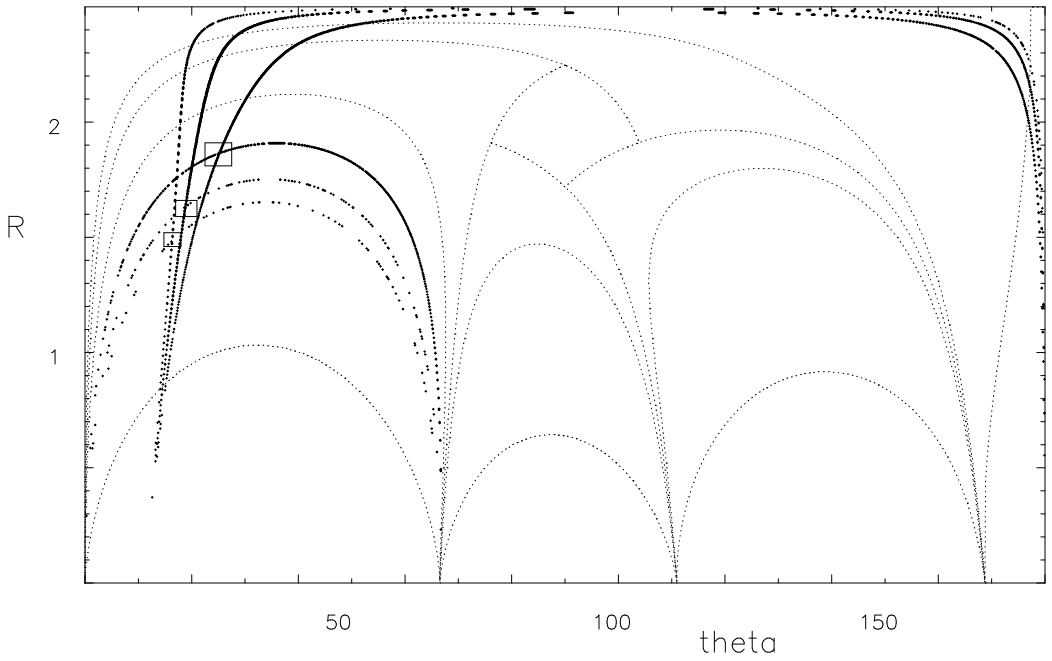

Figure 9: 周期列を得るための手続き. $(22121)^{\infty}.(22121)^{\infty}$, $(222121)^{\infty}.(222121)^{\infty}$, および $(2222121)^{\infty}.(2222121)^{\infty}$ の場合. 小さな箱の中の曲線同士の交点が周期記号列に対応する.

はそうではない. 表 VII の基本ルートを複数回まわって閉じる周期軌道もあり得る.

表 VII. 周期道および周期ワード.

Path	Periodic word $(n, m \geq 2, k, k' > 0)$
$I_5 \rightleftharpoons I_7$	$1(2)^n12$
$I_6 \rightleftharpoons I_8$	$12(1)^n2$
$I_5 \to I_6 \to I_7 \to I_5$	$1(2)^n12(1)^m22$
$I_5 \to I_3 \rightleftharpoons I_1 \to I_7 \to I_5$	$1(2)^n1(21)^{2k+1}22$
$I_5 \to I_6 \to I_3 \rightleftharpoons I_1 \to I_7 \to I_5$	$1(2)^n12(1)^m(21)^{2k}22$
$I_5 \to I_2 \to I_8 \to I_6 \to I_7 \to I_5$	$1(2)^n1(21)^{2k}2(1)^m22$
$I_5 \to I_2 \to I_8 \to I_6 \to I_3 \rightleftharpoons I_1 \to I_7 \to I_5$	$1(2)^n1(21)^{2k}2(1)^m(21)^{2k'}22$
$I_6 \to I_4 \rightleftharpoons I_2 \to I_8 \to I_6$	$12(1)^n(21)^{2k}2$

最後に, 振動記号列を求めることができる. 振動記号列は直接, 振動軌道を指定する (平面三体問題の振動軌道に関しては Ref.11 参照). 遷移 $I_5 \rightleftharpoons I_7$ を考えよ

う. 対応する周期ワードは $1(2)^n12, n \geq 2$ である. ルートをひと回りするたびに n が変わらなければ, 前と同様周期記号列が得られる. 正整数の列 $\{n_i\}_i$, $n_i \geq 2$ で $\lim n_i \to \infty$ を満たすものを取り, 記号列 $1.(2)^{n_1}121(2)^{n_2}12\ldots1(2)^{n_i}12\ldots$ を考える. この記号列は許容である. これは振動記号列であり, 振動軌道を与える. 同様にして, 表 VII の他の周期ワードから別の振動記号列を構成できる.

E. 許容記号列の集合の性質

この小節では, 数値計算結果を踏まえて, 許容記号列がカントール集合をなすことを示す. 与えられたワードをある桁範囲に含む記号列の集合を シリンダー と呼ぶ[9]. たとえば, 表 III の第三欄の記号列集合は第四欄のワードを含むシリンダーである.

Theorem 4.2. 許容記号列の集合 Ω は Σ_2 内で, したがって Σ 内でカントール集合をなす.

証明. 非許容シリンダーは命題 4.1 の非許容ワードから得られるから, その数は可算である. したがって $\Omega = \Sigma_2 \backslash \{$ 非許容シリンダー $\}$ はコンパクトである.

任意の許容記号列 $s = (\ldots s_{-2}1.2s_1s_2, \ldots, s_n, \ldots)$ を取る. $i \to \infty$ のとき整数列 $1 < k_1 < k_2 < \ldots (i \to \infty$ のとき $k_i \to \infty)$ があって $s_{k_i} = 1$ かつ $s_{k_i+1} = 2$ を満たすとする. このとき s は孤立 (isolated) していない. というのは, $\sigma^{k_i}s = (\ldots 1.2s_{k_i+2}s_{k_i+3}\ldots)$ であり, この形の許容記号列は無限にあるからである. つまり, s の任意の近傍に許容記号列がある. $N > 0$ があって, $n > N$ に対して $s_n = 1$ または $s_n = 2$ ならば s は孤立していない. というのは, 任意の $n \geq 2$ に対して $.(2)^n121\ldots$ または $.(1)^n212\ldots$ なる形の記号列が存在するからである.

Ω が完全不連結であることを示すには, Ω 内の記号列の任意の近傍に Ω に属さない記号列が存在することを言えば十分である. 任意に高い桁数の場所に固定ワードを持つ非許容シリンダーを考えれば, 与えられた許容記号列の任意の近くに Ω に属さない記号列を構成することができる. □

帰結として次を得る.

系 **4.3.** シューバート領域の軌道以外に, 非可算個の非エスケープ軌道が存在する.

$(21)^\infty.(21)^\infty$ 以外に非可算個の記号列があること, およびひとつの記号列が 1 つ以上の軌道に対応することからこれは明らかである. その上, 非エスケープ軌道の初期条件曲線が非可算個あり得る.

系 **4.4.** 繰り返しのない記号列の初期位置の面積はゼロである.

対応する軌道が横断面上の異なる場所に無限回現れるから, これも明らか

である.

V. まとめ

記号力学が 1 次元三体問題の研究に有効であることが示された. 主結果は以下のとおりである.

(i) 初期値空間 (横断面) は大きく 5 個の領域に分割される (図 2(a)). シューバート領域を除く各領域は異なる記号列を持つ小さな領域に系統的に細分される (表 V). これらの領域の間には, 比較的簡単な遷移則がある (図 8).

(ii) 二体衝突の列として非許容 (実現不可能) な列がある. 2211 と 1122 を含む列がもっとも単純な例である (命題 4.1).

(iii) 周期記号列を系統的に見つけた. いくつかの周期軌道の位置を決めた. もっとも簡単な例は $(22121)^{\infty}.(22121)^{\infty}$ である (表 VII). 振動軌道を導き出した.

(iv) 記号列および推移オペレーターを使って横断面上の一般軌道の定性的性質をある程度理解した (定理 4.2).

謝辞

著者は記号力学に関する有用な示唆に対して宇敷重広氏 (京都大学) に感謝の意を表す. Yolande McLean 氏が英語をチェックした.

References

[1]S. Mikkola and J. Hietarinta, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **46**, 1-18(1989).

[2]S. Mikkola and J. Hietarinta, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **47**, 321-331(1990).

[3]S. Mikkola and J. Hietarinta, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **51**, 379-394(1991).

[4]K. Tanikawa and S. Mikkola, (Paper I), *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*(submitted), 1999.

[5]K. Zare and S. Chesley, *Chaos* **8**, 475-494(1998).

[6]R. Bulirsch and J. Stoer, *Numerical Treatment of Differential Equations by Extrapolation Methods.* Num. Math., **8**, 1-13(1966).

[7]C.L. Siegel and J.K. Moser, *Lectures on celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[8]L.S. Block and W.A. Coppel, *Dynamics in One Dimension*, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1513, Springer-Verlag, 1992.

[9]C. Robinson, *Dynamical Systems*, CRC Press, Boca Rayton, USA, 1995.

[10]J. Schubart, *Astron. Nachr.* **283**, 17-22(1956).

[11]K. Tanikawa and H. Umehara, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **70**, 167-180(1998).