Celest. Mech. & Dynam. Astr. **76**, 23-34(2000)

一次元三体問題における三体衝突

TRIPLE COLLISIONS IN THE ONE-DIMENSIONAL THREE-BODY PROBLEM

Kiyotaka TANIKAWA[1] and Seppo MIKKOLA[2]

National Astronomical Observatory, Mitaka, Tokyo, 181 Japan
[1]Email: tanikawa.ky@nao.ac.jp
[2]Permanent address: Tuorla Observatory, University of Turku, 21500 Piikkiö, Finland
[2]Email: seppo.mikkola@astro.utu.fi

Abstract

一次元ニュートン三体問題において粒子の運動を初期値の関数として考察した. 軌道を記号列へと写像することにより, 三体衝突にいたる初期値を見つけた. この初期値集合が曲線をなすことが判明した。また初期値に敏感に依存する運動領域に明確な構造のあることを示した. 三体衝突軌道を見つけたことに加え, 過去にも未来にも三体衝突する軌道, すなわち, 空間的にも時間的にも有限な軌道の場所も特定した.

キーワード: one dimensional three-body problem – triple collision – chaos

1 序

一次元三体問題は一般三体問題のひとつで, 3 つの質点が空間に固定された直線に閉じ込められている場合を扱う. この問題は自由度が 2 であり, 積分はエネルギー積分しかなく, 非可積分であることが知られている. Yoshida (1987, 1988) が証明したとおり, 非可積分性はほとんどの質量比に対して成り立つ. とくに等質量の場合も非可積分である. また McGehee (1974) によれば, この系の三体衝突は正則化できない. 広範囲にわたる数値的研究が以前, Mikkola and Hietarinta(1989, 以後 MH89; 1990; 1991) および Hietarinta and Mikkola (1993) によって行なわれた. 彼らは初期値の関数として軌道のふるまいを (格子状に) 図示し, 安定準周期軌道領域, 正則運動領域, および運動が初期値に敏感に依存する広大な領域を発見した. この「カオス」は三体衝突軌道の存在のおかげであると予想されたが, そのことは証明できないままであった. 最近, 三体衝突は二次元系において Tanikawa ら (Tanikawa *et al.* 1995, Tanikawa and Umehara 1998) が図の上に表現した. 本論文は部分的にこの経験を生かしている.

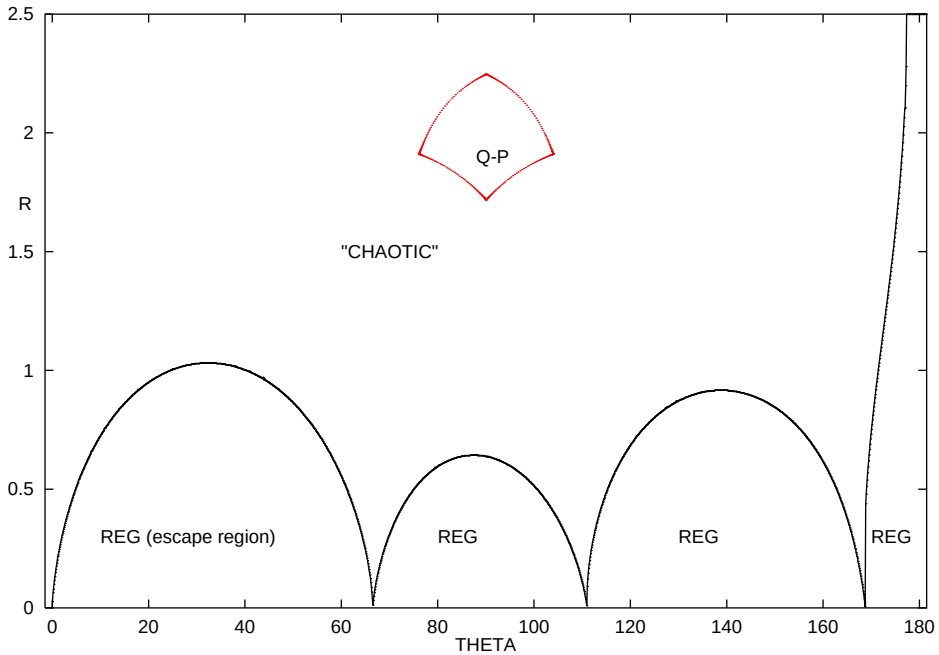

Figure 1: 軌道進化のおおまかな初期値依存性.

本論文では, 一次元三体問題において三体衝突にいたる軌道の初期値を図に表現する新たなアイデアを用いる. また, 過去にも未来にも三体衝突にいたる軌道を同定する. 分ったことは, 実際に「カオス」領域が (おそらく無限に多くの) 曲線を含み, その曲線のひとつひとつが三体衝突にいたる軌道の初期値であることである.

2　ハミルトン関数と軌道のパラメータづけ

3 つの質点 m_1, m_0, および $m_2 (m_0 = m_1 = m_2 = 1)$ をこの順に直線上におき, 質量を固定し, 重力定数を 1 とする. すると, この問題のハミルトン関数は次式 (MH89) で与えられる.

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2} w_i^2 - \sum_{i<j} \frac{1}{|x_i - x_j|}. \tag{1}$$

ここで w_i は座標 x_i に共役な運動量である. $x_1 \leq x_0 \leq x_2$ が成り立つ. 質量中

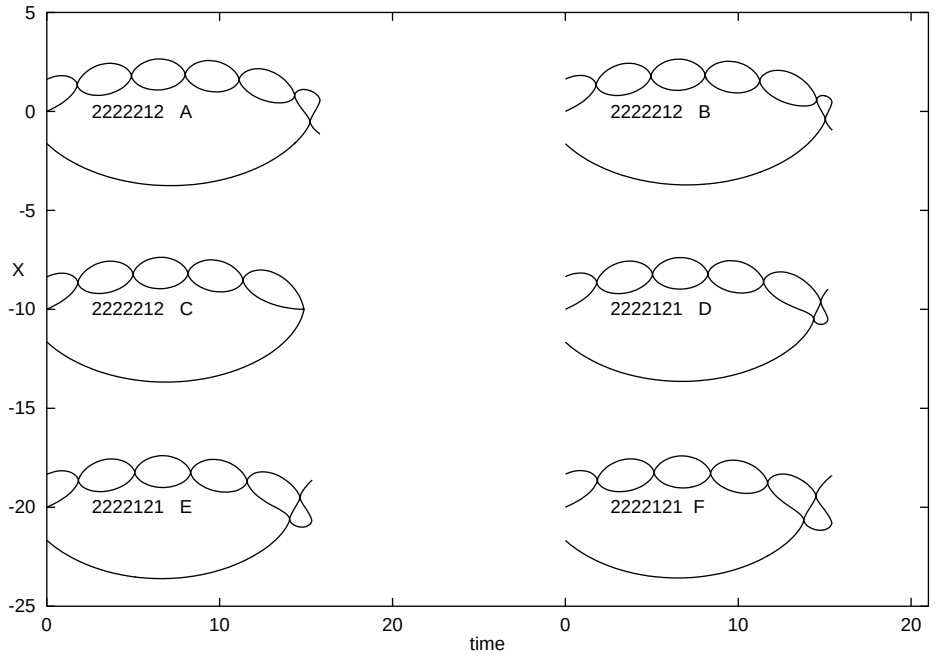

Figure 2: 三体衝突は記号列が変化するところで生じる. いまの場合, 軌道 C と D の間にある (軌道 C にきわめて近い). 粒子の x 座標を時間の関数として描いた. 初期値は, $\theta = 30^\circ$ で, $R = 1.62, 1.63, \ldots, 1.67$ である. (軌道は X 方向にずらしてある. 座標の値とは一致しないことに注意.)

心の動きを無視し, 新しい座標を

$$\begin{aligned} q_1 &= x_0 - x_1, \\ q_2 &= x_2 - x_0, \end{aligned} \tag{2}$$

によって導入すると, 新しいハミルトン関数は

$$H = p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2 - \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1 + q_2}. \tag{3}$$

となる. 全エネルギーを $E = -1$ に固定し, 数値積分を $q_1(0) = q_2(0) = R$ から始める. つまり, 外側の 2 つの粒子は中心粒子から等距離のところから出発する. すると, ポテンシャルの値は $= 2.5/R$ である. 運動エネルギー T は $T = 2.5/R - 1$ によって決まる. MH89 にしたがって, パラメータづけ

$$\sqrt{3}(p_1 - p_2) = 2\sqrt{T}\sin\theta, \tag{4}$$

$$(p_1 + p_2) = 2\sqrt{T}\cos\theta, \tag{5}$$

を導入すると, (θ, R) が初期値を指定する. 速度は θ と R から

$$\dot{q}_1 \;\; = 2p_1 - p_2 \;\; = 2\sqrt{T}\cos(\theta - \pi/3), \tag{6}$$

$$\dot{q}_2 \;\; = 2p_2 - p_1 \;\; = 2\sqrt{T}\cos(\theta + \pi/3). \tag{7}$$

と与えられる. 関数 $S = p_1Q_1^2 + p_2Q_2^2$ は別の変換を生成する. 新しい座標は $Q_1 = \sqrt{q_1}$, $Q_2 = \sqrt{q_2}$ で新しい運動量は $P_i = 2Q_ip_i$ である. 同時に時間の変換 $t' = q_1q_2$ も行なうと, 正則化された新しいハミルトン関数

$$\Gamma = \frac{1}{4}(P_1^2Q_2^2 + P_2^2Q_1^2 - P_1P_2Q_1Q_2) - Q_1^2 - Q_2^2 - \frac{Q_1^2Q_2^2}{Q_1^2 + Q_2^2} - Q_1^2Q_2^2E, \tag{8}$$

が得られる. ここで E はハミルトン関数の (初期) 数値である. このハミルトン関数にしたがう運動方程式を伝統的な方法, たとえば Bulirsch-Stoer 積分子 (Bulirsch & Stoer 1966) で数値積分する. 前回の積分 (MH89) では, 初期値 (θ, R) の関数としての最終運動が図として得られた. 顕著な特徴を図 1 に示しておいた. 軌道が初期値とともに連続に変化する, 正則ふるまい領域 (REG と記す) があり, 安定な準周期軌道 (Q–P と記す) の領域があり, 最後に前回の積分に使われた分解能の範囲では予想不可能な結果にいたる「カオス」領域がある. 一番左の正則領域 – エスケープ領域 – においては, 系はこれ以上三体相互作用せずに分解する. すなわち, 粒子 1 があとの 2 つの粒子を残してエスケープする. この図は θ の負の方へも $\theta > 180°$ の方へも拡張できるが, 図は $\theta = 0°$ (または $\theta = 180°$) に関する反転に関して対称なので, それらは必要ない. この図は条件 $q_1 = q_2$ で定義される横断面とみなすこともできる. 前後無限時間を考えれば, どの軌道も最低 1 回はこの面を横切ることは明らかであり, だから初期条件をこの横断面に取ることが道理にかなっている.

MH89 では, 100×180 の格子を使った. 今回はもっと細かい格子 1000×1800 を採用する. すなわち,

$$R_k \;\; = \;\; (k - \frac{1}{2})2.5 \times 10^{-3}, \;\; k = 1, .., 1000,$$

$$\theta_l \;\; = \;\; (l - \frac{1}{2})0.1° \qquad , \;\; l = 1, .., 1800.$$

軌道の数は 180 万に達する.

対称性を考慮して, $\theta < 0$ (または $> 180°$) は考えなかった. すなわち, 値 $\theta \pm 180°$ は $180° - \theta$ の軌道から両端の粒子を入れ替えて得られる軌道に対応する.

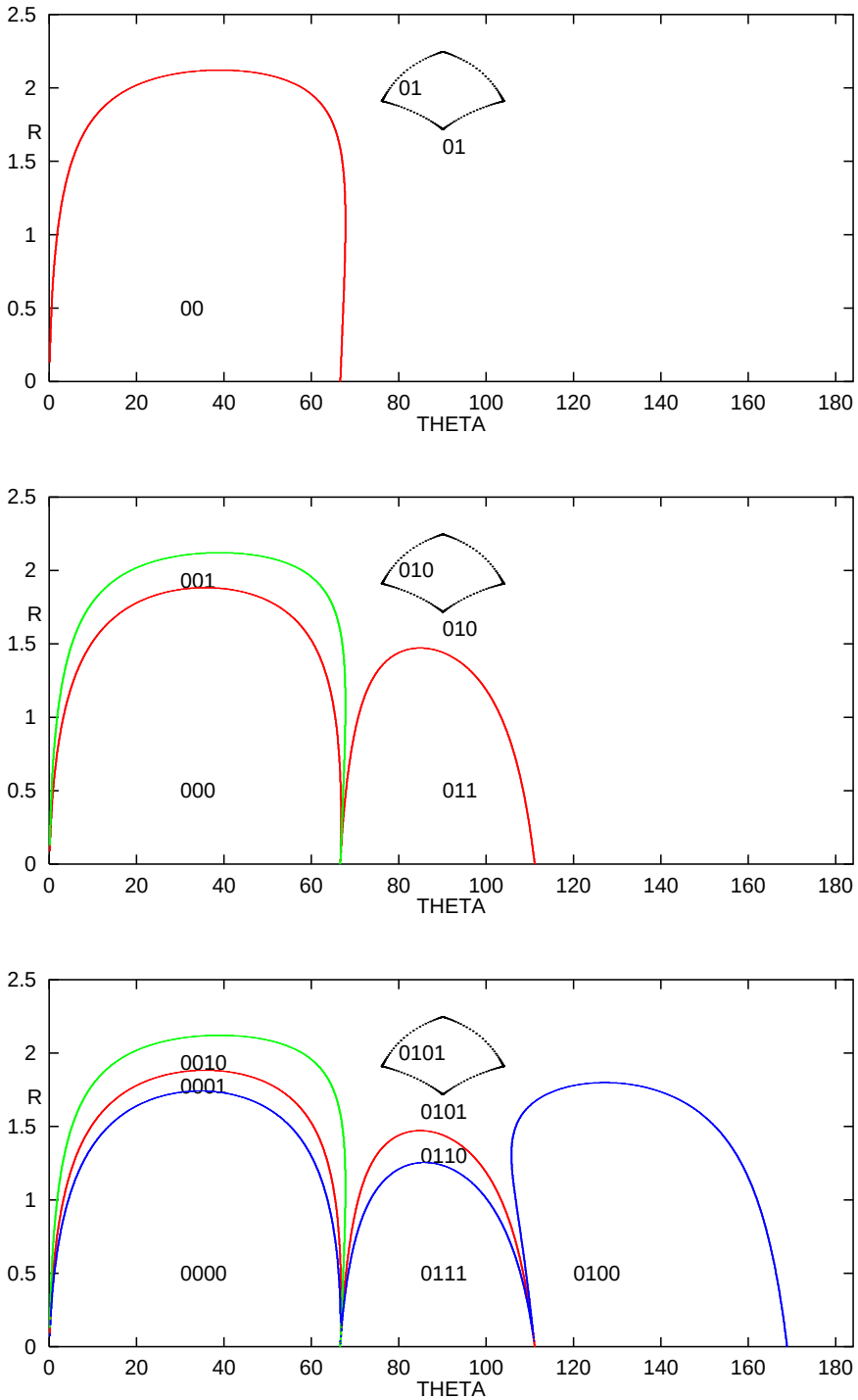

Figure 3: 三体衝突曲線. 記号列の長さは 2, 3, および 4. 記号の数から, 三体衝突 (曲線上) までの二体衝突の数がわかる.

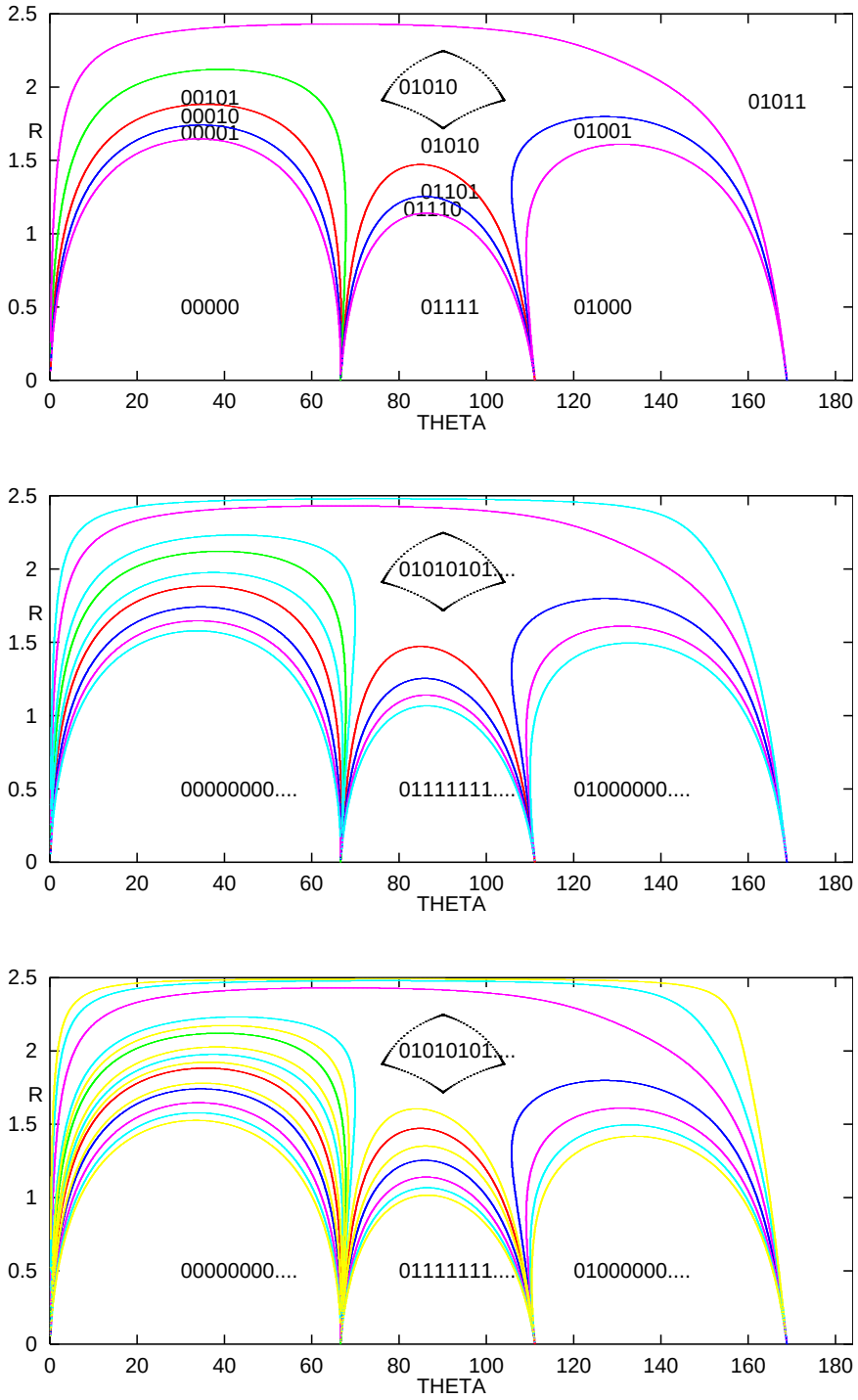

Figure 4: 三体衝突曲線. ここで考える記号列の長さは 5, 6, および 7.

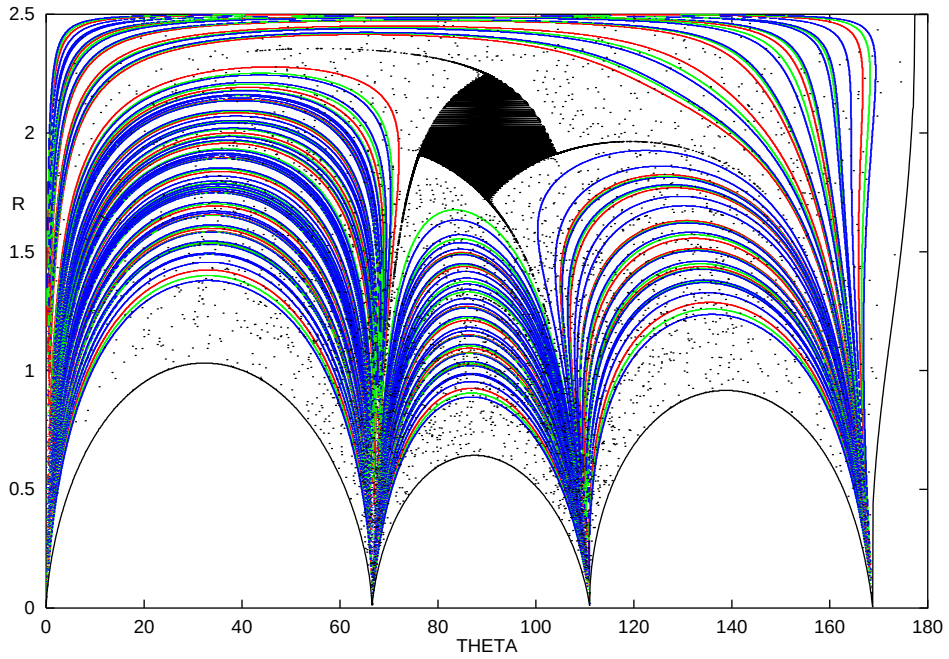

Figure 5: 長さ 10, 11, および 12 の記号列から生じる三体衝突曲線, Schubart 領域および安定領域のすぐ外を出発する軌道からの横断面上の点. 詳しくは本文参照.

3 記号列と三体衝突

負エネルギーの一次元三体問題の粒子は, 三体衝突を起こさない限り, 必然的に二体衝突を繰り返す. このことを使うと, 軌道に沿っての二体衝突の行程 (itinerary) を参照しつつ 3 粒子の運動の歴史を分類することができる. 記号列を以下のようにして作る. 粒子 1 と 0 が衝突したら記号「1」を列に加え, 粒子 0 と 2 が衝突したら記号「2」を繋げる. たとえば, エスケープ領域を出発する軌道は記号列 22222..... を生じる. 意味は, 距離 q_2 が繰り返しゼロになることである. というのは粒子 2 と 0 が連星として生き残ったからである. 一方, Q–P 領域では (Schubart 領域ともよばれる. Schubart(1956) がこの領域の中心に周期軌道を発見した), 記号列は無限の未来まで交代型 21212121.... である. すべての軌道の記号列を有限の長さまで考察すればわかるように, 初期値面は異なる記号列によって異なる領域に分割される. たとえば, 最初の記号だけを考えるなら, 領域 $0° < \theta < 180°$ ではどの軌道に対しても記号は 2 であり, 上で述べた対称性により, 領域 $-180° < \theta < 0$ では記号は 1 である. この 2 つの領域の間, すなわち $\theta = 0$ には, 本質的にはひとつの軌道しかない. それはすべての時間にわたって $q_1 = q_2$ なる同形軌道 (homographic orbit) である. これは三体衝突軌道である. ただし, 運動は二体運動 (実効質量に変えて) に帰着するから運動は正則である. もっと一般に, 面上で記号列が変化することは三体衝突の存在を意味する. 境界では (有限) 列の最後の記号は同時に 1 と 2 である. つま

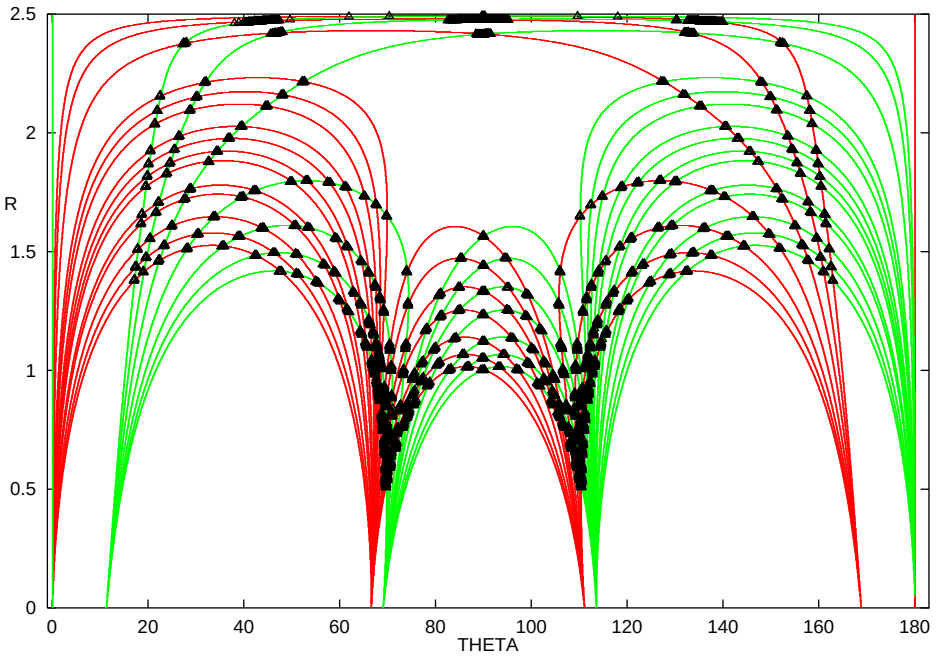

Figure 6: 未来ににの過去にも三体衝突にいたる軌道の初期点．記号列の長さは 7.

り 2 つの距離は同時にゼロになる．図 2 には, ある記号列から別の記号列への遷移の様子を図示した．軌道 C と D の間には三体衝突する軌道が存在するはずである．この軌道グループは同じ $\theta = 30^\circ$ を持ち, R が 0.0125 ずつ違うものである．(軌道図の縦軸の値は上下 3 つの図で正しくない．値がずれている.)

こうして, 記号列を使うことにより, 三体衝突軌道を実際に計算せずに, 簡単に図示することができる．(その上, 正則座標 Q_1 と Q_2 は衝突点で符号を変えるので, q_1 と q_2 のゼロは捕まえやすい.) 図 3 と図 4 にこのような曲線をいくつか示しておいた．図 3 の一番上のパネルには 2 回目の衝突がすでに三体衝突になった初期値を定義する曲線を描いている．この図の 2, 3 番目のパネル, さらには図 4 のパネルと進むと, 長い記号列および対応する三体衝突線が見える．またそれぞれの領域に対応する記号列も図に書き込んでおいた．ただし, 最後の 2 つのパネルでは線が多すぎて記号列を書ききれなかった

図 5 には一般的状況をもっと広範囲に示した．長さ 10, 11, および 12 の記号列を描いた．短い記号列はこれらの間に入るが省略した．また, もっと長い記号列から得られる曲線も省略した．これらの数は多く, 図が混みすぎてしまう．三体衝突曲線に加えて, Schubart 領域を示し, さらに横断面 $(q_1 = q_2)$ を使って

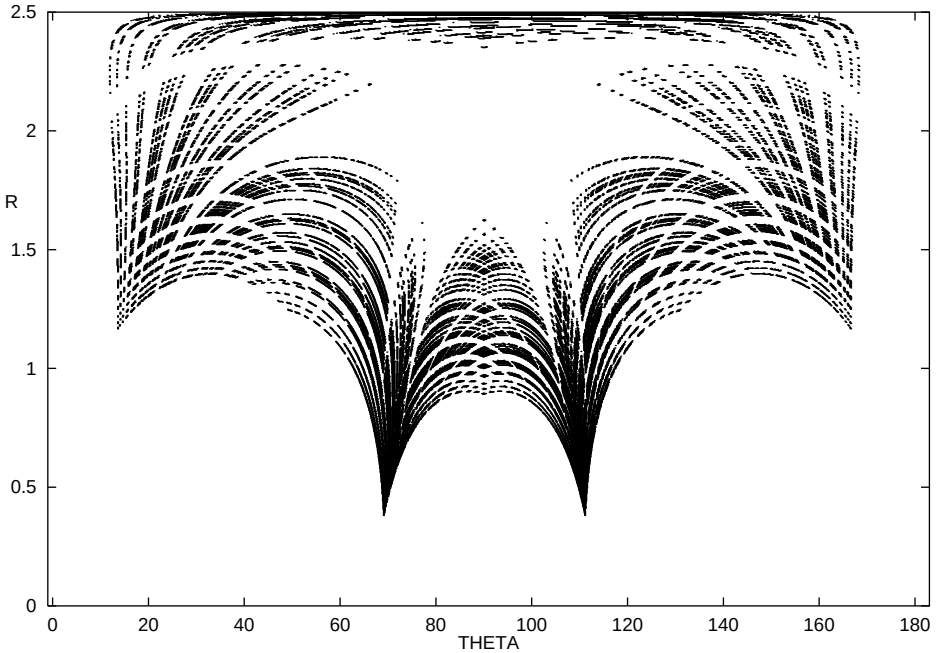

Figure 7: 長さ 12 の記号列からすでに大量の有限軌道が得られる

写像を計算して散らばった点を描いた. 散らばった点を得るために使った軌道 (200 個) は, どれも Schubart 領域のすぐ外を初期値とする. Schubart 領域のかどから出ている「曲線」は軌道点が集中しているところであって, 三体衝突曲線の間の空隙を走る. しかし, 横断面上の点は θ 方向に 180° だけずらして描いたことを注意しておく. (軌道を計算して得た横断面上の点は類似の領域, (カオス, 正則, Schubart), を現出させる. しかし, 本質的な違いがある. われわれの図は「初期値の関数としての未来の」系のふるまいを記述する. 一方, 横断面の点は,「計算された軌道の歴史」を語る. したがって, 点の方は, 時間の方向を逆転したときに得られる最終運動に対応する模様を示す. (4), (5) 式からわかるように, これは θ を 180° だけずらすこと, あるいは等質量の場合の対称性より, $\theta = 90^\circ$ に関して反転させることを意味する. このずらしを行なわない限り, 5 図のような一般的構造を見ることはできない. ずらさないと, カオス軌道が正則 (エスケープ) 領域に入り込んでしまう.) どんどん長い記号列を考察すると, 対応する三体衝突曲線はどんどん増えて, 図 5 の散乱点領域を埋めていく. Schubart 領域の近くでは, 軌道は準周期軌道のようにふるまい, 多数回の二体衝突の間, 準周期軌道との類似性を保つ. 一方, 正則領域の直上の, 点のみしかない空隙領域は (非常に) 長い放出による. 粒子 1 はほとんどエスケープ

し, その間残りの連星は, 粒子 1 が帰って来るまでに (任意に) 大きな回数だけ衝突を繰り返す. この理由で, エスケープ領域との境界では三体衝突曲線が無限に詰まっていることが明らかである. ただし, これを確認するには, 非常に長い記号列を計算する必要がある.

4 有限軌道

未来も過去も三体衝突に終る軌道が存在する. θ を $180^\circ - \theta$ に置き変えて粒子を入れ替えると未来と過去が入れ替わるから, 図を $\theta = 90^\circ$ に関して反転するだけで過去の運動に関する三体衝突曲線を得ることができる. もとの図に反転した図を重ねて曲線の交点を探せば, これは未来と過去に向かって三体衝突を起こす軌道の初期値の場所が得られる. 運動は (同形解を除いて) 一般に解析接続できないから, これらの軌道は有限軌道である. 三体衝突軌道が衝突の瞬間を越えて解析接続できない事実については McGehee (1974) が徹底的に議論している.

図 6 には未来と過去の, 長さ 7 まで記号列から得られたのすべての三体衝突曲線を描いた. 交点, すなわち有限軌道の初期値, を三角印で示した.

図 7 は長さ 12 までの記号列から得られるすべての曲線の交点を示す. 有限軌道の数が記号列の長さとともに急速に増えることが見てとれる.

5 三体衝突軌道の密度

いままでの結果から持ち上る問題は, 相空間における三体衝突軌道の密度の問題である. 図 3, 4, および 5 からすると, 記号列の長さが増えると, 三体衝突曲線の数はどんどん増える. 図 5 の段階で空白の領域 (点のみ) もいずれは埋まり, しまいには, Schubart 領域の境界や正則領域の境界の任意に近くまで曲線が押し寄せるように見える. これらの曲線の数が無限なら (三体系が壊れるまでに任意に長い回数の三体相互作用を行なう軌道があれば可能である), これらの曲線が稠密になるところでは集積曲線があるはずである. 厳密な証明はないが, これが成り立ちそうである.

一方, (発見的には) 明らかなことであるが, 曲線は他の場所では稠密でない (集積曲線のところでのみ稠密). このことは, 数値積分して図 8 に示した「カオス」軌道を考察すれば結論できそうである. 三体相互作用は有限時間しか継続せず, 最終運動は時間の両方向とも楕円–双曲的である. すなわち, 単独星と連星がほぼ双曲的な相対軌道で離れて行く. この軌道は三体衝突を含まないから, もちろん, 三体衝突に無限に近くはない. だから, $t = 0$ における初期条件を十分小さく任意に変えても, 軌道の変化は描画精度に収まってしまう. こうして初期値のまわりに開近傍が得られて, そこを出発する軌道には三体衝突軌

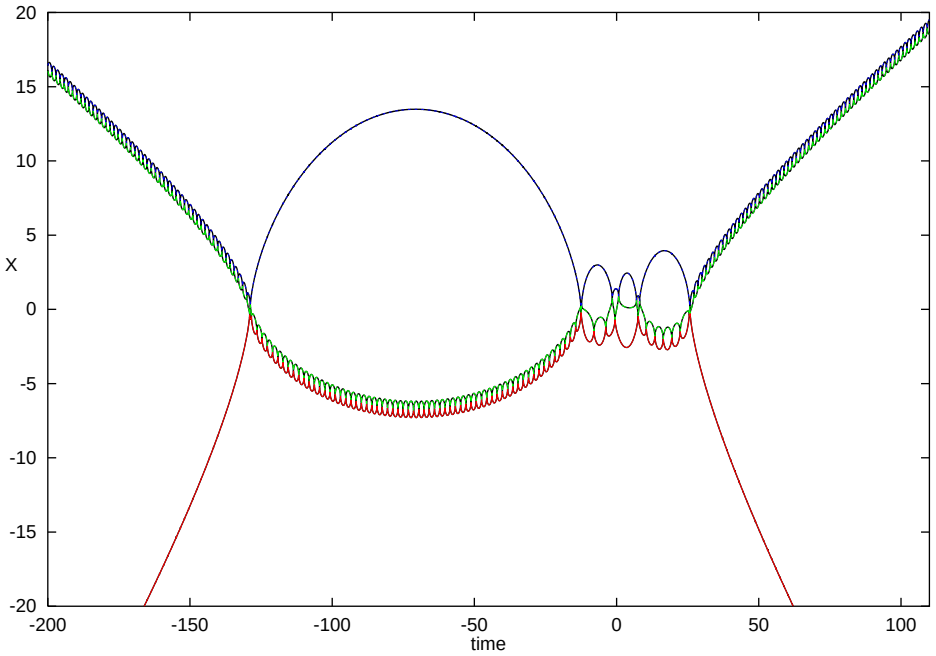

Figure 8: 「カオス」軌道.

道が含まれない. だから, 三体衝突軌道は測度ゼロの集合においてのみ稠密である, といえる. 同様に, 有限軌道の「塵」(dust, 図 7) は測度ゼロの集合を除いていたるところ疎であると予想する.

6 結論

以下のことに関して数値的証拠を得た:

Schubart 領域, 三体衝突曲線, および正則領域によって相空間全体の構造が明確になった (図 5).
カオス領域の三体衝突曲線の数は無限 (少なくともエスケープ領域の境界の近くでは放出粒子はほぼエスケープであり, この粒子が戻ってくるまでの任意回数の二体衝突があり得る) であるが, 稠密ではない. 有限軌道に関しても類似の定性的主張ができる (図 7).

ここでの結果により, カオス領域での初期条件に関する敏感な依存性を確認した. これは, 衝突を越えて正則化できず, 解析接続のできない三体衝突軌道 (McGehee 1974) の存在による. その上, Schubart 領域 – 安定準周期運動の

トーラス群 – は相空間の大域的構造と密接な関係を持つように思われる.

References

[1] Bulirsch, R. and Stoer, J.:(1966), *Numerical Treatment of Differential Equations by Extrapolation Methods.* Num. Math., **8**, 1–13.

[2] R. McGehee, R.:(1974) *Triple collision in the collinear three-body problem*, Inventiones mathematicae 27, 191-227.

[3] Mikkola, S. and Hietarinta, J.:(1989) *A Numerical Investigation of the One-Dimensional Newtonian Three-Body Problem* Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **46**, 1-18.

[4] Mikkola, S. and Hietarinta, J.:(1990) *A Numerical Investigation of the One-Dimensional Newtonian Three-Body Problem. II Positive energies.* Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **47**, 321-331.

[5] Mikkola, S. and Hietarinta, J.:(1991) *A Numerical Investigation of the One-Dimensional Newtonian Three-Body Problem. III. Mass Dependence in the Stability of Motion*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, **51**, 379-394.

[6] Hietarinta, J. and Mikkola, S.: (1993) *Chaos in the one-dimensional Newtonian three-body problem.* Chaos, **3** (2), 183-203.

[7] Tanikawa, K., Umehara, H. and Abe, H.:(1995), *A search for collision orbits in the free-fall three-body problem I. Numerical procedure*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, **62**, 335-362.

[8] Tanikawa, K. and Umehara, H.:(1998), *Oscillatory orbits in the planar three-body problem with equal masses*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, **70**, 167-180.

[9] Yoshida, H.:(1987) *A criterion for the non-existence of an additional integral in Hamiltonian systems with a homgeneous potential*, Physica 29D, 128-142.

[10] Yoshida, H:(1988) *Non-integrability of the three-body problems with homogenous potential*, in *The Few-Body Problem*, ed. M.J. Valtonen, proceedings of the 96th colloquium of the IAU, Turku, Finland 1987, Kluwer Academic Publishers, 1988.