に三体衝突点が現われ, しかもこの三体衝突点でタイプ–2 と–3 の曲線が, ちょうど分岐で生まれるように「生まれる」. これらの現象は以後に続く論文で詳しく調べる.

タイプ–1 と–3 の衝突曲線は各 $n_{min} \geq 3$ の場合も Γ_3 で出会う. これは果てしなく続く. 事実, $n_{min} = 1$ の三体衝突の場合と同様, $n_{min} =, 3, 4, \ldots$ を与えたとき, m_1 と m_3 の連星が n_{min} 回目の二体衝突を行なう瞬間に粒子 m_2 が到着するような初期条件はあるはずである. だから, Γ_3 上に三体衝突点の無限列がある. これらの点を補間によって求めた. すなわち, タイプ–1 およびタイプ–3 の二体衝突点を D の内外で求め, タイプ–1 とタイプ–3 の衝突曲線が Γ_3 と交わるはずの場所を補間法で求める. 結果は表 IV に記載した. 表において, 第一欄は n_{min}, 第二および三欄は三体衝突点の (x, y) 座標, そして第五欄は出発二等辺三角形の頂角 α をラジアンで表した値である.

表 III(c). Positions of several binary collision points of type 2 for different n_{min}.

n	x	y	θ	time	v/h	φ
3	0.3000000	0.5570104	1.9482	0.7524	v	$-+$
3	0.1500000	0.4030308	2.4879	0.6170	v	$-+$
3	0.0995804	0.3000000	2.7052	0.5450	h	$+-$
3	0.0707400	0.2000000	2.8761	0.4914	h	$+-$
3	0.0553515	0.1000000	3.0183	0.4570	h	$+-$
3	0.0505631	0.0100000	3.1296	0.4452	h	$+-$
4	0.4400000	0.3273010	1.7771	0.6779	v	$-+$
4	0.4000000	0.3120474	2.0932	0.6578	v	$-+$
4	0.2699049	0.2000000	2.7481	0.5722	h	$+-$
4	0.2255331	0.1000000	2.9789	0.5311	h	$+-$
4	0.2124411	0.0100000	3.1264	0.5174	h	$+-$
5	0.4600000	0.2503266	1.7949	0.6599	v	$-+$
5	0.4000000	0.2266665	2.3260	0.6304	v	$-+$
5	0.3183322	0.1500000	2.7794	0.5780	h	$+-$
5	0.2923304	0.1000000	2.9294	0.5577	h	$+-$
5	0.2781273	0.0500000	3.0433	0.5457	h	$+-$
5	0.2737633	0.0100000	3.1224	0.5419	h	$+-$
6	0.4700000	0.2081834	1.7991	0.6532	v	$-+$
6	0.3674499	0.1500000	2.6652	0.5982	h	$-+$
6	0.3324987	0.1000000	2.8797	0.5742	h	$+-$
6	0.3144911	0.0500000	3.0237	0.5606	h	$+-$
6	0.3090672	0.0100000	3.1188	0.5563	h	$+-$

図 13 は $(x, y) = (0, \sqrt{3}/2)$ に位置する自明な三体衝突点を除いて α と n_{min} の両対数グラフである. 図の示唆するところによると, 解析的関係式

$$\log \alpha(n) = c_1 + (c_2 + \frac{c_3}{n}) \log n, \tag{4}$$

が成り立つ. 最小自乗法により,

$$c_1 = 0.21754, \quad c_2 = -0.87541, \quad c_3 = -12259. \tag{5}$$

を得る. これから簡単な関係

$$\alpha(n) = 1.22430 n^{-0.87541} \quad \text{for large} \quad n > 0. \tag{6}$$

が得られる. この関係式の意味はいまのところわからない.

5. 観察のまとめ

一連の陳述として重要な数値結果をまとめよう.

観察 **5.1.** 自由落下三体問題において, n_{min} を決めたとき, 二体衝突点は初期値面においてジョルダン弧をなす.

土屋俊夫 (1995) はこの陳述の証明の可能性を示唆した. 彼は次のように議論を進める.

わが初期値空間は 2 次元である. したがって, この空間から出発する軌道全体は 3 次元多様体をなす. 一方, 二体衝突は 2 粒子の座標が一致することが特徴である. すなわち, 二体衝突多様体は余次元 2 である. 一般に 3 次元多様体と余次元 2 の多様体は 1 次元の交わりを持つ. さて, われわれの数値手法はこの交わりを初期値空間に射影したことと同値である. 実際, われわれは軌道を追いかけ, その点から出発した軌道がある瞬間に二体衝突をするとき, 軌道の初期値を二体衝突点とよぶ. 1 次元の交点集合を 2 次元曲面に射影すると生成的には 1 次元となる. とくに, 二体衝突点が初期値面に見出されたとき, この点はすべてが二体衝突点から構成される曲線の上にあるはずである.

観察 **5.2.** 三体衝突点は異なるタイプの二体衝突曲線が出会う点である.

Devaney(1980) が証明したところによると, 二等辺問題においては, 三体衝突に始まり, 三体衝突に終る軌道は無数にある. 彼の三体衝突軌道は Γ_2 上にある. 彼の問題設定では, 第三体は小さな質量を持ち, 残りの 2 体の重心の近くを高速振動する. われわれの場合, 3 質量は等しく, 三体衝突点は Γ_3 上にある. もｃいろんこれらの点は y 軸上に対応する点を持つ. ただし, これらは y 軸上 C より上にある. どちらも三体衝突に始まり三体衝突に終る軌道ではあるが, われわれのと Devaney のとは異なる系列の三体衝突軌道である. われわれの観察は次のように定式化できる.

観察 **5.3.** 領域 D の境界 Γ_3 に沿って, 点 $B(0.5, 0)$ に収束する三体衝突点の無限列があって, 粒子 m_2 が連星 m_1 と m_3 に最初に接近するときに生じるしょうとつである.

この系列の三体衝突点の存在はかなり明かである. 底辺 m_1, m_3 とするエネルギー負の二等辺問題において, 連星 m_1 と m_3 は二体衝突を永遠に繰り返す. 第三粒子 m_2 の初期距離を正三角形の状態から連続的増大させてみよう. 正三角形の場合, m_2 は連星が最初の二体衝突を起こすときにちょうど連星の重心に達する. これがいわゆるラグランジュ型三体衝突である. m_2 の距離を少し増やすと, 連星 m_1 と m_3 が最初の二体衝突する直後にその重心に到達する. しかし, さらにどんどん距離を増やしていくと, 連星が 2 回目の二体衝突を起こすときに ,$_2$ が連星の重心に到達するような初期条件にやってくる. 同様に, 虚ｒを連続的に増やすと, 連星が n 回目の二体衝突を起こすときにちょうど m_2 が連星の重心に到達する初期条件が存在する.

Observation 5.4. 二体衝突曲線の左側で φ が負 (または正) で, 反対側で φ が正 (または負) であるとする. 三体衝突点を越えて二体衝突曲線を追うと, この順序は逆になる. 上下方向に追う場合も同様である.

この観察は, 三体衝突点を見つける際に非常に重要である. 三体衝突点の存在が遠くからわかる.

表 IV. Positions of the first twenty triple collision points on Γ_3. n_{min} is the number of minima of the smallest distance, (x, y) the position of triple collision points, and α is the vertex angle of initial isoceles triangle.

n_{min}	x	y	α
1	0.	0.8660254	1.5707963
2	0.4035896	0.4284000	0.4427212
3	0.4529373	0.3031644	0.3080119
4	0.4704101	0.2414607	0.2438709
5	0.4790156	0.2037885	0.2052260
6	0.4840270	0.1780150	0.1789690
7	0.4872651	0.1590877	0.1597664
8	0.4895060	0.1444976	0.1450051
9	0.4911357	0.1328464	0.1332404
10	0.4923716	0.1232902	0.1236046
11	0.4933331	0.1152844	0.1155413
12	0.4940998	0.1084624	0.1086762
13	0.4947253	0.1025672	0.1027480
14	0.4952450	0.0974127	0.0975673
15	0.4956785	0.0928599	0.0929939
16	0.4960499	0.0888044	0.0889215
17	0.4963679	0.0851642	0.0852675
18	0.4966420	0.0818753	0.0819671
19	0.4968829	0.0788866	0.0789687
20	0.4970952	0.0761564	0.0762303

ACKNOWLEDGEMENT

第一著者 (K.T.) は自由落下三体問題において三体衝突点の存在の問題があることを指摘してくれた吉田淳三博士に感謝する. 著者は J. Anosova 博士が議論してくれたことに謝意を表する.

REFERENCES

Agekyan, T.A. and Anosova, J.P.: A study of the dynamics of triple systems by means of statistical sampling, *Soviet Physics-Astronomy* **11**, 1006-1014(1968).

Agekyan, T.A., Anosova, J.P. and Orlov, V.V., *Astrofizika* **19**, 111(1983).

Anosova, J.P.: Strong triple interactions in the general three-body problem, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **51**, 1-15 (1991).

Anosova, J.P. and Orlov, V.V., Chernin, A.D., and Kiseleva, L.G.: The close approaches and coalescence in triple systems of gravitating masses, I, *Astrophy. Space Sci.* **158**,

19-33(1989).

Anosova, J.P. and Zavalov, N.N.: States of strong gravitational interaction in the genral three-body problem, *Soviet Astron.* **33**, 79-83 (1989).

Broucke, R.: On the isosceles triangle configuration in the planar general three body problem, *Astron. Astrophys.* **73**, 303-313(1979).

Delgado-Fernandez, J.: Transversal ejection-collision orbits in Hill's problem for $C \ll 1$, *Celestial Mechanics* **44** (1988), 299-307.

Devaney, R.L.: Triple collision in the planar isosceles three body problem, *Invent. Math.* **60**, 249-267(1980).

Devaney, R.L.: Blowing up singularities in classical mechanical systems, *Amer. Math. Monthly* **89**, 535-552(1982).

Lacomba, E. and Llibre, J.: Transversal ejection-collision orbits for the restricted problem and Hill's problem with applications, *J. Diff. Eq.* **74** (1988), 69-85.

Llibre, J.: On the restricted three-body problem when the mass parameter is small, *Cel. Mech.* **28** (1982), 83-105.

McGehee, R.: Triple collision in the collinear three-body problem, *Invent. Math.* **27**, 191-227(1974).

Moeckel, R.: Chaotic dynamics near triple collision, *Arch. R. Mec.* **107**, 37-69(1989).

Szebehely, V. and Peters, C.F.: Complete solution of a general problem of three bodies, *Astron. J.* **72**, 876-883(1967).

Sekiguchi, M. and Tanikawa, K.: Horseshoe mapping and collision orbits in the restricted three-body problem, in *Hamiltonian Systems and Celestial Mechanics* (ed. Lacomba & Llibre), World Scientific, 1993, pp.181-189.

Tanikawa, K., Manabe, S., and Broucke, R.: On the origin of the planetary spin angular momentum by accretion of planetesimals: property of collision orbits, *ICARUS* **79**, 208-222(1989).

Tanikawa, K., Kikuchi, N., and Sato, I.: On the origin of the planetary spin by accretion of planetesimals. II. collision orbits at the Hill surface, *ICARUS* **94**, 112-125(1991).

Tsuchiya, T.: 1995, private communication.

Umehara, H., Tanikawa, K., and Aizawa, Y.: Initial-value sensitivity in the planar three-body problem, in Dynamical Systems and Chaos, Vol.2, World Scientific, 1995(in press).

Valtonen, M.J.: The general three-body problem in astrophysics, *Vistas in Astronomy* **32**, 23-48(1988).

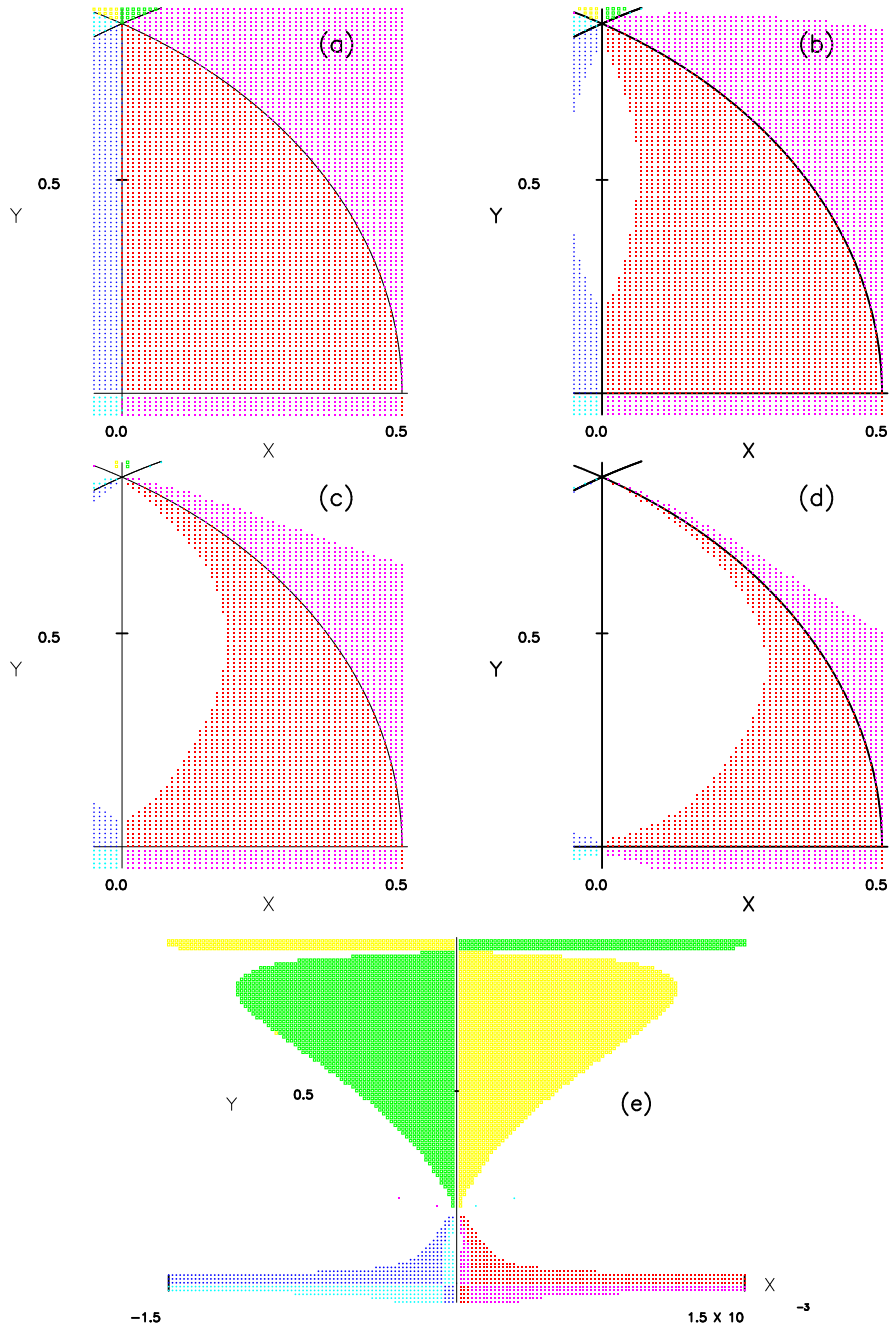

図 5: $n_{min} = 1$ の場合の有限物体の二体衝突．記号 $+$ と $\bullet$ は φ が負と正の場合の m_2 と m_3 の衝突を表す．記号 $\times$ と $\circ$ は φ が負と正の場合の m_1 と m_3 の衝突を表す．記号 Δ と $\cdot$ は φ が負と正の場合の m_1 と m_2 の衝突を表す．(a) $R = 10^{-1}$, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-2}, 10^{-2})$, (b) $R = 10^{-2}$, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-2}, 10^{-2})$, (c) $R = 10^{-3}$, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-2}, 10^{-2})$, (d) $R = 10^{-4}$, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-2}, 10^{-2})$, および (e) $R = 10^{-4}$, $(\Delta x, \Delta y) = (2 \cdot 10^{-5}, 10^{-2})$.

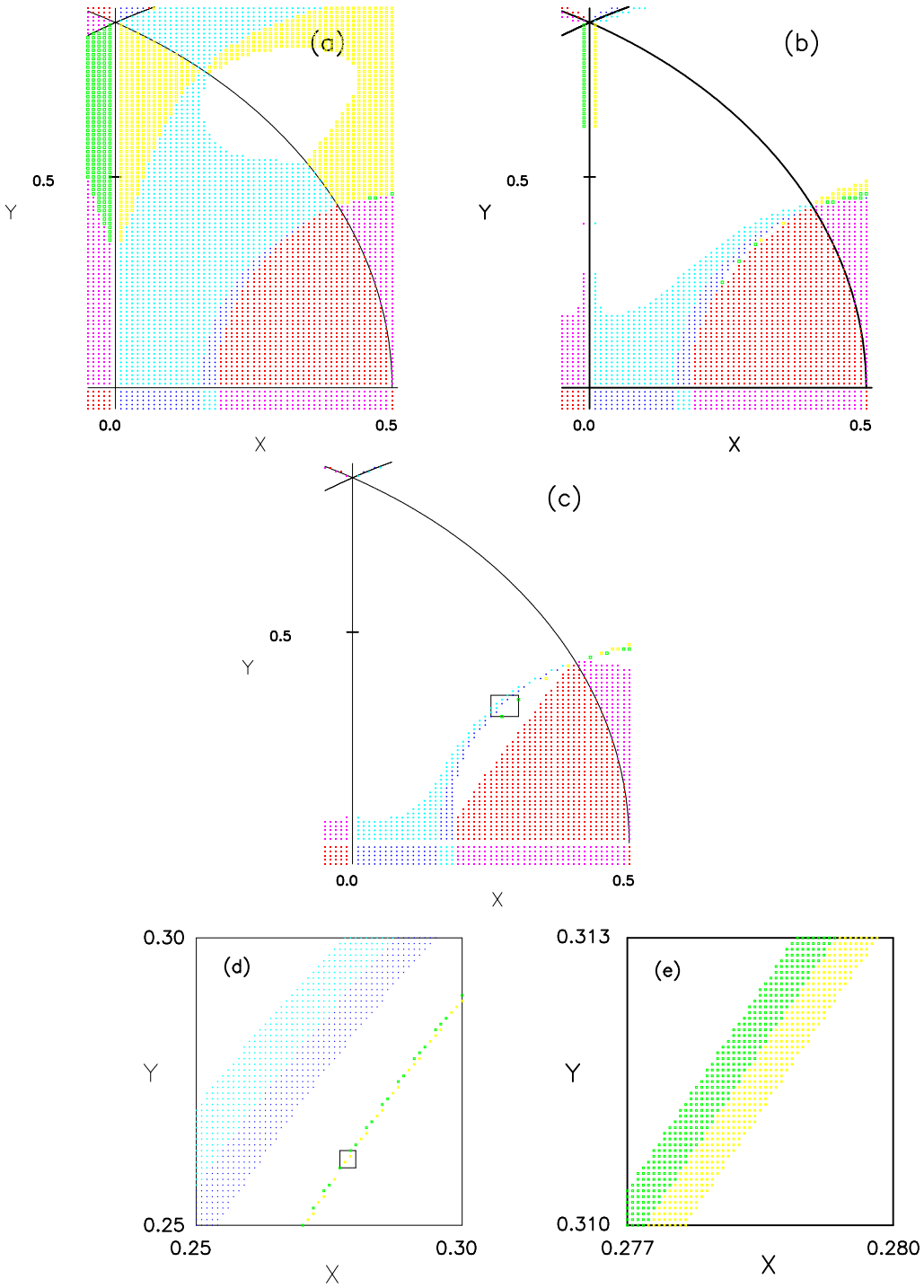

図 6: 図 5 と同様. ただし, $n_{min} = 2$. (a) $R = 10^{-1}$, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-2}, 10^{-2})$, (b) $R = 10^{-2}$, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-2}, 10^{-2})$, (c) $R = 10^{-3}$, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-2}, 10^{-2})$, (d) 図 6(c) の正方形領域の拡大. ただし, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-3}, 10^{-3})$. (e) 図 6(d) の正方形領域の拡大. ただし, $(\Delta x, \Delta y) = (6 \cdot 10^{-5}, 6 \cdot 10^{-5})$.