Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy **62**, 335-362 (1995)

自由落下三体問題における衝突軌道の探索 I. 数値的手法

谷川清隆 [1,2]、梅原広明 [1]
[1] 〒 181 東京都三鷹市大沢 総合研究大学院大学、天文科専攻
[2] 〒 181 東京都三鷹市大沢 国立天文台
および
阿部 博
〒 101 東京都千代田区神田駿河台 日本大学理工学部

要約

自由落下三体問題において衝突軌道を見つけるための数値手法を開発した. この手法を適用して, 二体衝突軌道族を発見し, 一連の三体衝突軌道の場所を特定した. 二体衝突軌道集合の性質として三体衝突軌道を見つけるのに都合のよいものを見つけた. 重要な数値結果は最終節でいくつかの陳述としてまとめた.

1. 序

1.1. 自由落下三体問題

初期速度ゼロの三体問題は自由落下三体問題とよばれる. 平面問題である. 三体 $m_i, i = 1, 2, 3$ のエネルギーは負, また角運動量はゼロである. 3 つの質量が等しい場合 $m_1 = m_2 = m_3$ を考える. この問題では, 相似な三角形から始まる運動は適当な座標と時間変換により写り合う. だからこれらは同一視する. 相似でない三角形からはじまる運動が異なる運動に対応する.

質点 m_2 と m_3 がそれぞれ (x, y) 面の $A(-0.5, 0)$ と $B(+0.5, 0)$ に静止しており, m_1 は点 $P(x, y)$ に静止しているとする. ただし,

$$(x, y) \in D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, (x + 0.5)^2 + y^2 \leq 1\}. \tag{1}$$

m_1 が D 内で位置を変えると, 条件 $\overline{AB} \geq \overline{PA} \geq \overline{PB}$ を満たすすべての三角形が尽くされる. 逆に, 任意の三角形は, 3 質点 m_1, m_2, および m_3 が上のやり方で形づくる三角形のどれかと相似である. だから, $P \in D$ の位置を動かすことにより可能なすべての初期条件が指定できる. 以後は, 軌道が P から出発するということにする. D は等質量自由落下三体問題の初期値空間である. 問題の幾何学を図 1 に示した. D の境界は対称性を持つ三体問題に対応する. x 軸の E と B の間の線分 Γ_1 は直線問題の初期条件である. y 軸の E と C の間の線分 Γ_2 は m_2m_3 を下辺とする二等辺三角形問題の初期値である. 最後に, 円周の B と C の間の弧 Γ_3 は m_1m_3 を下辺とする二等辺三角形問題の初期値である.

自由落下三体問題は主としてレニングラード学派 (Agekyan and Anosova, 1968; Anosova and Zavalov, 1989; Anosova, 1991; およびその中の文献を見よ) が調べて来た. Anosova (1991)

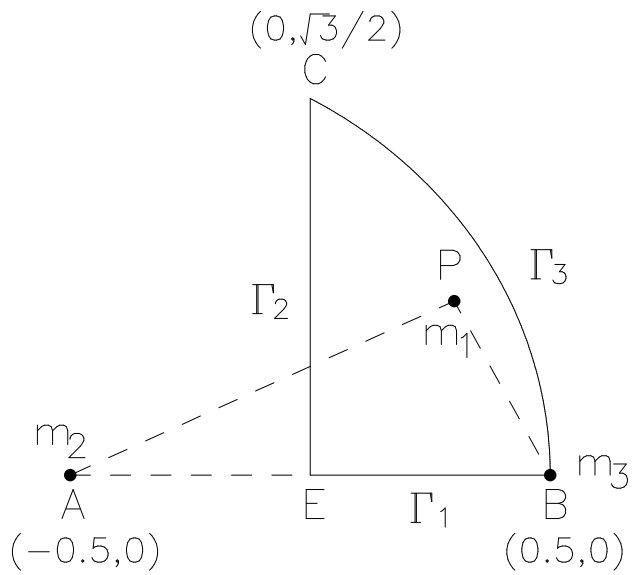

図 1: 自由落下三体問題の幾何学

は彼らの仕事をまとめている. とくに, Anosova(1991) の図 5 はカオスを示唆する点で非常に興味深い.

1.2. 衝突多様体

1974 年に, McGehee(1974) は三体衝突および三体近接衝突解を記述するのに都合のよい変数の組を導入した. 彼の変数では三体特異点を膨らませ (blow-up), 三体衝突多様体とよばれる境界多様体を相空間に付け加える. 運動方程式はなめらかにこの境界に拡張される. McGehee 変数では, 未来への三体衝突軌道は, 三体衝突多様体上の不動点の安定多様体を形成すると解釈される. 同様に, 過去に三体衝突する軌道はこの多様体上の不動点の不安定多様体を形成する.

三体衝突軌道および三体近接衝突軌道はそれ以来多くの研究者によって調べられてきた. McGehee (1974) は直線問題, Devaney (1980) は二等辺問題, Moeckel(1982) は一般平面問題, といった具合である.

McGehee 変数は 二体衝突を正則化するのにも使うことができる (Devaney 1982). この場合, 二体衝突多様体が導入される. 二体衝突軌道は, この衝突多様体上の不動点の安定および不安定多様体を形成すると解釈される. 制限三体問題のある種の極限ケースでは, 安定および不安定多様体が互いに横断的に交わることが示された (Lacomba & Llibre, 1988; Delgado-Fernandez, 1988). 横断的交差は非極限的な場合にも数値的に確認されている (Sekiguchi & Tanikawa, 1993).

二体衝突多様体上の不動点の安定および不安定多様体の複雑な絡み合いによるフラクタル

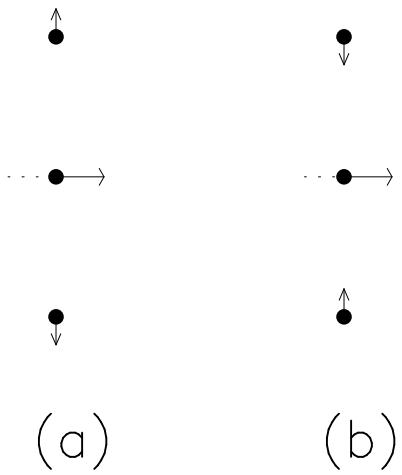

図 2: パチンコ効果

が最終運動との関係で観測できることを期待する. これは Anosova (1991) の結果から示唆される. また, 三体衝突軌道や三体近接衝突軌道は, 三体衝突多様体から遠いときにどこにあるのか. これが興味深い課題である. Broucke (1979) が二等辺問題においていくつかの三体衝突軌道をリストしたに過ぎない.

本論文の主目的は, D 内に二体および三体衝突軌道の初期値を見つけることである. 衝突軌道とエスケープの関係は別の論文 (Umehara & Tanikawa, 1995) で議論する. 予備的な結果はすでに発表した (Umehara et al., 1995).

連星形成, エスケープ, 散乱, 等に関する研究は多数あるが, これらは二体および三体衝突の存在を無視している (Valtonen, 1988). 著者は, 本論文が理論的研究と数値的研究の橋渡しをすることを望む.

1.3. パチンコ効果と衝突

パチンコ効果は三体系から粒子が 1 つ逃げ出すための効率的な機構である. この機構は最近五体問題において非衝突特異性の存在を証明するために使われた (Xia, 1992). 理想的な設定の下でのこの機構を図 2 に示した. 図において, 座標は連星の重心を固定した座標である. 図 2(a) では, 第三体が連星の重心を通るとき, 連星成分は互いに遠ざかっており, 図 2(b) では, 連星成分は互いに近づいている. 前者では第三体は加速され後者では減速される. 前者の場合, 第三体は十分なエネルギーを得て系から離脱し得る. この現象はレニングラード学派によって観察され, パチンコ効果(*slingshot*) と名づけられた (Valtonen, 1988).

パチンコ効果と二体衝突の関係について考察しよう (図 3 を見よ). 図 3(a) は二体の正面衝突と遠くの第三体を表示する. 図 3(b) と (c) では, この状況への相異なる摂動を表示する. 図 3(b) では, m_1 と m_2 が互いに遠ざかる連星をなし, m_3 はこの連星成分を結ぶ線を通る. この

とき, パチンコ効果が働いて m_3 はエネルギーを得, 無限遠へ離脱し得る. 図 3(c) では, m_1 と m_3 が互いに遠ざかる連星をなし, m_2 がこの連星成分を結ぶ線を通過する. パチンコ効果は m_2 に働く. この考察からすると, 衝突軌道は m_2 が逃げる初期条件と m_3 が逃げる初期条件を分割する.

これが本論文の基本的発想である. 三体問題の最終運動 (final motion) が衝突と強く関係すると考える. 数値的証拠は Anosova(1991) により与えられる. 彼女は初期条件空間 D において異なる粒子がエスケープする領域が隣り合っていることを見た.

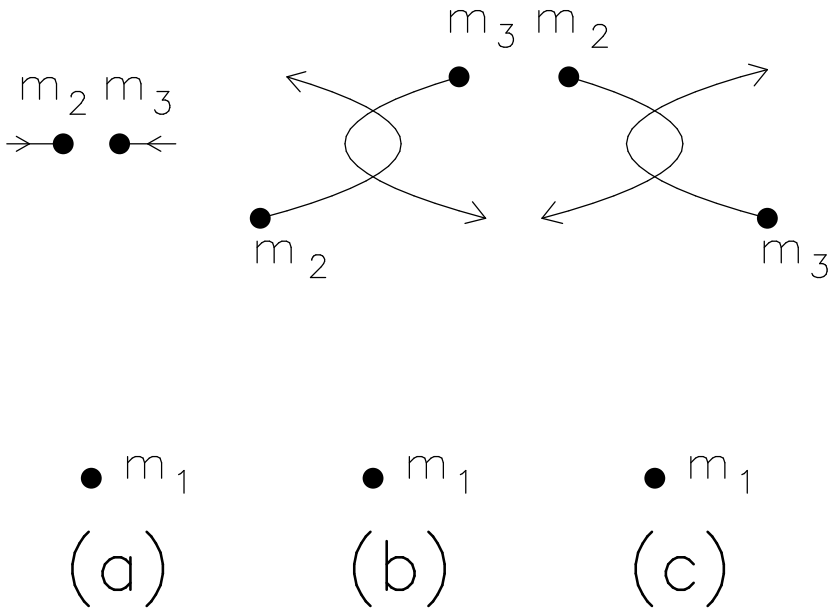

図 3: パチンコ効果

2. 二体衝突軌道を見つける手法

二体衝突や三体衝突にいたる初期配置, つまり, D 内の m_1 の位置を 二体衝突点 とか 三体衝突点 とよぶことにする. 二体衝突点の集合が曲線をなすなら, それを 二体衝突曲線, あるいは単に 衝突曲線 とよぶ.

本節では, 二体衝突点を見つける手法を記述する. そのために, まず, D 内の点を 3 粒子の相互距離のふるまいに応じて分類しよう. 二体衝突は正則化されるものとし, 軌道はこの特異性を越えて接続できるものとする. 三体衝突の場合は接続は考えない.

時刻 $t = 0$ に点 $p \in D$ を出発する軌道を追いかけよう. 質点 m_1, m_2, m_3 の間の相互距離を r_{12}, r_{23}, r_{13} とし, $r = \min\{r_{12}, r_{23}, r_{13}\}$ とおく. 時間の関数として $r = r(t)$ は連続である. 3 質点の初期速度はゼロであるから 3 質点の作る三角形ははじめに収縮する. よって $r(t)$ は減少する. この $r(t)$ は極小を経験するはずである. 時間の経過につれて $r(t)$ は振動し, 極大になったり極小になったりする.

小さい数 $R > 0$ と整数 $n = n_{min} > 0$ を固定する. 各 R と n に対して初期点 p のタイプ τ_p を導入しよう. $r(t)$ が n 番目の極小を経験する前に軌道が三体衝突を経験するとき, p はタイプ–6 であるとし, $\tau_p = 6$ と書く. $r(t)$ が n 個の極小と $(n-1)$ 個の極大を経験し, $t = t_k$ に k

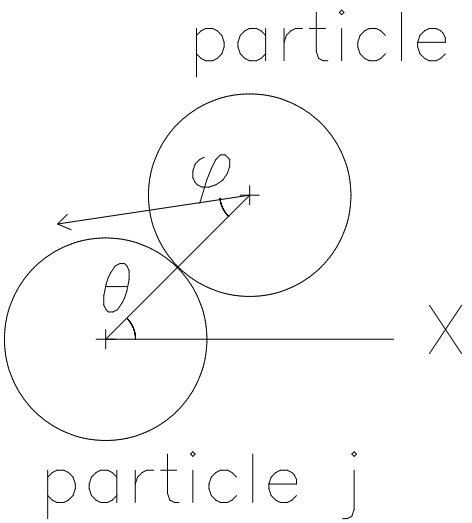

図 4: 有限物体の衝突の幾何学

番目の極小, $t = t'_l (1 \le k \le n, 1 \le l \le n-1)$ に l 番目の極大を経験したとする. $t = t_n$ に $r(t)$ が R より大きければ, p はタイプ–0 であるとし, $\tau_p = 0$ と書く. $t_{n-1} \le t \le t_n$ のとき $r(t)$ が R より小さければ, p はタイプ–5 であるとし, $\tau_p = 5$ と書く. 一方, $t = t_n^*,\ t'_{n-1} \le t_n^* \le t_n$ があって $r(t) = R$ を満たすなら, $t = t_n^*$ において $r(t) = r_{ij}$ なる $i, j (1 \le i < j \le 3)$ がある. 他の相互距離の中にも $r(t)$ に等しいものがあれば, p はタイプ–4 であるとし, $\tau_p = 4$ と書く. この場合, 3 粒子の作る三角形は二等辺三角形は正三角形である.

他の相互距離が r より厳密に大きい場合を考えよう. $r = r_{12}$ なら, p はタイプ–3 であるとし, $\tau_p = 3$ と書く. 同様に, $r = r_{23}$ または $r = r_{13}$ のときは p はタイプ–1 またはタイプ–2 とよび, $\tau_p = 1$ または $\tau_p = 2$ と書く. p に, $t = t_n^*$ に定義された 2 つの角度 θ と φ を付随させる (図 4 を見よ)

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan((y_i - y_j)/(x_i - x_j)), \\ \varphi &= \arctan((\dot{y}_i - \dot{y}_j)/(\dot{x}_i - \dot{x}_j)) + \theta - 2\pi. \end{aligned} \tag{2}$$

ここで, θ は m_j から見た m_i の方位角であり, φ は 2 粒子 m_i と m_j を結ぶ方向を基準にした粒子 m_i の運動方向である. どちらの角度も反時計まわりに測る. m_i と m_j が衝突するとき $(i < j)$, 相対座標の原点はいつも m_j に取る.

こうして, D 内の各点 p および各 $n_{min} = 1, 2, \ldots$ と $R > 0$ に対して, タイプ τ_p を付随させ, またタイプ–1, –2, および–3 には 2 つの角度 (θ, φ) を付随させた. 各 $R > 0$ および $n_{min} > 0$ に対して,

$$S_i = \{p \in D : \tau_p = i\}, \quad i = 0, 1, \ldots, 6, \tag{3}$$

と定義する. 初期条件空間 D は 7 つのタイプに対応する 7 つの異なる集合 $S_i, i = 0, 1, \ldots, 6$ に分割される. $S_i, i = 1, 2, 3$ の各点には (θ, φ) がラベルされている. 上記の定義は表 I にまとめた.

R を小さくしたときに上記分類がどのように変化するかを考察しよう. 明かに集合 $S_i, i = 1, 2, \ldots, 5$ は減少する. 対応して, S_0 が占める面積は増大する. S_5 の点は他のタイプに変化する. $R \to 0$ の極限を考えよう. r の n 番目の極小はゼロ, つまり近接衝突は二体あるいは三体

衝突になってしまう. S_5 は消滅する. S_6 は前回の近接衝突での三体衝突点である. だからこれらの点の数は減少する. S_4 は n 番目の極小における正三角形あるいは直線三体衝突に対応する. 集合 S_1, S_2, S_3, S_4, および S_6 は余次元 1 以上であるから, D の点のほとんどは S_0 の点となる.

上の構成より, 二体衝突点は R が有限の場合の S_1, S_2, および S_3 に, そして可能性としては S_4 や S_5 にも含まれることがわかる. 集合 S_4 は任意の $R > 0$ に対して非常に小さいと考えられる. 有限な R に対して集合 $S_i (i = 1, 2, 3)$ を考えよう. S_i の少なくともどれかは内点を持つはずである. なぜならそうでないと D の点は, 有限な R に対してもほとんどすべて S_0 の点となるが, これはばかげている. 面白いことに, これらの集合が内点を持つかどうかは対応する衝突点があるかないかに関係する. 事実, たとえば S_1 を考えてみる. ある軌道が存在し, まず r の $(n-1)$ 番目の極大が R より大きく, 次に r の n 番目の極小が R より小さく, 最後に極小において $r = r_{23}$ であるとすると, 運動方程式の連続性により, p の近くから出発した軌道もこの 3 つの条件を満足する. つまり, S_1 は内点を持つ. n 番目の極小において m_2 と m_3 で衝突が起こるなら, 二番目と三番目の条件が満たされる. 第一の条件は R を十分小さくとれば満たされる.

もっと詳しく $S_i, i = 1, 2, 3$ について考察しよう. これらの集合の各点は対応する (θ, φ) を持つ. 定義より, $t = t_n^*$ において $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ が成り立つ. 衝突粒子の運動は二体衝突において, 二粒子の重心から見ればほとんど直線的である. だから, R を十分小さくとれば, 二体衝突点は θ の値のいかんに拘らず, $\varphi \simeq 0$ で特徴づけられる. このことから次のような数値手法が示唆される.

$n = n_{min}$ と R を固定する. 領域 D をサイズ $(\Delta x, \Delta y)$ の網目に分割する. この網目の格子点を出発する軌道積分を行なう. $(n-1)$ 番目の極大が R 以上である場合に, $n-1$ 番目の極小の次に R が R 未満になったら積分を止める. 積分時間刻みを十分小さく取れば, この瞬間に, $S_i, i = 1, 2, 3$ の点に対して $\varepsilon > 0$ を小さくとって, $0 < R - r < \varepsilon R$ となるようにできる. この瞬間の θ と φ を計算する. この計算を格子点すべてに対して遂行する. S_3 の点は φ が負か正かに応じて $\triangle$ と $\cdot$ で表す. S_1 の点は φ が負か正かに応じて $+$ と $\bullet$ で表す. S_2 の点は φ が負か正かに応じて $\times$ と $\circ$ で表す. S_0 と S_5 の点は無印にする. S_4 は典型的には Γ_2 と Γ_3 で実現される. Γ_2 と Γ_3 の外で S_4 の点を得るのはむずかしい. S_6 は $n_{min} = 1$ から逐次得られる. $n_{min} = 1$ に対してなんらかの方法で三体衝突点を求めると, これらは $n_{min} = 2$ に対しては S_6 を構成する. 以下同様. 次節では, 三体衝突点の求め方を記述する.

表 I. 最小の相互距離 r の n 回目の極小時の条件に応じた軌道の分類

<table>
<tr><td>n 回目の r の極小の前に三体衝突</td><td colspan="5">The n-th minimum of r exists</td></tr>
<tr><td rowspan="4">type 6
S_6</td><td colspan="4">$r \leq R$</td><td>$r > R$</td></tr>
<tr><td>$t_{n-1} \leq t \leq t_n$
のときに $r < R$</td><td colspan="3">otherwise</td><td rowspan="3">type 0
S_0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">type 5
S_5</td><td>二等辺 or
正三角形</td><td>1 と 2 が
衝突</td><td>1 と 3 が
衝突</td><td>2 と 3 が
衝突</td></tr>
<tr><td>type 4
S_4</td><td>type 3
S_3</td><td>type 2
S_2</td><td>type 1
S_1</td></tr>
</table>

さて, 各 n_{min} および $R > 0$ に対して, D の点には記号が割り振られ, 記号が無印でない限

り 2 つの角度が与えられる. $\varphi = 0$ は二体衝突に対応すると考える. だから衝突点は 2 つの異なる記号の境界として見つけることができる. $\triangle$ と $\cdot$ の間, $+$ と $\bullet$ の間, そして $\times$ と $\circ$ の間, である.

いくつか注意が必要である. S_5 内の衝突点を見逃す可能性がある. これを避けるため, R を変えて, 同じことをすべてやり直すべきである. われわれの手続きは, 第三体が比較的遠い場合に有効である. わが手法の適用範囲は数値的にチェックすべきであろう. 最後に, D は細かい構造を持っているかもしれない. この場合, 網目をもっと細かくする必要があるだろう.

積分プログラムは 4 次の Runge-Kutta 法に, 二体接近のときの Levi-Civita 正則化法を加えたものである. 数値精度は有名なピタゴラス問題を積分することによって吟味した (Szebehely & Peters, 1967). 三体系が分裂するまで積分はしなかった. $G = 1, M = 1, \overline{AB} = 1$ なる単位を取ると, 積分時間は典型的には 10 である. これはピタゴラス問題のエスケープ時間 60 より短い.

3. 手法の数値的吟味

まず, $n_{min} = 1$ として手法を吟味する. 序で指摘したとおり, 領域 D の 3 つの境界 $\Gamma_i, i = 1, 2, 3$ は対称性を持つ三体問題に対応する. Γ_1 と Γ_3 は少なくとも $n_{min} = 1$ の場合はタイプ–2 の二体衝突曲線である. なぜなら, m_1 と m_3 が近接ペアであり, これらの相互距離の最初の極小で衝突が起こるからである. Γ_2 の場合, 事情はやや込み入っている. m_2 と m_3 が衝突することには何の問題もない. ただ, m_1 は, m_2 と m_3 が衝突する前にその重心を通過する. この瞬間に m_1 と m_2 の相互距離, あるいは同じことだが, m_1 と m_3 の相互距離は極小を経験するのであろうか. Γ_2 の点はタイプ–1 またはタイプ–4 の可能性がある. 最初の目標はわが数値手法を用いてこれら境界を求めることである.

初期値空間をサイズ $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-2}, 10^{-2})$ の網目に分割し, 格子点から出発する軌道を積分する. 結果を図 5 に示した. 理解を助けるため, D を含む初期 (x, y) 面を図示した. 図 5(a), 5(b), 5(c), および 5(d) はそれぞれ $R = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$, および 10^{-4} の場合に対応する. 図 5(a) では, $R = 10^{-1}$ で上記の網目サイズではすべての点が S_1, S_2, または S_3 に属することを示す. とくに, D の点はすべて $\circ$ 印となっている. つまり, m_1 と m_3 の近接衝突が生じる. これは期待どおりである. 他の領域の場合も期待どおりである. Γ_1 も Γ_3 も $\circ$ と $\times$ に挟まれている. この結果は Γ_1 と Γ_3 がタイプ–2 の衝突曲線である事実と調和する. この 2 つの境界に関してはわが手法はうまく働いた. 一方, Γ_2 は Δ と $\circ$ に挟まれている. このことから, Γ_2 が衝突曲線であるとは言えない.

図 5(b) には無印領域が現われる. これは S_0 に対応する領域である. なぜなら, S_5 は $n_{min} = 1$ のときは存在しないからである. 無印領域では, 二体近接衝突が 10^{-2} 以内にならない. 図 5(c) および 5(d) において, この傾向が増大する. この現象は Anosova et al(1989) によっても観察された. これで, Γ_1 および Γ_3 に対して, このパラメータでわが手法が有効であることがわかった.

けれども Γ_2 についてはどうなんだ? Γ_2 では二体近接衝突が 10^{-2} にまで近づかないのか? もう少し詳しく調べる必要がある. $\Delta x = 2 \times 10^{-5}$, $\Delta y = 10^{-2}$ および $R = 10^{-4}$ と取る. 結果を図 5(e) に示した. x 方向に大きく拡大していることに注意しよう. Γ_2 のまわりの構造は細かく複雑に見える. 上で指摘したように, Γ_2 の点はタイプ–1 またはタイプ–2 の可能性がある. タイプ–1 の場合, 点は $+$ と $\bullet$ に挟まれ, タイプ–4 の場合, $\times$ と $\cdot$ または $\circ$ と Δ に挟まれる. Γ_2 の上部はタイプ–1 であることがわかる. つまり, 最小距離は r_{23} が達成する. このことは, Γ_2 の上部を出発するいくつかの軌道で, 時間の関数として 3 つの相互距離を描いて確認した. ただし, この極小値はゼロである. したがって r_{12} と r_{13} は, m_2 と m_3 の重心を m_1 が通

過する間に極小にならない. Γ_2 のこの部分はタイプ–1 の衝突曲線である. Γ_2 の下部では, こうはならない. たとえば, x が負のときに Δ で, x が正のときに $\circ$ であると, x が負のときに m_1 と m_2 の近接衝突が起こり, x が正のときに m_1 と m_3 の近接衝突が起こる. つまり, Γ_2 上の r_{12} と r_{13} を等辺とする二等辺三角形は, m_2 と m_3 の間を m_1 が通過するときにゼロでない距離の極小を達成するのである. だから, Γ_2 のこの部分の点はタイプ–4 であろう. 予備的な解析によると, Γ_2 の上部と下部の間に三体衝突点が存在する. Γ_2 の上および近傍における D の構造の詳しい解析は将来の問題として残しておく.

表 II(a). Positions of the binary collision points of type 1 for $n_{min} = 2$.

x	y	θ	time	v/h	φ	$\Delta x/\Delta y$
0.4200000	0.4369369	2.8583	0.6547	v	$+-$	10^{-7}
0.4100000	0.4318979	2.8517	0.6497	v	$+-$	10^{-7}
0.4050000	0.4291917	2.8456	0.6470	v	$+-$	10^{-7}
0.4030000	0.4280645	2.8460	0.6458	v	$-+$	10^{-9*}
0.4000000	0.4263124	2.8599	0.6439	v	$-+$	10^{-7}
0.3800000	0.4133726	2.9046	0.6314	v	$-+$	10^{-7}
0.3600000	0.3983746	2.9344	0.6182	v	$-+$	10^{-7}
0.3386657	0.3800000	2.9609	0.6034	h	$+-$	10^{-7}
0.3183789	0.3600000	2.9831	0.5886	h	$+-$	10^{-7}
0.3004792	0.3400000	3.0013	0.5749	h	$+-$	10^{-7}
0.2845334	0.3200000	3.0170	0.5622	h	$+-$	10^{-7}
0.2702483	0.3000000	3.0306	0.5505	h	$+-$	10^{-7}
0.2574134	0.2800000	3.0425	0.5395	h	$+-$	10^{-7}
0.2458712	0.2600000	3.0537	0.5293	h	$+-$	10^{-7}
0.2355006	0.2400000	3.0632	0.5198	h	$+-$	10^{-7}
0.2262059	0.2200000	3.0729	0.5111	h	$+-$	10^{-8}
0.2179108	0.2000000	3.0805	0.5030	h	$+-$	10^{-8}
0.2105530	0.1800000	3.0885	0.4957	h	$+-$	10^{-8}
0.2040820	0.1600000	3.0970	0.4891	h	$+-$	10^{-8}
0.1984563	0.1400000	3.1021	0.4833	h	$+-$	10^{-10}
0.1969779	0.1342000	3.1040	0.4817	h	$+-$	10^{-11}
0.1969281	0.1340000	3.1049	0.4816	h	$-+$	10^{-11}
0.1969281	0.1200000	3.1049	0.4816	h	$-+$	10^{-10}
0.1896108	0.1000000	3.1140	0.4737	h	$-+$	10^{-11}
0.1863410	0.0800000	3.1169	0.4701	h	$-+$	$10^{-11\ *}$
0.1838152	0.0600000	3.1252	0.4673	h	$-+$	$10^{-10\ *}$
0.1820201	0.0400000	3.1296	0.4653	h	$+-$	$10^{-12\ **}$

$n_{min} = 1$ 野場合の吟味の結果をまとめよう.

(i) $\Gamma_i, i = 1, 3$ はタイプ–2 の衝突曲線として現われる. Γ_2 の一部はタイプ–1 の衝突曲線である.

(ii) 網目の細かさは重要である. 目が粗すぎると, 二体衝突点を見逃す可能性がある

次に $n_{min} = 2$ の場合にわが手法を吟味しよう. 数値結果を図 6 に示した. 図 6(a), 6(b), および 6(c) は $R = 10^{-1}, 10^{-2}$, および 10^{-3} に対応する. 網目のサイズは $\Delta x = \Delta y = 10^{-2}$ である. 図 6(d) は図 6(c) 内のの四角領域を, $\Delta x = \Delta y = 10^{-3}$ で拡大した図であり, 図 6(e) は図 6(d) 内の四角領域を $\Delta x = \Delta y = 6 \times 10^{-5}$ で拡大した図である.

ここでも, 無印領域は第二の極小が R より大きかったことを示す. Γ_3 の下部はタイプ–2 の衝突曲線のはずである. なぜなら m_2 は連星 m_1 と m_3 から遠く, 連星は m_2 が近づく前に二体衝突を繰り返すからである. この議論は点 B に近いほどあてはまる.

図 6(a) から図 6(c) までを見ると, Γ_3 の中央付近から出発して左下に向かって伸び, Γ_1 にまで達する曲線に沿って二体衝突点がある. 図 6(d) と 6(e) はこの示唆を強く支持する. 2 本の二体衝突曲線が図 6(d) を斜めに横切っているように見える. ひとつはタイプ–3 であり, もうひとつはタイプ–1 である. 図 6(a) が示唆するところによると, これらの曲線は下は x 軸にまで, 上は領域 D の円境界にまで達している. これを確認するために, 期待される曲線を横切って一連の軌道積分を行なった. やり方は簡単である. ひとつの二体衝突点を得るために, x または y を固定して, y または x 方向に初期値を移動して積分する. たとえば x 軸方向に $\Delta x = 10^{-3}$ 刻みで初期値を移動させたとする. φ の符号がどこかで変化したとして, $|\varphi|$ の最小値がたとえば 10^{-2} 度より大きければ, $|\varphi|$ が最小値と取った初期点を含む小さな区間を取って, そこを細かい網目 $\Delta x = 10^{-4}$ に分割する. この過程を $|\varphi|$ がどこかの初期で 10^{-2} 度以下になるまで繰り返す. 結果は表 II に示した.

表 II(b). Positions of the binary collision points of type 3 for $n_{min} = 2$.

x	y	θ	time	v/h	φ	$\Delta x/\Delta y$
0.4200000	0.4340855	0.6947	0.6537	v	$+-$	10^{-7}
0.4100000	0.4307602	0.7166	0.6491	v	$+-$	10^{-8}
0.4050000	0.4289388	0.7337	0.6468	v	$+-$	10^{-7}
0.4030000	0.4281709	0.7412	0.6459	v	$-+$	10^{-8}
0.4000000	0.4269686	0.7359	0.6443	v	$-+$	10^{-7}
0.3800000	0.4178744	0.7232	0.6328	v	$-+$	10^{-7}
0.3600000	0.4069613	0.7128	0.6199	v	$-+$	10^{-7}
0.3341236	0.3900000	0.6963	0.6014	h	$+-$	10^{-6}
0.3209127	0.3800000	0.6859	0.5912	h	$+-$	10^{-6}
0.2977338	0.3600000	0.6633	0.5723	h	$+-$	10^{-6}
0.2778482	0.3400000	0.6386	0.5548	h	$+-$	10^{-6}
0.2604930	0.3200000	0.6120	0.5387	h	$+-$	10^{-6}
0.2451897	0.3000000	0.5835	0.5237	h	$+-$	10^{-6}
0.2316135	0.2800000	0.5533	0.5097	h	$+-$	10^{-6}
0.2195321	0.2600000	0.5215	0.4968	h	$+-$	10^{-6}
0.2087723	0.2400000	0.4882	0.4849	h	$+-$	10^{-6}
0.1992013	0.2200000	0.4533	0.4740	h	$+-$	10^{-6}
0.1907150	0.2000000	0.4171	0.4640	h	$+-$	10^{-6}
0.1832301	0.1800000	0.3795	0.4549	h	$+-$	10^{-6}
0.1766795	0.1600000	0.3407	0.4468	h	$+-$	10^{-6}
0.1710086	0.1400000	0.3008	0.4396	h	$+-$	10^{-6}
0.1661732	0.1200000	0.2599	0.4334	h	$+-$	10^{-6}
0.1621372	0.1000000	0.2181	0.4281	h	$+-$	10^{-5}
0.1588718	0.0800000	0.1754	0.4237	h	$+-$	10^{-5}
0.1563544	0.0600000	0.2181	0.4203	h	$+-$	10^{-5}
0.1545680	0.0400000	0.1321	0.4179	h	$+-$	10^{-5}
0.1535008	0.0200000	0.0833	0.4165	h	$+-$	10^{-5}
0.1532346	0.0100000	0.0221	0.4161	h	$+-$	10^{-5}
0.1531680	0.0050000	0.0111	0.4160	h	$+-$	10^{-3}
0.1531459	0.0001000	0.0002	0.4160	h	$+-$	10^{-3}

表 II(a) と (b) において, 第一欄と二欄は二体衝突点の (x, y) 座標を示し, 第三欄は 2 節で定義した方位角 θ を表す. 第四欄は近接衝突を起こす時刻である. この瞬間に φ は典型的に 10^{-2} 度より小さい. 第五欄と六欄は初期値面での移動方向を示す. 'h' は水平方向で左から右, 'v' は垂直方向で下から上である. 'h' かつ $+-$ なら, 初期値面での動きは左から右で, φ の符号が二体衝突点において正から負に変ったことを意味する. 同様に. 'v' かつ $+-$ なら, 初期値面での動きは垂直下から上であり, φ の符号は二体衝突点において正から負に変ったことを意味する最後に, 最終欄は 1 次元サーベイの場合に, $|\varphi|$ が 10^{-2} 度未満になったときの網目の格子サイズを示す. 数字の肩の星印は R の値が異なることを示す. 普通は $R = 10^{-3}$ を採用した. 星印 1 つと 2 つはそれぞれ $R = 10^{-4}$ と $R = 10^{-5}$ に対応する.

第一の重要な観察として, 円境界曲線 Γ_3 の上でタイプ–1 とタイプ 3 の二体衝突曲線が交わることである. これは, 異なるタイプの 3 本の衝突曲線が 1 点で交わることを意味する. というのは, この交点のまわりの Γ_3 の点は $n_{min} = 2$ の場合のタイプ–2 の衝突点だからである. 同時にタイプ–1, –2, および–3 の二体衝突点は m_1, m_2, および m_3 の衝突に自然に対応する点であり, 三体衝突点である. これを確かめるために, Γ_2 に沿って, 交点の上と下の点の軌道積分を行なう. 軌道を図 7 に示した. 図 7(a) は交点の上, $(x, y) = (0.4008347, 0.4341623)$ から出発する軌道を描き, 図 7(b) は交点の下, $(x, y) = (0.4063779, 0.4226183)$ から出発する軌道を描いている. 確実に言えることは, この 2 つの初期条件の間に三体衝突があることである. 事実, 図 7(a) の場合, m_2 は m_1 と m_3 の二体衝突の場所に早く到着しすぎであり, 連星が衝突する前に連星間を通り抜ける. 一方, 図 7(b) では, 二体衝突の場所に到着するのが遅すぎて, 連星が衝突した後に連星間を通過する. Γ_3 に沿っての問題の連続性と単調性より, 上の 2 つの初期条件の間にただひとつ, 連星が衝突するそのときに m_3 が到着する初期条件があるはずである.

第二の重要な観察は, 水平方向あるいは垂直方向に沿っての φ のふるまいが三体衝突のところで変化することである. これは表 II に見える. 表 II(a) において, φ の符号のふるまいは $x = 0.405$ と $x = 0.403$ の間で変化する. 三体衝突点は Γ_3 上 $(x, y) = (0.4035..., 0.4284...)$ にある. 二体衝突点が三体衝突点の右にあるなら, 二体衝突点の下および上にある点に対して, φ の符号は $+$ および $-$ であり, 二体衝突点が三体衝突点の左にあるなら, 二体衝突点の下および上にある点に対して, φ の符号は $-$ および $+$ である. これは表 II(b) でも確かめられる. この観察は新しい三体衝突点を得るのに使える. 実際, 表 II(a) にも見られるように, $y = 0.1340...$ と $y = 0.1342...$ の間に三体衝突点が存在する証拠がある. この点は次の論文で議論する. とくに D 内部での三体衝突点について議論する.

三番目の観察は, 衝突軌道の安定性に関係する. 表 II(a) と (b) の最終欄に記載した最小網目格子サイズは x または y 方向に初期条件をずらしたときの衝突軌道の安定性を反映する. 実際, 二体衝突点の厳密な場所を知っているとし, そこからある方向にずれた場所の軌道を積分するとしよう. 衝突軌道が不安定であるとすると, 近傍の軌道は衝突軌道から離れていく. 配位空間における相互距離は最大リャプノフ指数 λ の指数関数で増大する. すると, 2 つの有限天体の間の近接衝突が起こるための最大ずれの値は $\exp \lambda$ の逆数に比例する, つまり衝突軌道の安定性に逆比例する. 同様の議論は運動方向についてもあてはまる. もっと精密な議論が必要であるが, 二体衝突点は, 表 II の最終欄の値が小さければ小さいほど不安定であるといえる.

このとき, 衝突曲線の性質についていくつかのことがいえる. まず, タイプ–1 とタイプ–3 の衝突曲線の安定性は異なる. 前者は x 軸に近づくと極めて不安定になる. 一方, 後者はそこでは安定である. 第二に, どちらの曲線も Γ_3 上の三体衝突点に近づくと不安定になる. 第三に, 曲線を三体衝突点を越えて追いかけると, 相対的安定性が逆転する. つまり, D 内ではタイプ–3 の衝突曲線はタイプ–1 の衝突曲線より安定であったが, 外では逆転する.

4. 二体衝突曲線と三体衝突

前節では, わが数値手法を吟味し, $n_{min} = 1$ および 2 のときそれが有効であることを見た. ここで n_{min} は最小相互距離の極小の数であった. 本節では, n_{min} を大きくして衝突点の探索を続ける. 三体系における最初の収縮における二体衝突に注意を集中する. 衝突曲線の分布則を見つけたい.

図 8 は探索の結果である. 図において, 実線はタイプ–1 の衝突曲線, 点線はタイプ–2 の衝突曲線, 破線はタイプ–3 の曲線である. 境界曲線 $\Gamma_i, i = 2, 3$ 上の点は n_{min} の値に応じて衝突点であったり, 非衝突点であったりする. 境界曲線 Γ_1 上の点はつねに衝突点であるが, タイプ–2 であったり, タイプ–3 であったりする. だから, これらの曲線は実線で描いておいた. n_{min} が小さいときの曲線上の数点の位置を表 III に記載した. 読者はこの表の値を使ってわれわれの数値積分をチェックできる.

まず, n_{min} を増加させるにつれて, 3 つの衝突曲線列が $\mathrm{B}(0.5, 0)$ に収束するのが見える. 各列は各タイプの衝突曲線である. 軌道の形の大まかな印象を得るため, また列の意味を理解するため, 衝突曲線の各列から 4 点を選んで数値積分し, その軌道の形を図 9, 10, および 11 に示す. これらの軌道の初期値は, $B(0.5, 0)$ と $C(0, \sqrt{3}/2)$ をとおる直線とこれらの曲線の交点に取った. 図 9 は $n_{min} = 2, 3, 4, 5$ に対するタイプ–3 の曲線列から取った軌道である. 図 10 は $n_{min} = 2, 3, 4, 5$ に対するタイプ–1 の曲線列から取った軌道である. 最後に, 図 11 は $n_{min} = 2, 3, 4, 5$ に対するタイプ–2 の曲線列から取った軌道である. 図 9 の場合, 軌道中の r の極小の数は容易に数えることができる. 粒子 m_2 は連星 m_1 と m_3 に遠くから近づき, 連星成分が $n_{min} - 1$ 回近接衝突したあとに m_1 と衝突する. 図 10 の場合, 連星 m_2 と m_3 が衝突する前に, これらの重心を m_1 が通過する. しかし, r_{12} または r_{13} は極小距離にならない. だから図 10(a) において, n_{min} は 2 に等しい. 図一方, 11 の場合, m_1 と m_3 が衝突する前に r_{12} は最小相互距離として極小を経験する. だから図 11(a) において, n_{min} は 3 に等しい. これらの列はすべて系の最初の収縮に関係することを指摘しておく.

表 III(a). Positions of several binary collision points of type 1 for different n_{min}.

n_{min}	x	y	θ	time	v/h	φ
3	0.4500000	0.3020860	2.7956	0.6437	v	$-+$
3	0.4000000	0.2768580	2.9095	0.6145	v	$-+$
3	0.3500000	0.2367548	2.9795	0.5819	v	$-+$
3	0.3182720	0.2000000	3.0197	0.5593	h	$+-$
3	0.2879061	0.1500000	3.0597	0.5359	h	$+-$
3	0.2713757	0.1100000	3.0851	0.5224	h	$+-$
4	0.4700000	0.2413480	2.7484	0.6444	v	$-+$
4	0.4500000	0.2346858	2.8296	0.6336	v	$-+$
4	0.4000000	0.2076712	2.9303	0.6043	v	$-+$
4	0.3423215	0.1500000	3.0212	0 5663	h	$+-$
4	0.3189724	0.1000000	3.0608	0.5494	h	$+-$
5	0.4750000	0.2028287	2.7578	0.6420	v	$-+$
5	0.4500000	0.1946147	2.8446	0.6285	v	$-+$
5	0.3832896	0.1500000	2.9793	0.5887	h	$+-$
5	0.3465919	0.1000000	3.0493	0.5640	h	$+-$
6	0.4700000	0.1746141	2.7944	0.6364	v	$-+$
6	0.4000000	0.1347965	2.9674	0.5962	v	$-+$
6	0.3708624	0.1000000	3.0286	0.5774	h	$+-$
6	0.3596987	0.0800000	3.0557	0.5699	h	$+-$

各列内の軌道の意味はいまや明らかである. たとえば, 図 9(a), (b), (c) および (d) において, 連星 m_1 と m_3 が第二, 第三, 第四, 第五の近接衝突を行なったときにこの重心に近づく. 図 10 の軌道にパチンコ効果が働いていることに注意する. われわれの予備的な結果によると (umehara et al., 1995), これらの衝突曲線は Anosova(1991) の領域 D_n 内に含まれ, これらの曲線のまわりでは m_1 がエスケープする.

図 8 に見えるとおり, タイプ–2 (1 点鎖線) およびタイプ–3 (破線) の衝突曲線は x 軸に達する. 一方タイプ–1(実線) の衝突曲線は x 軸に達しない. $\Gamma_1(x$ 軸) はつねに衝突曲線である. 一部はタイプ–2 でり, 他の一部はタイプ–3 である. したがって, 1 点鎖線や破線が x 軸を横切るところでは 2 つの衝突曲線が交わる. 数値的に確認したところによると, これらは三体衝突点ではない. これらの点では同じタイプの衝突曲線のみが交わる. この事情を理解するため, $n_{min} = 3$ として, タイプ–2 の衝突曲線に沿う点から出発する 4 つの軌道を積分し, その結果を図 12 に示す. 面白いことに, y 座標を適当に規格化すると, この曲線上の軌道の形は, y をゼロに向けたとき, ある特定の形に収束するように見える.

表 III(b). Positions of several binary collision points of type 3 for different n_{min}.

n	x	y	θ	time	v/h	φ
3	0.4500000	0.3023168	0.6671	0.6439	v	$-+$
3	0.4000000	0.2812764	0.6239	0.6141	v	$-+$
3	0.3500000	0.2461233	0.5599	0.5784	v	$-+$
3	0.3073905	0.2000000	0.4671	0.5436	h	$+-$
3	0.2767155	0.1500000	0.3582	0.5160	h	$+-$
3	0.2568950	0.1000000	0.2426	0.4968	h	$+-$
3	0.2456624	0.0500000	0.1225	0.4855	h	$+-$
3	0.2421603	0.0100000	0.0246	0.4819	h	$+-$
4	0.4500000	0.2356965	0.6142	0.6338	v	$-+$
4	0.4000000	0.2113482	0.5556	0.6025	v	$-+$
4	0.3361021	0.1500000	0.4029	0.5551	h	$+-$
4	0.3082707	0.1000000	0.2718	0.5318	h	$+-$
4	0.2931699	0.0500000	0.1369	0.5184	h	$+-$
4	0.2885410	0.0100000	0.0271	0.5142	h	$+-$
5	0.4500000	0.1956425	0.5821	0.6284	v	$-+$
5	0.4000000	0.1680804	0.5017	0.5967	v	$-+$
5	0.3425173	0.1000000	0.3012	0.5541	h	$+-$
5	0.3237457	0.0500000	0.1513	0.5388	h	$+-$
5	0.3181079	0.0100000	0.0303	0.5340	h	$+-$
6	0.4800000	0.1772825	0.5966	0.6417	v	$-+$
6	0.4500000	0.1683652	0.5578	0.6252	v	$-+$
6	0.4000000	0.1373689	0.4538	0.5932	v	$-+$
6	0.3679738	0.1000000	0.3303	0.5702	h	$+-$
6	0.3455532	0.0500000	0.1652	0.5530	h	$+-$
6	0.3389791	0.0100000	0.0331	0.5477	h	$+-$

タイプ–2 の衝突曲線は Γ_3 を横切る. ここでも交点は三体衝突点ではない. タイプ–1 の衝突曲線を x 軸に至るまで追いかけていくと事情はたいへん複雑である. わが探索によれば, これらの曲線も x 軸に到達しているようだ. だが, 初期条件が x 軸に近づくにつれて, 衝突点を得るための精度をどんどん高くする必要がある. これは 3 節において $n_{min} = 1$ で経験したことである. これは x 軸の近くで, これらの軌道がきわめて不安定であることを示す. これは「分岐」に関係するように見える. x 軸にまで下りていくと, これらの曲線に沿ってどんどん頻繁

に三体衝突点が現われ, しかもこの三体衝突点でタイプ–2 と–3 の曲線が, ちょうど分岐で生まれるように「生まれる」. これらの現象は以後に続く論文で詳しく調べる.

タイプ–1 と–3 の衝突曲線は各 $n_{min} \geq 3$ の場合も Γ_3 で出会う. これは果てしなく続く. 事実, $n_{min} = 1$ の三体衝突の場合と同様, $n_{min} =, 3, 4, \ldots$ を与えたとき, m_1 と m_3 の連星が n_{min} 回目の二体衝突を行なう瞬間に粒子 m_2 が到着するような初期条件はあるはずである. だから, Γ_3 上に三体衝突点の無限列がある. これらの点を補間によって求めた. すなわち, タイプ–1 およびタイプ–3 の二体衝突点を D の内外で求め, タイプ–1 とタイプ–3 の衝突曲線が Γ_3 と交わるはずの場所を補間法で求める. 結果は表 IV に記載した. 表において, 第一欄は n_{min}, 第二および三欄は三体衝突点の (x, y) 座標, そして第五欄は出発二等辺三角形の頂角 α をラジアンで表した値である.

表 III(c). Positions of several binary collision points of type 2 for different n_{min}.

n	x	y	θ	time	v/h	φ
3	0.3000000	0.5570104	1.9482	0.7524	v	$-+$
3	0.1500000	0.4030308	2.4879	0.6170	v	$-+$
3	0.0995804	0.3000000	2.7052	0.5450	h	$+-$
3	0.0707400	0.2000000	2.8761	0.4914	h	$+-$
3	0.0553515	0.1000000	3.0183	0.4570	h	$+-$
3	0.0505631	0.0100000	3.1296	0.4452	h	$+-$
4	0.4400000	0.3273010	1.7771	0.6779	v	$-+$
4	0.4000000	0.3120474	2.0932	0.6578	v	$-+$
4	0.2699049	0.2000000	2.7481	0.5722	h	$+-$
4	0.2255331	0.1000000	2.9789	0.5311	h	$+-$
4	0.2124411	0.0100000	3.1264	0.5174	h	$+-$
5	0.4600000	0.2503266	1.7949	0.6599	v	$-+$
5	0.4000000	0.2266665	2.3260	0.6304	v	$-+$
5	0.3183322	0.1500000	2.7794	0.5780	h	$+-$
5	0.2923304	0.1000000	2.9294	0.5577	h	$+-$
5	0.2781273	0.0500000	3.0433	0.5457	h	$+-$
5	0.2737633	0.0100000	3.1224	0.5419	h	$+-$
6	0.4700000	0.2081834	1.7991	0.6532	v	$-+$
6	0.3674499	0.1500000	2.6652	0.5982	h	$-+$
6	0.3324987	0.1000000	2.8797	0.5742	h	$+-$
6	0.3144911	0.0500000	3.0237	0.5606	h	$+-$
6	0.3090672	0.0100000	3.1188	0.5563	h	$+-$

図 13 は $(x, y) = (0, \sqrt{3}/2)$ に位置する自明な三体衝突点を除いて α と n_{min} の両対数グラフである. 図の示唆するところによると, 解析的関係式

$$\log \alpha(n) = c_1 + (c_2 + \frac{c_3}{n}) \log n, \tag{4}$$

が成り立つ. 最小自乗法により,

$$c_1 = 0.21754, \quad c_2 = -0.87541, \quad c_3 = -12259. \tag{5}$$

を得る. これから簡単な関係

$$\alpha(n) = 1.22430 n^{-0.87541} \quad \text{for large} \quad n > 0. \tag{6}$$

が得られる. この関係式の意味はいまのところわからない.

5. 観察のまとめ

一連の陳述として重要な数値結果をまとめよう.

観察 **5.1.** 自由落下三体問題において, n_{min} を決めたとき, 二体衝突点は初期値面においてジョルダン弧をなす.

土屋俊夫 (1995) はこの陳述の証明の可能性を示唆した. 彼は次のように議論を進める.

わが初期値空間は 2 次元である. したがって, この空間から出発する軌道全体は 3 次元多様体をなす. 一方, 二体衝突は 2 粒子の座標が一致することが特徴である. すなわち, 二体衝突多様体は余次元 2 である. 一般に 3 次元多様体と余次元 2 の多様体は 1 次元の交わりを持つ. さて, われわれの数値手法はこの交わりを初期値空間に射影したことと同値である. 実際, われわれは軌道を追いかけ, その点から出発した軌道がある瞬間に二体衝突をするとき, 軌道の初期値を二体衝突点とよぶ. 1 次元の交点集合を 2 次元曲面に射影すると生成的には 1 次元となる. とくに, 二体衝突点が初期値面に見出されたとき, この点はすべてが二体衝突点から構成される曲線の上にあるはずである.

観察 **5.2.** 三体衝突点は異なるタイプの二体衝突曲線が出会う点である.

Devaney(1980) が証明したところによると, 二等辺問題においては, 三体衝突に始まり, 三体衝突に終る軌道は無数にある. 彼の三体衝突軌道は Γ_2 上にある. 彼の問題設定では, 第三体は小さな質量を持ち, 残りの 2 体の重心の近くを高速振動する. われわれの場合, 3 質量は等しく, 三体衝突点は Γ_3 上にある. もｃいろんこれらの点は y 軸上に対応する点を持つ. ただし, これらは y 軸上 C より上にある. どちらも三体衝突に始まり三体衝突に終る軌道ではあるが, われわれのと Devaney のとは異なる系列の三体衝突軌道である. われわれの観察は次のように定式化できる.

観察 **5.3.** 領域 D の境界 Γ_3 に沿って, 点 $B(0.5, 0)$ に収束する三体衝突点の無限列があって, 粒子 m_2 が連星 m_1 と m_3 に最初に接近するときに生じるしょうとつである.

この系列の三体衝突点の存在はかなり明かである. 底辺 m_1, m_3 とするエネルギー負の二等辺問題において, 連星 m_1 と m_3 は二体衝突を永遠に繰り返す. 第三粒子 m_2 の初期距離を正三角形の状態から連続的増大させてみよう. 正三角形の場合, m_2 は連星が最初の二体衝突を起こすときにちょうど連星の重心に達する. これがいわゆるラグランジュ型三体衝突である. m_2 の距離を少し増やすと, 連星 m_1 と m_3 が最初の二体衝突する直後にその重心に到達する. しかし, さらにどんどん距離を増やしていくと, 連星が 2 回目の二体衝突を起こすときに ,$_2$ が連星の重心に到達するような初期条件にやってくる. 同様に, 虚ｒを連続的に増やすと, 連星が n 回目の二体衝突を起こすときにちょうど m_2 が連星の重心に到達する初期条件が存在する.

Observation 5.4. 二体衝突曲線の左側で φ が負 (または正) で, 反対側で φ が正 (または負) であるとする. 三体衝突点を越えて二体衝突曲線を追うと, この順序は逆になる. 上下方向に追う場合も同様である.

この観察は, 三体衝突点を見つける際に非常に重要である. 三体衝突点の存在が遠くからわかる.

表 IV. Positions of the first twenty triple collision points on Γ_3. n_{min} is the number of minima of the smallest distance, (x, y) the position of triple collision points, and α is the vertex angle of initial isoceles triangle.

n_{min}	x	y	α
1	0.	0.8660254	1.5707963
2	0.4035896	0.4284000	0.4427212
3	0.4529373	0.3031644	0.3080119
4	0.4704101	0.2414607	0.2438709
5	0.4790156	0.2037885	0.2052260
6	0.4840270	0.1780150	0.1789690
7	0.4872651	0.1590877	0.1597664
8	0.4895060	0.1444976	0.1450051
9	0.4911357	0.1328464	0.1332404
10	0.4923716	0.1232902	0.1236046
11	0.4933331	0.1152844	0.1155413
12	0.4940998	0.1084624	0.1086762
13	0.4947253	0.1025672	0.1027480
14	0.4952450	0.0974127	0.0975673
15	0.4956785	0.0928599	0.0929939
16	0.4960499	0.0888044	0.0889215
17	0.4963679	0.0851642	0.0852675
18	0.4966420	0.0818753	0.0819671
19	0.4968829	0.0788866	0.0789687
20	0.4970952	0.0761564	0.0762303

ACKNOWLEDGEMENT

第一著者 (K.T.) は自由落下三体問題において三体衝突点の存在の問題があることを指摘してくれた吉田淳三博士に感謝する. 著者は J. Anosova 博士が議論してくれたことに謝意を表する.

REFERENCES

Agekyan, T.A. and Anosova, J.P.: A study of the dynamics of triple systems by means of statistical sampling, *Soviet Physics-Astronomy* **11**, 1006-1014(1968).

Agekyan, T.A., Anosova, J.P. and Orlov, V.V., *Astrofizika* **19**, 111(1983).

Anosova, J.P.: Strong triple interactions in the general three-body problem, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **51**, 1-15 (1991).

Anosova, J.P. and Orlov, V.V., Chernin, A.D., and Kiseleva, L.G.: The close approaches and coalescence in triple systems of gravitating masses, I, *Astrophy. Space Sci.* **158**,

19-33(1989).

Anosova, J.P. and Zavalov, N.N.: States of strong gravitational interaction in the genral three-body problem, *Soviet Astron.* **33**, 79-83 (1989).

Broucke, R.: On the isosceles triangle configuration in the planar general three body problem, *Astron. Astrophys.* **73**, 303-313(1979).

Delgado-Fernandez, J.: Transversal ejection-collision orbits in Hill's problem for $C \ll 1$, *Celestial Mechanics* **44** (1988), 299-307.

Devaney, R.L.: Triple collision in the planar isosceles three body problem, *Invent. Math.* **60**, 249-267(1980).

Devaney, R.L.: Blowing up singularities in classical mechanical systems, *Amer. Math. Monthly* **89**, 535-552(1982).

Lacomba, E. and Llibre, J.: Transversal ejection-collision orbits for the restricted problem and Hill's problem with applications, *J. Diff. Eq.* **74** (1988), 69-85.

Llibre, J.: On the restricted three-body problem when the mass parameter is small, *Cel. Mech.* **28** (1982), 83-105.

McGehee, R.: Triple collision in the collinear three-body problem, *Invent. Math.* **27**, 191-227(1974).

Moeckel, R.: Chaotic dynamics near triple collision, *Arch. R. Mec.* **107**, 37-69(1989).

Szebehely, V. and Peters, C.F.: Complete solution of a general problem of three bodies, *Astron. J.* **72**, 876-883(1967).

Sekiguchi, M. and Tanikawa, K.: Horseshoe mapping and collision orbits in the restricted three-body problem, in *Hamiltonian Systems and Celestial Mechanics* (ed. Lacomba & Llibre), World Scientific, 1993, pp.181-189.

Tanikawa, K., Manabe, S., and Broucke, R.: On the origin of the planetary spin angular momentum by accretion of planetesimals: property of collision orbits, *ICARUS* **79**, 208-222(1989).

Tanikawa, K., Kikuchi, N., and Sato, I.: On the origin of the planetary spin by accretion of planetesimals. II. collision orbits at the Hill surface, *ICARUS* **94**, 112-125(1991).

Tsuchiya, T.: 1995, private communication.

Umehara, H., Tanikawa, K., and Aizawa, Y.: Initial-value sensitivity in the planar three-body problem, in Dynamical Systems and Chaos, Vol.2, World Scientific, 1995(in press).

Valtonen, M.J.: The general three-body problem in astrophysics, *Vistas in Astronomy* **32**, 23-48(1988).

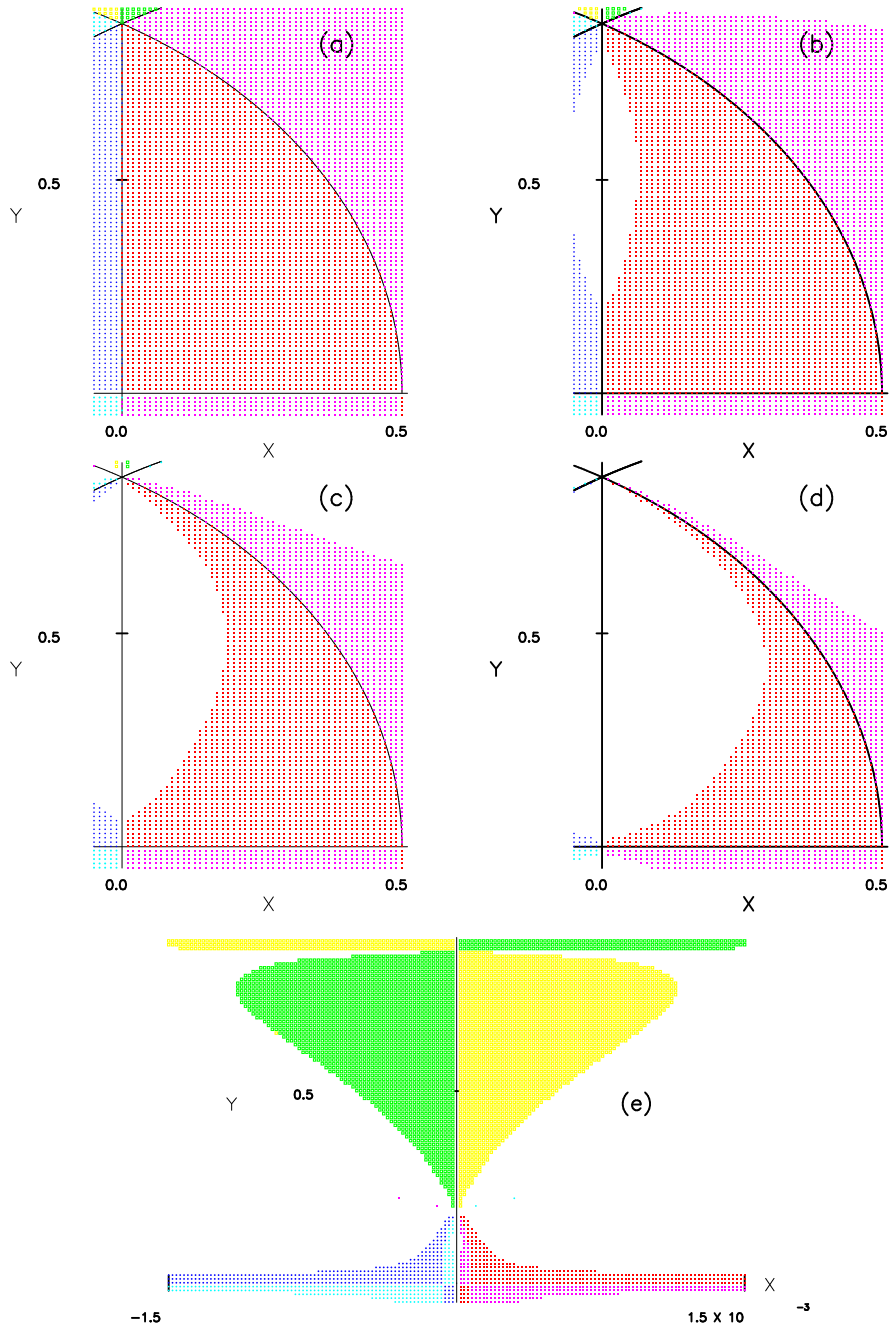

図 5: $n_{min} = 1$ の場合の有限物体の二体衝突．記号 $+$ と $\bullet$ は φ が負と正の場合の m_2 と m_3 の衝突を表す．記号 $\times$ と $\circ$ は φ が負と正の場合の m_1 と m_3 の衝突を表す．記号 Δ と $\cdot$ は φ が負と正の場合の m_1 と m_2 の衝突を表す．(a) $R = 10^{-1}$, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-2}, 10^{-2})$, (b) $R = 10^{-2}$, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-2}, 10^{-2})$, (c) $R = 10^{-3}$, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-2}, 10^{-2})$, (d) $R = 10^{-4}$, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-2}, 10^{-2})$, および (e) $R = 10^{-4}$, $(\Delta x, \Delta y) = (2 \cdot 10^{-5}, 10^{-2})$.

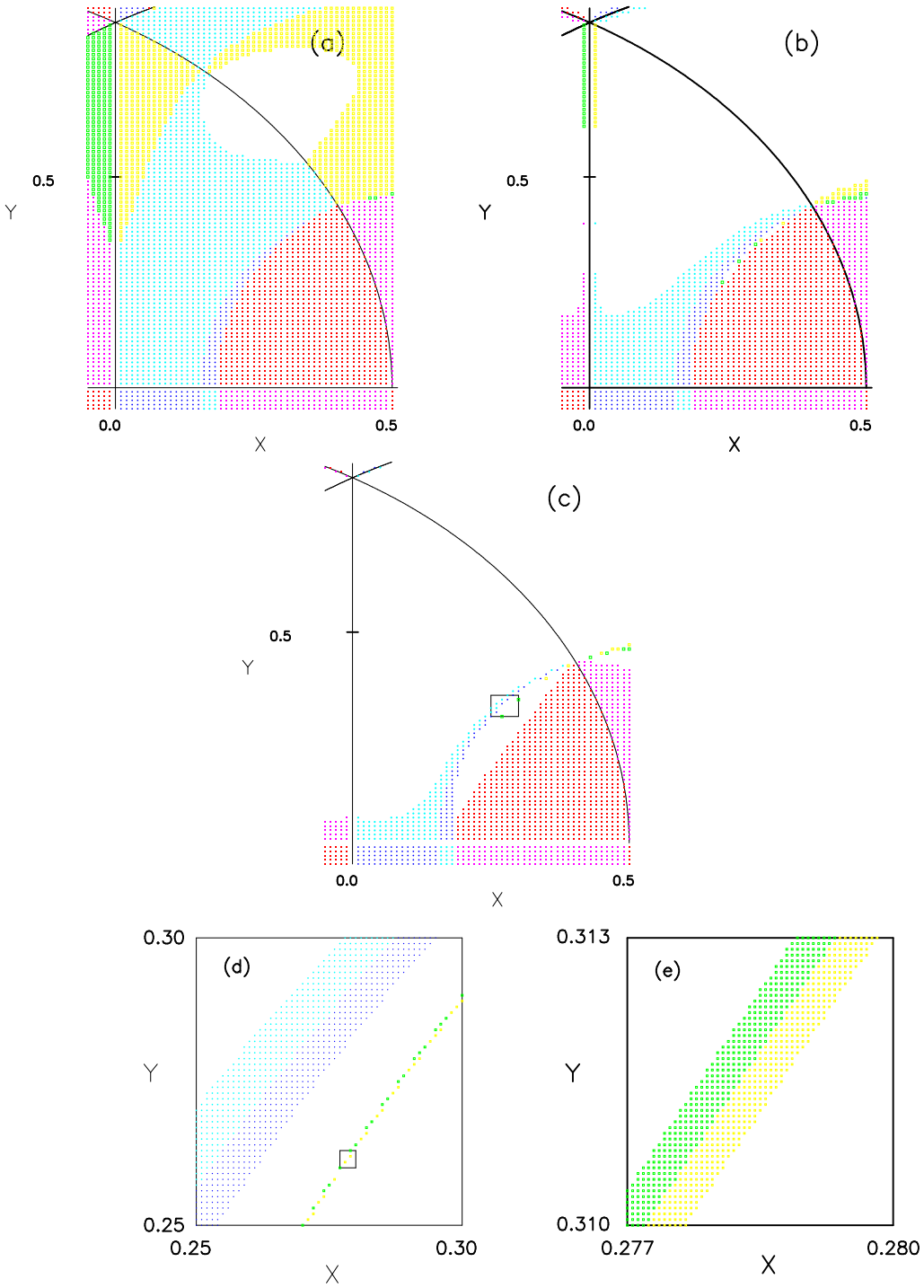

図 6: 図 5 と同様. ただし, $n_{min} = 2$. (a) $R = 10^{-1}$, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-2}, 10^{-2})$, (b) $R = 10^{-2}$, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-2}, 10^{-2})$, (c) $R = 10^{-3}$, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-2}, 10^{-2})$, (d) 図 6(c) の正方形領域の拡大. ただし, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-3}, 10^{-3})$. (e) 図 6(d) の正方形領域の拡大. ただし, $(\Delta x, \Delta y) = (6 \cdot 10^{-5}, 6 \cdot 10^{-5})$.

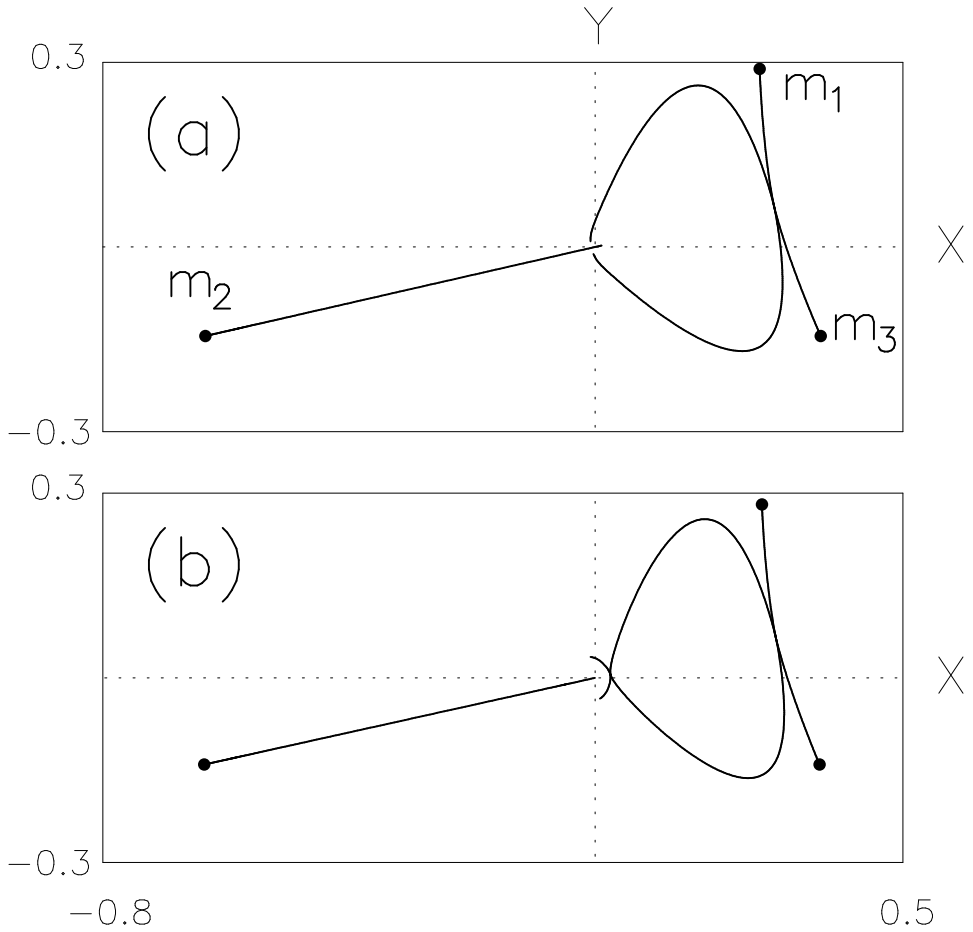

図 7: 三体近接衝突を経験する二等辺問題軌道. 初期位置は (a) $(x, y) = (0.4008347, 0.4341623)$ and (b) $(x, y) = (0.4063779,\ 0.4226183)$.

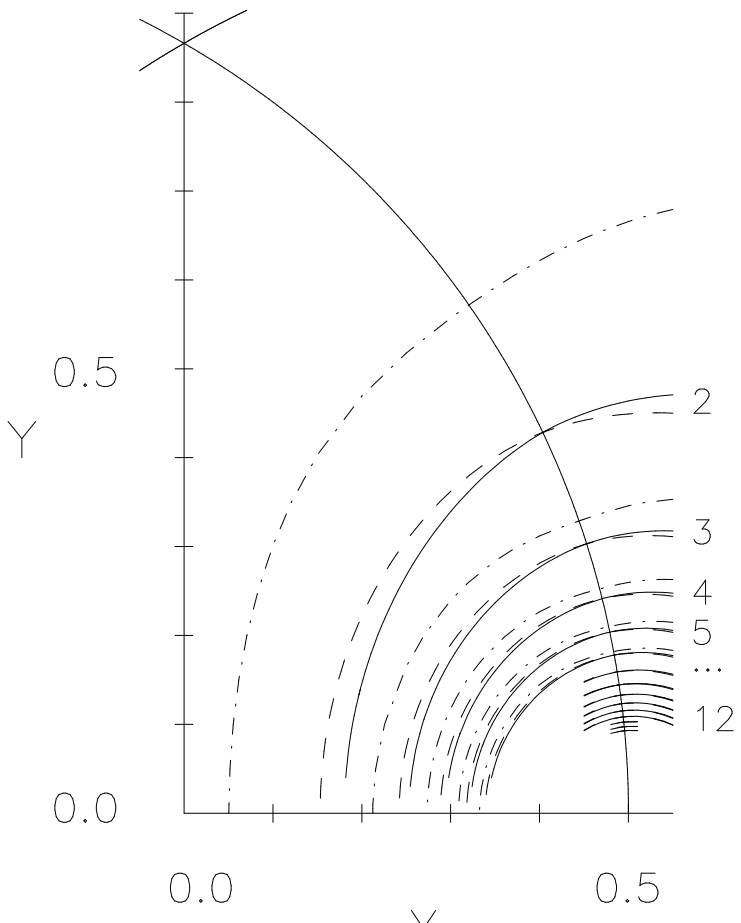

図 8: 点 $B(0.5, 0)$ に収束する二体衝突曲線列. 実線, 点破線, 破線はタイプ $1, 2, 3$ の衝突曲線を表す. そばの数字は n_{min} である.

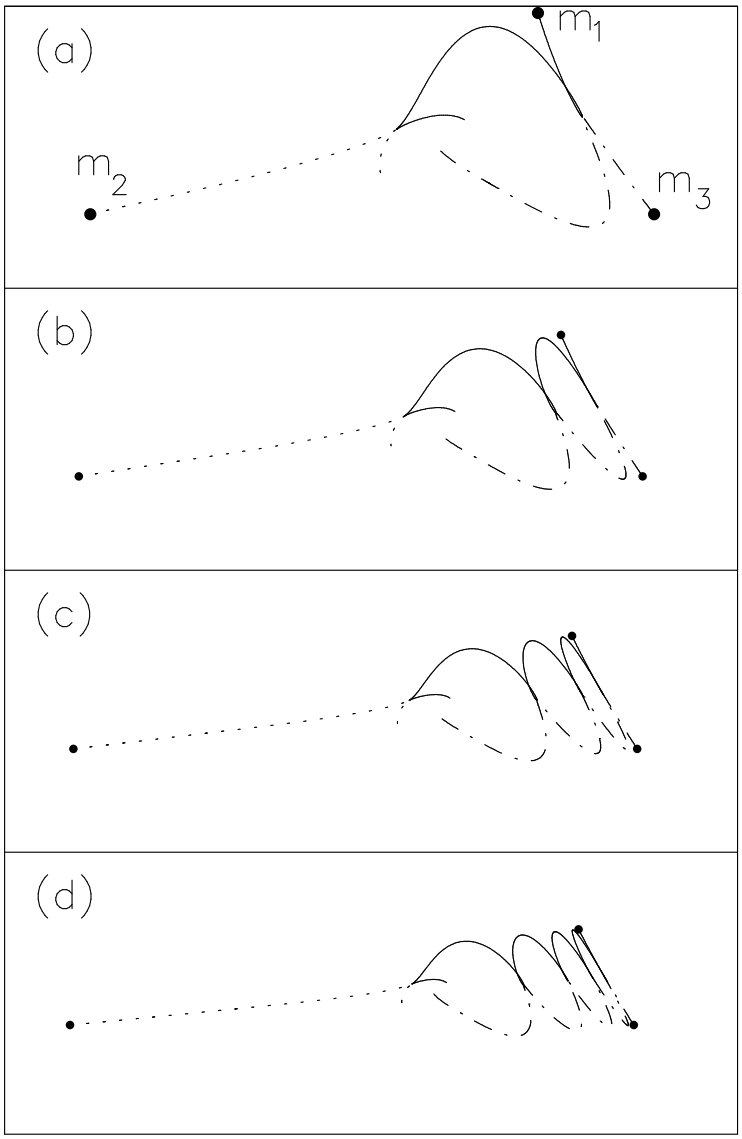

図 9: タイプ 3 の衝突曲線列の軌道. (a) $n_{min} = 2$, (b) $n_{min} = 3$, (c) $n_{min} = 4$, and (d) $n_{min} = 5$. **軌道の初期位置は** B **と** C **を結ぶ線分と衝突曲線との交点に取った**,

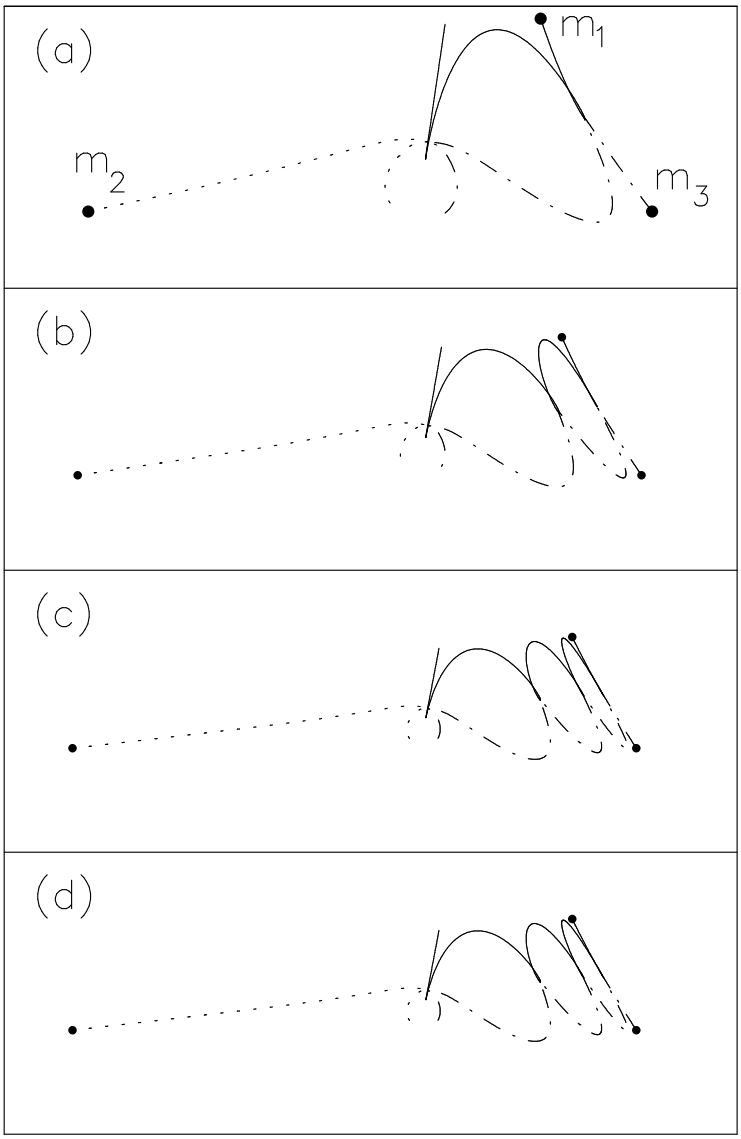

図 10: タイプ 1 の衝突曲線列上の軌道. (a) $n_{min} = 2$, (b) $n_{min} = 3$, (c) $n_{min} = 4$, and (d) $n_{min} = 5$. **軌道の初期位置は** B **と** C **を結ぶ線分と衝突曲線との交点に取った**,

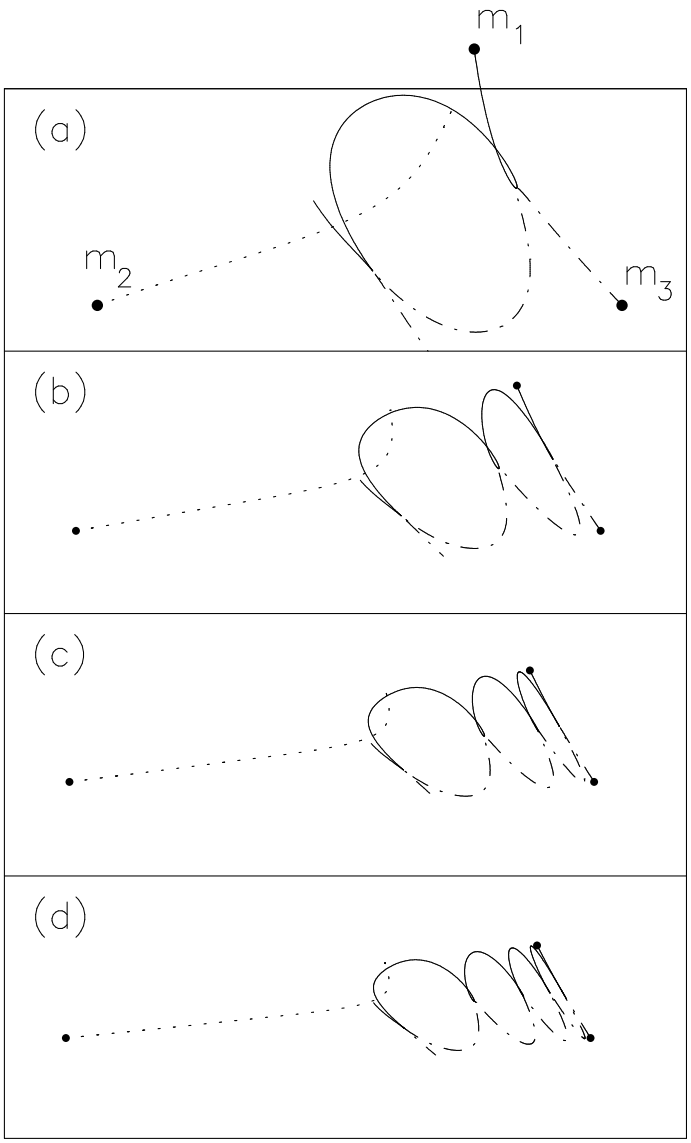

図 11: タイプ 2 の衝突曲線列上の軌道. (a) $n_{min} = 3$, (b) $n_{min} = 4$, (c) $n_{min} = 5$, and (d) $n_{min} = 6$. **軌道の初期位置は** B **と** C **を結ぶ線分と衝突曲線との交点に取った**,

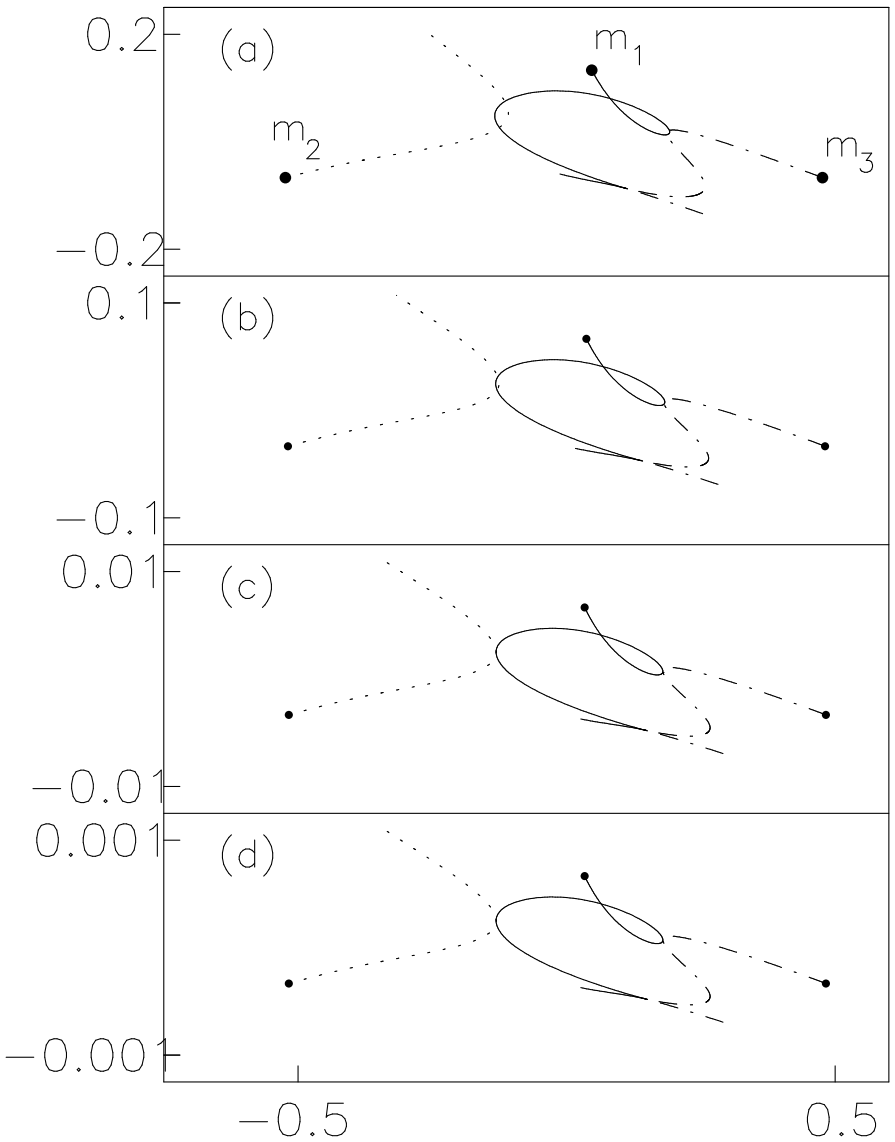

図 12: $n_{min} = 3$ **の場合のタイプ** 2 **の衝突曲線上の** 4 **つの軌道．初期位置は**, (a) $(x, y) = (0.0707400, 0.2)$, (b) $(0.0553500, 0.1)$, (c) $(0.050563, 0.01)$, and (d) $(0.050516, 0.001)$.

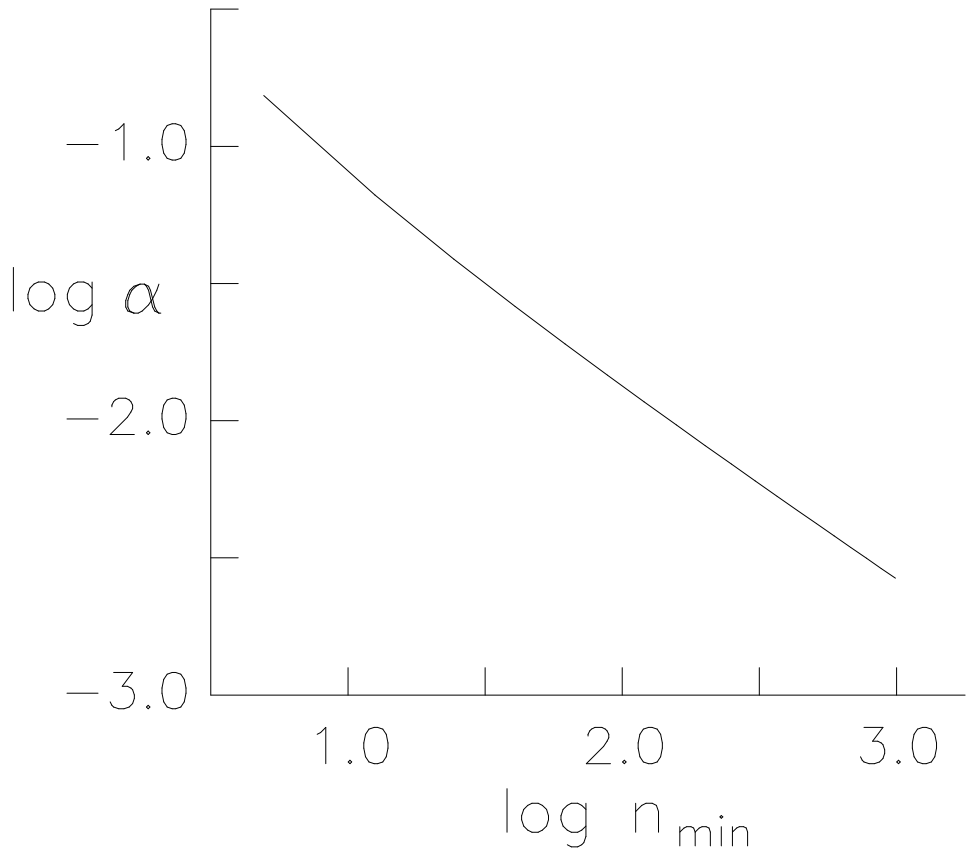

図 13: Γ_2 上の三体衝突点の位置と n_{min} との関係, α は, 三体衝突に至る軌道の初期二等辺配置の頂角 (ラジアン).

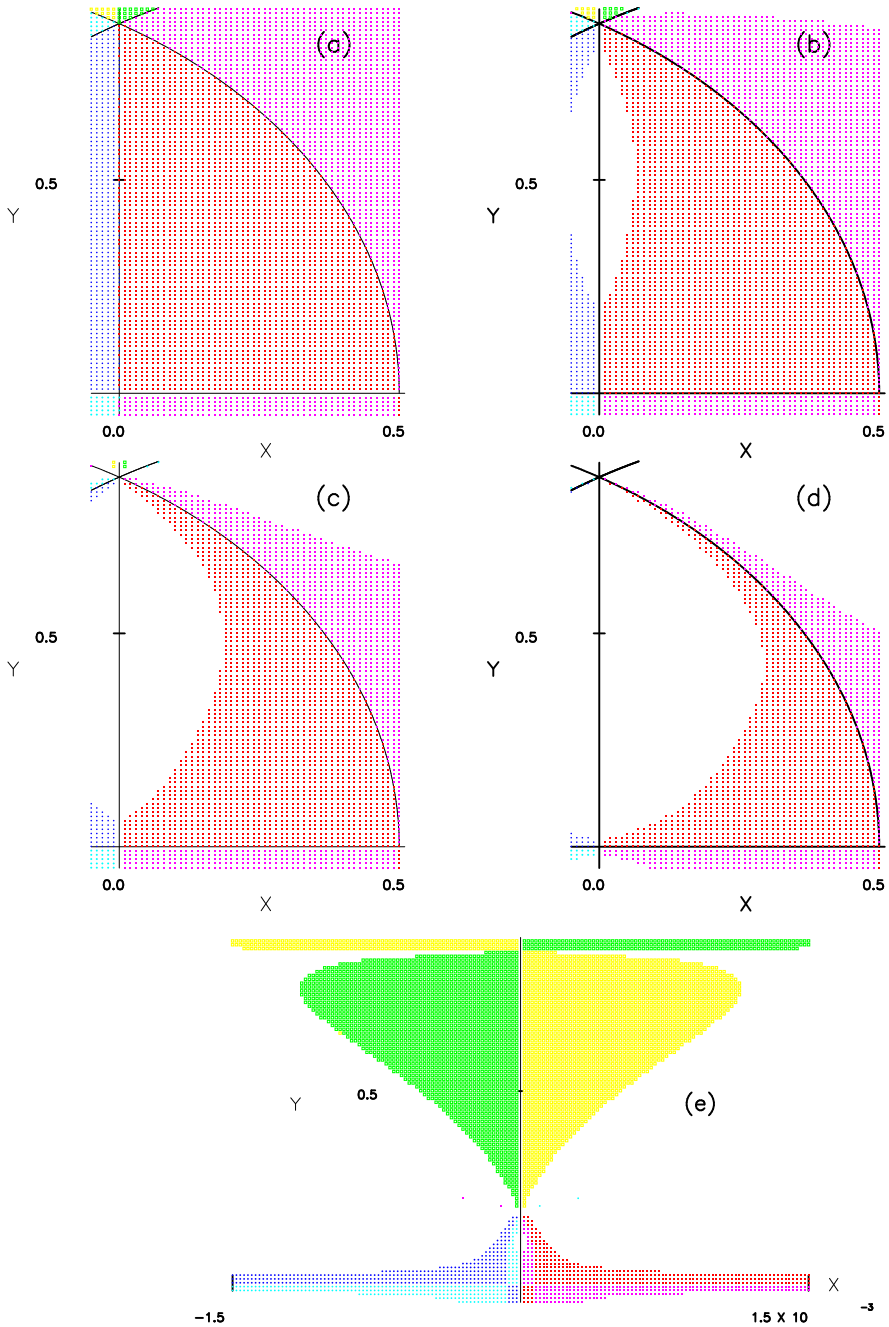

図 14: $n_{min} = 1$ の場合の有限物体の二体衝突. 記号 $+$ と $\bullet$ は φ が負と正の場合の m_2 と m_3 の衝突を表す. 記号 $\times$ と $\circ$ は φ が負と正の場合の m_1 と m_3 の衝突を表す. 記号 Δ と $\cdot$ は φ が負と正の場合の m_1 と m_2 の衝突を表す. (a) $R = 10^{-1}$, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-2}, 10^{-2})$, (b) $R = 10^{-2}$, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-2}, 10^{-2})$, (c) $R = 10^{-3}$, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-2}, 10^{-2})$, (d) $R = 10^{-4}$, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-2}, 10^{-2})$, および (e) $R = 10^{-4}$, $(\Delta x, \Delta y) = (2 \cdot 10^{-5}, 10^{-2})$.

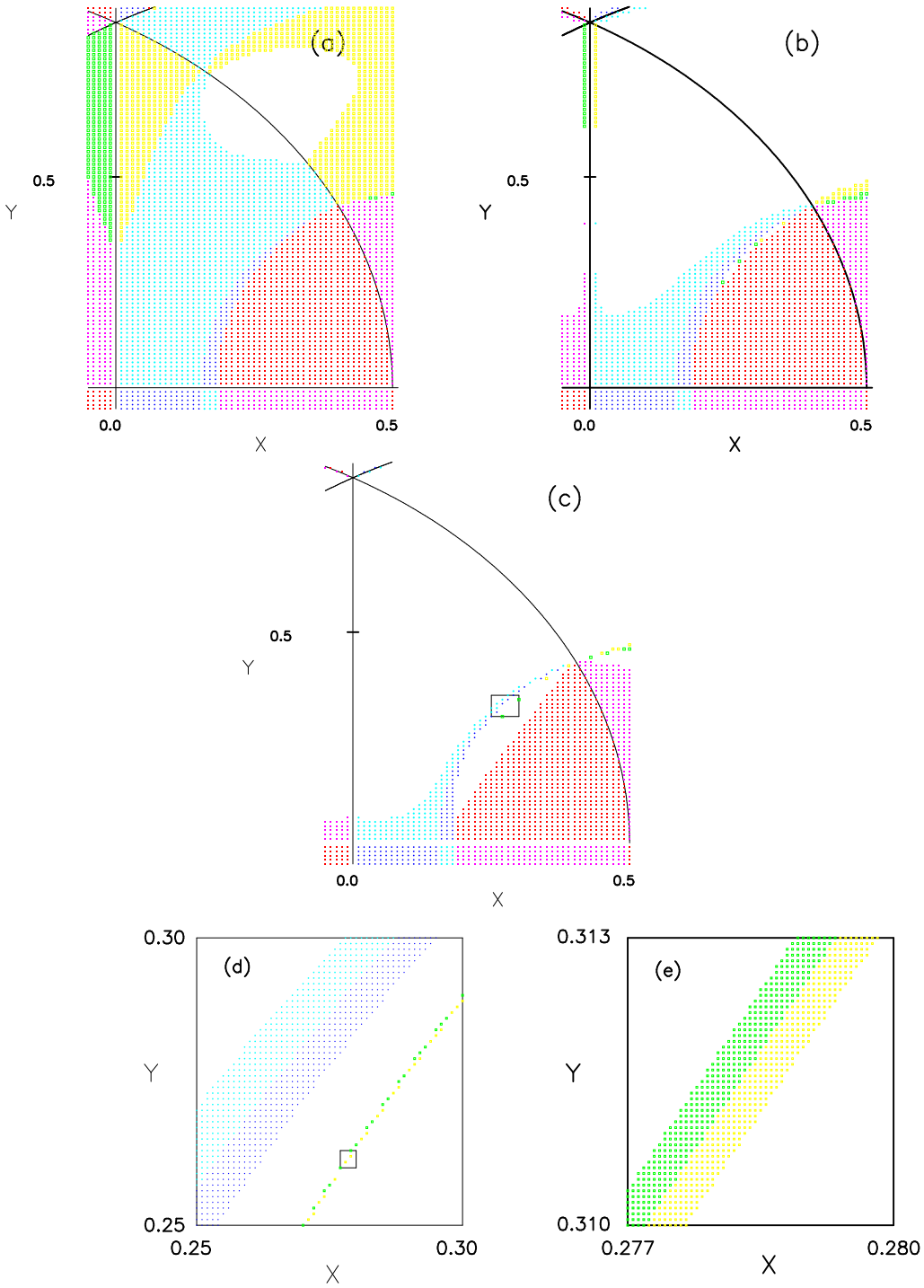

図 15: 図 5 と同様. ただし, $n_{min} = 2$. (a) $R = 10^{-1}$, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-2}, 10^{-2})$, (b) $R = 10^{-2}$, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-2}, 10^{-2})$, (c) $R = 10^{-3}$, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-2}, 10^{-2})$, (d) 図 6(c) の正方形領域の拡大. ただし, $(\Delta x, \Delta y) = (10^{-3}, 10^{-3})$. (e) 図 6(d) の正方形領域の拡大. ただし, $(\Delta x, \Delta y) = (6 \cdot 10^{-5}, 6 \cdot 10^{-5})$.