第二の対称性は, $H_1^t$ を出発する軌道の未来が $H_1$ を出発する軌道の過去であることである. 記号列の言葉で言えば, $(.n_1n_2n_3\cdots)$ が $(\theta, R) \in H_1$ を出発する軌道に対応する未来記号列であって, $(.m_1m_2m_3\cdots)$ が $(\theta, R) \in H_1^t$ を出発する軌道に対応する未来記号列であると, $(\cdots m_3^t m_2^t m_1^t.n_1n_2n_3\cdots) \in \Sigma$ は $H_1$ を出発する軌道全体に対応する両無限記号列である. ただし, $m_i = 1$ なら $m_i^t = 2$ であり, $m_i = 2$ なら $m_i^t = 1$ である.

まとめると, 全横断面 $H$ の構造を調べるためには, $H_1$ の点の未来軌道を積分すればよい. なぜなら, 過去軌道は第二の対称性から得られ, $H_2$ の点の軌道は第一対称性, つまり時間反転, によって得られるからである.

記号列内の記号と横断面の点の対応は $1$ 対 $1$ ではない. 以下の命題からわかるとおり, 軌道がふたたび面 $H_1$ に現れるなら, それに先行する二体衝突は $m_1$ と $m_0$ の間に起こり, それに続く二体衝突は $m_2$ と $m_0$ の間に起こる. 言い換えると, 現在 (小数点) は相続く'1' と'2' の間にのみ入れることができる. 同じペアの二体衝突が続く限り, 軌道は $H_1$ 上に現れない.

命題 **3.1.** $(q_1, q_2)$ 面の軌跡は同形線 $(q_1 = q_2)$ を横切るなら, 点 $(\theta, R) = (0, 0)$ の場合を除いて横断的に横切る.

証明. $q_1 = q_2$ かつ $\dot{q}_1 = \dot{q}_2$ なら, 解は同形であってつねに同形線上にある. だから, 初期に同形線の外にある軌跡は三体衝突を除いて, 同形線に接することはできない. □

命題 **3.2.** $(q_1, q_2)$ 面で軌跡が同形線を横切れば, ふたたび同形線を横切る前に二体衝突を起こす.

証明. 軌跡が同形線を $t = t_0$ に, $(q_1 < q_2)$ 側から $(q_1 > q_2)$ 側に, つまり $\dot{q}_1 > \dot{q}_2$ で横切ったとする. すると, 小さな $\varepsilon > 0$ があって, $t = t_0 + \varepsilon$ に $q_1 > q_2$ かつ $\dot{q}_1 > \dot{q}_2$ である. つまり, ふたたび同形線を横切るためにはゼロでない有限な時間が必要である. $(t_0, t^*)$ の間に二体衝突を経験することなく, 同形線を $t = t^* > t_0$ に横切ったとしてみる. この場合連続性の議論が使える. 命題 $3.1$ より, 時刻 $t = t^*$ に, $q_1 = q_2$ かつ $\dot{q}_1 < \dot{q}_2$ が成り立つ. これが成り立つためには, ある時刻 $t^{**}, t_0 < t^{**} < t^*$ に, $q_1 > q_2$ かつ $\dot{q}_1 = \dot{q}_2$ が成り立つはずである. すると, $t_0$ と $t^{**}$ の間のある時刻に $\ddot{q}_2 > \ddot{q}_1$ が成り立つはずである. これは, その時刻に $q_2 < q_1$ であることを意味する. これは矛盾である. □

最後に, 大局的構造を得るために, 横断面 $H_1$ を格子サイズ $(\Delta R, \Delta\theta) = (0.002, 0.^\circ 1)$ の網目で覆い, 各格子点から出発して $66$ 回目の二体衝突が得られるまで軌道を積分する. 積分した軌道の数は $2.25 \times 10^6$ 個である. 特定の局所的構造を見るために, それ以外にももっと細かい網目で軌道を積分した.

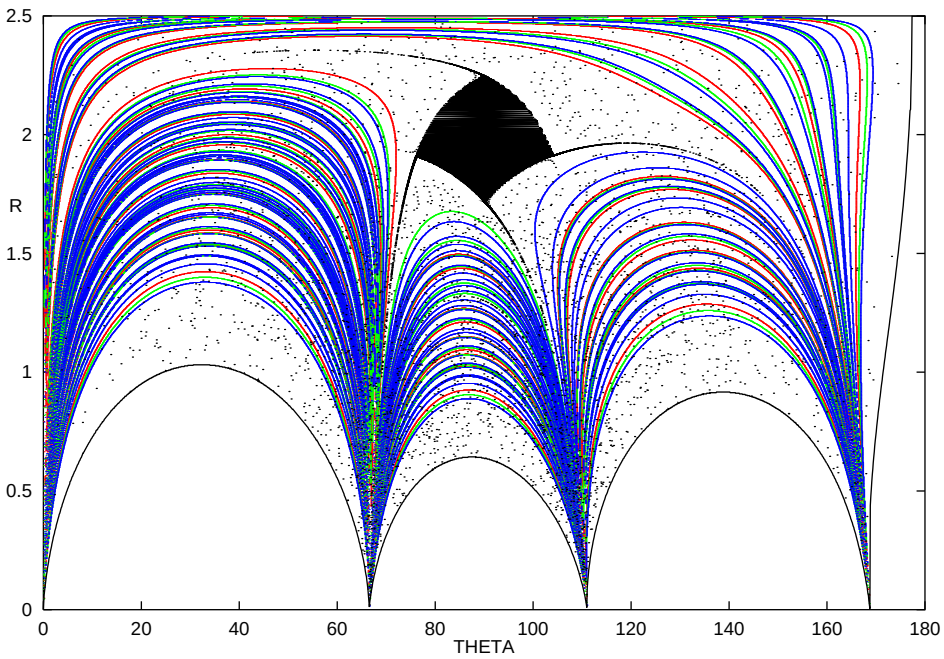


Figure 1: 横断面の層構造. 論文 I の図 5 の再掲. 示されているいるのは, Schubart 領域 (黒), 三体衝突曲線, および即時エスケープ領域 (空白).

# IV. 軌道と記号列

## A. 横断面の大局的構造

論文 I で, 異なる記号列を持つ点によって横断面が小さな部分に分割されることを見た. 事実, 面 $H_1$ は未来記号列 $1.22\ldots$ と $1.21\ldots$ を持つ点によって 2 分される. 面は未来記号列 $1.222\ldots$, $1.221\ldots$, $1.211\ldots$, および $1.212\ldots$ によって 4 分割される. 面は $1.2222\ldots$, $1.2221\ldots$, $1.2212\ldots$, $1.2122\ldots$, $1.2121\ldots$, $1.2112\ldots$, および $1.2111\ldots$ によって 7 分割される. 等々. 異なる記号列を持つ領域間の境界は曲線をなし, これらの曲線は三体衝突に終る軌道の初期値であることがわかった. われわれは, この曲線を 三体衝突曲線 と呼んだ. こうして, 記号列の桁数を上げるにつれて横断面はより多くの小さな領域に分割され, それら領域は三体衝突曲線によって限られる. 1 図は結果のひとつを示す. これは論文 I の 5 図を再録したものである. 図には, $10, 11$ および $12$ 桁の記号列から得られる三体衝突曲線を描いた. もっと桁数の短い記号列から得られるものはこれらの間に分布するが, それらは省略した. 三体衝突曲線に加えて, 2 種類の領域が示されている. ひとつはシューバート領域 (黒) である. これはシューバート軌道 [10] と呼ばれる安定な周期軌道のまわりの安定領域である. もうひ