Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy **62**, 335-362 (1995)

自由落下三体問題における衝突軌道の探索 I. 数値的手法

谷川清隆 [1,2]、梅原広明 [1]
[1] 〒 181 東京都三鷹市大沢 総合研究大学院大学、天文科専攻
[2] 〒 181 東京都三鷹市大沢 国立天文台
および
阿部 博
〒 101 東京都千代田区神田駿河台 日本大学理工学部

要約

自由落下三体問題において衝突軌道を見つけるための数値手法を開発した. この手法を適用して, 二体衝突軌道族を発見し, 一連の三体衝突軌道の場所を特定した. 二体衝突軌道集合の性質として三体衝突軌道を見つけるのに都合のよいものを見つけた. 重要な数値結果は最終節でいくつかの陳述としてまとめた.

1. 序

1.1. 自由落下三体問題

初期速度ゼロの三体問題は自由落下三体問題とよばれる. 平面問題である. 三体 $m_i, i = 1, 2, 3$ のエネルギーは負, また角運動量はゼロである. 3 つの質量が等しい場合 $m_1 = m_2 = m_3$ を考える. この問題では, 相似な三角形から始まる運動は適当な座標と時間変換により写り合う. だからこれらは同一視する. 相似でない三角形からはじまる運動が異なる運動に対応する.

質点 m_2 と m_3 がそれぞれ (x, y) 面の $A(-0.5, 0)$ と $B(+0.5, 0)$ に静止しており, m_1 は点 $P(x, y)$ に静止しているとする. ただし,

$$(x, y) \in D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, (x + 0.5)^2 + y^2 \leq 1\}. \tag{1}$$

m_1 が D 内で位置を変えると, 条件 $\overline{AB} \geq \overline{PA} \geq \overline{PB}$ を満たすすべての三角形が尽くされる. 逆に, 任意の三角形は, 3 質点 m_1, m_2, および m_3 が上のやり方で形づくる三角形のどれかと相似である. だから, $P \in D$ の位置を動かすことにより可能なすべての初期条件が指定できる. 以後は, 軌道が P から出発するということにする. D は等質量自由落下三体問題の初期値空間である. 問題の幾何学を図 1 に示した. D の境界は対称性を持つ三体問題に対応する. x 軸の E と B の間の線分 Γ_1 は直線問題の初期条件である. y 軸の E と C の間の線分 Γ_2 は m_2m_3 を下辺とする二等辺三角形問題の初期値である. 最後に, 円周の B と C の間の弧 Γ_3 は m_1m_3 を下辺とする二等辺三角形問題の初期値である.

自由落下三体問題は主としてレニングラード学派 (Agekyan and Anosova, 1968; Anosova and Zavalov, 1989; Anosova, 1991; およびその中の文献を見よ) が調べて来た. Anosova (1991)

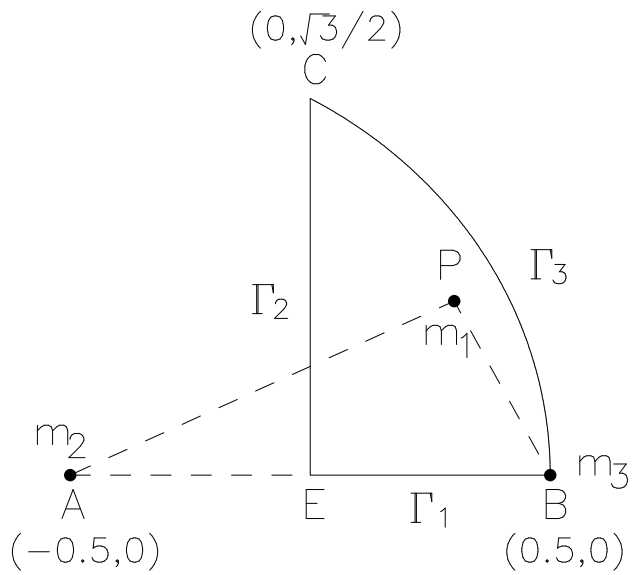

図 1: 自由落下三体問題の幾何学

は彼らの仕事をまとめている. とくに, Anosova(1991) の図 5 はカオスを示唆する点で非常に興味深い.

1.2. 衝突多様体

1974 年に, McGehee(1974) は三体衝突および三体近接衝突解を記述するのに都合のよい変数の組を導入した. 彼の変数では三体特異点を膨らませ (blow-up), 三体衝突多様体とよばれる境界多様体を相空間に付け加える. 運動方程式はなめらかにこの境界に拡張される. McGehee 変数では, 未来への三体衝突軌道は, 三体衝突多様体上の不動点の安定多様体を形成すると解釈される. 同様に, 過去に三体衝突する軌道はこの多様体上の不動点の不安定多様体を形成する.

三体衝突軌道および三体近接衝突軌道はそれ以来多くの研究者によって調べられてきた. McGehee (1974) は直線問題, Devaney (1980) は二等辺問題, Moeckel(1982) は一般平面問題, といった具合である.

McGehee 変数は 二体衝突を正則化するのにも使うことができる (Devaney 1982). この場合, 二体衝突多様体が導入される. 二体衝突軌道は, この衝突多様体上の不動点の安定および不安定多様体を形成すると解釈される. 制限三体問題のある種の極限ケースでは, 安定および不安定多様体が互いに横断的に交わることが示された (Lacomba & Llibre, 1988; Delgado-Fernandez, 1988). 横断的交差は非極限的な場合にも数値的に確認されている (Sekiguchi & Tanikawa, 1993).

二体衝突多様体上の不動点の安定および不安定多様体の複雑な絡み合いによるフラクタル

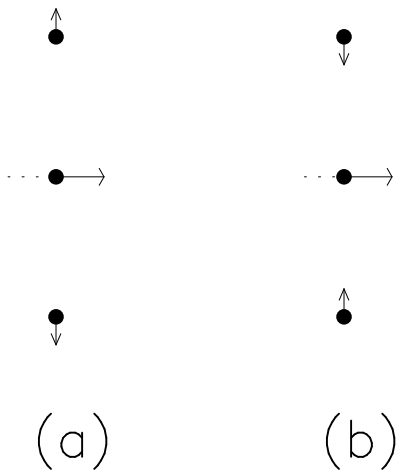

図 2: パチンコ効果

が最終運動との関係で観測できることを期待する. これは Anosova (1991) の結果から示唆される. また, 三体衝突軌道や三体近接衝突軌道は, 三体衝突多様体から遠いときにどこにあるのか. これが興味深い課題である. Broucke (1979) が二等辺問題においていくつかの三体衝突軌道をリストしたに過ぎない.

本論文の主目的は, D 内に二体および三体衝突軌道の初期値を見つけることである. 衝突軌道とエスケープの関係は別の論文 (Umehara & Tanikawa, 1995) で議論する. 予備的な結果はすでに発表した (Umehara et al., 1995).

連星形成, エスケープ, 散乱, 等に関する研究は多数あるが, これらは二体および三体衝突の存在を無視している (Valtonen, 1988). 著者は, 本論文が理論的研究と数値的研究の橋渡しをすることを望む.

1.3. パチンコ効果と衝突

パチンコ効果は三体系から粒子が 1 つ逃げ出すための効率的な機構である. この機構は最近五体問題において非衝突特異性の存在を証明するために使われた (Xia, 1992). 理想的な設定の下でのこの機構を図 2 に示した. 図において, 座標は連星の重心を固定した座標である. 図 2(a) では, 第三体が連星の重心を通るとき, 連星成分は互いに遠ざかっており, 図 2(b) では, 連星成分は互いに近づいている. 前者では第三体は加速され後者では減速される. 前者の場合, 第三体は十分なエネルギーを得て系から離脱し得る. この現象はレニングラード学派によって観察され, パチンコ効果(*slingshot*) と名づけられた (Valtonen, 1988).

パチンコ効果と二体衝突の関係について考察しよう (図 3 を見よ). 図 3(a) は二体の正面衝突と遠くの第三体を表示する. 図 3(b) と (c) では, この状況への相異なる摂動を表示する. 図 3(b) では, m_1 と m_2 が互いに遠ざかる連星をなし, m_3 はこの連星成分を結ぶ線を通る. この

とき, パチンコ効果が働いて m_3 はエネルギーを得, 無限遠へ離脱し得る. 図 3(c) では, m_1 と m_3 が互いに遠ざかる連星をなし, m_2 がこの連星成分を結ぶ線を通過する. パチンコ効果は m_2 に働く. この考察からすると, 衝突軌道は m_2 が逃げる初期条件と m_3 が逃げる初期条件を分割する.

これが本論文の基本的発想である. 三体問題の最終運動 (final motion) が衝突と強く関係すると考える. 数値的証拠は Anosova(1991) により与えられる. 彼女は初期条件空間 D において異なる粒子がエスケープする領域が隣り合っていることを見た.

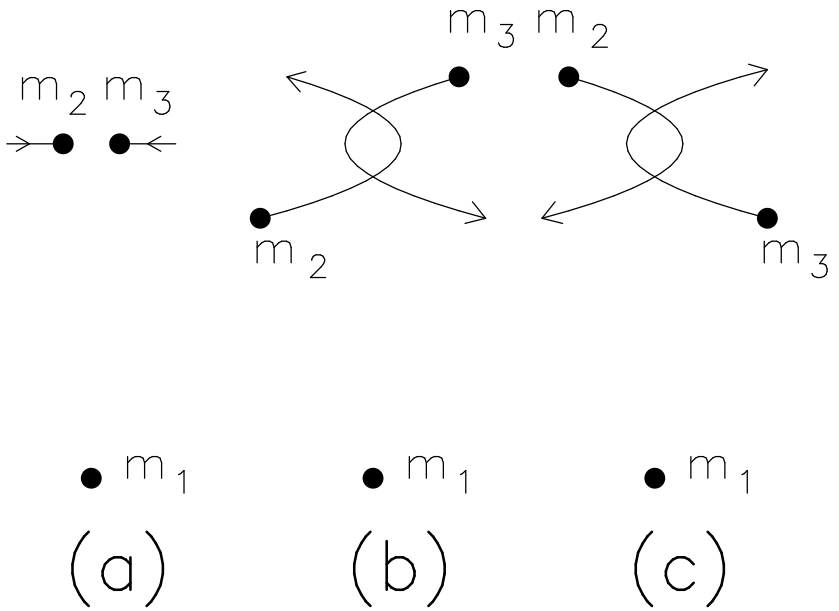

図 3: パチンコ効果

2. 二体衝突軌道を見つける手法

二体衝突や三体衝突にいたる初期配置, つまり, D 内の m_1 の位置を 二体衝突点 とか 三体衝突点 とよぶことにする. 二体衝突点の集合が曲線をなすなら, それを 二体衝突曲線, あるいは単に 衝突曲線 とよぶ.

本節では, 二体衝突点を見つける手法を記述する. そのために, まず, D 内の点を 3 粒子の相互距離のふるまいに応じて分類しよう. 二体衝突は正則化されるものとし, 軌道はこの特異性を越えて接続できるものとする. 三体衝突の場合は接続は考えない.

時刻 $t = 0$ に点 $p \in D$ を出発する軌道を追いかけよう. 質点 m_1, m_2, m_3 の間の相互距離を r_{12}, r_{23}, r_{13} とし, $r = \min\{r_{12}, r_{23}, r_{13}\}$ とおく. 時間の関数として $r = r(t)$ は連続である. 3 質点の初期速度はゼロであるから 3 質点の作る三角形ははじめに収縮する. よって $r(t)$ は減少する. この $r(t)$ は極小を経験するはずである. 時間の経過につれて $r(t)$ は振動し, 極大になったり極小になったりする.

小さい数 $R > 0$ と整数 $n = n_{min} > 0$ を固定する. 各 R と n に対して初期点 p のタイプ τ_p を導入しよう. $r(t)$ が n 番目の極小を経験する前に軌道が三体衝突を経験するとき, p はタイプ–6 であるとし, $\tau_p = 6$ と書く. $r(t)$ が n 個の極小と $(n-1)$ 個の極大を経験し, $t = t_k$ に k

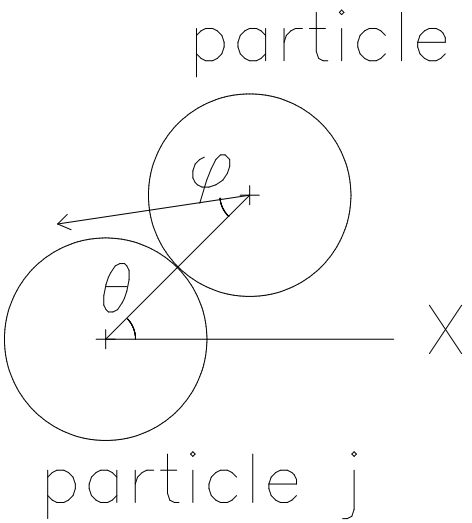

図 4: 有限物体の衝突の幾何学

番目の極小, $t = t'_l (1 \le k \le n, 1 \le l \le n-1)$ に l 番目の極大を経験したとする. $t = t_n$ に $r(t)$ が R より大きければ, p はタイプ–0 であるとし, $\tau_p = 0$ と書く. $t_{n-1} \le t \le t_n$ のとき $r(t)$ が R より小さければ, p はタイプ–5 であるとし, $\tau_p = 5$ と書く. 一方, $t = t_n^*,\ t'_{n-1} \le t_n^* \le t_n$ があって $r(t) = R$ を満たすなら, $t = t_n^*$ において $r(t) = r_{ij}$ なる $i, j (1 \le i < j \le 3)$ がある. 他の相互距離の中にも $r(t)$ に等しいものがあれば, p はタイプ–4 であるとし, $\tau_p = 4$ と書く. この場合, 3 粒子の作る三角形は二等辺三角形は正三角形である.

他の相互距離が r より厳密に大きい場合を考えよう. $r = r_{12}$ なら, p はタイプ–3 であるとし, $\tau_p = 3$ と書く. 同様に, $r = r_{23}$ または $r = r_{13}$ のときは p はタイプ–1 またはタイプ–2 とよび, $\tau_p = 1$ または $\tau_p = 2$ と書く. p に, $t = t_n^*$ に定義された 2 つの角度 θ と φ を付随させる (図 4 を見よ)

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan((y_i - y_j)/(x_i - x_j)), \\ \varphi &= \arctan((\dot{y}_i - \dot{y}_j)/(\dot{x}_i - \dot{x}_j)) + \theta - 2\pi. \end{aligned} \tag{2}$$

ここで, θ は m_j から見た m_i の方位角であり, φ は 2 粒子 m_i と m_j を結ぶ方向を基準にした粒子 m_i の運動方向である. どちらの角度も反時計まわりに測る. m_i と m_j が衝突するとき $(i < j)$, 相対座標の原点はいつも m_j に取る.

こうして, D 内の各点 p および各 $n_{min} = 1, 2, \ldots$ と $R > 0$ に対して, タイプ τ_p を付随させ, またタイプ–1, –2, および–3 には 2 つの角度 (θ, φ) を付随させた. 各 $R > 0$ および $n_{min} > 0$ に対して,

$$S_i = \{p \in D : \tau_p = i\}, \quad i = 0, 1, \ldots, 6, \tag{3}$$

と定義する. 初期条件空間 D は 7 つのタイプに対応する 7 つの異なる集合 $S_i, i = 0, 1, \ldots, 6$ に分割される. $S_i, i = 1, 2, 3$ の各点には (θ, φ) がラベルされている. 上記の定義は表 I にまとめた.

R を小さくしたときに上記分類がどのように変化するかを考察しよう. 明かに集合 $S_i, i = 1, 2, \ldots, 5$ は減少する. 対応して, S_0 が占める面積は増大する. S_5 の点は他のタイプに変化する. $R \to 0$ の極限を考えよう. r の n 番目の極小はゼロ, つまり近接衝突は二体あるいは三体

衝突になってしまう. S_5 は消滅する. S_6 は前回の近接衝突での三体衝突点である. だからこれらの点の数は減少する. S_4 は n 番目の極小における正三角形あるいは直線三体衝突に対応する. 集合 S_1, S_2, S_3, S_4, および S_6 は余次元 1 以上であるから, D の点のほとんどは S_0 の点となる.

上の構成より, 二体衝突点は R が有限の場合の S_1, S_2, および S_3 に, そして可能性としては S_4 や S_5 にも含まれることがわかる. 集合 S_4 は任意の $R > 0$ に対して非常に小さいと考えられる. 有限な R に対して集合 $S_i (i = 1, 2, 3)$ を考えよう. S_i の少なくともどれかは内点を持つはずである. なぜならそうでないと D の点は, 有限な R に対してもほとんどすべて S_0 の点となるが, これはばかげている. 面白いことに, これらの集合が内点を持つかどうかは対応する衝突点があるかないかに関係する. 事実, たとえば S_1 を考えてみる. ある軌道が存在し, まず r の $(n-1)$ 番目の極大が R より大きく, 次に r の n 番目の極小が R より小さく, 最後に極小において $r = r_{23}$ であるとすると, 運動方程式の連続性により, p の近くから出発した軌道もこの 3 つの条件を満足する. つまり, S_1 は内点を持つ. n 番目の極小において m_2 と m_3 で衝突が起こるなら, 二番目と三番目の条件が満たされる. 第一の条件は R を十分小さくとれば満たされる.

もっと詳しく $S_i, i = 1, 2, 3$ について考察しよう. これらの集合の各点は対応する (θ, φ) を持つ. 定義より, $t = t_n^*$ において $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ が成り立つ. 衝突粒子の運動は二体衝突において, 二粒子の重心から見ればほとんど直線的である. だから, R を十分小さくとれば, 二体衝突点は θ の値のいかんに拘らず, $\varphi \simeq 0$ で特徴づけられる. このことから次のような数値手法が示唆される.

$n = n_{min}$ と R を固定する. 領域 D をサイズ $(\Delta x, \Delta y)$ の網目に分割する. この網目の格子点を出発する軌道積分を行なう. $(n-1)$ 番目の極大が R 以上である場合に, $n-1$ 番目の極小の次に R が R 未満になったら積分を止める. 積分時間刻みを十分小さく取れば, この瞬間に, $S_i, i = 1, 2, 3$ の点に対して $\varepsilon > 0$ を小さくとって, $0 < R - r < \varepsilon R$ となるようにできる. この瞬間の θ と φ を計算する. この計算を格子点すべてに対して遂行する. S_3 の点は φ が負か正かに応じて $\triangle$ と $\cdot$ で表す. S_1 の点は φ が負か正かに応じて $+$ と $\bullet$ で表す. S_2 の点は φ が負か正かに応じて $\times$ と $\circ$ で表す. S_0 と S_5 の点は無印にする. S_4 は典型的には Γ_2 と Γ_3 で実現される. Γ_2 と Γ_3 の外で S_4 の点を得るのはむずかしい. S_6 は $n_{min} = 1$ から逐次得られる. $n_{min} = 1$ に対してなんらかの方法で三体衝突点を求めると, これらは $n_{min} = 2$ に対しては S_6 を構成する. 以下同様. 次節では, 三体衝突点の求め方を記述する.

表 I. 最小の相互距離 r の n 回目の極小時の条件に応じた軌道の分類

<table>
<tr><td>n 回目の r の極小の前に三体衝突</td><td colspan="5">The n-th minimum of r exists</td></tr>
<tr><td rowspan="4">type 6
S_6</td><td colspan="4">$r \leq R$</td><td>$r > R$</td></tr>
<tr><td>$t_{n-1} \leq t \leq t_n$
のときに $r < R$</td><td colspan="3">otherwise</td><td rowspan="3">type 0
S_0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">type 5
S_5</td><td>二等辺 or
正三角形</td><td>1 と 2 が
衝突</td><td>1 と 3 が
衝突</td><td>2 と 3 が
衝突</td></tr>
<tr><td>type 4
S_4</td><td>type 3
S_3</td><td>type 2
S_2</td><td>type 1
S_1</td></tr>
</table>

さて, 各 n_{min} および $R > 0$ に対して, D の点には記号が割り振られ, 記号が無印でない限