Theory and application of nearly integrable Hamiltonian systems, Kokyuroku No.1282 (Ed. T. Konishi), Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, September 2002, pp.4-16 (in Japanese).

天体力学とハミルトン力学系
Celestial Mechanics and Hamiltonian Dynamics

谷川清隆 (国立天文台)
Kiyotaka TANIKAWA
National Astronomical Observatory of Japan
Mitaka, Tokyo, 181-8588, Japan
email: tanikawa.ky@nao.ac.jp

Abstract

The main target of celestial mechanics is still our Solar System. With respect to the motion of bodies in our planetary system, we have controversial and sometimes seemingly contradicting requirements. We hope motions be stable in some cases, whereas we hope motions be unstable in other cases. In still other cases, motions should have been stable over billions of years and become unstable just now. The recent history of the study of motion of bodies in the solar system has been the process of disentanglement of intricate requirements.

天体力学の主たる対象はいまでも太陽系である. 太陽系の天体の運動に関し, 人々は矛盾した要求を持つ. 運動は安定であって欲しいし, 不安定であっても欲しい. また, 太陽系の年齢にわたって安定であって, いままさに不安定になる運動もあって欲しい. この錯綜した要求を解きほぐしつつ答える努力の積み重ねが太陽系の天体運動に関する最近の研究史であったともいえる.

1. 序および問題意識 Introduction

近可積分系研究の進むべき道を模索するため、実際の現象に沿った視点から、近可積分系の理論で応用できるものはないか、また近可積分研究に対する注文などはないか. 主催者の注文は, かたや「天体力学」かたや「ハミルトン力学系」となっている. 天文学的観点からすると, 両者はあまり違わない. ところが, 天文学を除いて考えると, 天体を扱わないハミルトン力学系はありそう. 実は, そのような研究はたくさんあるようだ. なるほど. そのような見方をしたことはない. そこで, 本報告では, いわゆる「天体力学」から近可積分ハミルトン系を見る, という観点を貫いてみる.

1.1. 天文学のはじまり The dawn of astronomy

天文学はいつどのように始まったのか. 人類はいつ人類として, あるいは人間として自覚したのか. 人類が自分の置かれた環境に気づいたとき, 始めに規則を見たのであろうかそれともカオスを見たであろうか. 一日の変化, 月ごとの季節の移り変わり, そして年ごとの繰り返し. 空に規則を見た. 地上に対応する現象を見た. 地上の規則は天

に固定された星ではなく, これらの星々の間を縫うように動く太陽, 月, 惑星の動きに関係する. これは不思議なことだ. 生物学では「個体発生は系統発生を繰り返す」と言われる. 人類が単細胞生物から出発して, 小さな多細胞生物となり, 魚となり両性類となって陸地に上がり, 哺乳類を経て霊長類から今日に至るまでを, 個人は母親の腹の中で経験すると言われる. 子どもはいつ空に気づくのか. 太陽や月を見るのはいつか. 飛行機雲に注意を向けるのはいつか. 初めて空を見た人類に対応するのは何歳の子どもか. 著者本人は覚えていない.

紀元前 4 世紀, 荘子は深く世界を理解した. カオスが本質であること, カオスがなくなると世界のある部分が死んでしまうことに気づいていた. 荘子 (応帝王篇第七) 「南海之帝為倏, 北海之帝為忽, 中央之帝為渾沌. 倏與忽, 時相與遇於渾沌之地, 渾沌待之甚善, 倏與忽, 謀報渾沌之徳, 曰, 人皆有七竅, 以視聴食息, 此獨无有, 嘗試鑿之, 日鑿一竅, 七日而渾沌死.」

さて中国においては, 天文学は暦の学問として発達した. 「太陽, 月, 惑星の運動を解明したい」 これが古代文明の課題となった. 天体の運動学である. いったい世界の規則とは何か. 世界には頼るべき規則はあるのか. 変転窮まりないこの世界において, 基準となるべきものは何か. 天球に貼りついた恒星は面白くも何ともない. 知性を刺激しない. ところが恒星の間を縫って動く太陽や月や惑星は地上の事物の生起と関係する. これらの動きをきちんと捉えることが当面の目標である, と古代人は考えた. 藪内清 [1] によると, 漢の武帝のとき, 天の一周を 365.25(1 度 $= 0^\circ.9856$) に分割し, 月や星の位置を度で表現した. 後漢のとき, 月の運動に遅速あることが知れた (いまの楕円運動). 三世紀, 白道と黄道の違い, および交点の移動 (歳差) が認識された. 歳差の認識は中近東文明より遅れた. 太陽運動の非一様性は 6 世紀に認識された. これもヒッパルコスに遅れた. 元代, 郭守敬の授時暦で運動学が完成した. 暦が正しいことは日月の運動を正しく予測できるということ. 力学はまだ始まらない.

人類はカオスから抜け出したい, 渾沌から逃げたいと思った. だが, 20 世紀, カオスと正面から向かい合うことになった. 逃げることはできないことを悟った. そして 21 世紀は?

1.2. 計算機時代の太陽系力学 Solar system dynamics in computer era

天体の力学は, 天体の運動学が完成してから始まった. 数千年にわたる運動学の経験を経て, これしかないという形で楕円運動に行きつき, 力の $1/r^2$ 法則に至ったのであると筆者には思われる. その後の力学の発展を追うことは筆者の力の及ばないところなのでたちまち現代に飛ぶことにする. とはいえ, 天体力学は歴史的に太陽系, 惑星系を扱ってきた. そこから発想も出てきたし, 新たな問題も発生した. 他の分野へ波及する現象も発見された. 人工衛星打ち上げに始まる新天体の発見がいまも続いている. 系外惑星, すなわち太陽系外惑星, これがこれからの問題だ. 惑星系の力学は新たな段階を迎えている. はるか離れた「太陽系」も扱うことになる. わが太陽系も遠い太陽系も近可積分ハミルトン問題の宝庫である. 1980 年以降, 太陽系, 惑星系の力学的研究がにぎやかになった. コンピュータの計算スピードの驚異的増加, 計算法の発展, 力学系の手法の導入 (写像による軌道追跡), さらには探査観測も含めて新しい技術による新天体の発見, 等など. これらが相互作用しながら太陽系力学は発展してきた. 日本から発信される最先端の研究も増えてきた. 太陽系の年齢分の数値積分, また数値積分法, シンプレクティック法, 惑星系の形成, 安定性など, もりだくさんの結果がある. 本報告では

小天体の安定性, リャプノフ時間と巨視的不安定性, 太陽系の安定性を取り上げて解説する. ここでの話題が近可積分ハミルトン系の数理研究者の参考となれば幸いである.

観測は, 掩蔽観測による天王星のリングの発見が 1977 年, ボイジャーによる確認が 1986 年, 木星にもリングあり, これが 1979 年. 小惑星帯の詳しい構造は 1970 年代に行われた Palomer–Leiden サーベイ観測による. 1970 年代終りから 1980 年代始めにかけて, 木星と土星に多数の衛星の発見. ボイジャー II が通過して天王星, 海王星にいくつも衛星が発見された. 海王星にまでリングが発見された. 冥王星の衛星シャロンが発見されたのは 1978 年. 地球接近小惑星も多数発見された. 小惑星は小惑星帯だけにいるのではない. アルバレスらのサイエンス論文 (1980) によれば, 恐竜絶滅が小惑星衝突に起因した可能性が高い. (エッジワース・) カーパーベルト天体の発見が 1992 年. 系外惑星の発見は 1995 年. 系外惑星系における居住可能性の検討にも天体力学は貢献できる.

太陽系には直接関係しないが, 計算機を利用し KAM 理論を踏まえた研究は Hénon から始まった. Henon は KAM 理論が発表された 1961〜2 年のすぐ後に, 制限三体問題および制限三体問題の Hill 近似で横断面の手法を使って軌道構造を調べた (Hénon, 1965, 1970, その中の参考文献). 有名な Henon & Heiles(1964) は銀河内の個々の軌道モデルであり, 銀河と一緒に回転する回転系で見た個々の軌道の運動を数値的に調べた. その後, 制限三体問題のポアンカレ面による研究が大流行した. 一般三体問題の研究も数学者の理論研究とならんで天体力学者の数値研究が進められた (たとえば Agekyan & Anosova, 1968; Szebehely & Peters, 1967; Tanikawa et al., 1995; Tanikawa & Mikkola, 2000).

太陽系は起源の研究が 1960 年代の終りから盛んになり, 日本では京都大学の林忠四郎が星の進化論から太陽系の起源論へ進出し, 1 大学派を形成した (Hayashi et al., 1985). 1980 年ごろには, 地球型惑星の形成シナリオとしては, 重力不安定性による多数の微惑星の誕生あるいは, もっと小さな粒子の衝突合体による微惑星の誕生, その後, ガスありまたはガスなしの環境の下での微惑星の衝突合体による原始惑星の成長プロセスが考察された. 暴走的成長の可能性 (Wetherill and Stewart, 1989) が指摘された. 月を衝突破片から作る (Kokubo et al., 2000).

惑星の環の研究は 19 世紀から行われている (Maxwell, 1859). 天王星のリング発見を受けて, Goldreich & Tremaine(1982) はリングに関するさまざまな物理過程を考察した. 古在 (1992) は羊飼い衛星の役割を強調した. オールト雲の成因 (Duncan et al., 1987), オールト雲からの彗星の研究 (Quinn et al., 1990), 自然衛星の軌道決定 (Kinoshita, 1993), カオス的自転運動 (Wisdom et al., 1984; Touma and Wisdom, 1993; Laskar and Robutel, 1993) など天体力学の話題にはこと欠かない.

1982 年の Wisdom(1982) の論文が太陽系の数値研究に写像を導入し, 小惑星のカークウッド間隙を離心率の増大で説明できることを示した. Chirikov(1979) は共鳴重合 (resonance overlap) が拡散の始まりに重要であることを指摘した. Wisdom(1980) はいち早くこの共鳴重合に注目した。Moons & Morbidelli(1995) は平均運動共鳴の中での永年共鳴を考えた. Gladman et al.(1997) は小惑星共鳴帯にテスト粒子 1500 個を投げ込み, 隕石や地球接近小惑星の起源の数値シミュレーションを行なった. 第二共鳴の重要性. 現在の段階でも, 2:1 平均運動共鳴で小惑星の数が少ない理由, 3:2 平均運動共鳴で小惑星が集中している理由がよくわからない. 太陽系の惑星間空間の小天体の長期力学的ふるまいを見るための多数の軌道の数値積分 (Holman & Wisdom, 1993). 一

般的結論として, 現在小天体のいない軌道半長径の場所は, 軌道が不安定であるから. Morbidelli(1997) によるカイパーベルト天体の数値積分. Morbidelli はここで (アーノルド) 拡散の可能性を指摘した.

1980 年代はコンピュータの進歩を太陽系の長期計算記録で競うという時代であった. 初期の 1973 年の Cohen et al. の百万年がしばらく記録保持者であった, 1984 年の Kinoshita & nakai, 1989 年の Applegate et al., 1990 年代に入って, 計算アルゴリズムの開発 (Yoshida, 1991) もあって, 信頼される長期計算が多数現われた. 記録も 1 億年以上になった. 5 外惑星か全 9 惑星かでふた派にわかれた. その後積分法の改良 (シンプレクティック積分法, Kinoshita et al., 1991; Wisdom & Holman, 1991) とコンピュータの高速化にともなって, 長期計算がぞくぞくと行われるようになった. 最新の記録は Ito & Tanikawa(2001, 2002) による 9 惑星の ± 40 億年, 5 外惑星の ± 500 億年である.

標語: 「カオスは無限の彼方からやって来る」, 「カオスとは完全な秩序と完全な無秩序の中間状態である」

太陽系では近可積分系とは言いつつ, 次元が高いので KAM 曲線の崩壊に関する現象は見えない. 拡散現象はいくつも数値的に観測されており, それはアーノルド拡散 (Morbidelli, 1997) かもしれない. リャプノフ指数の逆数として定義されるリャプノフ時間は局所不安定性の指標である. 太陽系においては天体がいまの場所から取り除かれるようなときにその天体の不安定性という. これを巨視的不安定性とよぶと, 局所安定性と巨視的安定性の間にどんな関係があるのか. アルバレスらの小天体による恐竜絶滅が地球史上唯一の事件でないとすれば, なんらかの超長周期現象が関係するはずである. 太陽系における超長周期はどんな現象と結びつくか. 共鳴と共鳴の相互作用, 太陽系のカオスはこれに尽きると考える研究者がいる.

2. 太陽系の中の近可積分ハミルトン問題 Nearly integrable Hamiltonian problems in the solar system

2.1. 概念いくつか: 共鳴 Notions: resonances

太陽系はゼロ次近似では太陽のまわりのそれぞれの惑星のケプラー運動の重ね合わせである. 簡単のため摂動天体がひとつの場合を考えることにして, 摂動関数を三角関数で展開すると, 三角関数の引数 φ はどれも

$$\varphi = j_1\lambda' + j_2\lambda + j_3\varpi' + j_4\varpi + j_5\Omega' + j_6\Omega, \tag{1}$$

なる形をとる. ここで係数 j_i は整数, λ, ϖ, Ω は被摂動天体の平均近点離角, 近点経度, 昇交点経度であり, ダッシュのついた量は摂動天体の対応する角度である. 係数の間には

$$\sum_{i=1}^{6} j_i = 0, \tag{2}$$

が成り立つことを注意しておく. これは摂動関数の (回転方向) 対称性から出る性質である. 共鳴のときにゼロになるような角変数の組み合わせを <u>臨界引数</u>(critical argument) とか <u>共鳴引数</u> (resonant argument) とよぶ. (1) 式を時間微分して

$$\dot\varphi = j_1 n' + j_2 n + j_3\dot\varpi' + j_4\dot\varpi + j_5\dot\Omega' + j_6\dot\Omega, \tag{3}$$

と書き, 共鳴を (3) 式がゼロになること, と表現することもある. n は λ の微分であって, 平均運動とよばれる. どの量が関与するかで共鳴の種類が変る. 共鳴の種類の違いを以下で説明する.

太陽のまわりを回る天体 J の平均運動を n_J と書き, 天体 A の平均運動を n_A とするとき, 正整数 p, q があって

$$pn_A - qn_J + (q-p)\dot{\varpi}_A = 0 \tag{4}$$

が成り立つとき, 天体 J と A は平均運動共鳴にある, といわれる. とくに $|\,p-q\,| = 1$ のとき 1 次共鳴という. (2) 式が満たされるはずであるから, $p = q$ 以外の場合は必ず第三項が現われる. (4) 式では被摂動天体 A の近点経度を取ったが, 他の量のこともあり得る. 第三項は小さい (ゆっくり変化する) 量であるので, それを無視して

$$pn_A - qn_J \approx 0 \tag{5}$$

と書くこともある. $|\,p-q\,| > 1$ のとき高次(high order) 平均運動共鳴という. $|p-q| = n$ のとき n 次共鳴という. たとえば, $p = 3, q = 1$ なら 2 次共鳴である.

二体問題なら軌道は閉じる. 他の天体からの摂動を受けると軌道は閉じない. 軌道が閉じないとは考えずに, 乗っている楕円軌道がまわり出すと考える. 軌道のまわり方に 2 種類ある. 近日点と遠日点を結ぶ線をアプス線とよぶ. 軌道面と不変面の交点, 昇交点と降交点を結ぶ線を交線とよぶ. アプス線がまわり, 交線がまわる. 土星の摂動により, 木星のアプス線が動く. 木星に摂動を受ける小天体 (たとえば小惑星) の軌道のアプス線が動く. 摂動天体の固有振動数と非摂動天体の近点や交点の移動周波数が尽数関係にあるとき永年共鳴にあるといわれる. 太陽系の惑星を内側から数えて, 木星, 土星, 天王星, 海王星は 5, 6, 7, 8 番目. 木星の固有振動数と被摂動天体の近日点の動きが同期する永年共鳴を ν_5 と表す. 土星となら ν_6 である. 木星の固有振動数と被摂動天体の交点の動きが同期するときの永年共鳴を ν_{15} と表す. 土星となら ν_{16} と書く. 天体の近日点経度を ϖ, 昇交点経度を Ω と書く. 永年共鳴の例を挙げよう. 冥王星の近点引数

$$\omega_{冥} = \varpi_{冥} - \Omega_{冥}, \tag{6}$$

が 90° のまわりを秤動するもので, 4 百万年の周期を持つ. ただし, 摂動天体の固有振動が関係しないので永年共鳴ではないと主張する研究者もいる. これ自身は古在共鳴と呼ばれる. 冥王星と海王星の間には永年共鳴関係がある. 臨界引数

$$\sigma = \varpi_{冥} - \varpi_{海} + 3(\Omega_{冥} - \Omega_{海}), \tag{7}$$

が 180° のまわりを秤動する. その周期は何と 6 億年である.

ある天体のアプス線の公転周期を $P_{\rm apse}$, 同じ天体の臨界引数の秤動周期を $P_{\rm lib}$ とする. $P_{\rm apse}/P_{\rm lib}$ の尽数関係を第二共鳴(secondary resonance) とよぶ. 2 次元写像のことばで言えば, 中心の不動点のまわりに分岐した周期点の運動を主共鳴とよび, この周期点のまわりに分岐した周期点の運動を第二共鳴とよぶ. したがって, 第三, 第四, ... と共鳴は無限の深さまで続く (Lichtenberg & Lieberman, 1983, p.44). Lecar et al.(2001) にしたがって, 平均運動共鳴は 2:1 のようにコロンで表し, 第二共鳴は 2/1 のように斜め線で表す.

3つの惑星の経度がからむ共鳴を三体共鳴とよぶ (Lecar et al, 2001). たとえば $3\lambda_J - 5\lambda_S - 7\lambda_U$ や $3\lambda_S - 5\lambda_U - 7\lambda_N$ の形で惑星の経度を含む. 前者は木星, 土星の影響の下での天王星の運動, 後者は土星, 天王星の影響の下での海王星の運動を考えるときに出て来る摂動関数の項の引数 (の一部) である. 項の係数は質量に関して2乗である.

相空間において, 異なる共鳴にともなうセパラトリックスが重なり合うとき, 共鳴重合 (resonance overlap) が生じている, あるいは共鳴重合にある, という. これは Chirikov (1979) がカオスの原因として取り上げた機構である. 典型的に振り子の運動を考える. 振り子には安定不動点 (垂れて静止した状態) のまわりの振動と, 不安定不動点 (逆立ち状態) を通りすぎてぐるぐるまわるる回転という2つの運動の種類がある. それぞれをモードとよべば, 振り子には振動モードと回転モードがある. 振動モードでもなく, 回転モードでもない運動がある. それは両者の中間にある境界運動である. 可積分の場合, この運動は過去に不動点に近づき, 未来に不動点に近づく運動である. 振り子では, さかさまの状態から出発して, さかさまに戻る運動である. この運動はセパラトリックスを形成する. さてセパラトリックスに囲まれた領域の中心にあるのが安定不動点. 別の見方をすると, セパラトリックス内部は安定不動点の勢力範囲, その外は, 振り子がぐるぐる回る別の世界である.

2つのセパラトリックスが隣り合うモデルとして Chirikov(1979) はハミルトン関数

$$H(P,X,t) = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{4}X^4 - X(f_1 \cos\tau_1 + f_2\cos\tau_2), \quad \tau_1 = \Omega_1 t + \tau_{10},\ \tau_2 = \Omega_2 t + \tau_{20}, \tag{8}$$

を考える. f_1, f_2 は小振幅振動, τ_{10}, τ_{20} は初期位相. 変数を作用・角変数に変え, $X \approx a\cos\theta$ と仮定し, 2つの共鳴項のみを残すと,

$$H(I,\theta,\tau_1,\tau_2) \approx AI^{4/3} - \frac{1}{2}a\left[f_1\cos(\theta-\tau_1) + f_2\cos(\theta-\tau_2)\right], \tag{9}$$

となる. Chirikov はどちらのセパラトリックスの幅を計算するにも, もう一方の共鳴の存在を無視すべしと提案した. 互いを無視して求めた幅で共鳴重合が生じるためのパラメータの条件を共鳴重合基準 (criterion) とよんだ. カオスは近似的にこのパラメータで始まる.

2.2 小天体の軌道安定性 Orbital stability of small bodies

1982年の Wisdom(1982) の論文が太陽系力学研究者に衝撃を与えた. 太陽系の数値研究にデルタ関数を含む写像を導入した. 写像の進行は微分方程式を積分するより数百倍速い. 彼は小惑星の 3:1 カークウッド間隙の成因を観察した. Wisdom 以前にはコンピュータの制約もあって, 制限三体問題でも百万年の軌道数値計算ができなかった. 彼は, 平面楕円三体問題から得た写像を使って, 小天体が十万年ほど大人しく太陽のまわりをまわっていて, その後突然, 離心率を増加させることを発見した. 離心率の増加は1万年ほど続き, ふたたび小さな離心率に戻る. 次に離心率が突然増加するまでの時間は周期的でない. 離心率が増加した軌道は火星軌道と交差し, いずれは火星と近接遭遇して, 小惑星帯から取り除かれてしまう. Wisdom は 3:1 カークウッド間隙形成のシナリオを提出した. 太陽系で観測される事実をカオスと結びつけた最初の論文である. 離心率の上昇が実際に起こることはその後微分方程式を積分して検証された (たとえば,

Wisdom, 1983; Wisdom, 1987 は review 論文). ただし, 離心率が上昇する理由については説明はできなかった.

その後多くの研究者が間隙の成因を説明しようと, 平均運動共鳴内の小惑星軌道の安定性を調べた. Yoshikawa(1990, 1991) は楕円制限三体問題で, 3:1, 5:2, 7:3, 2:1 共鳴内の小惑星の運動を半解析的に考察し (部分的に 3 次元問題), 平面楕円三体問題の軌道数値積分も行った. 平均運動共鳴内での軌道変化の図を描いた. その後, Morbidelli & Moons(1993) と Moons & Morbidelli(1995) は太陽–木星–土星–小惑星問題で 3:2, 2:1(以上は 3 次元), 4:1, 3:1, 5:2, 7:3 平均運動共鳴内の永年共鳴を調べた, 平均運動共鳴領域内に永年摂動の働く場所の地図を描いた. たとえば 3:2 共鳴内では ν_5 と ν_6 が広いカオス領域を作る. 2:1 共鳴では ν_{16} 共鳴が働く.

問題を 3 次元にすることにより, 交線の動きを採り入れることができ, 土星を入れることにより, 木星の軌道を実際と同様に変化させることができる. 小惑星帯の各種平均運動共鳴の場所の間隙や逆に小惑星の集中場所に関する研究は大いに進んだ. 3:1 共鳴においては, 離心率によってふるまいが異なる (Lecar et al., 2001). $e < 0.25$ なら ν_6 により離心率が 1 近くまで大きくなる. $e > 0.3$ なら安定に 20 億年過ごすが, $e = 0.5$ にまで成長するので火星軌道と交差する. 5:2, 7:3, 8:3, 9:4 などの共鳴が考察された. 3:2 共鳴では臨界引数 $\sigma = 2\lambda_A - 3\lambda_J + \varpi_A$ がゼロのまわりを秤動すること, つまり, 木星との合のときに Hilda 群小惑星 (A) は近点にいることがわかった. 2:1 平均運動共鳴では第二共鳴が働く. Franklin(1996) は 2/1, 3/1, 5/1 第二共鳴天体は 8 億年で逃げ出すことを見た. 2:1 共鳴より外側は外小惑星帯とよばれる. こちらでは多くの場所で小惑星の数が極端に少なく, 逆に共鳴の場所に小惑星が集中することが見られる. 3:2, 1:1 などが集中する場所である.

以上をまとめると, 小惑星の安定性研究では, モデルが現実的になり, 計算機能力が向上して長期計算が可能になるにつれて, 平均運動共鳴内の永年共鳴, 第二共鳴などの役割が明らかになった. Chirikov(1979) の共鳴重合が生じている. 小天体の力学では共鳴が本質的であることを理解する歴史であった. ただし, 小惑星が集中する理由については, いまでも完全に理解されているとは言い難い.

カイパーベルト天体に関しては, Morbidelli(1997) が 4 つの外惑星の重力の下で動く小天体の海王星との 2:3 共鳴内部に永年共鳴の地図を描き, そこに数値積分結果を重ね合わせた. 平均運動共鳴内部で小天体が拡散運動することが示された. 海王星と 2:3 共鳴にあるカイパーベルト天体は木星族彗星の供給源と思われている (木星族とは, 周期 < 20 年). 2:3 平均運動共鳴, ν_{18} 永年共鳴, 古在共鳴 (近点引数の秤動つまり連動 $\rightarrow$ 離心率と軌道傾斜角の相補関係). 海王星との 2/3 共鳴に数十億年いてから海王星と近接衝突する軌道がある. これは短周期彗星の候補として都合がいいじゃないか.

2.3 安定性とリャプノフ時間 Stability and the Lyapunov time

リャプノフ指数を計算することは力学系を研究する物理分野では日常行われることである. リャプノフ指数が正であることがカオスの証拠である. 太陽系でもカオスを証拠だてるためにしばしば「リャプノフ指数が正であるから系はカオスである」というように使われる. リャプノフ (特性) 指数の逆数はリャプノフ時間とよばれる. これは初期値の差が e 倍になるまでの時間であり, 系の不安定性をはかる時間として用いられる. たとえば, 「リャプノフ時間の 10 倍も 100 倍も数値積分しても意味ないよ. もはや

初期値の情報は失われているのだから」と言われたりする. 太陽系においてリャプノフ指数と安定性の関係が問題になっている. リャプノフ時間が短いのに, その場所に生き残っている小天体がある. とくに小惑星である. この現象の解釈を巡って意見が分かれて険悪な空気が流れているという.

一方は, Lecar, Franklin, Murison を主要メンバーとするチーム. リャプノフ時間を T_L, 巨視的不安定時間を T_I とするとこのグループ (Lecar, Franklin, & Murison, 1992; Lecar et al., 2001) は T_L と T_I の間に

$$\frac{T_I}{T_0} = \alpha \left(\frac{T_L}{T_0}\right)^\beta \tag{10}$$

なる関係があると主張する. $\beta \approx 1.73$ という結果を出した. 小天体軌道に関して多数の数値実験を行った. 巨視的不安定時間とは, 近接衝突などの巨視的な現象を起こして, 軌道が状態を変えてしまうまでの時間である. たとえば, 平均運動共鳴にある小惑星の場合なら, 共鳴から抜け出してしまうまで.

もう一方は Milani, Nobili らのチーム (Milani and Nobili, 1992; Milani and Nobili, 1997; Tsiganis et al., 2002) は「安定カオス」を提唱する. リャプノフ時間は短くても, 不安定を起こさないと主張した. 天文学的に見積もられる時間と矛盾する. たとえばリャプノフ時間が 1 万年で (10) 式を仮定すると, この天体の寿命は数千万年未満である. この天体はいまそこにいるではないか. だから寿命は (10) 式で考えられるよりずっと長い. 「安定カオス」だ. Helga(522) は $T_L \sim 7000$ 年で $1000 T_L = 700$ 万年でも不安定を起こさない. Helga は 12:7 平均運動共鳴に近い. 引数 $7\lambda - 12\lambda_J$ はゆっくり変化し, 秤動と周回を繰り返す. これはカオス. セパラトリックス近くの運動である. 安定の理由は防御機構. その防御機構とは, $\varpi - \varpi_J$ が秤動すること. e の最大値 ≈ 0.1 が $\varpi - \varpi_J \approx 0$ のときに実現される. 安定カオスの例は主小惑星帯にたくさん. またトロヤ群も太陽系の年齢にわたって生き伸びた天体の例であると考えられる.

Morbidelli & Froeschlé(1996) は妥協案を出した. 両方の陣営とも正しいことを言っている, ただし見ている現象が違うのである, と. かれらは, ネホロシェフレジームと共鳴重合レジームとの考えを導入した. もちろんこれは Nekhoroshev(1977) の仕事を受けている. 前者のレジームでは不安定時間は $T_I \sim \exp(T_L)$ を取り, 後者のレジームでは不安定時間は $T_I \sim T_L^\beta$ の形を取るとした. 証明はない. しかしこれは魅力的な考えなので, 今後追究する価値はある. Murray & Holman(1997) はこの関係について解析的に考察した. 1.8 乗則を導出したと主張している.

太陽系の小天体の運動の安定性に関しては, われわれ側から相反した要求がある. 不安定であって欲しい, だが安定であって欲しい. 小惑星の軌道分布を見ると, 木星との平均運動共鳴の場所に間隙が目立つ. これはカークウッド間隙と呼ばれている. たとえば, 3:1, 2:1 共鳴には大きな間隙がある. ところが 3:2 共鳴には小惑星が集中している. 木星との平均運動共鳴の場所は, 間隙であったり, 小惑星が集中する場所であったりする. カイパーベルト天体 (Jewitt and Luu, 1993) の一部は海王星との 2:3 平均運動共鳴にいる. この場所は短周期 (周期 < 200 年) 水星の源と考えられている. 太陽系の年齢だけそこにいて, いままさに軌道変化を起こす天体がいなければならない. つまり, 平均運動共鳴にもいくつか種類がある. 力学はその安定性の違いを説明しなければならない.

3. 太陽系の安定性 Stability of the solar system

2節で述べた例はすべて質量ゼロの天体の運動の安定性であった. 摂動天体は1つのこともあるし, 2つ, 3つと増やして考えることができる. 摂動天体がひとつなら制限三体問題で扱える. 摂動天体の軌道が円なら, 円制限三体問題, 楕円なら楕円制限三体問題である. 平面か3次元かで関係する共鳴も異なる. 木星の運動が太陽系の小天体の運動に強く影響を及ぼす. ところが木星の運動は土星によって乱される. もっとも大きな影響は, 木星の軌道が歳差運動を始めることである. この節では, 2節で納まりきらなかった話題を補足する. Lecar et al.(2001) が述べるところによると, 太陽系の小天体(質量ゼロ天体) の運動は共鳴重合ですべて説明できる. 惑星系全体の安定性はそうはいかない. ただし, 冥王星の質量はたいへん小さいので質量ゼロとして取り扱ってもよさそうである. また水星の質量もたいへん小さい.

Chambers et al.(1996) は原始惑星系の安定性を調べるための基礎として, 人工的な惑星系を多数考えた. かれらは惑星間隔を「相互ヒル半径」$R_H^{i,i+1}$ で規格化した.

$$R_H^{i,i+1} = \left(\frac{m_i + m_{i+1}}{3m_\odot}\right)^{1/3} \left(\frac{d_i + d_{i+1}}{2}\right). \tag{11}$$

ここで m_i, m_{i+1} と d_i, d_{i+1} は $i, i+1$ 番目の惑星の質量と日心距離である. 惑星間隔を $R_H^{i+i+1} \cdot \Delta$ とし, Δ を変えていくつもの惑星系の数値積分を行い, 不安定になるまでの時間を計った. Δ を使うことの良さは, 惑星間隔が力学的に規格化されているので惑星数をいくつにしようと, どの場所で不安定性 (近接衝突) が起こるかわからないこと, つまり初めからある種の安定性が保証されていることである. もう少し言えば, たとえば, 大質量の惑星も含めて幾何学的に等間隔に並んでいる場合には, 大質量惑星の影響が強く, 近接衝突や系からの放出がたちまち起こるであろう. その進化段階が終って, 惑星系がおとなしくなってからの状態, これが力学的に等間隔に並んだ惑星系であろう, 系の長期的な安定性を見るのに都合の良い並べ方であるといえる. Chambers et al.(1996) は横軸を Δ に取り, 縦軸を不安定時間の対数に取ると, グラフが直線になることを発見した (この図を CWB 図とよぶ).

$$\log T_I \propto \Delta, \tag{12}$$

この関係式の意味はまだ解釈されていない. これに関連して, Δ を一定に保ち, 惑星質量を増やす一連の数値積分が行われた (Duncan&Lissauer, 1997). 横軸を質量に, 縦軸を不安定時間の対数に取ると, 右下がりの直線が得られる. これの理由も解明されていないし, (12) 式との関連も解明されていない. CWB 図は, 地球型惑星形成問題に応用された (Ito&Tanikawa, 1999, 2001) また系外惑星系の安定性吟味に使われた (Ito&Miyama, 2001).

Ito&Tanikawa(2000) は現在から過去に向かって 40 億年, 未来に向かって 40 億年太陽系 9 惑星の軌道数値積分を行った. それによると, 太陽系は安定である. 一方, Laskar(1989) によると太陽系のリャプノフ時間は5百万年である. 相互作用の組み合わせは格段に多くなる (Tanikawa&Ito, 2002). 最小の相互作用の単位として2体, たとえば地球と金星, 海王星と冥王星がある. 地球と月, 冥王星とシャロン, これらは惑星と衛星の組である. 内惑星, 外惑星というくくり方ができる. これらは惑星系の中で, 有機的な部分系として機能する. 安定性の調べ方としていくつかの実験が行われた. 地球と

金星を合体させた惑星系は安定か? 水星が不安定になり易いとの結果が出た. つまり, 今の惑星の配置はそれなりに必然である. 惑星間空間に天体が少ないことも不安定性の結果である. 太陽系の (太陽系自身も含む) 各種部分系の安定性を数値的に調べる研究は著者らが始めたところである (Tanikawa&Ito, 2002).

4. まとめ Summary

Chirikov(1979) の論文がきっかけで Wisdom(1982) が 3:1 カークウッド間隙が小惑星離心率の突然の増加によると喝破し, 太陽系小天体の安定性研究に火がついた. 折しも, 小惑星はどんどん発見されて数が増えていた. いまや番号付きの小惑星は 4 万を軽く越えていることをご存じであろうか. すでに述べたとおり 1992 年には海王星の外にカイパーベルト天体が発見され, 小天体の安定性問題 (制限問題) はいやが上にも盛り上がった. さらに 1995 年に系外惑星が発見された. 2002 年現在, 系外惑星系の数は 80 に近づいている. 太陽系には, 2 節で紹介したように, いくつもの種類の共鳴が働いており, それらが単独に, あるいは共同して安定性, 不安定性に寄与している. 共鳴重合 (resonance overlap) が太陽系小天体のカオスの原因であるようだ. Lecar et al.(2001) の review 論文にも示唆されるとおり, これからは制限問題でなく, N 体問題でのカオスが目標となるであろう. コンピュータの能力もそれに見合うようになった. 系外惑星系の発見, わが太陽系の安定性, そして両者を結ぶ N 体系に働く相互作用の分類など, 近可積分とはいいつつ, 小天体の場合に比べて可積分からやや遠い系が研究対象となる.

あとがき

この報告を書くにあたって, 太陽系のカオス力学関係の論文多数に目を通した. とくに, Wisdom(1987), Lissauer(1999), Lecar et al.(2001) などの概観論文を参考にした. Wisdom をたいへん褒め上げる概観論文もあった. 1982 年当時, Wisdom(1982) の今は有名となった論文をゼミで紹介するチャンスがあった. 論文内のアイデアの斬新さに気づかなかった. 本原稿を作成しながら不明を愧じることしばしばであった. 鼻の効かない研究者はいいテーマがプンプン匂っているのに知らぬ顔なんだな.

原稿を木下 宙氏, 伊藤孝士氏 (国立天文台) に読んでいただいた.

References

[1] Agekyan, T.A. and Anosova, J.P.: 1968, A study of the dynamics of triple systems by means of statistical sampling, *Soviet Physics-Astronomy* **11**, 1006-1014.

[2] Alvarez, L.W., W. Alvarez, F. Asaro and H.V. Michel: 1980, Extraterrestrial cause for the dretaceous–Tertiary extinction, *Science* **208**, 1095-1108

[3] Chambers, J.E., Wetherill, G.W., and Boss, A.P.: 1996, The stability of multi-planet systems, *Icarus* **119**, 261-268.

[4] Chirikov, B.V.: 1979, A universal instability of many dimensional oscillator systems, *Physics Reports* **52**, 263-379.

[5] Duncan, M.J. and Lissauer, J.J.: 1997, Orbital stability of the uranian satellite system, *Icarus* **125**, 1-12.

[6] Duncan, M.J. and Quinn, T.: 1993, The long-term dynamical evolution of the solar system, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **31**, 265-295.

[7] Duncan, M., T. Quinn, and S. Tremaine: 1987, The formation and extent of the solar system comet cloud, *Astronomical Journal* **94**, 1330-1338.

[8] Gladman, B. et al.: 1997, Dynamical lifetimes of objects injected into asteroid belt resonances, *Science* **277**, 197-201.

[9] Goldreich, P. and S. Tremaine: 1982, Dynamics of planetary rings, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **20**, 249-283.

[10] Hayashi, C., K. Nakazawa, K. and Y. Nakagawa: 1985, Formation of the solar system, in *Protostars and planets II*, Tucson, AZ, University of Arizona Press, p.1100-1153.

[11] Hénon, M.: 1965, Exploration numérique de pobléme restreint. I. masses égales, orbites périodiques, *Ann. Astrophys.* **28**, 499-511.

[12] Hénon, M.: 1970, Numerical exploration of the restricted problem. VI. Hill's case: non-periodic orbits, *Astron. Astrophys.* **9**, 23-36.

[13] Henon, M. and Heiles, C.: 1964, The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments, *Astron. J.* **69**, p.73-.

[14] Holman, M.J., Murray, N.W.: 1996, Chaos in High-Order Mean Resonances in the Outer Asteroid Belt, *Astron. J.* **112**, p.1278-.

[15] Ito, T. and Tanikawa, K.: 1999, Stability and instability of the terrestrial protoplanet system and their possible roles in the final stage of planete formation, Icarus **139**, 336-349.

[16] Ito, T. and Tanikawa, K.,: 2001, Stability of terretrial protoplanet system and alignment of orbital elements, *Publ. Astron. Soc. Japan* **53**, 143-151(2001).

[17] Ito, T. and Tanikawa, K.: 2002, Long-term integrations and stability of planetary orbits in our solar system, *MNRAS*(submitted).

[18] 伊藤孝士, 谷川清隆: 2001, 21 世紀の天体力学, in *The Proceedings of the 33rd Symposium on Celestial Mechanics*, Kusatsu-Onsen, Gumma, JAPAN, 16-18, March, 2001, pp.387-422.

[19] Ito, T. and Miyama, S.M.: 2001, An Estimation of Upper Limit Masses of υ Andromedae Planets, *Astrophys. J.* **552**, 372-379.

[20] Jewitt, D. and J. Luu: 1993, Discovery of the candidate Kuiper belt object 1992 QB1, *Nature* **362**, 730-732.

[21] Kinoshita, H.: 1993, Motion of the orbital plane of a satellite due to a secular change of the obliquity of its mother planet *Cel. Mech. Dyn. Astron.* **57**, 359-368.

[22] Kinoshita, H. and Nakai, H.: 1984, Motions of the perihelions of Neptune and Pluto, *Cel. Mech.* **34**, 203-217.

[23] Kinoshita, H. Yoshida, H. and Nakai, H.: 1991, Symplectic integrators and their application to dynamical astronomy, *Cel. Mech. Dyn. Astron.* **50**, 59-71.

[24] Kokubo, E., Ida, S., and Makino, J.: 2000, Evolution of a Circumterrestrial Disk and Formation of a Single Moon, *Icarus* **148**, 419-436.

[25] Kozai, Y.: 1992, Shepherding satellites and dynamical structure of the rings of Uranus, *Publ. Astron. Soc. Japan* **44**, 135-139.

[26] Laskar, J.: 1989, A numerical experiment on the chaotic behaviour of the solar system, *Nature* **338**, 237-238.

[27] Laskar, J.: 1997, Large scale chaos and the spacing of the inner planets, *Astron. Astrophys.* **317**, L75-L78.

[28] Laskar, J., Quinn, T., and Tremaine, S.: 1992 Confirmation of resonant structure in the solar system, *Icarus* **95**, 148-152.

[29] Laskar, J. and Robutel, P., 1993, The chaotic obliquity of the planets, *Nature* **361**, 608-612.

[30] Laskar, J.: 1997, Large scale chaos and the spacing of the inner planets, *Astronomy and Astrophysics* **317**, L75-L78.

[31] Lecar & Franklin: 1992, Icarus **96**, 234-250.

[32] Lecar, M., Franklin, F.A., Holman, M.J. and Murray, N.W.: 2001 Chaos in the solar system, *Ann. rev. Astron. Astrophys.* **39**, 581-631.

[33] Lecar, M., F. Franklin, and M. Murrison: 1992, On predicting long-term orbital instability: a relation between the Lyapunov time and sudden orbital transitions, *AJ* **104**, 1230-1236.

[34] Levison, H.F. and M.J. Duncan: 1994, The long-term dynamical behavior of short-period comets, *Icarus* **108**, 18-36.

[35] Lichtenberg, A.J. and Lieberman, M.A.: 1992, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2nd ed. (Springer-Verlag, New York). 1st edition: 1983, p.44.

[36] Lissauer, Jack J.: 1999, Chaotic motion in the solar system, *Reviews of Modern Physics* **71**, 835-845.

[37] Maxwell, J.C.: 1859, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **19**, 297-.

[38] Milani, A. and Nobili, A.M.: 1992, An example of stable chaos in the solar system, *Nature* **357**, 569-571.

[39] Milani, A. and Nobili, A.M.: 1997, Stable chaos in the asteroid belt, *Icarus* **125**, 13-31.

[40] Moons, M. and Morbidelli, A.: 1995, Secular resonances in mean motion commensurabilities: the 4/1. 3/1, 5/2 and 7/3 cases, *Icarus* **114**, 33-50.

[41] Morbidelli, A.: 1997, Chaotic diffusion and the rogin of comets from the 2/3 resonance in the Kuiper belt, Icarus **127**, 1-12.

[42] Morbidelli, A. and Froeschlé, C.: 1996, On the relationship between Lyapunov times and macroscopic instability times, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **63**, 227-239.

[43] Morbidelli, A. and Moons, M.: 1993, Secular resonances in mean motion commensurabilities: the 2/1 and 3/2 cases, *Icarus* **102**, 316-332.

[44] Murray, N. and Holman, M.: 1997, Diffusive chaos in the outer asteroidal belt, *Astron. J.* **114**, 1246-1259.

[45] Murray, N, Holman, M. and Potter, M.: 1998, On the origin of chaos in the asteroid belt, *Astron. J.* **116**, 2583-2589.

[46] Nacozy, P.E.: 1976, On the stability of the solar system, *Astronomical Journal* **81**, 787-791.

[47] Nekhoroshev, N.N.: 1977, Exponential estimates of the stability time of near-integrable Hamiltonian systems, *Russ. Math. Survey* **32**, 1-65.

[48] Quinn, T., S. Tremaine, and M. Duncan: 1990, Planetary perturbatios and the origin of sgort-period comets, *Astrophys. J.* **355** (1990), 667-679

[49] Szebehely, V. and Peters, C.: 1967, Complete solution of a general problem of three bodies, *Astron. J.* **72**, 876-883.

[50] Tanikawa, K and Ito, T: 2002, Subsystems in a stable planetary system I., in *Proc. 34th Symp. Celest. Mech.*, eds. E. Kokubo, T. Ito, Hakone, Japan(in press).

[51] Tanikawa, K., and Mikkola, S.: 2000, One-dimensional three-body problem via symblic dynamics, *Chaos* **10**, 649-657(2000).

[52] Tanikawa, K., Umehara, H. and Abe, H., 1995, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **62**, 335-362.

[53] Touma, J. and Wisdom, J.: 1993, The Chaotic Obliquity of Mars, *Science* **259**, 1294-1297.

[54] Tsiganis, T., Varvoglis, H. and Hadjidemetriou, J.D.: 2002, Stable chaos in high-order Jovian resonances, *Icarus* **155**, 454-474.

[55] Wetherill, G.W. and Stewart, G.R.: 1989, Accumulation of a swarm of small planetesimals *Icarus* **77**, 330-357.

[56] Wisdom, J.: 1980, The resonance overlap driterion and the onset of stochastic behavior in the restricted three-body problem, *Astron. J.* **85**, 1122-1133.

[57] Wisdom, J.: 1982, The origin of the Kirkwood gaps: a mapping for asteroidal motion near the 3/1 commensurability, *Astron. J.* **87**, 577-593.

[58] Wisdom, J.: 1983, Chaotic behavior and the origin of the 3/1 Kirkwood gap, *Icarus* **56**, 51-74.

[59] Wisdom, J., Peale, S. J., Mignard, F.: 1984, The chaotic rotation of Hyperion, *Icarus* **58**, 137-152.

[60] Wisdom, J.: 1987, Urey prize lecture: Chaotic dynamics in the solar system, *Icarus* **72**, 241-275.

[61] Wisdom, J. and Holman, M.: 1991, Symplectic maps for the n-body problem, *Astron. J.* **102**, 1528-1538.

[62] 薮内 清: 1969, 中国の天文暦法, 平凡社.

[63] Yoshida, H.: 1993, Recent Progress in the theory and application of symplectic integrators, *Cel. Mech.* **56**, 27-.

[64] Yoshikawa, M.: 1990, Motions of asteroids at the Kirkwood gaps. I - On the 3:1 resonance with Jupiter, *Icarus* **87**, 78-102.

[65] Yoshikawa, M.: 1991, Motions of asteroids at the Kirkwood Gaps. II - On the 5:2, 7:3, and 2:1 resonances with Jupiter, *Icarus* **92**, 94-117.