アンドワイエー変数を用いた回転力学入門

木下 宙 (国立天文台名誉教授)

＊オイラー角を用いた運動方程式

＊オイラーの運動方程式

＊アンドワイエー変数を用いた剛体運動

＊短軸モード回転と長軸モード回転

＊三軸不等楕円体の自由回転の解表現

＊対称独楽の運動

＊地球回転運動

＊回転座標系に準拠したハミルトニアン

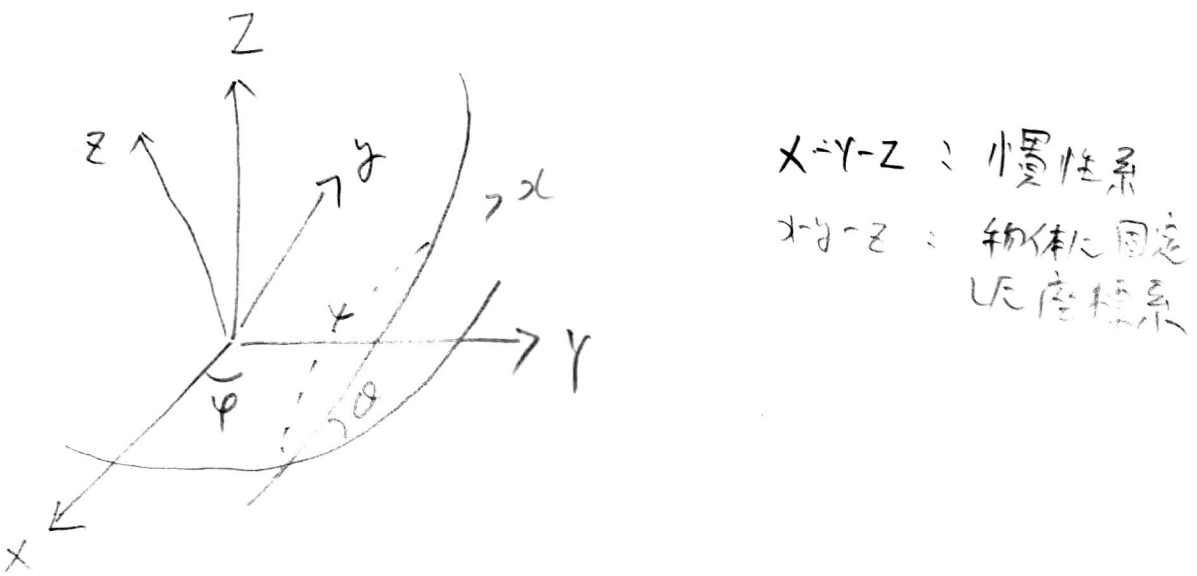

Figure 1: Euler Angles.

Euler角を用いた運動方程式

角速度ベクトル

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_y &= \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_z &= \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned} \tag{1}$$

角運動量

$$L_x = A\omega_x, L_y = B\omega_y, L_z = \omega_z \tag{2}$$

運動エネルギー

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(\omega_x L_x + \omega_y L_y + \omega_z L_z) \\ &= \frac{1}{2}(A\omega_z^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{L_x^2}{A} + \frac{L_y^2}{B} + \frac{L_z^2}{C}) \end{aligned} \tag{3}$$

Euler角に共役は運動量

$$\begin{aligned} p_\phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} &= L_x\sin\theta\sin\psi + L_y\sin\theta\cos\psi + L_z\cos\theta \\ p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= L_x\cos\psi - L_y\sin\psi \\ p_\psi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} &= L_z \end{aligned} \tag{4}$$

式 (4) より

$$\begin{aligned} L_x &= p_\theta\cos\psi + \frac{1}{\sin\theta}(p_\phi - p_\psi\cos\theta)\sin\psi \\ L_y &= -p_\theta\sin\psi + \frac{1}{\sin\theta}(p_\phi - p_\psi\cos\theta)\cos\psi \\ L_z &= p_\psi \end{aligned} \tag{5}$$

自由回転のハミルトニアンは

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2A}(p_\theta \cos\psi + \frac{1}{\sin\theta}(p_\phi - p_\psi \cos\theta)\sin\psi)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2B}(-p_\theta \sin\psi + \frac{1}{\sin\theta}(p_\phi - p_\psi \cos\theta)\cos\psi)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2C}p_\psi^2 \end{aligned} \tag{6}$$

角変数 ϕ はサイクリック$\longrightarrow p_\phi = const$

角運動量の Z 成分

$A = B$ の場合

$$F = \frac{1}{2A}(p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2) + \frac{1}{2C}p_\psi^2 \tag{7}$$

角変数 ψ はサイクリック$\longrightarrow p_\psi = const$

角運動量の z 成分

θ についての運動方程式は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)(p_\phi \cos\theta - p_\psi)}{A^2 \sin^3\theta} \tag{8}$$

これを解くのは面倒！

オイラーの運動方程式

慣性系での運動方程式

$$(C1) \qquad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}(\text{外力によるトルク}) \tag{9}$$

物体に固定した座標系での運動方程式

$$(C2) \qquad \frac{d\mathbf{L}}{dt} + \omega \times \mathbf{L} = \mathbf{N} \tag{10}$$

運動方程式 (10) を式 (3) を用いて $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ についての方程式を求める.

$$(C3) \qquad \begin{aligned} A\frac{d\omega_x}{dt} + (C-B)\omega_y\omega_z &= N_x, \\ B\frac{d\omega_y}{dt} + (A-C)\omega_z\omega_x &= N_y, \\ C\frac{d\omega_z}{dt} + (B-A)\omega_x\omega_y &= N_z. \end{aligned} \tag{11}$$

外力 N が無い場合方程式 (11) の解はは楕円関数で表現できる.

$A = B$ の場合
式 $(11\text{-}3)$ より $\omega_z = const.$ 式 (11-1,11-2) より

$$\frac{d^2\omega_x}{dt^2} + (\frac{C-A}{A}\omega_z)^2\omega_x = 0. \tag{12}$$

$$(C4) \qquad \omega_x = a\sin(\Omega t + \alpha), \omega_y = a\cos(\Omega t + \alpha), \tag{13}$$

$$(C5) \qquad \Omega = (1 - \frac{C}{A})\omega_z. \tag{14}$$

形状軸の空間運動を知るには (1) を ϕ, θ, ψ についての運動方程式を解かねばならない.

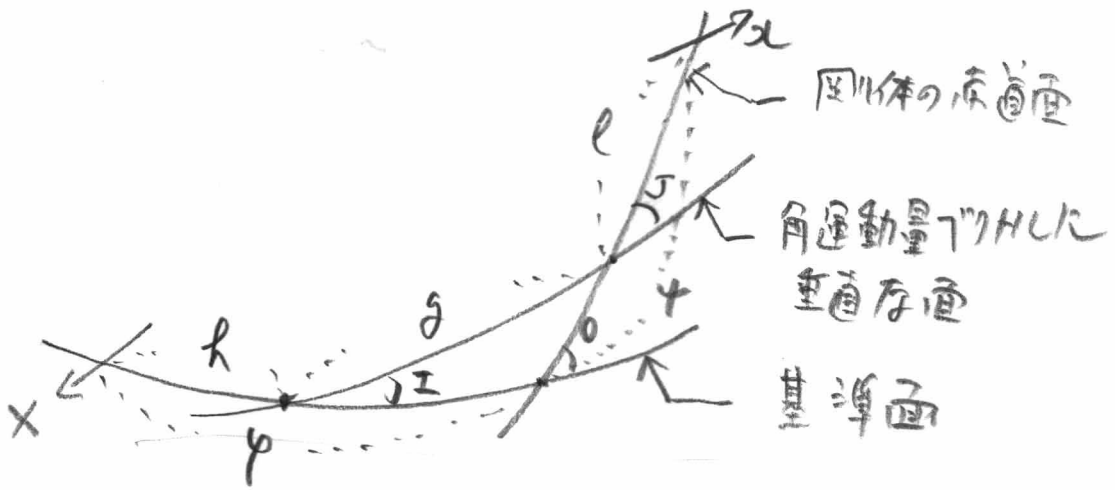

Figure 2: Andoyer 変数

アンドワイアー (Andoyer) 変数

l, g, h に共役な運動量は

$$\begin{aligned} L &= (\text{角運動量の } z \text{ 成分}) = G\cos J \\ G &= (\text{角運動量}) \\ H &= (\text{角運動量の } Z \text{ 成分}) = G\cos I \end{aligned} \tag{15}$$

自由回転のハミルトニアンは

$$F = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B}\right) + \frac{L^2}{2C} \tag{16}$$

角変数 g, h、運動量 H はサイクリック$\longrightarrow G = const, H = const, h = const \longrightarrow$ 全角運動量保存、$I = const \longrightarrow$ 角運動量ベクトル保存

$A = B$ の場合

$$F = \frac{1}{2A}(G^2 - L^2) + \frac{L^2}{2C} \tag{17}$$

角変数 l はサイクリック$\longrightarrow L = cont \longrightarrow J = const$

運動方程式

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L} = (\frac{1}{C} - \frac{1}{A}) = n_l < 0, \tag{18}$$

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial F}{\partial G} = \frac{G}{A} = n_g \tag{19}$$

$$l = n_l t + l_0, \tag{20}$$

オイラー運動 (非剛体：チャンドラー運動 (極運動の主要成分))

$$g = n_g t + g_0. \tag{21}$$

参考文献

Kinoshita, H.:1972, First-order perturbations of the two finite body problem, Publ. Astron. Soc. Japan, vol. 24, pp. 423-457.

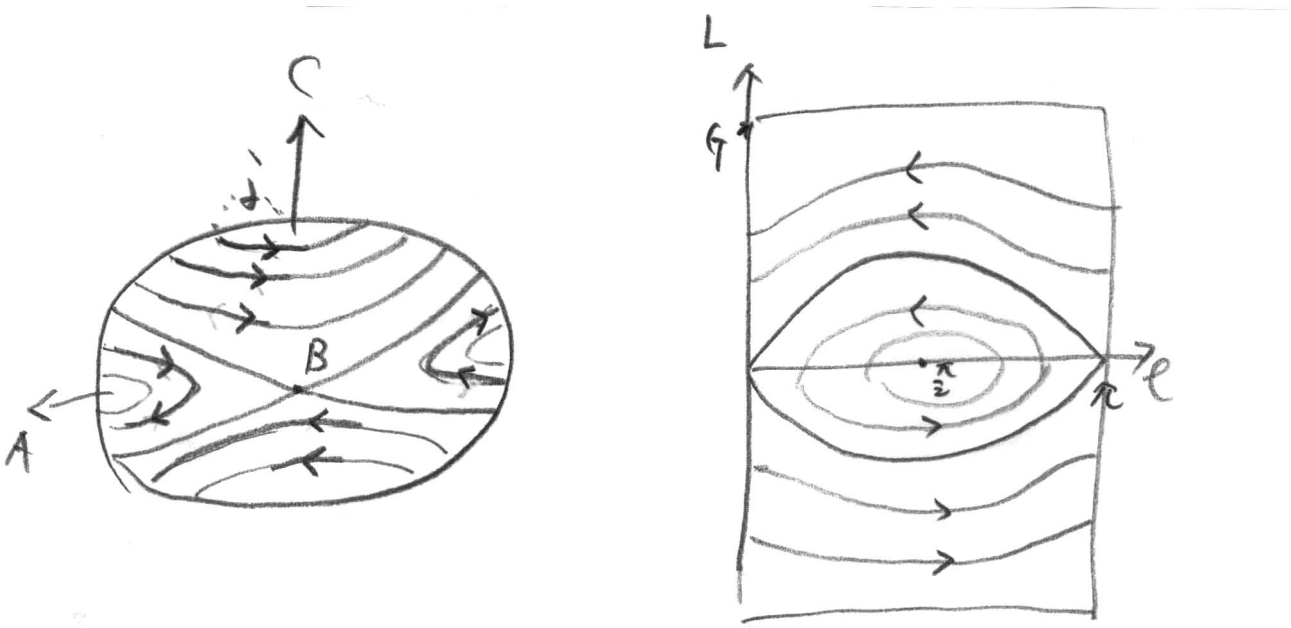

Figure 3: 慣性楕円体上での角運動ベクトルの軌跡と等エネルギーカーブ

短軸モード回転と長軸モード回転

短軸モード *ShortAxisMode*	$J = 0$	$L = G$	$F_C = \frac{G^2}{2C}$	永年安定
セパラトリックス *Separatrix*	$l = 0$	$L = 0$	$F_B = \frac{G^2}{2B}$	不安定
長軸モード *LongAxisMode*	$l = \pi/2$	$L = 0$	$F_A = \frac{G^2}{2A}$	永年不安定

$$F_C < F_B < F_A$$

An Exact Solution of Torque-Free Motion

*** Short axis mode**

$$L_x/G = \sin J \sin l = \sin j \ \mathrm{cn}\ u, \tag{22}$$

$$L_y/G = \sin J \cos l = -\sqrt{(1+e)/(1-e)} \sin j \ \mathrm{sn}\ u, \tag{23}$$

$$L_z/G = \cos J = \cos j \ \mathrm{dn}\ u, \tag{24}$$

$$g = \frac{G}{C}t + \tilde{g}_0 - G(\frac{1}{C} - \frac{1}{A})\frac{\pi}{2Kn_{\tilde{l}}}\Pi(\varphi, -2e/(1-e), k), \tag{25}$$

where

$$\varphi = \mathrm{am}\ u, u = \frac{2K}{\pi}(\tilde{l} - \pi/2). \tag{26}$$

$$\tilde{l} = n_{\tilde{l}}t + \pi/2, \tilde{g} = n_{\tilde{g}}t + \tilde{g}_0. \tag{27}$$

$$e = \frac{1}{2}(\frac{1}{B} - \frac{1}{A})D, \frac{1}{D} = \frac{1}{C} - \frac{1}{2}(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}), \tag{28}$$

which is a measure of the triaxiality of the body. The parameter e varies from 0 to 1:e=0 for an oblate body($B = A$) and e=1 for a prolate body($B = C$). In (25) and (26),K is the complete elliptic integral of the first kind with modulus k^2 is given by

$$k^2 = \frac{2e}{1-e}\tan^2 j. \tag{29}$$

*** Long axis mode**

The solution of the long axis mode is obtained just by replacing A and C by $C*$ and A in (22)-(29). For example

$$e^* = \frac{1}{2}(\frac{1}{B} - \frac{1}{C})D^*, \frac{1}{D^*} = \frac{1}{A} - \frac{1}{2}(\frac{1}{C} + \frac{1}{B}), \tag{30}$$

参考文献

Kinoshita, H.:1972, First-order perturbations of the two finite body problem, Publ. Astron. Soc. Japan, vol. 24, pp. 423-457.

Kinoshita, H.:1982, Analytical Expansions of Torque Free Motions for Short and Long Axis Modes, *Celest.Mech.*,**53**,365-375.

Table 1: Triaxiality and Dynamical Ellipticity of the celestial bodies in the solar system:triaxiality $e = 1/2(1/B - 1/A)/(1/C - 1/2(1/A + 1/B))$, $e^* = 1/2(1/B - 1/C)/(1/A - 1/2(1/C + 1/B))$, dynamical ellipticity $H = (2C - A - B)/2C$, here we assume a uniform density distribution except Earth and Moon.

		$2a \times 2b \times 2c$(km)	e	H	e^*
MI	Phobos	28x22x20	0.719	0.185	0.0889
JIV	Amalthea	270x166x150	0.900	0.276	0.0270
SVII	Hyperion	350x240x200	0.723	0.278	0.0685
SX	Janus	220x190x160	0.445	0.197	0.238
SXI	Epimetheus	140x116x100	0.556	0.197	0.166
SXIII	Telesto	30x26x16	0.311	0.338	0.357
SXVI	Prometheus	140x100x76	0.681	0.305	0.105
SXVII	Pandora	110x86x66	0.562	0.277	0.163
433	Eros	35x16x7	0.919	0.467	0.0215
951	Gaspra	35x16x7	0.900	0.260	0.027
243	Ida	19x12x11	0.960	0.515	0.010
(243)Ida 1	Dactyl	1.6x1.4x1.2	0.434	0.181	0.246
253	Mathilda	66x48x46	0.852	0.173	0.030
	Halley	16x8x7.5	0.971	0.324	0.00753
	Earth		0.00328	0.00327	0.987
	Moon		0.214	0.000520	0.478

Expansions of the Torque-Free Motion for Small e and e^*

The major planets from Mercury to Pluto and the major satellites are approximately oblate spheroids and the parameter e for them is small. Therefore we expand the solutions in terms of the small parameter e and the following expressions are based on the results by Kinoshita (1972):

$$l = \tilde{l} - \frac{1}{4}(\alpha^2 + 1)e \sin 2\tilde{l} + \frac{1}{64}(\alpha^4 + 6\alpha^2 + 1)e^2 \sin 4\tilde{l} + O(e^3), \tag{31}$$

$$g = \tilde{g} + \frac{1}{2}\alpha e \sin 2\tilde{l} - \frac{1}{16}\alpha(\alpha^2 + 1)e^2 \sin 4\tilde{l} + O(e^3), \tag{32}$$

$$\begin{aligned} L &= G \cos \tilde{J}[1 - \frac{1}{8}(\alpha^4 - 1)e^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1)e \cos 2\tilde{l} + \\ &\quad + \frac{1}{16}(\alpha^2 - 1)^2 e^2 \cos 4\tilde{l} + O(e^3), \end{aligned} \tag{33}$$

or

$$J = \tilde{J} + \frac{1}{16}(2\alpha^2 + 1)e^2 \tan \tilde{J} + \tan \tilde{J}(\frac{1}{2}e \cos 2\tilde{l} - \frac{1}{16}\alpha^2 e^2 \cos 4\tilde{l}), \tag{34}$$

where

$$\alpha = \sec \tilde{J} = G/\tilde{L}. \tag{35}$$

$\tilde{L}$ is the action variable canonically conjugate to $\tilde{l}$ and one of the integral constants. The relation between $\tilde{J}$ and j is given by

$$\cos \tilde{J} = \cos j[1 - \frac{1}{2}e \tan^2 j - (\frac{1}{4} \tan^2 j + \frac{3}{16} \tan^4 j)e^2] + O(e^3), \tag{36}$$

Expansions of the Torque-Free Motion for Large e and e^*

$$l = l^* - \frac{1}{4}e\sqrt{(1+e)/(1-e)}j^2\frac{\sin 2\tilde{l}}{1+e\cos 2\tilde{l}} + O(j^4), \tag{37}$$

$$\begin{aligned} g &= \tilde{g} + \frac{G}{Dn_{\tilde{l}}}(-\sqrt{1-e^2}(l^* - \tilde{l}) \\ &\quad + \frac{1}{4}(1+e)j^2[\frac{e\sin 2\tilde{l}}{1+e\cos 2\tilde{l}} + \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}(l^* - \tilde{l})]) + O(j^4), \end{aligned} \tag{38}$$

$$L = G(1 - \frac{1}{2}j^2 - \frac{e}{1-e}j^2\cos^2\tilde{l}) + O(j^4), \tag{39}$$

or

$$J = j\sqrt{1 + \frac{2e}{1-e}\cos^2\tilde{l}} + O(j^3). \tag{40}$$

In (37) and (38) l^* is defined such as

$$\tan l^* = \sqrt{(1-e)/(1+e)}\tan\tilde{l}. \tag{41}$$

参考文献

Kinoshita, H.:1982, Analytical Expansions of Torque Free Motions for Short and Long Axis Modes, *Celest.Mech.*,**53**,365-375.

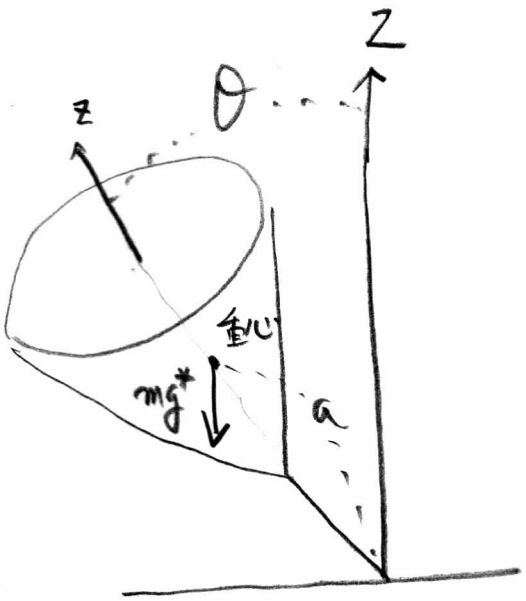

Figure 4: 対称独楽

対称独楽の運動

対称コマのハミルトニアン

$$F = F_0 + R, \tag{42}$$

無摂動系

$$F_0 = \frac{1}{2A}(G^2 - L^2) + \frac{L^2}{2C} \tag{43}$$

摂動ポテンシャル

$$R = -mg^* a \cos\theta \tag{44}$$

摂動をアンドワイアー変数で表現する.

$$R = mg^* a(\cos I \cos J - \sin I \sin J \cos g) \tag{45}$$

角変数 l, h はサイクリック——$> L = const, H = const$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial F}{\partial H} = -\frac{1}{G \sin I}\frac{\partial R}{\partial I}$$

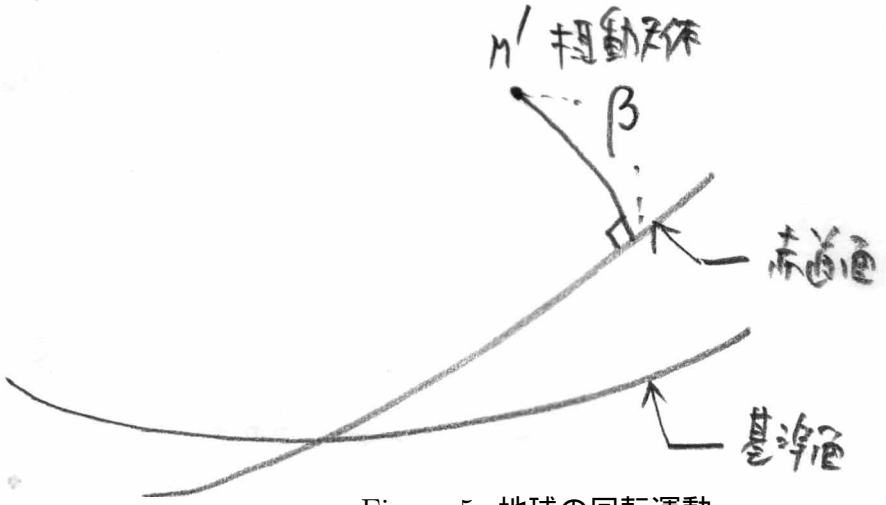

Figure 5: 地球の回転運動

$$= \frac{mg^*a}{G}(\cos J + \frac{\cos I}{\sin I}\sin J \cos g) \tag{46}$$

$J << 1$ であるから独楽の首振り運動の角速度は

$$\frac{dh}{dt} \simeq= \frac{mg^*a}{G} \simeq \frac{mg^*a}{L} = \frac{mg^*a}{C\omega} \tag{47}$$

地球の才差運動

$$F = F_0 + R, \tag{48}$$

無摂動系

$$F = \frac{1}{2A}(G^2 - L^2) + \frac{L^2}{2C} \tag{49}$$

摂動ポテンシャル

$$R = \frac{k^2 M'}{r^3}(C - A)P_2(\sin\beta), \tag{50}$$

β は摂動天体の赤緯.
近似：摂動天体 (月、太陽) は黄道上を運動

摂動をアンドワイアー変数で表現して短周期項を消去する.

$$R = -\frac{1}{8}\frac{k^2 M'}{a'^3}(1 - e'2)^{-3/2}(3\cos^2 I - 1)(3\cos^2 J - 1). \tag{51}$$

角変数 l, g, h はサイクリック——> $L = const, G = const, H = const$——> $I = const, J = const$.

歳差：永年運動

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial R}{\partial H} = -\frac{3}{2}(1 - \frac{3}{2}\sin^2 J)\frac{k^2 M'(C - A)}{Ga'^3}(1 - e^2)^{-3/2}\cos I. \tag{52}$$

ケプラーの第３法則 $k^2(M' + M_E) = n^2 a'^3$ を用いて

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{C - A}{C}\frac{M'}{M' + M_E}(1 - e'2)^{-3/2}\frac{n'^2}{\omega}(1 - \frac{3}{2}\sin^2 J)\cos I. \tag{53}$$

章動は周期摂動である。

参考文献

Kinoshita, H.:1977, Theory of the Rotation of the Rigid Earth, Celest. Mech., vol.15, pp.277-326.

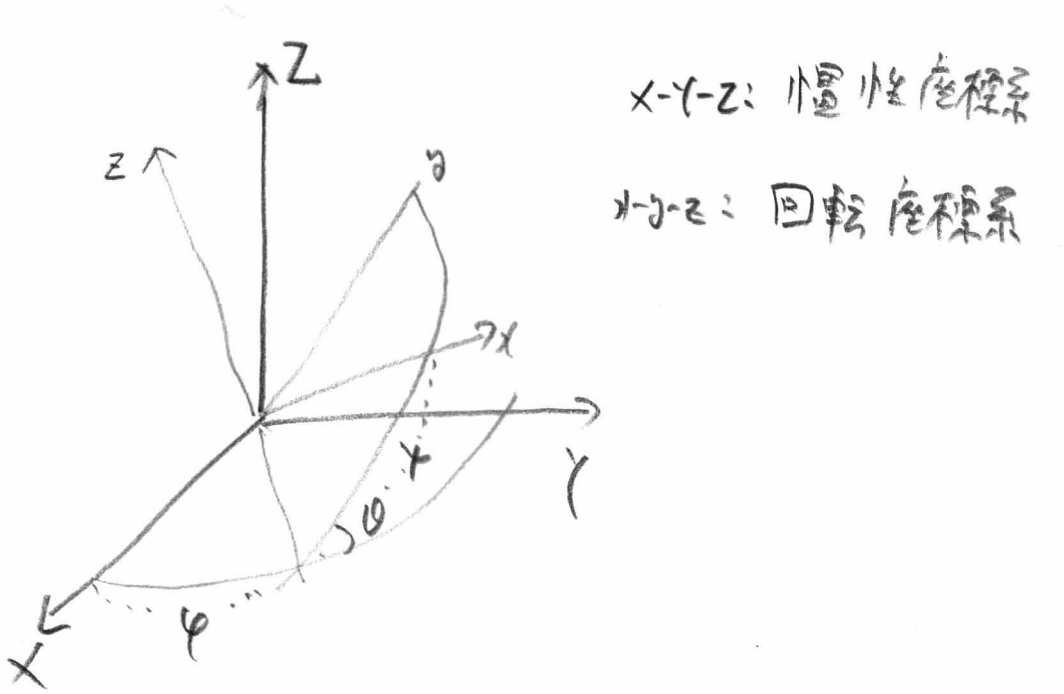

Figure 6: 座標系の関係

回転座標系に準拠したハミルトニアン

$$K = F + E \tag{54}$$

F は慣性系でのハミルトニアンで E は回転系に準拠することによる附加項

$$E = -(\omega, \mathbf{L}), \qquad (括弧は内積) \tag{55}$$

ここで ω は座標系の回転を表す回転ベクトル、$\mathbf{L}$ は回転座標系に準拠した角運動量ベクトル.

上記ハミルトニアンは質点の運動、剛体の回転運動にも適用できる.

(上式の導出は
Kinoshita,H.:1993, Motion of the Orbital Plane of a Satellite due to a Secular Change of the of the Obliquity of its Mother Planet, *Celest.Mech.*, **57**, 359-368.

Kinoshita,H.:2003, A Note on Secular Resonance,in *Proc. 34th symp. Celest. Mech. ed. Kokubo et al.*,in press.)

応用：惑星の長期の回転運動

惑星の軌道面は惑星間相互作用で数万年から数百万年の長周期項の重ね合わせとして運動している.

太陽系不変面に準拠した惑星の軌道傾斜角を I_p, 昇交点経度を Ω_p とする.

$$p \equiv \sin I_p \sin \Omega_p, q \equiv \sin I_p \cos \Omega_p. \tag{56}$$

惑星永年摂動 (Brouwer and Clenence 1961) より

$$p = \sum_{j=1}^{7} N_j \sin(s_j t + \delta_j), q = \sum_{j=1}^{7} N_j \cos(s_j t + \delta_j) \tag{57}$$

附加項 $E(I_p < 1)(\phi = \Omega_p, \theta = I_p, \psi = -\Omega_p)$ は

$$E = G \sin I \sum_{j=1}^{7} N_j s_j \cos(s_j t + \delta_j - h) \tag{58}$$

永年摂動

$$K^* = F^* = -\frac{1}{4}(1 - \frac{3}{2}\sin^2 J)\frac{C-A}{C} n^2 (1-e^2)^{-3/2}(3\cos^2 I^* - 1) \tag{59}$$

回転する軌道面に準拠した歳差運動は

$$\frac{dh^*}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial H^*} = \alpha \cos I^*, \tag{60}$$

$$h^* = \alpha \cos I^* t + h_0^*, \tag{61}$$

$$\alpha = -\frac{3}{2}\frac{C-A}{C}\frac{n^2}{\omega}(1-e^2)^{-3/2} \tag{62}$$

周期摂動

長周期運動は E より出てくる.
昇交点の運動

$$\Delta h = \frac{1}{\sin I^*} \sum_{j=1}^{7} \frac{N_j s_j (\alpha - s_j \cos I^*)}{(s_j - \alpha \cos I^*)^2} \sin(s_j t + \delta_j - h^*). \tag{63}$$

軌道面に準拠した軌道傾斜角の長周期変動

$$\Delta I = -\sum_{j=1}^{7} \frac{N_j s_j}{s_j - \alpha \cos I^*} \cos(s_j t + \delta_j - h^*). \tag{64}$$

不変面に準拠した軌道傾斜角の長周期変動

$$\Delta I' = -\sum_{j=1}^{7} \frac{\alpha N_j \cos I^*}{s_j - \alpha \cos I^*} \cos(s_j t + \delta_j - h^*). \tag{65}$$

詳しくは

Kinoshita,H.:2003, A Note on Secular Resonance,in *Proc. 34th symp. Celest. Mech. ed. Kokubo et al.*,in press.)