地球軌道を作る.

これを 18 回繰り返す. Laskar は水星が 60 億年で放出される系を見つけた. 上で見積もったわれわれの値よりずっと小さい寿命である. ただし, 上の過程は不安定な軌道を選び出すものであった. この実験の意味は, 太陽系の年齢程度で水星が失われるような系を見つけることではない. 水星が失われるまで進化し得ること, 力学的な障壁はないことを実験は示した.

Murray & Holman(1999) は平面 4 惑星モデルはカオス的であること, 外惑星のカオス運動を作るのに軌道傾斜角共鳴は必要内ないことを示した. 3 惑星で天王星なし, あるいは 3 惑星で海王星なしの系は, 他の惑星の位置に依らずに (もちろん適当な制限内で) 完全に正則である. たとえ強くカオス的であっても, $a, e, , i$ は積分期間の間実質的な変化なし.

Ito & Tanikawa(2000) は全太陽系を ~ 40 億年積分. WH 積分子. 太陽系はカオス的. 軌道は大きく変化しない. Laskar の系に比べて余分に不安定ということはなかった. Ito & Tanikawa の結果を使って拡散係数を出すと, やはり 1 兆年ないし 10 兆年.

5.2. 解析的結果

Ito & Tanikawa(2000) によると, どの惑星も軌道半長径, 離心率, 軌道傾斜角の変化は小さい. どうして太陽系はそんなにカオス的でであって, しかもカタストロフを起こさないのか?

最近, 上の 2 つの結果に対して解析的な説明を見つけた. 短時間カオス, 長時間安定性. とくに外惑星の設定で (Murray & Holman, 1999).

> カオスというのは, 2 つまたはそれ以上の異なる自由度の運動の間の, 少なくとも 2 つの共鳴の相互作用から生じる, との観察から出発する.

共鳴を見つける必要あり. たとえば,「大均差」を考える. 木星と土星の近 5:2 共鳴. 木星の軌道周期は 4332.588 日. 土星の周期は 10759.278 日. 比は 2.4833. これらの相互摂動は (質量比 $M_J/M_\odot$ または $M_S/M_\odot$ に比べて) 相対的に大きな変動を λ にもたらす. 変動は木星と土星の経度で 21 角度分および 49 角度分であり, すでに 18 世紀の天文学者が気づいていた. 数学的には, 共鳴は摂動関数の以下の項で表現される:

$$-\frac{GM_s}{a_S}\sum_{k,q,p,r}\phi^{(2,5)}_{k,q,p,r}(a_S/a_J)e_S^k e_J^q i_S^p i_J^r \times\cos[2\lambda_J-5\lambda_S+k\varpi_S+q\varpi_J+p\Omega_S+r\Omega_J] \tag{14}$$

$2-5+k+q+p+r=0$ であること, また $p+r$ は偶数であることに注意する. さらに, $(2n_J-5n_s)/n_J\approx -1.33\times 10^{-2}$ である. これは小さいけれども, 任意の永年周波数と n_j との比よりははるかに大きい. たとえば, $\varpi_S/n_J\approx 2.6\times 10^{-4}$. 永年周波数が小さく振動するということは, 永年周波数を取り込むと, 共鳴の位置 (軌道半長径) が少し変化することを意味する. 一方, 正確な共鳴の位置からの距離がかなり大きい (以下で示すよ

うに, $\sim 10^{-2}$ は共鳴の幅に比べて大きい) ことから, 惑星は共鳴「内」にはいない. つまり, (14) 式の cos の引数はどれも秤動しない.

最後の陳述は一般化できる. 太陽系において 2 体平均運動共鳴にあるのは海王星と冥王星である. これらは 3:2 平均運動共鳴にあり, またいくつかの永年共鳴にある. 巨大惑星の積分で見られるカオス, また冥王星を除いた太陽系で見られるカオスは 2 体平均運動共鳴ではない. (影の声: これは確かだ.) 木星と土星が共鳴にないという事実は (14) 式で与えられる共鳴項が無視できるということである. それらは軌道半長径に実質的な変動を引き起こす ((8) 式によってまた似たような項によって), また 2 つの惑星の経度に変化を引き起こす. 後者こそが, $(2n_J - 5n_s)/n_J \approx -1.33 \times 10^{-2}$ の分母の巾 (2?) に関係し, 18 世紀の天文学者によって木星の経度に見られる 21 角度分の不一致の原因なのである. これら近共鳴項も 2 つの惑星の離心率と軌道傾斜角の実質的変動を引き起こす.

たとえば, 土星の重力は

$$e_J^{(2,5)} \sin \varpi_J \approx \quad -\frac{\mu_s}{2 - 5n_S/n_J} \frac{a_J}{a_S} \sum_{p>0} \phi^{(2,5)}_{k,q,p,r} e_S^k e_J^{p-1} i_J^q i_S^r \times \sin[2\lambda_J - 5\lambda_S + k\varpi_S + (p-1)\varpi_J + q\Omega_J + r\Omega_S] \tag{15}$$

で与えられる $e_J \sin \varpi_J$ の変動を引き起こす. ここで $\mu_S \equiv M_S/M_\odot$. e_J の最大の変動は, $k = 2, p - 1 = q = r = 0$ および $\phi_{2,1,0,0} \approx 9.6$ に対応し, 振幅は約 3.5×10^{-4} である. 数値積分は 3.7×10^{-4} (Murray & Holman, 1999) である. 以下の節で示されるように, e_J の変動は他の惑星のカオスをつくり出すのに中心的な役割を果たす.

5.2.1 三体共鳴

巨大惑星には 2 体共鳴はないが, 3 体を巻き込む共鳴はいくつかある. 三体共鳴は 3 つの惑星の経度に関係する. 組み合わせ $3\lambda_J - 5\lambda_S - 7\lambda_U$ および $3\lambda_S - 5\lambda_U - 7\lambda_N$ が 2 つの例である. 摂動関数にはこのような引数の項はない. これは惑星質量に関し 2 次において現われる. 物理的には以下のように生じる.

木星, 土星, 天王星を考える. 第一次近似では, 3 つともケプラー軌道を動く. だから a, e, i(同様に ϖ も Ω も) 一定である. 次のレベルの近似では, 土星は木星の軌道に摂動を与える. 逆もある. たとえば, これによって, e_J と e_S が前節で計算したとおり, 少し変化する. 変動の振幅は摂動惑星の質量に比例する.

さて天王星が経験するポテンシャルを考えよう. 最低次で, 天王星はケプラー軌道を動く. 質量の 1 次では, e_J などのケプラー値の摂動関数によるポテンシャルが見える. 質量の 2 次では, いくつかの補正が入る. ひとつは天王星の軌道がケプラー軌道でなくなる. たとえば, 木星は a_U, e_U その他を変動させる. その大きさは M_J に比例し, 周期は $pn_J - qn_U$ で与えられる. p, q は整数である. 位置ベクトル $\mathbf{r}_U$ はこの形の振動項を受け継ぐ. 土星の存在に由来して天王星が感じるポテンシャルは M_J に比例する項を

受け継ぐ. λ_J を含む共鳴引数. これから $M_J M_S \cos[p\lambda_J - r\lambda_S - (s+q)\lambda_U]$ の形の項になる. これを 三体共鳴 とよぶ.

三体共鳴は他の 2 つの道を通っても生じる. すでに述べたとおり, 土星は木星の軌道要素を変動させる: $M_S \cos[l\lambda_J - m\lambda_S]$. ケプラー軌道に乗っている天王星が感じるポテンシャルは, $M_J e_J^{\alpha} \cos[p\lambda_J - q\lambda_U + l\varpi_J]$ の形の項を含む. しかし, e_J は一定でない. $e_J(t)$ は $M_S \cos[p\lambda_J - r\lambda_S]$ の形の項を含む. ふたたび, これらは $M_J M_S$ に比例する項を生じさせ, 3 つすべての平均経度に関係する共鳴引数を含む.

同様に, 木星は土星の軌道要素を変動させる. 土星軌道の変動が天王星の感じるポテンシャルに影響を与え, 木星, 土星両方の質量に比例する項を生じさせる. これは 3 つの平均経度を含む共鳴引数を持つ.

Murray & Holman(1997) はこのような共鳴の強さ, 幅, 間隔を解析的に見積もった. 典型的な成分共鳴の幅は

$$\frac{\Delta a}{a_U} = 8\sqrt{(6-p)\phi^{(7,1)}_{6-p,p,0,0}\phi^{(2,5)}_{2,1,0,0}\frac{\alpha}{3\epsilon}\mu_J m u_S e_J^{5-p} e_U^p e_S^2} \approx 2\times 10^{-6}, \quad (16)$$

である. ここで $\alpha = a_J/a_S \approx 0.55$ および $\epsilon = |2 - 5(n_S/n_J)|$.

これから, $\Delta a \approx 8\times 10^{-5}$AU が得られる. この振幅の共鳴にともなう秤動周期は

$$T_0 = T_U \Big/ \sqrt{147(6-p)\phi^{(7,1)}_{6-p,p,0,0}\phi^{(2,5)}_{2,1,0,0}\frac{\alpha}{\epsilon}\mu_J m u_S e_J^{5-p} e_U^p e_S^2} \approx 10^7\text{年}, \quad (17)$$

ここで T_U は天王星の軌道周期である. これは本質的にはリャプノフ時間である (Holan & Murray, 1996; Murray & Holman, 1997).

Murray & Holman(1999) は天王星が土星と近接衝突するまでの時間を見積もった. その後すぐに衝突または放出が続く. 見積もりの際には, カオスによってつくり出される e_U の乱歩には力学的な障壁はないものとした. 宇宙年齢より長い 10^{18} 年を得た.

図 13 と 14 は, 天王星近辺の 2 体および 3 体共鳴の場所を示す. 図 14 には, 個々の三体平均運動共鳴が見える. 天王星軌道の最良見積もりに一番近い共鳴の共鳴引数が秤動と巡回を繰り返すことが図 16 に見える.

5.2.2 太陽系内部領域のカオス

ここでの状況ははっきりしない. いくつも共鳴が示唆されているが解析計算は行われていない. 理論家にとってはチャンスである.

計算なしでは, 永年共鳴重合からどんなリャオウーノフ時間を期待してよいのやらわからないし, 惑星 (水星) 軌道が激しく変るまでの時間をどのように予言していいのかもわからない. (13) 式で与えられるのに似た見積もりを使うことはできる. だが, 確かな基礎があるわけではない. とうのは, 積分結果に見える e の変動が拡散的であるのか, それとも金星

や地球による水星軌道の強制準周期運動の結果なのかわからないからである．後者の可能性を示す証拠がある．Laskar(1990, 1994), Laskar et al.(1992), Sussman & Wisdom(1992), Ito & Tanikawa(2000) は 3 つの惑星に強い相関を見つけた．水星の離心率の変動が準周期的強制であるなら, 水星の寿命はわれわれの見積もりよりずっと長いことになる．

Laskar(1994), Ito & Tankawa(2000) の数値結果から, 水星の寿命として 10 兆年をわれわれは与えた．Murray & Holman(1999) は天王星の寿命として 10^{18} 年を得た．軌道周期を単位にすると, これらは 4×10^{13} と 10^{16} であり, 250 倍違う．ところがリャプノフ時間は 2 倍程度しか違わない．解析理論なしでは, この不一致の意味を評価できない．

Laskar が同定した共鳴 σ_1 はいままでに同定されたどの永年共鳴とも重合していない．これから, これはカオスの源ではないと考えられる．むしろ, 秤動と巡回の移り変りは他の惑星のカオス的強制の結果に見える．これは水星を除いた太陽系の積分によってチェックできるだろう．それがカオス的なら, σ_1 に対応する共鳴は積分結果に見られるカオス w 作るのに本質的な役割をしない．

6. まとめと今後の仕事への提案

太陽系は不安定である．ただリャプノフ時間よりはるかに長い時間かかる．われわれの仕事は重合し, カオスを導く共鳴を見つけることであり, リャプノフ時間の関数として放出時間を予言することである．たとえば, 重合する 1 次平均運動共鳴領域において, 放出時間はリャプノフ時間の 1.75 乗に比例する．同様な巾法則関係が個となる指数で, 高次の平均運動共鳴に成り立つ．この場合はいろろな subresonance が重合する．だが, secondary 共鳴にはこのような関係がない．そこでは秤動周波数はアプス運動の整数倍である．驚くべきことに, 指数 1.75 は太陽系全体にわたって近似的に通用する．ただ, 90%の軌跡に関しては放出時間の広がりは予言の両側 10 倍程度である (図 17)．高次の平均運動共鳴あるいは重合する永年共鳴では例外が生じる．同一の平均運動共鳴内部の subresonance の間の「拡散」は 1 次の重合する平均運動共鳴間の拡散よりはるかにゆっくりである．太陽系のカオスモデルとして合っているものは 2 つの共鳴の重合である．ハミルトン定式化では, これは共鳴の場所で励起される振り子に似ている．離心率の乱歩 (拡散) が誘導され, 摂動天体との近接遭遇, そして動径方向の移動へと至る．太陽系のカオスに共鳴網 (アーノルド網) が関係するとは信じられない．不安定が軌道半長径の永年ドリフトによるものとは信じない．

三体共鳴は外惑星のカオスの源と同定された．これらの共鳴は 2 つの惑星の質量の太陽質量との比の積に比例するから, 時間スケールは非常に長く, 太陽系の年齢の 10^9 倍もある．

内部太陽系 (内惑星) における重合する永年共鳴の同定はまだ確定しておらず, 数値積分からの外挿である．水星は 10^{13} 年何らかのトラブルに巻

き込まれるだろう (ただしその前に赤色巨星化した太陽に飲み込まれる).

われわれが概観したのは「弱いカオス」(weak chaos) である. 太陽系形成という激しい現象の後の歴史を取り上げた. ここで調べた軌跡は非線形力学や天体力学ですでに展開された方法で扱えるであろう. 系外惑星の発見により, 形成時の惑星のふるまいに注意が向き始めた. 近接遭遇や衝突, 合体, 放出が普通に起こる. これは「強いカオス」の時代である. このあたるを調べれば, 安定な配置とは何かの材料が提供されるかも.

The resonance overlap criterion and the onset of stochastic behavior in the reistricted three-body problem

Jack Wisdom, *Astron. J.* **85**, 1122-1133.

1. 序

太陽系は安定か? この有名の問題にいまのところ答えはない. だが, この 20 年間に力学系の安定性の研究に重要な進展がいくつか見られた. Hénon & Heiles(1964) は, いまや古典となったかれらの単純な自由度 2 のハミルトン系 (銀河内の星の運動モデル) の相空間が準周期軌跡を含む領域と軌跡がランダムな領域とに 2 分されることを発見した. その後の Hénon(1966), Bozis(1966), Jefferys(1966) の数値実験によって, 平面円制限三体問題の相空間も同様に分割されることが検証された. 準周期軌跡領域の存在が重要なのは, このような軌跡はみな長期安定性を持つからである. どの領域がストカスティックであるかを予言する仕方はないが, ゼロ次の非線形共鳴の重合がからむような近似的な判定基準は開発されてきたし, それは他の問題にもかなりの成功をおさめた (Walker & Ford, 1969; Chirikov, 1979 を見よ). だが, 直接共鳴重合 j 基準をあてはめるには太陽系は複雑すぎる. 力学的天文の入口で自分の足元をかため, 共鳴重合基準に自信を深めるため, 力学的天文学の一番簡単な未解決問題から始めることにした. 本論文では, 共鳴重合基準を平面円三体問題に応用し, そこでの結果を数値実験と比較する.

II 節では共鳴重合基準を概観する. その方法を III 節で制限三体問題に応用する. IV 節でわが結果が予言するものと数値計算結果を比較する. V 節では, 共鳴重合の近似スケール則を導き, VI 節で結論を述べる.

II. 共鳴重合とチリコフ基準

ハミルトン関数

$$H = H_0(J_1, J_2) + \mu \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \times H_{ij}(J_1, J_2) \cos(i\theta_1 + j\theta_2), \tag{1}$$

ここで θ_l は運動量 J_l に正準共役な座標であり, μ は小パラメータである. これを解こうとするとき, まずゼロ次のハミルトン関数

$$H_{nm}^{(0)} = H_0(J_1, J_2) + \sum_{k=0}^{\infty} \times H_{kn,km}(J_1, J_2) \cos[k(n\theta_1 + m\theta_2)], \tag{2}$$

を解き, 次にゼロ次の解に残りの項を加えて摂動を解く.

ASTEROIDS: Living in the Kingdom of Chaos

Morbidelli, American Astronomical Society, DPS meeting #32, #05.01(2000)

低次の平均運動共鳴と永年共鳴に関係する主小惑星帯のカオス領域の存在は長く知られていた. しかし, やっとこの 10 年, 半解析理論によって, 惑星系全体にも関係する数値シミュレーションに見られるカオス的ふるまいが正当に理解されはじめた. いちばん目立つ結果は, ある種の共鳴にある小惑星が数百万年のタイムスケールで太陽に衝突することがあることがわかったことである. 軌道離心率がカオス的進化によって 1 まで引き上げられる. ただ, 小惑星帯は激しいカオスゾーンと正則ゾーンに単純に分かれるだけではない. 帯は高次の木星や火星とのたくさんの平均運動共鳴と木星や土星との「三体共鳴」により criss-crossed されていることが示された. このような弱い共鳴により「固有」離心率や軌道傾斜角がカオス的にドリフトする. このような進化の道筋は, たとえばエオス族やテミス族の構造の中にたどることができる. 弱いカオスにより, フロラ「clan」に見られる離心率と軌道傾斜角の異常分散も説明できるかもしれない. 多くの小惑星は広い範囲の軌道半長径にわたって火星の軌道と交差しはじめる. 小惑星帯のカオス構造がますます理解されて, 地球接近小惑星や隕石の起源や軌道分布の定量的モデルが作れるかもしれない. このモデルからすると, 主小惑星帯の天体の軌道半長径もゆっくり進化するはずである. 20km 異常のサイズの小惑星の場合, これはセレス, パラス, ベスタとの近接遭遇による. 小さい天体の場合, いわゆるヤルコフスキー効果がいちばん効く. 小惑星帯では皆がカオス的に動いている.

Astron. J. **114**, 1246-1259(1997).

Diffusive chaos in the outer asteroid belt

N.W. Murray and M.J. Holman

1. 序

数値積分によると, 2 つの近接する初期条件の軌道が指数関数的に離れて行くという意味で太陽系は不安定である. e 倍になる時間はリャプノフ時間として知られ, 典型的に 4 百万年である (Sussman & Wisdom, 1992). 不安定性の起源は数値的な仕事では明らかにできない. リャプノフ時間の説明も行われなかった.

同様の不安定運動あるいはカオス運動は, 太陽系ではもっと単純な系, たとえば海王星以遠のカイパーベルト内の小天体の運動や, 火星と木星の間の小惑星帯の小天体の運動を数値積分したときにも見つかる. 1 万年程度の短いリャプノフ時間を示した上で, 積分によると, 天体の多くは惑星との近接衝突により太陽系から取り除かれる. たとえば, 3:1 カークウッド間隙に円軌道で置いた試験的小惑星の場合, 離心率が急速に増大して火星や地球軌道と交差し, どちらかと衝突する (Wisdom, 1983). いままでのところ, 惑星との軌道交差にたるまでの時間を予測する理論はない.

Lecar et al.(1992b) と Lecar et al.(1992a) はリャプノフ時間 T_L と彼らがイベント時間とよぶ T_e(およそ軌道交差になるまでの時間) の間に結びつきを見た. 計算は太陽系タイプの力学の数値積分. 彼らの結果は,

$$\frac{T_e}{T_0} = 10^a \left(\frac{T_L}{T_0}\right)^b \tag{1}$$

ここで T_0 は主摂動天体の軌道周期. 彼らは小惑星外帯に対して $a = 1.53$, $b = 1.73$ を得た. 他の例についても同様の値を得た. 最近, Murison et al.(1994) は平面楕円三体問題を小惑星外帯の単純モデルとして積分した. 積分を完成することが出来るようにイベント時間を短くするために, 彼らは木星より 10 倍大きな質量を選んだ. a, b に関して同じような結果を得た. ふたたび, このスケーリングの理由を理解できなかった.

太陽系におけるカオス理論で成功した例として長い間孤高を保っているのは $\mu^{2/7}$ 法則である (Wisdom, 1980; Duncan et al., 1989). この法則は円平面制限三体問題で開発された. それによると, 摂動天体 (たとえば, 木星) が系全体の μ の比率の質量を持つとすると, 軌道半長径 a のテスト粒子で不等式

$$\varepsilon \equiv \frac{|a - a'|}{a'} \leq \mu^{2/7} \tag{2}$$

を満たすものはカオス軌道を持つ. ここで a' は摂動天体の軌道半長径である. この結果を後で導き直し. アイデアは単純であり, 共鳴の概念に頼る. あらっぽく言えば, テスト粒子が摂動天体と共鳴関係にあるのは, テスト粒子と摂動天体の軌道周期の比が有理数になっていることである. すなわち,

$$\frac{a}{a'} \approx \left(\frac{k}{k+q}\right)^{2/3}. \tag{3}$$

ただし, k, q は整数である. a がこの値の天体は q 次 (q-th order) 平均運動共鳴にあるという. 隣合う 1 次 ($q = 1$) の平均運動共鳴間の距離は

$$\frac{\delta a}{a'} \approx \frac{2}{3k^2} \approx \frac{3}{2}\varepsilon^2, \tag{4}$$

である.

カオス理論でよく知られた結果によると, 2 つの共鳴が重合すると, すなわち, 共鳴間の距離がそれらの幅程度ないし以下になると, これら共鳴の近くの軌道はカオス的になる. 重合基準を三体問題へ応用するとき難しいのは, 共鳴幅の見積もりである. 平面円制限三体問題の共鳴幅はテスト粒子の離心率の 2 乗根に比例する. 形式的には, 円軌道上のテスト粒子に関しては幅はゼロになってしまう. しかし, 摂動天体の影響により, 近くのテスト粒子の場合, たとえ初期に離心率がゼロであっても, 小さな離心率が生じる. だから 1 次の平均運動共鳴には有限の幅があることが保証される (4 節と補遺 B を見よ). Wisdom(1980) は初めて $q = 1$ の場合に誘導される離心率を計算し, その結果生じる幅を計算した. 彼によると, 誘導離心率 (および共鳴幅) は $a \to a'$ のときに増加する. 一方, (4) 式からすると, 共鳴間の間隔 δa はゼロに減少する. だから摂動天体の近くではカオスが保証される.

この理論によって, 惑星の近くにカオスが存在することが予言されたが, 摂動天体から遠いところに数値計算が示したカオスを予言できない. このカオスを理解するための進展は Wisdom(1983) によってなされた. 彼は木星との 3:1 共鳴にあるテスト粒子を数値計算して観察したカオスに関する半解析的理論を作った. これは $k = 1, q = 2$ の共鳴である. Wisdom は平均運動共鳴を振り子として扱った. ただし, その振り子はポテンシャル井戸の深さと位置が時間変化するのである. 彼の理論はカオスの時間スケール (リャプノフ時間), すなわち, 共鳴内の天体が火星や地球との衝突によって取り除かれるまでの時間を説明しない. 3:1 共鳴の半解析理論を他の共鳴に応用するのは難しいし, 小惑星帯や惑星間空間のカオス的ふるまいの数値サーベイで見つかった幅広いカオスをも説明しないようだ.

本論文では, これら数値サーベイで見られるカオスの起源の部分的理論を述べる. 平面楕円三体問題に話を限る. 平面の仮定を緩めるのは容易であるが, それでなくても複雑な代数的取り扱いがはなはだ困難になってしまう. ここでの理論はカオス運動の (a, e) 空間での位置を予言する. ま

たカオスのリャプノフ時間, カオス軌道の取り除き時間も予言する. われわれの数値結果によると, 二番目の摂動天体を加えることはある領域の力学を定性的に変えてしまう. だから, 太陽系のテスト粒子の数値積分で見られるカオスをすべて説明するわけではない. しかし, 完全な系の特徴のいくつかを定量的に説明する.

2 節では, 制限楕円三体問題の共鳴近くの物理の多くを把握する単純なハミルトン関数を議論する. 3 節では, 平面楕円三体問題に取り組み, 広いカオス運動の存在のための判定基準や, リャプノフ時間の表式, 軌道交差真での」時間の表式を導く. これらの表式を, 数値計算結果と 3 つの一連の図で比較する. 4 節では, 平均運動共鳴重合の Wisdom の場合 ($q = 1$) を議論し, リャプノフ時間と軌道交差時間が, 単一の $q > 1$ 平均運動共鳴における陪共鳴 (subresonance) 重合の場合に比べてたいへん異なっていることを示す. Murison et al.(1994) が発見した T_L と T_e の間の関係は, 彼らの計算に使った木星質量がやや増量してあることによるらしい. このことを示す. この関係式は外小惑星帯のおおくの場所には適用できないことを強調したい. 5 節では, われわれの結果を議論し, それを他の人達の結果と比較する. 6 節は結論である.

2. おもちゃモデル

任意のハミルトン系のカオスは 2 つ以上の自由度にからむ 2 つ以上の共鳴の相互作用によって引き起こされる. 共鳴んぽ特徴は, 不動点あるいは周期軌道の形での不安定軌道の存在である. ハミルトン関数が単一の共鳴を有するなら, 不安定軌道は単純なホモクリニックまたはヘテロクリニック軌道を持ち, カオスはない. ホモクリニック軌道, つまりセパラトリックスは, 不安定軌道から離れてふたたび不安定軌道に無限時間かけて向かう軌道である. たとえば, 振り子を考えよう. 不安定軌道 (この場合は不動点) は振り子が逆さまになった状態である. ホモクリニック軌道は不安定平衡から出発して, 一度ぶらりと揺れ, ふたたび不安定平衡に向かう (たとえば, Tabor, 1989 を見よ).

単振り子はたったの 1 自由度である. カオス運動を調べるには少なくとも自由度 2 のモデルを考える必要がある. 太陽系を記述するハミルトン関数についての結果を予想して, 自由度 2, 2 つの共鳴のハミルトン関数

$$H(\lambda, \psi; I, \phi) = \begin{array}{l} \frac{1}{2}A\lambda^2 + \mu BI + \frac{1}{2}\mu CI^2 \\ +\mu D\cos\psi + \mu E\cos(\psi - \phi) \end{array} \tag{5}$$

を吟味する. ここで A, B, C, D, E, μ は定数である.

3. 平面楕円制限三体問題

3.1. 共鳴変数

質量ゼロの粒子が大質量中心天体 (太陽) の場の中で動き, 粒子より外を楕円軌道で動く小さな天体 (木星) から摂動を受けるときのハミルトン関数は

$$H = -\frac{\mu_1^2}{2L^2} - \mu R(L, \rho_1, \rho_2, \lambda, \omega_1, \omega_2; L', \rho_1', \rho_2', \lambda', \omega_1', \omega_2'), \tag{12}$$

である. ここで標準的ケプラー運動量は

$$L = \sqrt{\mu_1 a}, \tag{13}$$

$$\rho_1 = (\mu_1 a)^{1/2}[1 - (1 - e^2)^{1/2}] \approx (\mu_1 a)^{1/2}\frac{1}{2}e^2, \tag{14}$$

3.2. リャプノフ時間

天体力学の標準的用語では, (27) 式に現われる和全体は「平均運動共鳴」と引用される. 実は, 平均運動共鳴は $q+1$ 個の共鳴の和からなる. これらを平均運動共鳴の「陪共鳴 (subresonance)」とよぶことにする. ハミルトン関数 (27) における陪共鳴間の距離は Λ ではかると $\beta\delta\Lambda = 2\mu A$ である. 一方各陪共鳴の幅は $\Delta\Lambda = 2\sqrt{\widetilde{\phi}_p(I)/\beta}$ である. ストカスティックパラメータ

$$K_{\rm eff} \equiv \left(\pi\frac{\Delta\Lambda}{\delta\Lambda}\right)^2 = \left(\frac{\widetilde{\phi}_{p_0}}{\beta}\right)\left(\frac{\pi\beta}{\mu A}\right)^2, \tag{28}$$

は代表的陪共鳴の強さである. ただし, $\widetilde{\phi}_{p_0} = \widetilde{\phi}_{k+q,k+p_0,k}$. 平均運動共鳴内の軌道が大規模カオスを示すのは, $K_{\rm eff}$ がある臨界値 $K_{\rm eff} \approx 1$ より大きいときである. この条件を解釈すると, 各共鳴の幅は共鳴間の距離と同じかそれより長い. 言い換えると, 共鳴は重合している.

3.3. 作用空間での輸送

3.4. 取り除き時間

図 1 を調べると,

5. 議論

太陽系のカオス領域の運動は拡散的であろうという発想を示唆したのは Wisdom(1982) であった. この論文は小惑星帯におけるカオスの重要性を確立した. その後の論文 (Wisdom, 1985a) で, 彼は木星と 3:1 共鳴にある天体の運動を解析的に記述し, 共鳴における小振幅秤動の時間スケール (ω_0) と永年運動の時間スケール ($\dot{\phi}$) とに乖離があることを議論した. 数値値的には, 3:1 共鳴では比 $\dot{\phi}/\omega_0 \approx 17$ である. この比が小さいから, (L, λ) 自由度は時間変化する長さと位相を持つ降り子で近似できる, と Wisdom

が議論した. これは 3.2 節でわれわれがやったことである. この近似では, 運動が振り子のセパラトリックスに近づかない限り振り子の $\mathcal{F}(L,\lambda)$ はは一定である. 後で使うので, 振り子のセパラトリックス近くの作用が

$$\mathcal{F} \approx \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{\phi_{k+q,k+p,k}}{\beta}}, \tag{58}$$

であることを指摘しておく.

6. 結論

補遺 A. リャプノフ時間と拡散時間の別の計算法

A.1. リャプノフ時間

A.2. 拡散係数

補遺 B. $\mu^{2/7}$ 法則

Icarus **155**, 454-474(2002).

Stable chaos in high-order Jovian resonances

K. Tsiganis, H. varvoglis, and J.D. Hadjidemetriou,

1. 序

太陽系力学で新しく発見された現象の中でとくに興味深いのは,「安定カオス」と一般に引用される小惑星運動の型である. 最初の例は小惑星 (522)Helga である. これは Milani and Nobili(1992) が与えた. 彼らは, Helga の短いリャプノフ時間 $T_L \approx 7000$ 年おと $10^3 T_L$ 程度にわたって変化の見えない軌道要素の安定性との間の一見した矛盾を強調するために矛盾法を使った. この小惑星は, 固有軌道半長径 $a_P \approx 3.63$AU, 固有離心率 $e_P \approx 0.05$ で制限三体問題の 12/7 平均運動共鳴の名目的位置の近くにある. 著者らの発見したところによると, 臨界引数 $\sigma = 7\lambda - 12\lambda_J$($\lambda$ は平均経度, 添字 J は木星を表す) が秤動と周回 (順も逆も) を繰り返す. 12/7 共鳴はカオスの機構であると結論. Helga 軌道の安定性のかれら説明は, 永年 防御機構 である. その防御機構とは, 引数 $\varpi - \varpi_J$ の進化に関係する. Helga ではこれがほぼ秤動している. e の最大値 ≈ 0.1 が $\varpi - \varpi_J \approx 0$ のときに実現される. つまり, 木星との合は Helga の近点で起こり, 木星と Helga の近接衝突によってこの天体を共鳴から排除することができない. Helga の近くの安定カオスに関するこれ以外の証拠は Holman & Murray(1996) が出した. 彼らは Helga のクローンを 50 億年積分し, 遅くエスケープ (エスケープ時間は 8 億年) したり生き残ったりするのを見た.

その後, Milani et al.(1997) は安定カオスにいる小惑星 (ASC) が主小惑星帯にたくさんあり. またトロヤ群にもあることを示し, 小惑星帯の全体的安定性に関して重要な問題を提出した. 著者等の結論によると, 主小惑星帯の安定カオスは中間ないしは高次平均運動共鳴に関係する. Dvorak & Tsiganis(2000) の議論では, トロヤ群内の安定カオスは 非線形 永年共鳴によって生成される. いままでに発見された安定カオスのすべてが高次の平均運動共鳴単独の作用で説明できるわけではない. たとえば, 小惑星 (490)Veritas の軌道半長径の大きな変動は木星–土星–小惑星型の 三体共鳴 (Nesvorny and Moeboidelli, 1998; Murray et al., 1998) の概念を援用するだけでは説明できない. この三体共鳴は $p\dot{\lambda}_J + q\dot{\lambda}_s + r\dot{\lambda} \simeq 0$ で定義される. ここで p, q, r はダランベール規則を満たす整数である. Sidlichovsly(1999) は上位 100 番までの番号付き小惑星の軌道を積分し, 大部分がカオス的であることを見た. これらの中で, いくつかは木星との平均運動共鳴にあり, いくつかは火星との平均運動共鳴にあり, 残りは三体共鳴にある.

前論文 (Tsiganis et al., 2000; 以後論文 I と略す) において, (522)Helga の運動の問題を再訪した. 数値積分をして, Helga の軌道要素が 20 億年程度安定にとどまることを示した. しかし, Helga に関して初期位相がずれた 1 群の粒子を積分すると, ほとんどの粒子が 5 千万年以内にエスケープすること, 平均エスケープ時間が 1 千万年であることを見た. 生き残った粒子は初期位相 $-\pi/3 \leq \varpi - \varpi_J \leq \pi/3$ にいたものであり, Helga はエスケープ集合と生き残り集合の境界にいた. Helga と似たふるまいをする他の粒子も境界近くにいた. また, 離心率に関係するドローネー作用の時系列は何桁もリャプノフ時間より長い相関時間を持った. この結果は, 外惑星 4 個すべての摂動を考慮に入れてもほぼ同じであった. この描像は Murison et al.(1994) および Varvoglis & Anastasiadus(1996) が提唱した「粘こさシナリオ」によく合う. ただ, 臨界引数 $\sigma = 7\lambda - 12\lambda_J$ の進化がカオス的であることは, 粘っこさの概念を使うならば, 多次元力学系に拡張さるべきものであることを意味する (詳しい議論は論文 I を見よ). この点には本論文の最後に戻ってくる.

12/7 共鳴の共鳴周期軌道の主たる族は, 平面円制限三体問題のポアンカレ横断面の不動点を構成するが, 論文 I においてはこれを調べた. ところが, いくつかの他の平均運動共鳴, 2/1 や 3/1 共鳴, とは違って, 楕円問題や 3 次元問題の周期軌道の族への分枝点がこの族上にはない. つまり, 木星の軌道が楕円になるやいなや, この共鳴の場所に周期軌道はなくなる. 3 次元の場合も同じである. その結果として, この共鳴の場所での相空間は「滑らかである」と期待される. なぜなら, 周期軌道 (あるいはポアンカレ写像の不動点, あるいは平均ハミルトン関数の不動点) は典型的には安定–不安定ペアとして現われるのであるが, この場合, この相空間内に安定および不安定多様体がないからである. 不安定な周期軌道の結びついたホモクリニックループは平面 $(X = \cos(\varpi - \varpi_J), Y = e\sin(\varpi - \varpi_J))$ を 3 つの位相的に異なる領域 (内部周回, 秤動, 外部周回) に分けるから, これは 12/7 共鳴にはあてはまらないと結論した. このことから, 制限三体問題において, 他の共鳴 (たとえば 3/1 の場合: Hadjimetriou, 1993a) では相空間の低離心率から高離心率領域へカオス軌道を輸送する機構が 12/7 共鳴には存在しないのである. だから, この共鳴の近くから出発したカオス軌道の離心率は, 木星軌道交差に至るほどの値に容易には行かない. 強制離心率程度の個有離心率 $e_P < e_J \approx 0.048$ の場合, 秤動軌道が存在し, 一方 $e_P > e_J$ の場合, 引数 $\varpi - \varpi_J$ は周回する. (522)Helga は $e_P \approx e_J$ であって, 臨界引数は周回しそうな勢いである. このふるまいは, 外惑星が全部摂動に加わっても変らないが, これは Milani & Nobili(1992) の結果を一致して, 防御機構と考えることができる. しかし, 摂動惑星が複数のモデルでは, 軌道共鳴に対応する天体数減少によって間隙が顕著になるのは永年共鳴の重合による. 重合は軌道共鳴の秤動ゾーン内部に生成される (Moons & Morbidelli, 1995). これが今日カークウッド間隙にともなう共鳴での数減少の機構として受け入れられているものである.

本論文では, 論文 I と同じ精神の下で, 11/4, 13/6, 18/7, 22/9 平均運動共鳴の近くの小惑星の運動を調べる. Sidlichovsky(1999) によると, これらの共鳴はそれぞれ小惑星 (50)Viginia, (6) Semele, (2) Palas, (33) Polyhymnia の安定カオス運動に伴うようだ. 次の節では, これら 4 個の ASC の長期進化を数値的に調べる. 3 節では, これらの共鳴はどれも 12/7 共鳴と性質を共有することを示す. 3 次元空間の場合や, 木星の軌道が楕円の場合には周期軌道が存在しないのである. このことは, 円問題の周期軌道の主たる族上に, 3 次元問題や楕円問題の周期軌道への分岐点が存在しないことからはっきりしている. 4 節では, 初期にこの共鳴の近くから出発した仮想的小惑星の進化を数値シミュレーションし, その結果を述べる. 数少ない例ではあるが, これらの小惑星の長期進化およびその固有要素の安定性が, 外惑星をすべて考慮したとき, 永年共鳴の作用によって変化し得ることを示す. また, 安定カオス軌道の作用の時系列の自己相関スペクトルの性質を吟味する. 最後に議論と結論を 5 節で述べる.

2. 現実の ASC の長期進化

最初に本研究の数値実験の設定を議論する. その後, 4 個の ASC の長期力学進化に関する結果を与える. これらのカオス的ふるまいは木星との平均運動共鳴に関係づけることができる (Sidlichovsly, 1999).

2.1. 数値的設定

本論文では 2 つの力学モデルを使う. (i) 3 次元楕円制限三体問題 (3BP) と (ii) 3 次元太陽系 (OSS) モデル. 後者では, 4 個の外惑星がニュートン重力で相互作用し, 質量ゼロの粒子 (小惑星) に摂動を与える. 積分子は Wisdom & Holman(1991) のシンプレクティック積分子であり, SWIFT パッケージ (Levison & Duncsan, 1994) で補足されたものである. 時間刻みは, どの場合も $\delta t = 10^{-2}T_1 \approx 43$ 日とした. 以下では, 時間の単位は木星の公転周期 $T_J \approx 11.86$ 年とした. 惑星の初期条件は元期 $JD2451600.0$(2000 年 2 月 $26.0TDT$) として Astronomical Almanac(2000) から取り, 小惑星の初期条件は (同じ元期で) フリーアクセスの MPCORB.DAT データベースから取った. このデータベースは小惑星センター (ftp://cfa-ftp.harvard.edu/pub/MPCORB/MPCORB.DAT) のものである.

2.2. 結果

3.

4.

本論文では, 論文 I で始めた安定カオス現象の仕事の続きを行った. 論文 I では, (522)Helga の運動と, それに関係する 12/7 木星共鳴を調べた. 前論文の結論は, Helga の異常な運動が, 楕円問題に 12/7 共鳴周期軌道がないことに関係する, ということであった. この性質から, この共鳴の近くの相空間の入り組んだトポロジーがもたらされる. このことは外惑星を全部入れても変らない. 本研究の動機となった「粘っこさ」仮説は今回の数値結果と完全には一致しなかった. とくに臨界引数の進化によって用意されるカオス運動のはっきりした証拠とも一致しなかった. 粘っこさの概念, σ の動きからカオス運動であることが明らかな軌跡であって, 上で記述した「機構」によって相空間の狭い領域内で離心率も軌道傾斜角も半分制限されているような軌跡をも取り込むように拡張すべきである. ...

References

[1] A——————————————————————

[2] Adachi, I., Hayashi, C. and Nakazawa, K: 1976, *Prog. Theor. Phys.* **56**, 1756.

[3] Aksnes, K.: 1988,

[4] Andersson, L.E.: 1974,

[5] Amolik, M.V., Krasinsky, G.A., and Pius, L.J.: 1969, *Publ. Institute Theret. Astron.* XIV.

[6] Applegate, J. et al.: 1986, *AJ* **92**, 176-194.

[7] Applegate, J.F., M.R. Douglas, ...

[8] Applegate, J.F., M.R. Douglas, ...

[9] Arnold, V.I.: 1961,

[10] Arnold, V.I.: 1962, *Sov. Math. Dokl.* **3**, 1008.

[11] Arnold, V.I., 1963b: A.N. Kolmogorov's theorem on the convergence of conditionally preiodic motions with a small variation in the Hamiltonian, *Russian Math. Surv.* **18**, 9-36

[12] Arnold, V.I.: 1974

[13] Arnold, V.I. and A. Abez: 1968

[14] Arnold, V.I.: 1978, *Mathematical Methods of celestial Mechanics*, New York, Springer-verlag.

[15] B——————————————————————

[16] Benettin, G., M. Casartelli, L. Galgani, A. Giorgilli, and J-M. Strelcyn: 1978,

[17] Benettin, G. and Gallavotti,G¿, 1986: Stability of motions near resonaces in quasi-integrable Hamiltonian systems, *J. Stat. Phys.* **44**, 293-338.

[18] Berge, P., Pomeau, Y., and Vidal, C: 1984, *Order Within Chaos, Towards a Deterministic Approach to Turbulence* (Wiley, New York).

[19] Bevilacqua, R., Menchi, O., Milani, A. & Farinella, O., *Moon Planets* **22**, 141-152(1980).

[20] Binzel, R., J. Green, and C. Opal: 1986,

[21] Birn, J.: 1973, *Astron. Astrophys.* **24**, 283.

[22] Black, G.J., Nicholson, P.D., and Thomas, P.C.: 1995, *Icarus* **117**, 149.

[23] Bogoliubov, N.N. and Yu.A. Mitropolsky: 1961, Asymptotic methods in the Theory of Nonlinear Oscillations, Hindustan Publ. Corp., Dehli.

[24] Bogoyavlensky, O.I. and S.P. Novikov: 1976, *Usp. mat. Nauk* **31**, 33.

[25] Bretagnon. P: 1974,

[26] Bretagnon. P: 1982,

[27] Brouwer, D & Clemence, G.M.: 1961, *Methods of Celestial mechanics* Ch. XVI(Academic, New York).

[28] Brouwer, D. and van Woerkom, A.J.J.: 1970, *Astron. Pap. Am. Ephem. Naut. Almanac* **13** pt.2, 81.

[29] Bryuno, A.D.: 1970, *mat. sbornik* **83**, 273-.

[30] Burns, J.A., V.S. Safronov: 1973,

[31] Bruns, *Berichte der Kgl. Sachs. Ges. der Wiss.* 1887, pp.1,55; *Acta Math.* **xi**, p.25. see also Forsyth, *Theory of Differential Equations*, Vol.III(1900), Ch.xvii.

[32] Burns, J.A.: 1987, in *The Evolution of the Small Bodies of the Slar Sysytem*(Soc. Italiana di Fisica, Bologna, Italy), p.252.

[33] Burns, J.A., Lamy, P.L., and Soter, S.: 1979, *Icarus* **40**, 1.

[34] C————————————————————————————

[35] Casati, G. and J. Ford: 1975, *Phys. Rev.* **A12**, 1702.

[36] Chambers, J.E., Wetherill, G.W., and Boss, A.P.: 1996, *Icarus* **119**, 261.

[37] Channon, S.R. and J.I. Lebowitz: 1980,

[38] Cherry, *Proc. Camb. Phil. Soc.* xxII(1924), p.287.

[39] Chirikov, B.V., 1960: Resonance processes in magnetic traps, *Plasma Phys.* **1**, 253-260.

[40] Chirikov, B.V.: 1978, The problem of motion stability for a charged particle in a magnetic trap, *Fizika Plazmy* **4**, 521

[41] Chirikov, B.V., 1979: A universal instability of many dimensional oscillator systems, *Physic Reports* **52**, 265-379.

[42] Chodas, P.W. and Yeomans, D.K.: 1996, in *The Collision of Comet Shoemaker-Levy 9 and Jupiter* IAU Colloquium Vol. 156(Cambridge University Press, Cambridge, England), p.1.

[43] Cochran, W.D.., Hatzes, A.P., Butler, R.P., and Marcy, G.W.: 1997, *Astrophys. J.* **483**, 457.

[44] Cohen, C.J., Hubbard, E.C., and Oesterwinter, C.: 1973, *Astron. Pap.Am. Ephem.* (U.S. Printing Office, Washington), Vol.22, Pt.I.

[45] Conner, S.R.: 1984,

[46] Contopoulos, G.: 1967,

[47] D————————————————————————————-

[48] Danby, J.M.A.: 1988, *Fundamentals of Celestial mechanics* (Willmann-Bell, Richmond, VA).

[49] Darwin,G.: 1879,

[50] Dermott, H.J., Malhotra, R., and Murray, D.: 1988, *Icarus* **76**, 295.

[51] Dragt, A.J. and J.M. Finn: 1976, *J. Geophys. Res.* **81**, 2327.

[52] Duncan, M.J.: 1994, in Institut d'astrophysique de Paris Astrophusycs Meeting No. 10: *Circumstellar Dust Disks and Planet Formation*, edited by R. Ferlet and a. VidaliMadjar(Editions Frontiers, Gif sur Yvette, France), p.245.

[53] Duncan, M.J., Lissauer, J.J.: 1997, *Icarus* **125**, 1.

[54] Duncan, M.J., Lissauer, J.J.: 1998, *Icarus* **134**, 303.

[55] Duncan, M., Levison, H. and Budd, S.M.: 1995, *AJ* **110**, 3073-3081.

[56] Duncan, M.J., Levison, H., Lee, M.: 1995, *Astron. J* **116**, 2067.

[57] Duncan, M. and Levison, H.: 1997, *Science* **276**, 1670-1672.

[58] Duncan, M.J. and Quinn, T.: 1993, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **31**, 265-295.

[59] Duncan, M.J., Quinn, T., and Tremaine, S.: 1989, *Icarus* **82**, 402.

[60] Duncan, M., Quinn, T. and Tremaine, S.: 1988, *ApJ* **328**, L69-L73

[61] Duriez, L.: 1979,

[62] Duxbury, T.C., and J.D. calahan: 1982,

[63] E——————————————————————

[64] Eckert, W.J., Brouwer, D., and Clemence, G.M.: 1951,

[65] Edgeworth, K.: 1943, *Brit. Astron. Soc.* **53**, 181-188.

[66] Edgeworth, K.: 1943, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **109**, 600-609.

[67] Evans, N¿W¿ and Tabachnik, S.: 1999, *Nature* **399**, 41-43.

[68] Everhart, E.: 1973, *AJ* **78**, 329-337.

[69] F——————————————————————

[70] Farinella, P., Froeschlé, C.H., Froeschlé, C., Gonczi, R., Hahn, G. et al.: 1994, *Nature* **371**, 315-317.

[71] Farinella, P., Davis, D.R., and Stern, S.A.: 2000, see Mannings et al., 2000, pp.1255-1282.

[72] Feigenbaum, M.J.: 1978, *Journ. Stat. Phys.* **19**, 25.

[73] Fermi, E.: 1949, *Phys. Rev.* **75**, 1169-.

[74] Fermi, E., J. Pasta, and S. Ulam: 1955, Studies of Nonlinear Problem I, Los Alamos Scientific report LA-1940; in Collected Works of Enrico Fermi, Vol.II, University of Chicago Press, 1965, p.978.

[75] Fernandez, J.: 1980, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **192**, 481-491.

[76] Ferraz-Mello, S. and Klafke, J.: 1991, in *Predictability, Stability and Chaos in N-Body Dynamical Systems*, ed. A.E. Roy, p.177, New York: Plenum.

[77] Ferraz-Mello, S., 1994: Dynamics of the asteroidal 2/1 resonance, *AJ* **108**, 2330-2337.

[78] Ferraz-Mello, S. Klafke, J.C., Michtchenko, T.A., and Nesvorny, D.: 1996, *Cel. Mech. Dyn. Astron.* **64**, 93.

[79] Fermi, E.: 1923,

[80] Ford, J.: 1973, Empirical detrmination of integrability for nonlinear oscillator systems using area-preserving mappings, Colloques Internationaux du C.N.R.S. Transformations ponctuelles et leur applications, Toulouse, p.123.

[81] Franklin, F., 1994: An examination of the relation between chaotic orbits and the Kirkwood gap at the 2/1 resonance, *AJ* **107**, 1890-1899.

[82] Franklin, F.: 1994, *Astron. J.* **107**, 1890-1899.

[83] Franklin, F.: 1996, *Astron. J.* **112**, 1247-1253.

[84] Franklin, F. and Lecar, M.: 2000, *Meteo. Planet. Sci.* **35**, 331-340.

[85] Franklin, F., Lecar, M and Soper, P.: 1989, *Icarus* **79**, 223-227.

[86] Franklin, F., Lecar, M and Wiesel, W.: 1984, in *Planetary Rings*, ed. R. Greenberg, A. Brahic, pp.562-588, Tucson, Univ. Arizona.

[87] Froeschlé, C. and H. Scholl: 1976,

[88] Froeschlé, C. and H. Scholl: 1979,

[89] Froeschlé, C. and H. Scholl: 1981,

[90] Froeschlé, C. and H. Scholl: 1983,

[91] G———————————————————————————

[92] Gallardo, T. and Ferraz-Mello, S.: 1998, *Planet. Space Sci.* **46**, 945-965.

[93] Gardner, C.S., J.M. Greene, M.D. Kruskal, and R.M. Miura: 1967, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1095.

[94] Giffen, R.: 1973, *Astron. Astrophys.* **23**, 387-403.

[95] Gladman, B.J. and Duncan, M.J.: 1990, *Astron. J.* **100**, 1680-1693.

[96] Gladman, B.J., Migliorini, F., Morbidelli, A., Zappala, P. Michel, P. et al.: 1997, *Science* **277**, 197-201.

[97] Gladman, B. and Duncan, M.J.: 1990, *Astron. J.* **100**, 1669

[98] Goguen, J.: 1983,

[99] Golenko, D.I.: 1965, Simulation and statistical analysis of pseudo-random numbers by computer, Nauka, Moskva.

[100] Gomes, R.S.: 1997, *Astron. J.* **114**, 396.

[101] Goldreich, P.: 1963,

[102] Goldreich, P. and S.J. Peale: 1966,

[103] Grazier, K., Newman, W., Varadi, F., Kaula, W. and Hyman, J.: 1999a, *Icarus* **140**, 341-352.

[104] Grazier, K., Newman, W., Varadi, F., Kaula, W. and Hyman, J.: 1999b, *Icarus* **140**, 353-368.

[105] Greene, J.M.: 1968, *J. Math. Phys.* **9**, 760.

[106] Greene, J.M.: 1979, A method for determining a stochastic transition, *J. math. Phys.* **20**, 1183-1201.

[107] Greenberg, R., Wacker, J.F., Hartmann, W.K., and Chapman, C.R.: 1978, *Icarus* **35**, 1.

[108] Greenzweig, Y. and Lissauer, J.J.: 1990, *Icarus* **87**, 40.

[109] H———————————————————————

[110] Hagirara, Y.: 1961,

[111] Hagihara, Y.: 1975,

[112] Haretu, S.C.: 1885,

[113] Harrington, R.S.: 1972,

[114] Harrington, R.S.: 1976,

[115] Harzer, P.H.: 1895,

[116] Henon, M.: 1966a,

[117] Henon, M.: 1966b,

[118] Henon, M.: 1970,

[119] Hénon, M.: 1974, *Phys. Rev.* **B9**, 1921.

[120] Henon, M. and C. Heiles: 1964,

[121] Hénon, M. and J.-M. Petit 1986. Series expansion for encounter-type solutions of Hill's problem, *Celest. Mech. Dynam. Astron.* **38**, 67-100.

[122] Hénon, M.: 1988, *Physica D* **33**, 132.

[123] Henrard, J., A. lemaitre, A. Milan and C.D. Murray: 1987,

[124] Hilborn, R.C.: 1994, *Chaos and Nonlinear Dynamics, An Introduction for Scientists and Ebgineers* (Oxford University Press, New York).

[125] Holman, M.J. and Murray, N.W.: 1996, *Astron. J.* **112**, 1276.

[126] Holman, M.J., Touma, J., and Tremaine, S.: 1997, *Nature* **386**, 254.

[127] Holman, M.J. and Wisdom, J.: 1993, *Astron. J.* **105**, 1987.

[128] I———————————————————-

[129] Ito, T. and Tanikawa, K.: 2000, Long-term stability of our solar system, in Proceedings of the 32nd Symposium on Celestial Mechanics, the graduate University for Advanced Studies, Hayama, Kanagawa, JAPAN, 15-17, March, 2000, pp.47-96.

[130] J———————————————————-

[131] Jefferys, W.H.: 1966,

[132] K———————————————————

[133] Kary, D.M.: 1993, Ph.D. thesis (State University of New York at Stony Brook).

[134] Kary, D.M. and Dones, L.: 1996, *Icarus* **121**, 207.

[135] Kary, D.M., Lissauer, J.J., and Greenzweig, Y.: 1993, *Icarus* **106**, 288.

[136] Klavetter, J.J.: 1989, *Astron. J.* **97**, 570.

[137] Kolmogorov, A.N., 1954: Preservation of conditionally periodic movements with small change in the Hamiltonian function, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **98**, 527-530; english translation in *Lecture notes in Physics* N. 93, 51-56, Casati, G. and Ford, J.

[138] Kruskal, M.D.: 1962, *J. math. Phys.* **3**, 806

[139] Kuiper, G.: 1973a,

[140] Kuiper, G.: 1973b,

[141] L———————————————————

[142] Laskar, J.: 1980

[143] Laskar, J., *Nature* **338**, 237-238(1989).

[144] Laskar, J., *Icarus* **88**, 266-291(1990).

[145] Laskar, J., in *Choas et Determinisme*(eds. Dahan, A., Chabert, J.L., & Chemla, K.) (Soeil, Paris, in press).

[146] Laskar, J.: 1994, *Astron. Astrophys.* **287**, L9.

[147] Laskar, J.: 1996, *Cel. Mech. Dyn. Astron.* **64**, 115.

[148] Laskar, J.: 1997, *Astron. Astrophys.* **317**, L75.

[149] Laskar, J. and Robutel, P.: 1993, *Nature* **361**, 608.

[150] Lecar, M. and F. Franklin: 1973,

[151] Lecar, M., Franklin, F., and Murison, M.: 1992, On predicting lonr-term orbital instability: a relation between Lyapunov time and sudden orbital tansitions, *AJ* **104**, 1230-1236.

[152] Lecar, M. and Franklin, F.: 1997, *Icarus* **129**, 134.

[153] Levi-Civita, *Acta Math.* xxx (1905), p.305.

[154] Levison, H.F. and Duncan, M.J., 1993: The gravitational sculping of the Kuiper belt, *Astrophys. J. Lett.* **406**, L35-L38.

[155] Levison, H.F. and M.J. Duncan 1994. The long-term dynamical behaviour of short-period comets, *Icarus* **108**, 18-36.

[156] Levison, H.F. and Duncan, M.J.: 1997, *Icarus* **127**, 13.

[157] Levison, H.F., Lissauer, J.J., and Duncan, M.J.: 1998, *Astron. J.* **116**, 1998.

[158] Levison, H.F., Shoemaker, E.M., and Shoemaker, C.S.: 1997, *Nature* **385**, 42.

[159] Lichtenberg, A.J. and Lieberman, M.A.: 1992, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2nd ed. (Springer-Verlag, New York). 1st edition: 1983.

[160] Liou, J.-O. and Malhotra, R.: 1997, *Scinence* **275**, 375.

[161] Lissauer, J.J.: 1993, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **31**, 129.

[162] Lissauer, J.J.: 1995, *Icarus* **114**, 217.

[163] Lochak, P., 1993: Hamiltonian Perturbation theory: periodic orbits, resonance and intermittancy, *Nonlinearity* **6**, 885-904.

[164] Lorenz, E.N.: 1963,

[165] M————————————————————————-

[166] Malhotra, R.: 1996, *Astron. J.* **111**, 504.

[167] Malhotra, R.: 1998, in *Solar System Formation and Evolution*, edited by D. Lazzaro et al., ASP Conference Series Vol. 149 (Astronomical Society of the Pacific, San Francisco), p.37.

[168] Marchal, C. and G. Bozis 1982. Hill stability and distance curves for the general three-body problem, *Celest. Mech. Dynam. Astron.* **26**, 311-333.

[169] Marcy, G.W. and Butler, R.P.: 1996, *Astrophys. J.* **464**, L147.

[170] Marsden, B.G., Sekanina, Z., and Yeomans, D.K.: 1973, *Astron. J.* **78**, 211.

[171] McFadden, L.A. and F. Vilas: 1987,

[172] McMillian, E.M.: 1971, A problem in the stability of periodic systems, in *Topics in Modern Physics*, Colorado Associated University Press.

[173] Melnikov, V.K.: 1965, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **165**, 1245.

[174] Message, J.: 1976,

[175] Migliorini, F. et al.: 1997, *Meteoritics Planet. Sci.* **32**, 903

[176] Milani, A. and Knezevic, Z., *Celestial Mechanics* **49**, 347-411(1990).

[177] Milani, A. and A.M. Nobili 1983. On the stability of hierarchical four-body systems, *Celest. Mech. Dynam. Astron.* **31**, 241-291.

[178] Milani, A. and Nobili, A., *Celestial Mechanics* **34**, 343-355(1984).

[179] Milani, A. and Nobili, A., *Astron. Astrophys.* **144**, 261-274(1985).

[180] Milani, A. and Nobili, A., 1992: An example of stable chaos in the Solar System, *Nature* **357**, 569-571

[181] Milani, A.,Nobili, A., and Carpino, M., *Icarus* **82**, 200-217(1989).

[182] Milani, A., Nobili, A., and Knezevic, Z., 1997: Stable chaos in the asteroid belt, *Icarus* **125**, 13-31.

[183] Misner, C.W., Thorne, K.S., and Wheeler, J.A.: 1973, *Gravitation*(Freeman, San Francisco).

[184] Morbidelli, A. and Giorgilli, A., 1995a: Superexponential stability of KAM tori, *J. Stat. Phys.* **78**, 1607-1617.

[185] Morbidelli, A. and Giorgilli, A., 1995b: On a connection between KAM and Nekhoroshev's theorems, *Physica D* **86**, 514-516.

[186] Morbidelli, A., Zappala, E., Moons, M. Cellino, A., and Gonczi, R., 1995: Asteroid families close to mean motion resonances: dynamical effects and physical implications, *Icarus* , in press.

[187] Morbidelli, A.: 1997, *Icarus* **127**, 1.

[188] Moser, J., 1962: On invariant curves of area-presrving mappings of an annulus, *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math. Phys.* **2**, 1.

[189] Moser, J.: 1966, SIAM Review **8**, 145.

[190] Moser, J.: 1973,

[191] Moser, J.: 1974,

[192] Murison, M., Lecar, M. and Franklin, F., 1994: Chaotic motion in the outer asteroid belt and its relation to the age of the solar system, *AJ* **108**, 2323-2329.

[193] Murray, C.D.: 1986,

[194] Murray, C.D. and K. Fox: 1984,

[195] Murray, C.D. and Dermott, S.F.: 1999, *Solar System Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, England).

[196] Murray, N. and Holman, M.: 1997, *Astron. J.* **116**, 1246.

[197] Murray, N., Holman, M., and Potter, M.: 1998, *Astron. J.* **116**, 2583.

[198] N———————————————————

[199] Nacozy, P.: 1965,

[200] Nacozy, P.: 1976,

[201] Neishtadt, A.I., 1984: The separation of motions in systems with rapidly rotating phase, *J. Aool. math. Mech.* **48**, 133-139.

[202] Nekhoroshev, N.N.: 1977, *Usp. Mat. Nauk* **32**, 5-

[203] Nekhoroshev, N.N., 1977: Exponential estimates of the stability time of near-integrable Hamiltonian systems, *Russ. Math. Survey* **32**, 1-65.

[204] Nekhoroshev, N.N., 1979: Exponential estimates of the stability time of near-integrable Hamiltonian systems, 2, *Trudy Sem. Petrovs.* **5**, 5-50.

[205] Niederman, L., 1993: resonance et stabilité dans le probleme planetaire: solution de seconde espace, Ph.D. dissertion, Universite Paris 6.

[206] Nobili,A.M. & Burns, J.A., *Science* **244**, 1425(1989).

[207] Nobili, A.M., in *Asteroids II* (eds. Binzel, R.P., Gehereis, T. & Matthews, M.S.), 862-879(University of Arizona Press, 1989).

[208] Nobili, A., Milani, A., and Carpino, M., *Astron. Astrophys.* **210**, 313-336(1989).

[209] O———————————————————

[210] D.S. Ornstein,

[211] Ovenden, M., Feagin, T., and Graf, O.: 1974,

[212] P———————————————————

[213] Peale, S.J.: 1977,

[214] Peale, S.J.: 1976, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **14**, 215.

[215] Peterson, I.: 1993, *Newton's Clock: Chaos in the Solar System* (Freeman, New York).

[216] Petit, J.-M., Durda, D.D., Greenberg, R., Hurford, T.A., and Geissler, P.E.: 1997, *Icarus* **130**, 177.

[217] Petit, J.-M., Hénon, M.: 1986, *Icarus* **66**, 536.

[218] Pettengill, G.H. and R.B. Dyce: 1965,

[219] Painlevé, P., *Bull. astr.* xv, 1898.

[220] Painleve, P., *C. R.* cxxx(1900), p.1699.

[221] Poincaré, A., *Acta Math.* XIII(1890), 259-; *Nouv. Meth. de la Mec. Cel.* Vol.1(1892), p.283.

[222] Poincaré, H.: 1892, *Les Methodes Nouvelles de la Mechanique Celeste*(Gauthiers-Villars, Paris). English translation: *New methods of Celestial Mechanics*(AIP, New York, 1993).

[223] Poincaré, A., *Nouv. Math. de la Mec. Cel.* I, p.253.

[224] Poincaré, H.: 1902,

[225] Pollack, J.B., Hubickuj, O., Bodenheimer, P., Lissauer, J.J., Podolak, M., and Greenzweig, Y.: 1996, *Icarus* **124**, 62.

[226] Q———————————————

[227] R———————————————

[228] Rasio, F.A. and Ford, E.B.: 1996, *Science* **274**, 954.

[229] Russmann, H.: 1975, On optimal estimates for the solutions of linear partial differential equations of first order constant coefficients on the torus, in *Dynamical Systems. theory and Applications*, Lecture Notes in Physics, Vol.38, Springer.

[230] S———————————————

[231] Sackmann, I.-J., Boothroyd, A.I., and Kraemer, K.E.: 1993, *Astrophys. J.* **418**, 457.

[232] Safronov, V.S.: 1969, *Evolution of the protoplanetary Cloud and Formation of the Earth and Planets*(Nauka, Moscow)(in Russian). English translation: NASA TTF-677, 1972.

[233] Scholl, H. and C. Froeschlé: 1974,

[234] Scholl, H. and C. Froschlé: 1975, *Astron. Astrophys.* **42**, 457-.

[235] Schubart, J.: 1964,

[236] Schubart, J., *Celestial Mechanics* **43**, 309-317(1988).

[237] Schuster, H.G.: 1989,

[238] Sessin, W. and S. ferraz-Mello: 1984,

[239] Shlesinger, M.F., Zaslavsku, G.M., and Klafter, J., 1993: Strange kinetics, *nature* **363**, 31-37.

[240] Shinbrot, T., Grebodi, C., Wisdom, J., and Yorke, J.A.: 1992,

[241] Showman, A.P. and Malhotra, R.: 1997,

[242] Smith, B. et al: 1982,

[243] Soper, M., Franklin, F. and Lecar, M., 1990: On the original distribution of the asteroids, *Icarus* **87**, 265-284

[244] Stockwell, J.N.: 1872,

[245] Sussman, G.J. & Wisdom, J., *Science* **241**, 433-437(1988).

[246] Sussman, G.J. and Wisdom, J.: 1992,

[247] Szebehely, V.: 1972,

[248] Szebehely, V.: 1974,

[249] Szebehely, V.: 1976,

[250] T———————————————

[251] Tisserand, F.: 1876,

[252] Thomas, P., et al: 1984

[253] Thomas, P. and J. Veverka: 1985

[254] Tittemore, W.C.: 1990,

[255] Toda, M.: 1974, *Phys. Lett.* **A48**, 335

[256] Toda, M.: 1975, Studies of a non-linear lattice, *Phys. Reports* **18C**, 1.

[257] Torbett, M. and Smoluchowski, R.: 1980,

[258] Touma, J. and Wisdom, J.: 1993,

[259] Tremaine, S.: 1995,

[260] Tsiganis, T., Varvoglis, H. and Hadjidemetriou, J.D.: 2002, Stable chaos in high-order Jovian resonances, *Icarus* **155**, 454-474.

[261] U———————————————

[262] Urey, H.C., W.H. Elsasser and M.G. Rochester: 1959

[263] V———————————————

[264] van Flandern, T.C. and Harrington, R.S.: 1976,

[265] W———————————————

[266] Weidenschilling, S.J. and Davis, D.R.: 1985,

[267] Weidenschilling, S.J. and Marzari, F.: 1996,

[268] Wetherill, G.W.: 1968,

[269] Wetherill, G.W.: 1985,

[270] Wetherill, G.W. and Stewart, G.R.: 1989,

[271] Wetherill, G.W.: 1990,

[272] Whipple, A.L. and Shields, P.J.: 1993,

[273] Williams, J.G. and Benson, G.S.: 1971,

[274] Wilson, J., *Icarus* **56**, 51-74(1983).

[275] Wilson, J., *Nature* **315**, 731-733(1985).

[276] Wisdom, J.: 1980,

[277] Wisdom, J.: 1982,

[278] Wisdom, J.: 1983

[279] Wisdom, J.: 1985a

[280] Wisdom, J.: 1985b,

[281] Wisdom, J.: 1986

[282] Wisdom, J.: 1987a,

[283] Wisdom, J.: 1987b,

[284] Wisdom, J.: 1987c,

[285] Wisdom, J., Peale, S.J., and Mignard, F.: 1984,

[286] Wisdom, J and Holman, M. *Astr. J.* **102**, 1528-1538(1991).

[287] Wisdom, J. and S.J. Peale: 1984

[288] Y————————————-

[289] Yalcinkaya, T. and Lai, Y.-C.: 1995,

[290] Yeomans, D.K.: 1994,

[291] Yoder, C.F.: 1982,

[292] 2————————————————————————————-

[293] Krylov, N.S.: 1950, Studies on the foundation of statistical physics (Akd. Nauk. SSSR, M.-L.)

[294] Chirikov, B.V.: 1959, Atomnaya energia **6**, 630-.

[295] Zaslavsky, G.M. and

[296] F.K. Goward,

[297] Ya.G. Sinai,
[298] V.K. Melnikov,
[299] A.N. Kolmogorov,
[300] Ya.G. Sinai,
[301] D.V. Anosov,
[302] Harold Jeffreys and
[303] G.D. Birkhoff,
[304] N.N. Bogoliubov,
[305] Ya.B. Zeldovich
[306] E.V. SHURYAK,
[307] A. Schoch,
[308] H. Goldstein,
[309] V.I. Arnold,
[310] N.N. Nekhoroshev,
[311] M.M. Khanaev,
[312] G.V. Gadiyak and ,
[313] C.L. Siegel,
[314] P.R. Halmos,
[315] G.M. Zaslavsky and B.V. Chirikov,
[316] M.N. Rosenbluth, R.Z. Sagdeev, ..
[317] B.V. Chirikov,
[318] A.J. Lichtenberg and E.F. Jaeger,
[319] G.S. Smith and A.N. Kaufman,
[320] G.H. Walker and J. Ford,
[321] B.V. Chirikov,
[322] F.M. Izraelev and B.V. Chirikov,
[323] B.V. Chirikov, ...
[324] M. Henon and C. heiles
[325] B.V. Chirikov and F.M. Izraelev,
[326] J. Ford and G.H. Lunsford,
[327] G.V. Gadiyak, ...

[328] A.Ya. Khinchin,
[329] B.V. Chirikov,
[330] Colloques Internationaux ...
[331] V.N. Melekhin,
[332] M.A. Lieberman and A.J. Lichtenberg
[333] L.J. Laslett,
[334] B. Lehnert,
[335] J. Moser,
[336] R.J. Hastie, G.D. Hobbs, and J.B. Taylor,
[337] A,M. Dykhne and A.V. Chaplik,
[338] A. Garren et al.,
[339] E.M. Kruskal,
[340] Yu.I. Neimark,
[341] O.V. Serdyuk,
[342] L.A. Artsimovich,
[343] C. Stormer,
[344] E.T. Whittaker and G.N. Watson,
[345] Ya.S. Derbenev, S.I. Mishnev, ...
[346] J. Moser,
[347] E.A. Grebennikov and Yu.A. Ryabov,
[348] G.M. Zaslavsky and N.N. Filonenko,
[349] N.N. Bogoliubov, Yu.A. Mitropolsky and A.M. Samoilenko,
[350] H. Russmann
[351] F. Takens,
[352] J. Moser,
[353] V.I. Arnold,
[354] V.E. Zakhalov,
[355] A.B. Rechester and
[356] C. Froschlé,
[357] J.M. Greene,
[358] A. Renieri,

[359] S. Smale,
[360] Z. Nitecki,
[361] Ya.G. Sinai
[362] J. Ford,
[363] V.M. Alekseev,
[364] R.C. Churchill and
[365] B.V. Chirikov,
[366] G.A. Hedlund,
[367] H. Poincaré
[368] I. Gumowski and C. Mira,
[369] R.V. Mises
[370] M.G.N. Hine,
[371] K.D. Pustylnikov,
[372] S.P. Kapitsa and V.N. Melekhin,
[373] B. McNamara, D,V, Anderson, ...
[374] G.M. Zaslavsky,
[375] M.V. Smoluchowski,
[376] F.M. Izraelev and B.V. Chirikov,
[377] F. Rannou,
[378] M.N. Rosenbluth,
[379] J. Finn,
[380] G.N. Kulipanov, S.I. ...
[381] J. Ford, ...
[382] S. Smale,
[383] L.P. Shilnkov,
[384] L.P. Neimark,
[385] N.N. Filonenko, R.Z. Sagdeev, ...
[386] P. Channell,
[387] V.G. Ponomarenko, L.Ya. Tainin, ...
[388] V.L. Aslander et al.,
[389] E. Keil,
[390] E. Keil and G. Leroy,
[391] Ya.S. Derbenev and S.A. Kheifets,