Celest. Mech. & Dynam. Astr. **76**, 23-34(2000)

一次元三体問題における三体衝突

TRIPLE COLLISIONS IN THE ONE-DIMENSIONAL THREE-BODY PROBLEM

Kiyotaka TANIKAWA[1] and Seppo MIKKOLA[2]

National Astronomical Observatory, Mitaka, Tokyo, 181 Japan
[1]Email: tanikawa.ky@nao.ac.jp
[2]Permanent address: Tuorla Observatory, University of Turku, 21500 Piikkiö, Finland
[2]Email: seppo.mikkola@astro.utu.fi

Abstract

一次元ニュートン三体問題において粒子の運動を初期値の関数として考察した. 軌道を記号列へと写像することにより, 三体衝突にいたる初期値を見つけた. この初期値集合が曲線をなすことが判明した。また初期値に敏感に依存する運動領域に明確な構造のあることを示した. 三体衝突軌道を見つけたことに加え, 過去にも未来にも三体衝突する軌道, すなわち, 空間的にも時間的にも有限な軌道の場所も特定した.

キーワード: one dimensional three-body problem – triple collision – chaos

1 序

一次元三体問題は一般三体問題のひとつで, 3 つの質点が空間に固定された直線に閉じ込められている場合を扱う. この問題は自由度が 2 であり, 積分はエネルギー積分しかなく, 非可積分であることが知られている. Yoshida (1987, 1988) が証明したとおり, 非可積分性はほとんどの質量比に対して成り立つ. とくに等質量の場合も非可積分である. また McGehee (1974) によれば, この系の三体衝突は正則化できない. 広範囲にわたる数値的研究が以前, Mikkola and Hietarinta(1989, 以後 MH89; 1990; 1991) および Hietarinta and Mikkola (1993) によって行なわれた. 彼らは初期値の関数として軌道のふるまいを (格子状に) 図示し, 安定準周期軌道領域, 正則運動領域, および運動が初期値に敏感に依存する広大な領域を発見した. この「カオス」は三体衝突軌道の存在のおかげであると予想されたが, そのことは証明できないままであった. 最近, 三体衝突は二次元系において Tanikawa ら (Tanikawa *et al.* 1995, Tanikawa and Umehara 1998) が図の上に表現した. 本論文は部分的にこの経験を生かしている.

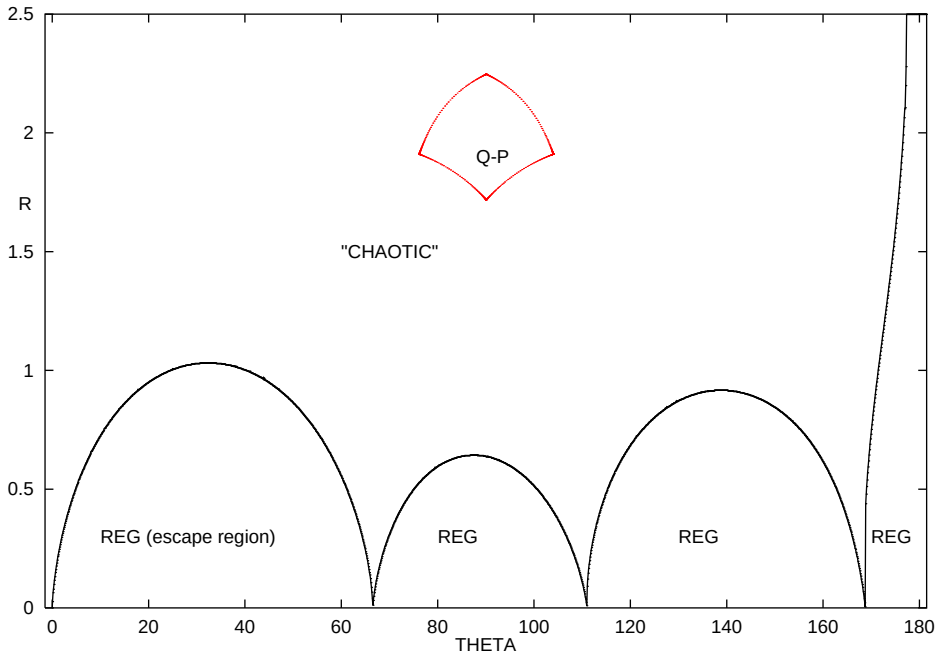

Figure 1: 軌道進化のおおまかな初期値依存性.

本論文では, 一次元三体問題において三体衝突にいたる軌道の初期値を図に表現する新たなアイデアを用いる. また, 過去にも未来にも三体衝突にいたる軌道を同定する. 分ったことは, 実際に「カオス」領域が (おそらく無限に多くの) 曲線を含み, その曲線のひとつひとつが三体衝突にいたる軌道の初期値であることである.

2　ハミルトン関数と軌道のパラメータづけ

3 つの質点 m_1, m_0, および $m_2 (m_0 = m_1 = m_2 = 1)$ をこの順に直線上におき, 質量を固定し, 重力定数を 1 とする. すると, この問題のハミルトン関数は次式 (MH89) で与えられる.

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2} w_i^2 - \sum_{i<j} \frac{1}{|x_i - x_j|}. \tag{1}$$

ここで w_i は座標 x_i に共役な運動量である. $x_1 \leq x_0 \leq x_2$ が成り立つ. 質量中

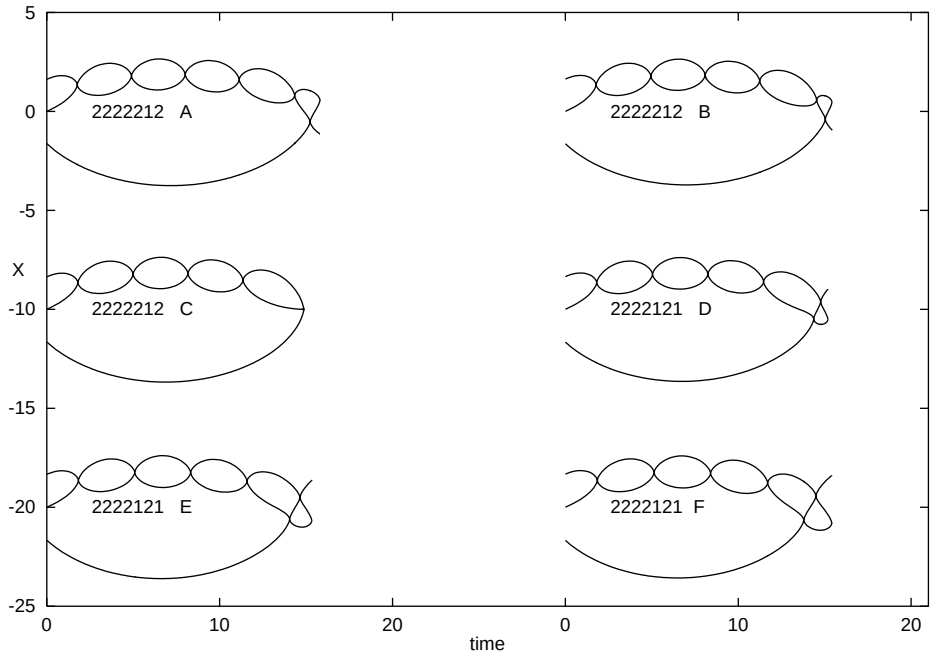

Figure 2: 三体衝突は記号列が変化するところで生じる. いまの場合, 軌道 C と D の間にある (軌道 C にきわめて近い). 粒子の x 座標を時間の関数として描いた. 初期値は, $\theta = 30^\circ$ で, $R = 1.62, 1.63, \ldots, 1.67$ である. (軌道は X 方向にずらしてある. 座標の値とは一致しないことに注意.)

心の動きを無視し, 新しい座標を

$$\begin{aligned} q_1 &= x_0 - x_1, \\ q_2 &= x_2 - x_0, \end{aligned} \tag{2}$$

によって導入すると, 新しいハミルトン関数は

$$H = p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2 - \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1 + q_2}. \tag{3}$$

となる. 全エネルギーを $E = -1$ に固定し, 数値積分を $q_1(0) = q_2(0) = R$ から始める. つまり, 外側の 2 つの粒子は中心粒子から等距離のところから出発する. すると, ポテンシャルの値は $= 2.5/R$ である. 運動エネルギー T は $T = 2.5/R - 1$ によって決まる. MH89 にしたがって, パラメータづけ

$$\sqrt{3}(p_1 - p_2) = 2\sqrt{T}\sin\theta, \tag{4}$$

$$(p_1 + p_2) = 2\sqrt{T}\cos\theta, \tag{5}$$

を導入すると, (θ, R) が初期値を指定する. 速度は θ と R から

$$\dot{q}_1 \;\; = 2p_1 - p_2 \;\; = 2\sqrt{T}\cos(\theta - \pi/3), \tag{6}$$

$$\dot{q}_2 \;\; = 2p_2 - p_1 \;\; = 2\sqrt{T}\cos(\theta + \pi/3). \tag{7}$$

と与えられる. 関数 $S = p_1Q_1^2 + p_2Q_2^2$ は別の変換を生成する. 新しい座標は $Q_1 = \sqrt{q_1}$, $Q_2 = \sqrt{q_2}$ で新しい運動量は $P_i = 2Q_ip_i$ である. 同時に時間の変換 $t' = q_1q_2$ も行なうと, 正則化された新しいハミルトン関数

$$\Gamma = \frac{1}{4}(P_1^2Q_2^2 + P_2^2Q_1^2 - P_1P_2Q_1Q_2) - Q_1^2 - Q_2^2 - \frac{Q_1^2Q_2^2}{Q_1^2 + Q_2^2} - Q_1^2Q_2^2E, \tag{8}$$

が得られる. ここで E はハミルトン関数の (初期) 数値である. このハミルトン関数にしたがう運動方程式を伝統的な方法, たとえば Bulirsch-Stoer 積分子 (Bulirsch & Stoer 1966) で数値積分する. 前回の積分 (MH89) では, 初期値 (θ, R) の関数としての最終運動が図として得られた. 顕著な特徴を図 1 に示しておいた. 軌道が初期値とともに連続に変化する, 正則ふるまい領域 (REG と記す) があり, 安定な準周期軌道 (Q–P と記す) の領域があり, 最後に前回の積分に使われた分解能の範囲では予想不可能な結果にいたる「カオス」領域がある. 一番左の正則領域 – エスケープ領域 – においては, 系はこれ以上三体相互作用せずに分解する. すなわち, 粒子 1 があとの 2 つの粒子を残してエスケープする. この図は θ の負の方へも $\theta > 180°$ の方へも拡張できるが, 図は $\theta = 0°$ (または $\theta = 180°$) に関する反転に関して対称なので, それらは必要ない. この図は条件 $q_1 = q_2$ で定義される横断面とみなすこともできる. 前後無限時間を考えれば, どの軌道も最低 1 回はこの面を横切ることは明らかであり, だから初期条件をこの横断面に取ることが道理にかなっている.

MH89 では, 100×180 の格子を使った. 今回はもっと細かい格子 1000×1800 を採用する. すなわち,

$$R_k \;\; = \;\; (k - \frac{1}{2})2.5 \times 10^{-3}, \;\; k = 1, .., 1000,$$

$$\theta_l \;\; = \;\; (l - \frac{1}{2})0.1° \qquad , \;\; l = 1, .., 1800.$$

軌道の数は 180 万に達する.

対称性を考慮して, $\theta < 0$ (または $> 180°$) は考えなかった. すなわち, 値 $\theta \pm 180°$ は $180° - \theta$ の軌道から両端の粒子を入れ替えて得られる軌道に対応する.