Chaos **10**, 649-657(2000)

記号力学による1次元三体問題
One-dimensional three-body problem via symbolic dynamics

谷川清隆[1], Seppo Mikkola[1,2]
[1]**National Astronomical Observatory, Mitaka, Tokyo 181, Japan**
[2]**Tuorla Observatory, University of Turku, 21500 Piikkiö, Finland**

Abstract

記号力学を1次元三体問題に応用する. 軌道に沿っての衝突の系列を2つの記号からなる記号列で表わす. 初期値面の構造の詳細な解析に基づいて, 実現不可能な衝突列を系統的に求める. 無限個の周期記号列が存在する. このことから無限個の周期軌道の存在が示唆される. 実現不可能な記号列に関するもっともな仮定の下で, 実現可能な記号列の集合がカントール集合を形作ることを証明する.

キーワード: 1次元三体問題 – 記号力学 – カオス

1次元三体問題は一般三体問題の中でもっとも簡単な問題であるが, それでも一般軌道を詳しく解析することはできないでいた. 数値的にこの問題を調べるときの最大の障害は衝突, とくに三体衝突である. 本論文のアイデアは, 逆にこの特異性を使って軌道分類しようというものである. 軌道に沿っての二体衝突を時刻マークとして使う. というのも, 1次元三体問題では必然的に二体衝突が繰り返されるからである. 3つの質点 m_1, m_0, m_2 をこの順序で直線上に置く. 質量 m_1 と m_0 の二体衝突に'1' を割り当て, m_0 と m_2 の二体衝突に'2' を割り当てる. 軌道に沿って記号'1' と'2' からなる記号列を構成する. 記号力学の標準的手法を用いて, 数値データから軌道の各種性質を導く. ここでの手法の特徴は時間と空間を同時に離散化することである. ポアンカレ写像が自然に導入かれる.

I. 序

一般の初期値から出発する1次元三体問題は Mikkola & Hietarinta[1−3] が広いパラメータ範囲にわたって調べた. Tanikawa & Mikkola (Ref.4; 以後 論文 I とよぶ) は記号列を導入し, 三体衝突軌道が, 異なる記号列を持つ軌道の境界として得られることを発見した. (三体問題への記号力学の別の応用については参考文献5参照のこと.) 彼らは, いままでカオス領域と考えられてきた場所が無数の三体衝突曲線, すなわち, 三体衝突の初期条件が形づくる曲線, によって層状に分割されることを見つけた.

この論文は論文Iのつづきである．目的は1次元三体問題の相空間の構造をもっと詳細に理解することであり，それによって1次元三体系の力学に関してさらに深い洞察を得ることである．軌道そのものを考える代わりに，記号列の集合を考える．ここで，記号列は相空間を分割してではなく，軌道に沿っての二体衝突の列から作られる．主結果は以下のとおりである．横断面は異なる型の記号列によって大きく5つの領域に分割される．次に横断面の対称性から，非許容(実現不可能)衝突列を見つける．さらに，記号列を10進数と考えて記号列が増大または減少するように対応する点が帯をなして横断面を分割することを見る．ポアンカレ写像の下での各種領域の間の点の遷移を表すグラフを作成し，それを使って周期記号列および振動記号列，対応して周期軌道および振動軌道の存在を導出する．最後に，数値結果に基づいて，記号列全部の集合の中で，許容な記号列の集合がカントール集合をなすことを証明する．

II節では問題を定義し，ハミルトン関数および使用変数を示す．数値計算の精度を保つために正則化変数を導入する．横断面あるいは初期値面も定義する．III節では，記号列を導入し，記号列と横断面の関係を議論する．IV節で結果を述べる．IV.A節で横断面の全体の様子を示す．IV.B節では問題の対称性を使って非許容(実現不可能)記号列を決定する．IV.C節では異なる記号列に関してもっと詳しい横断面の構造を解析する．IV.D節では横断面のさまざまな領域間の点の遷移を表すグラフを作り，周期記号列その他を見つける．IV.E節ではIV.A－D節の数値結果を踏まえて許容記号列の性質を調べる．最終V節で結果をまとめる．

II. 問題の定式化

3質点 m_1, m_0 および $m_2 (m_0 = m_1 = m_2)$ をこの順序で直線上に並べる．質量の値および重力定数を1に固定する．するとハミルトン関数は

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2} w_i^2 - \sum_{i<j} \frac{1}{|x_i - x_j|}. \tag{1}$$

となる[1]．ここで w_i は直線上の座標 x_i に共役な運動量である．$x_1 \leq x_0 \leq x_2$ である．新しい座標を

$$\begin{aligned} q_1 &= x_0 - x_1, \\ q_2 &= x_2 - x_0, \end{aligned} \tag{2}$$

で導入すると，対応して新しいハミルトン関数

$$H = p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2 - \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1 + q_2} \tag{3}$$

が得られる．

全エネルギーを -1 に固定し，軌道のふるまいを $q_1(0) = q_2(0) = R$ から出発して追いかける．つまり，外側の2質点が中央の質点から等距離にあるとこ

ろから運動が始まる. 三体大接近の前後には必ずこの状態を通過するので, ほとんどの軌道がいずれかの時点でこの状態に入る. このとき, ポテンシャルの値は $2.5/R$ と決まる. 運動エネルギー T は

$$T = 2.5/R - 1 \tag{4}$$

で与えられる.

次のようなパラメータを導入しよう.

$$\begin{aligned} \sqrt{3}(p_1 - p_2) &= 2\sqrt{T}\sin\theta, \\ (p_1 + p_2) &= 2\sqrt{T}\cos\theta. \end{aligned} \tag{5}$$

すると (θ, R) は初期値を指定する. 速度は θ と R によって

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 = 2p_1 - p_2 = 2\sqrt{T}\cos(\theta - \pi/3), \\ \dot{q}_2 = 2p_2 - p_1 = 2\sqrt{T}\cos(\theta + \pi/3). \end{aligned} \tag{6}$$

と表される.

関数 $S = p_1 Q_1^2 + p_2 Q_2^2$ はもうひとつの正準変換を生成する. 新しい座標は $Q_1 = \sqrt{q_1}$, $Q_2 = \sqrt{q_2}$ で新しい運動量は $P_i = 2Q_i p_i$ である. これに時間変換 $t' = q_1 q_2$ も加えると, 新しいハミルトン関数

$$\Gamma = \frac{1}{4}(P_1^2 Q_2^2 + P_2^2 Q_1^2 - P_1 P_2 Q_1 Q_2) - Q_1^2 - Q_2^2 - \frac{Q_1^2 Q_2^2}{Q_1^2 + Q_2^2} - Q_1^2 Q_2^2 E, \tag{7}$$

が得られる. ここで E はハミルトン関数の (初期) 数値である. このハミルトン関数から得られる運動方程式は Bulirsch-Stoer 積分子 [6] のような普通の方法で数値的に積分できる.

III. 記号列と横断面

軌道に沿って 3 つの型の衝突があり得る. m_1 と m_0 の間の二体衝突, m_0 と m_2 の間の二体衝突, および三体衝突である. m_1 と m_0 の間の二体衝突を '1' で表し, m_2 と m_0 の間の二体衝突を '2' で表し, 三体衝突を '0' で表そう. 記号列は次のように作る. m_1 と m_0 が衝突したときには記号 '1' を列に加え, m_0 と m_2 が衝突したときには記号 '2' を加える. さらに, 三体衝突が生じたときには列に '0' をつなぐ.

三体衝突から出発したり三体衝突に終る軌道を直接求めることは非常に難しい. というのは, 三体衝突は一般に真性特異点だからである. しかし論文 I で示したように, '0' を含む記号列を持つ軌道は '0' を含まない記号列を持つ軌道の境界として得ることができる. だから, 三体衝突に '0' を割り当てることは単なる形式的な手続きではない. 一般に, 三体衝突を経験する軌道はその先に接

続することができない. そこで, 未来に (あるいは過去に)'0' が生じたときにはそのうしろに (あるいは前に)'0' が無限に続くものとする.

さて, 軌道を $0, 1$ および 2 の列として次のように表現する.

$$(\ldots n_{-2}n_{-1}.n_0n_1n_2\ldots)$$

ここで $n_i, i \in \mathbf{Z}$ は $0, 1,$ または 2 のどれかである. II 節で定義した初期条件から出発して未来および過去に向かって軌道を追いかける. すると, n_0 は最初の衝突を表す. n_1 と n_2 は第二, 第三の衝突を表す. 以下同様である. 同様に, $n_{-1}, n_{-2}, \ldots$ は過去の衝突に対応する記号である.

Σ は 3 つの記号からなる両無限の列 $s = (\ldots n_{-2}n_{-1}.n_0n_1n_2\ldots)$ すべての集合とする. Σ 上の距離を $\mathrm{d}(s, s) = 0$ および $s^1 \neq s^2$ のときに $\mathrm{d}(s^1, s^2) = 3^{-|m|}$ と置いて定義する. ただし $|m|$ は $s^1_m \neq s^2_m$ を満たす最小の整数である [8]. すると Σ はコンパクト距離空間となる. 次を定義する.

$$\Sigma_2 = \{s \in \Sigma \mid s_i = 1 \text{ or } 2\}. \tag{8}$$

このとき, Σ_2 がカントール集合であることが知られている [9]. 言い換えると, 二体衝突を繰り返す軌道に対応する記号列は記号列空間 Σ の中でカントール集合をなす. 以下では主として空間 Σ_2 を考える.

Σ 上の推移オペレーター σ は

$$\sigma(\ldots n_{-2}n_{-1}.n_0n_1n_2\ldots) = (\ldots n_{-2}n_{-1}n_0.n_1n_2\ldots) \tag{9}$$

で定義される.

II 節で述べたように, $q_1 = q_2$ の状態から積分を始める. はじめに決めたエネルギーの値より, 初期状態は横断面 H:

$$H = \{(\theta, R) \mid 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq R \leq 2.5\}. \tag{10}$$

上に表現できる. $0 < \theta < \pi$ の場合, (q_1, q_2) 面の軌跡は 同形線$(q_1 = q_2)$ を $\dot{q}_1 > \dot{q}_2$ で横断的に横切る. $\pi < \theta < 2\pi$ の場合, (q_1, q_2) 面の軌跡は同形線を $\dot{q}_1 < \dot{q}_2$ で横断的に横切る.

3 つの粒子が同じ質量を持つので, 横断面は 2 つの対称性を持つ. 次を導入しよう.

$$\begin{aligned} H_1 &= \{(\theta, R) : 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq R \leq 2.5\}, \\ H_2 &= \{(\theta, R) : \pi \leq \theta < 2\pi, 0 \leq R \leq 2.5\}, \\ H_1^t &= \{(\theta, R) : (\pi - \theta, R) \in H_1\}. \end{aligned} \tag{11}$$

第一の対称性は, H_2(または H_1) を出発する軌道の未来が, H_1(または H_2) を出発する軌道の過去に対応することである. 記号列の言葉でいうと, $(\ldots m_{-2}m_{-1}.n_0n_1\ldots)$ が点 $(\theta, R) \in H_1$ の記号列であれば, $(\ldots n_1n_0.m_{-1}m_{-2}\ldots)$ は点 $(2\pi-\theta, R) \in H_2$ の記号列である.