とつは 4 個の空白領域である. ここから出発する軌道はただちにエスケープする, つまり 1 体と連星に分裂する.

論文 I では, 異なる記号列を持つさまざまな領域の配置や分布に関しては考察しなかった. 今回の論文では, 横断面の詳細な構造を解析し, 1 次元三体問題の力学に関し洞察を得ることが目標である. 最初の大事な観察は, H_1 内に大きな構造のあることである. 4 本の曲線がシューバート領域の角 (かど) から出て, 横断面の下の境界に達しているように見える. 1 図では, この曲線はシューバート領域の直外から出発したあちこち飛びまわる軌道の一部として得られた. シューバート領域では, 記号列は $(21)^\infty.(21)^\infty$ なる形を持つ. ただし指数 ∞ は 21 が無限回繰り返されることを意味する. (この約束は有限回の繰り返しの場合にも使うことにする.)

これが本当に曲線であることを確認するために, この曲線候補を横切る多くの短い線分上を初期値として軌道を積分した. 格子のサイズは水平方向の場合は $0°.001$, 鉛直方向の場合は 0.0001 とした. 点が曲線上にあるための条件は, 対応する記号列が, $n \geq 36$ として $1.(21)^n$ なる形をしているときであるとした. シューバート領域の境界の近くでは, もっと長い桁数が必要であった. その上, 条件を満たす格子点が複数の場合には位置を補間した.

結果を 2(a) 図に示した. 4 本の曲線は滑らかにシューバート領域の境界につながっているように見える. これらの曲線によって分離される領域を $\mathcal{S}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, および $\mathcal{T}$ と記そう. 意味はシューバート領域 (S), および左 (L), 中 (C), 右 (R), 上 (T) 領域である. 対応する記号列は表 I に記載した.

表 I. 横断面 H_1 の記号列.

Region	Sequence($n \geq 0$)
$\mathcal{S}$	$(21)^\infty.(21)^\infty$
$\mathcal{L}$	$\ldots 1.(21)^{2n}22\cdots$
$\mathcal{C}$	$\ldots 1.(21)^{2n+1}1\cdots$
$\mathcal{R}$	$\ldots 1.(21)^{2n+1}22\cdots$
$\mathcal{T}$	$\ldots 1.(21)^{2n+2}1\cdots$

注意. 2(a) 図の分割は $\mathcal{S}$ の境界近くでは正確でない可能性があることに注意すべきである. シューバート領域のまわりには 2 周期点が 2 組ある. (これらは配位空間では 1 本の軌道に対応する.) これらの点は シューバート領域の角にあって, シューバート領域の最外側 KAM 曲線とは離れているはずである. シューバート領域の近くでは $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, および $\mathcal{T}$ は複雑な仕方でからみ合っている可能性がある. この論文では, このあたりの場所に関しては何も結論を出さないようにする.

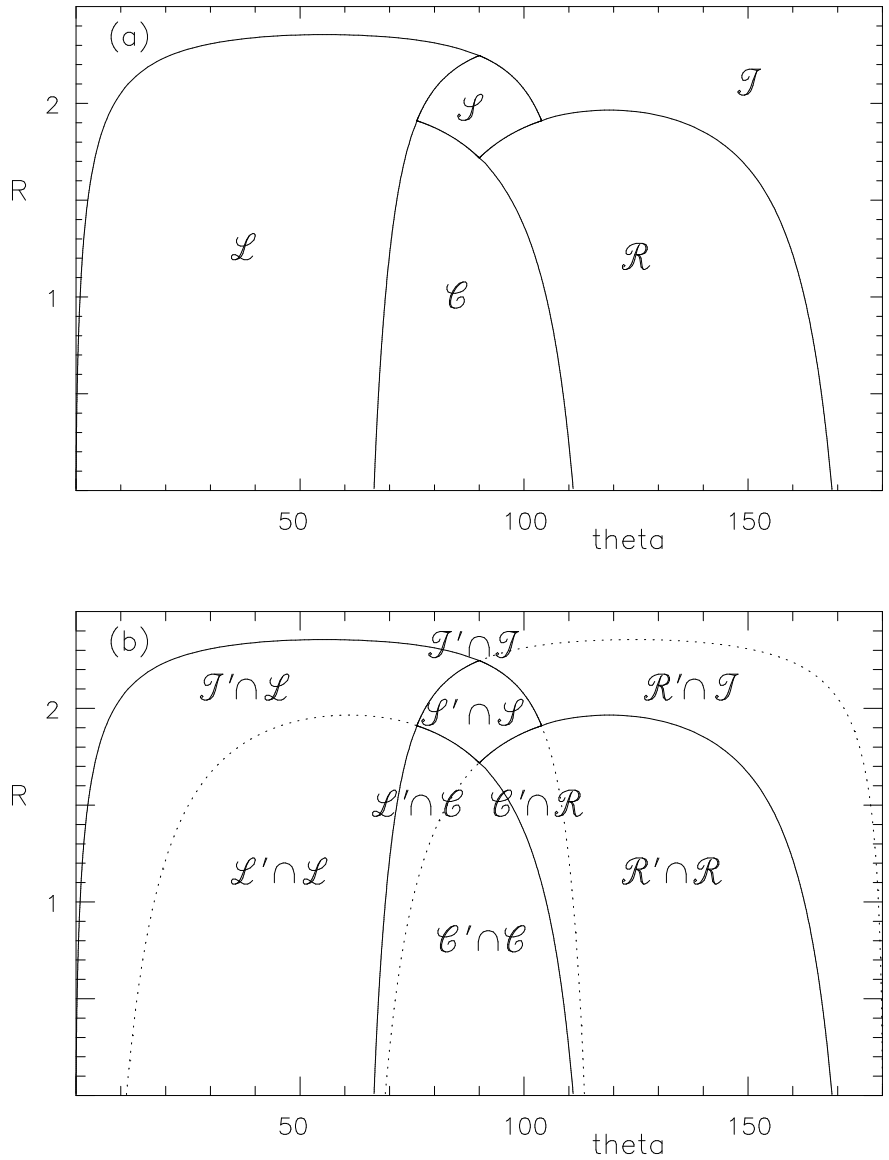

Figure 2: (a) 横断面の分割. (b) 横断面およびその裏返し面の領域同士の重なり合い.

B. 非許容記号列

III 節で指摘したように, 横断面は対称性を持つ. (θ, R) から出発する軌道の過去の歴史は $(\pi - \theta, R)$ を出発する軌道の未来として実現される. 逆も成り立つ. だから, (θ, R) を出発する軌道に対応する両無限記号列を得るためには,

(i) (θ, R) を出発する軌道の未来を計算してその未来記号列 $1.2c_2c_3\ldots$ を記録する. (ii) $(\pi-\theta, R)$ を出発する未来軌道を計算してその未来記号列 $1.2s_2s_3\ldots$ を記録する. (iii) 過去 記号列 $\ldots\bar{s}_3\bar{s}_2 1.2$ を作る. ここで $s=2$ または 1 に応じて $\bar{s}=1$ または 2 である. (iv) 2 つの記号列をつないで $\ldots\bar{s}_3\bar{s}_2 1.2c_2c_3\ldots$ を得る.

この手続きから, 与えられた記号列が 許容(すなわち, 衝突列として実現可能) かどうかチェックする仕方が示唆される. 任意の未来記号列を任意の過去記号列とつなげることができれば, 任意の両無限記号列が許容である.

反転横断面 H_1^t を考えよう. H_1 の領域 $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}$, および $\mathcal{T}$ を反転して得られる H_1^t の領域を. それぞれ $\mathcal{L}'$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{R}'$ および $\mathcal{T}'$ と記そう. たとえば, $\mathcal{L}'$ はもとの $\mathcal{R}$ を反転したものである. 対応する (過去) 記号列で'1' と '2' を入れ替えたものを表 II に示した.

ダッシュつきとダッシュなしの領域が重なれば, 2 つの片側無限記号列をつないだ記号列は許容である. そうでないとき非許容である. 全部で 17 個の組合せが可能である. すなわち, $\mathcal{L},\mathcal{C},\mathcal{R},\mathcal{T}$ のどれかと $\mathcal{L}',\mathcal{C}',\mathcal{R}',\mathcal{T}'$ のどれかの組合せが 16, $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ の組合せがひとつ. 問題の対称性より, $\mathcal{S}=\mathcal{S}'$ である. 重なりが空でない組合せを図 2(b) に示した. IV.A 節の注意で指摘したように, $\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'$ の境界近くでは, 領域の重なりは複雑な形をしている可能性がある. いまはそれを無視する.

表 II. 裏返し横断面 H_1^t の記号列.

Region	symbol sequence($n\geq 0$)
$\mathcal{L}'$	$\ldots 11(21)^{2n+1}.2\cdots$
$\mathcal{C}'$	$\ldots 2(21)^{2n+1}.2\cdots$
$\mathcal{R}'$	$\ldots 11(21)^{2n}.2\cdots$
$\mathcal{T}'$	$\ldots 2(21)^{2n+2}.2\cdots$

重ならない領域の組合せを表 III の第一, 第二欄に記載した. 同時に, 対応する記号列 (第三欄) と非許容 ワード(第四欄) も載せた. ただしここでワードとは記号の有限列のことである.

III 節で記述したように, H_2 内の記号列は H_1 内の記号列から未来と過去を入れ替えて得ることができる. 表 III の第五欄には, 第四欄のワードを反転して得られた H_2 内の非許容ワードを記載した.

表 III の非許容ワードを部分列として含む任意の記号列は非許容である. というのは, わが横断面 H_1(または H_2) は $q_1=q_2$ 線を現在 $\dot{q}_1>\dot{q}_2$(または $\dot{q}_1<\dot{q}_2$) で横切る軌道のすべての可能な状態を尽くしているからである. 非許容ワードを未来または過去に含む記号列があれば, 推移オペレーターをそれにほどこして, ワードを現在に移動させることにより, この記号列が非許容であることが言える.

表 III. 重ならない領域のペアと非許容ワード. 第五欄のワードは, 第四欄のワードの未来と過去を入れ替えたものであり, 非許容ワードである.

H_1^t	H_1	Form of symbol sequence in $H_1(m,n\geq 0)$	Unallowable word $H_1(k\geq 0)$	Unallowable word $H_2(k\geq 0)$
$\mathcal{C}'$	$\mathcal{L}$	$\ldots 2(21)^{2m+1}.(21)^{2n}22\ldots$	$2(21)^{2k+1}22$	$22(12)^{2k+1}2$
$\mathcal{R}'$	$\mathcal{L}$	$\ldots 11(21)^{2m}.(21)^{2n}22\ldots$	$11(21)^{2k}22$	$22(12)^{2k}11$
$\mathcal{R}'$	$\mathcal{C}$	$\ldots 11(21)^{2m}.(21)^{2n+1}1\ldots$	$11(21)^{2k+1}1$	$1(12)^{2k+1}11$
$\mathcal{T}'$	$\mathcal{C}$	$\ldots 2(21)^{2m+2}.(21)^{2n+1}1\ldots$	$2(21)^{2k+3}1$	$1(12)^{2k+3}2$
$\mathcal{L}'$	$\mathcal{R}$	$\ldots 11(21)^{2m+1}.(21)^{2n+1}22\ldots$	$11(21)^{2k+2}22$	$22(12)^{2k+2}11$
$\mathcal{T}'$	$\mathcal{R}$	$\ldots 2(21)^{2m+2}.(21)^{2n+1}22\ldots$	$2(21)^{2k+3}22$	$22(12)^{2k+3}2$
$\mathcal{L}'$	$\mathcal{T}$	$\ldots 11(21)^{2m+1}.(21)^{2n+2}1\ldots$	$11(21)^{2k+3}1$	$1(12)^{2k+3}11$
$\mathcal{C}'$	$\mathcal{T}$	$\ldots 2(21)^{2m+1}.(21)^{2n+2}1\ldots$	$2(21)^{2k+3}1$	$1(12)^{2k+3}2$

非許容ワードは他にはない. 事実, 領域 $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, および $\mathcal{T}$ は横断面内の境界にほぼ平行に走る三体衝突曲線によって層状に分割されているからである. 加えて, $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, および $\mathcal{T}$ 内のこれらの層状領域は横断面の下端にある三体衝突点に収斂している. 一方, もとの横断面と反転横断面の三体衝突曲線は横断的に交わる. これは図 1 および図 2(b) 図確認できる. 実際, 図 2(b) の点線, すなわち H^t の領域の境界, は図 1 の三体衝突曲線に横断的である. したがって, $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, および $\mathcal{T}$ のどれかひとつが $\mathcal{L}'$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{R}'$, および $\mathcal{T}'$ のどれかひとつと共通部分を持てば, 前者の任意の過去記号列 $(\ldots s_{-2}s_{-1}.)$ の領域と後者の任意の未来記号列 $(.t_0t_1\ldots)$ の領域は共通部分を持ち, これらをつなげた両無限列 $(\ldots s_{-2}s_{-1}.t_0t_1\ldots)$ は許容である. こうして次の結果を得る.

命題 4.1. 非許容ワードは, $0\leq k\leq k_0$ として次の形をしている: $2(21)^{2k+1}22$, $11(21)^{2k}22$, $11(21)^{2k+1}1$, および $2(21)^{2k+1}1$. ここで k_0 はある大きな正整数である. 非許容ワードの長さは $4(k+1)$ または $4(k+1)+1$ である.

最初のいくつかの非許容ワードを例として表 IV に載せておいた. これらが実現されないことは数値的にも確認した. ただ, 残念ながら, 最短ワード '1122' や '2211' がなぜ実現されないか, その解析的な説明はできなかった. ただし, 発見的な説明がないわけではない. こんな具合である. 記号 22 があると, 粒子 0 と粒子 2 が連星となっていて粒子 1 は遠くにある. 次に粒子 1 が近づいてきて粒子 0 と衝突する. これが 221 である. しかし, 粒子 1 は真中の粒子 0 と続けて衝突することをできず, 粒子 0 をもとの連星のかたわれ 2 の方に押しやる. だから 2212 しかあり得ない. これは図 3 を見て確認できる. 三体近接衝突において, 中心粒子 0 は両端の粒子 1 と 2 に相次いで衝突する. 記号「212」(図中の上の軌跡) あるいは「121」(図中下の軌跡) がつねに現われる.

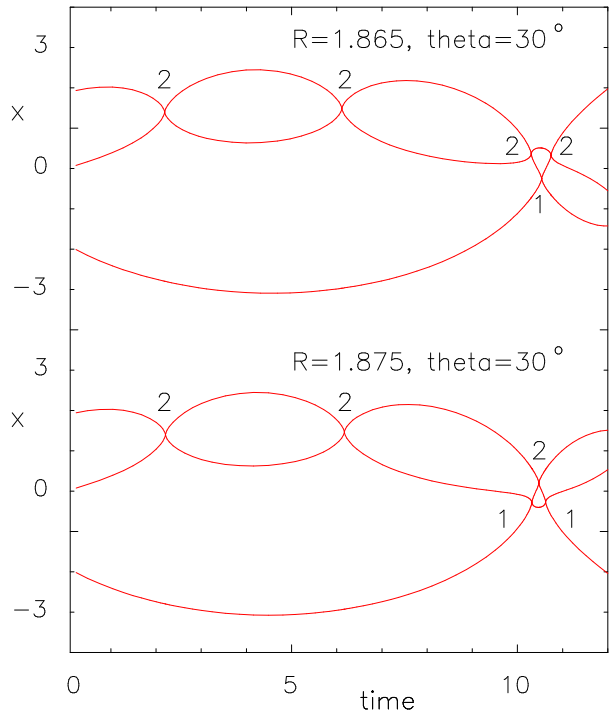

Figure 3: ワード 2211 の非存在. 上下の軌道はそれぞれ記号列 $22212\ldots$ と $22121\ldots$ に対応する.

表 IV. 長さ 13 以下の非許容ワード.

4	5	8	9	12	13
2211	22122	22121211	221212122	221212121211	2212121212122
1122	11211	11212122	112121211	112121212122	1121212121211

注意. IV.A 節の注意を考慮して, 命題 4.1 に制限 $k \le k_0$ を付け加えた.

C. 横断面の詳細構造

横断面内での記号列の詳細な分布を見るために, 直線 $\theta = 30°, 90°$, および $150°$ に沿って細かい網目で軌道を積分した. 直線 $\theta = 30°$ は $\mathcal{L}$ 内の構造に横断的であり, この直線に沿っては, (未来) 記号列を 10 進数とみなしたときに, R の増加とともに $1.(2)^\infty$ から $1.(21)^\infty$ まで減少しながら分布することがわかった. 記号列を 3 つのグループに分ける: $1.(2)^\infty$, $1.(2)^n1\ldots$, および $1.(21)^{2k}22\ldots$. ただし $n \ge 2, k > 0$ である. これら記号列を持つ領域をそれぞれ I_9, I_5, および I_1 と書く. I_1 内の記号列に奇数指数がない理由は以下で導入する I_3 の記号列を見れば納得する.

直線 $\theta = 90°$ に沿って $\mathcal{C}$ 内では, 記号列を 10 進数とみなしたときに, R の増加とともに $1.2(1)^\infty$ から $1.(21)^\infty$ まで増加しながら分布する. 記号列を 3 つのグループに分ける: $1.2(1)^\infty$, $1.2(1)^n2\ldots$, and $1.(21)^{2k+1}1\ldots$. ただし $n \geq 2, k > 0$ である. これら記号列を持つ領域をそれぞれ I_{10}, I_6, および I_2 と書く. I_1 の場合と同様, I_3 内の記号列に偶数指数がない理由は以下で導入する I_4 の記号列を見れば納得する.

直線 $\theta = 150°$ に沿って $\mathcal{R}$ 内では, 記号列は R の増加とともに $1.21(2)^\infty$ から $1.(21)^\infty$ まで減少する. 記号列を 3 つのグループに分ける: $1.21(2)^\infty$, $1.21(2)^n1\ldots$, および $1.(21)^{2k+1}22\ldots$. ただし $n \geq 2, k > 0$ である. これら記号列を持つ領域をそれぞれ I_{11}, I_7, および I_3 と書く.

最後に直線 $\theta = 30°, 90°$, または $150°$ のどれかに沿って $\mathcal{T}$ 内では, 記号列は R の減少とともに $1.212(1)^\infty$ から $1.(21)^\infty$ まで増加する. 記号列を 3 つのグループに分ける: $1.212(1)^\infty$, $1.212(1)^n2\ldots$, および $1.(21)^{2k}1\ldots$. ただし $n \geq 2, k > 0$ である. これら記号列を持つ領域をそれぞれ I_{12}, I_8, および I_4 と書く.

こうして $\mathcal{S}$ 以外に全部で 12 個の領域 $I_i, i = 1, 2, \ldots, 12$ がある (図 4 参照). I_1 と I_5 の間の境界は, 記号列 $(\ldots 1.20)$ を持つ三体衝突曲線である. 同様に, I_2 と I_6 の間, I_3 と I_7 の間, および I_4 と I_8 の間の境界は, それぞれ記号列 $(\ldots 1.210)$, $(\ldots 1.2120)$, および $(\ldots 1.21210)$ を持つ三体衝突曲線である. 領域 I_9, I_{10}, I_{11}, および I_{12} を即時エスケープ領域と呼ぶことにする (論文 I では正則領域と呼んだ). これらはそれぞれ記号列 $(\ldots 1.(2)^\infty)$, $(\ldots 1.2(1)^\infty)$, $(\ldots 1.21(2)^\infty)$, および $(\ldots 1.212(1)^\infty)$ を持つ.

$I_i, i = 1, 2, \ldots, 8$ をさらに細かく分割することも可能ではある. しかし, ここではそれをする代わりに, I_5, I_6, I_7 および I_8 の少し細かい構造を見ることにする. 周期記号列を見つける (これは IV.C 節で行なう) にはこれで十分である.

I_5 を考えよう. 上で記述したように, I_5 内の記号列は, $n \geq 2$ として $1.(2)^n1\ldots$ なる形をしており, 直線 $\theta = 30°$ に沿って R を増加させると, 10 進数とみなしたこの記号列は減少する. だから n の大きな記号列 $1.(2)^n1\ldots$ は n の小さなものより下にある. $n \geq 2$ を固定して記号列 $1.(2)^n1\ldots$ を持つ点集合の構造を見てみよう. (10 進数として) 最大の記号列は $1.(2)^n1(2)^\infty$ である. ところが非許容ワード '22122' を含んでいるのでこの記号列は非許容である. だから最大の許容記号列は $1.(2)^n121(2)^\infty$ となる. そして次のような不等式列が得られる. $1.(2)^n121(2)^\infty > 1.(2)^n121(2)^m1\ldots > 1.(2)^n1(21)^{2m'}22\ldots > 1.(2)^n1(21)^\infty > 1.(2)^n1(21)^{2k}211\ldots > 1.(2)^n1211\ldots > 1.(2)^n12(1)^\infty$. ここで $m \geq 2$, $m' \geq 1$, および $k \geq 1$ である. この不等式列を得るにあたって, 命題 4.1 を利用した. たとえば, 列 $1.(2)^n1(21)^{2m'+1}22\ldots$ は含まれていてもよさそうだが, これは非許容である. というのは, これは非許容ワード '$221(21)^{2m'+1}22$' を含むからである. 不等式列の各記号列に σ^n を作用させて次を得る. $1.21(2)^\infty \in I_{11}$, $1.21(2)^m1\ldots \in I_7$, $1.(21)^{2m'}22\ldots \in I_3$, $1.(21)^{2k}211\ldots \in I_2$, $1.211\ldots \in I_6$, および $1.2(1)^\infty \in I_{10}$. 残った記号列 $1.(21)^\infty$ はシューバート領域の角のひとつへ向かう安定多様体上