

4重の対称性をもつ Non-Twist写像の周期軌道

山口喜博（帝京平成大学）

谷川清隆（国立天文台）

天体力学N体力学研究会：箱根 2004年3月

Harper写像 $a, b \in \mathbb{R}^1$

$$y_{n+1} = y_n + a \sin x_n \pmod{2\pi}$$

$$x_{n+1} = x_n + b \sin y_{n+1} \pmod{2\pi}$$

静止磁場と変動電磁場のかかった周期ポテンシャル中の
電子のハミルトニアンから導出 (Harper, 1955)

$$a = b, a = -b$$

これらの場合には4重の対称性がある

ここで扱う写像 $a = b > 0$

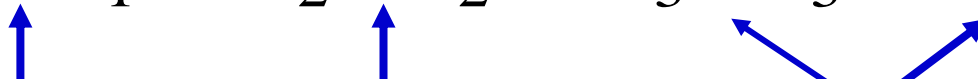
二重サイン写像 (Harper写像の特殊な写像)

$$x \in S^1, y \in R^1$$

$$T \begin{cases} y_{n+1} = y_n + f(x_n) \\ x_{n+1} = x_n + f(y_{n+1}) \end{cases} \quad a > 0$$

$$f(x_n) = a \sin x_n, f(y_{n+1}) = a \sin y_{n+1}$$

対合による分解

$$T = H_1 \circ G_1 = H_2 \circ G_2 = H_3 \circ G_3 = H_4 \circ G_4$$


左右の対称性、上下の対称性、斜めの対称性

左右の対称性

$$H_1 \begin{cases} x \leftarrow f(y) - x \\ y \leftarrow y \end{cases} \quad G_1 \begin{cases} x \leftarrow -x \\ y \leftarrow y + f(x) \end{cases}$$

対称線 $H_1 : 2x = f(y), 2x = 2\pi + f(y)$

$$G_1 : x = 0, \pi$$

上下の対称性

$$H_2 \begin{cases} x \leftarrow x - f(y) \\ y \leftarrow -y \end{cases} \quad G_2 \begin{cases} x \leftarrow x \\ y \leftarrow -y - f(x) \end{cases}$$

対称線 $H_2 : y = 0, \pi$

$$G_2 : y = -f(x)/2, \pi - f(x)/2$$

右斜めの対称性

$$H_3 \begin{cases} x \leftarrow \pi - y \\ y \leftarrow \pi - x \end{cases} \quad G_3 \begin{cases} x \leftarrow \pi - y - f(x) \\ y \leftarrow \pi - x - f(y + f(x)) \end{cases}$$

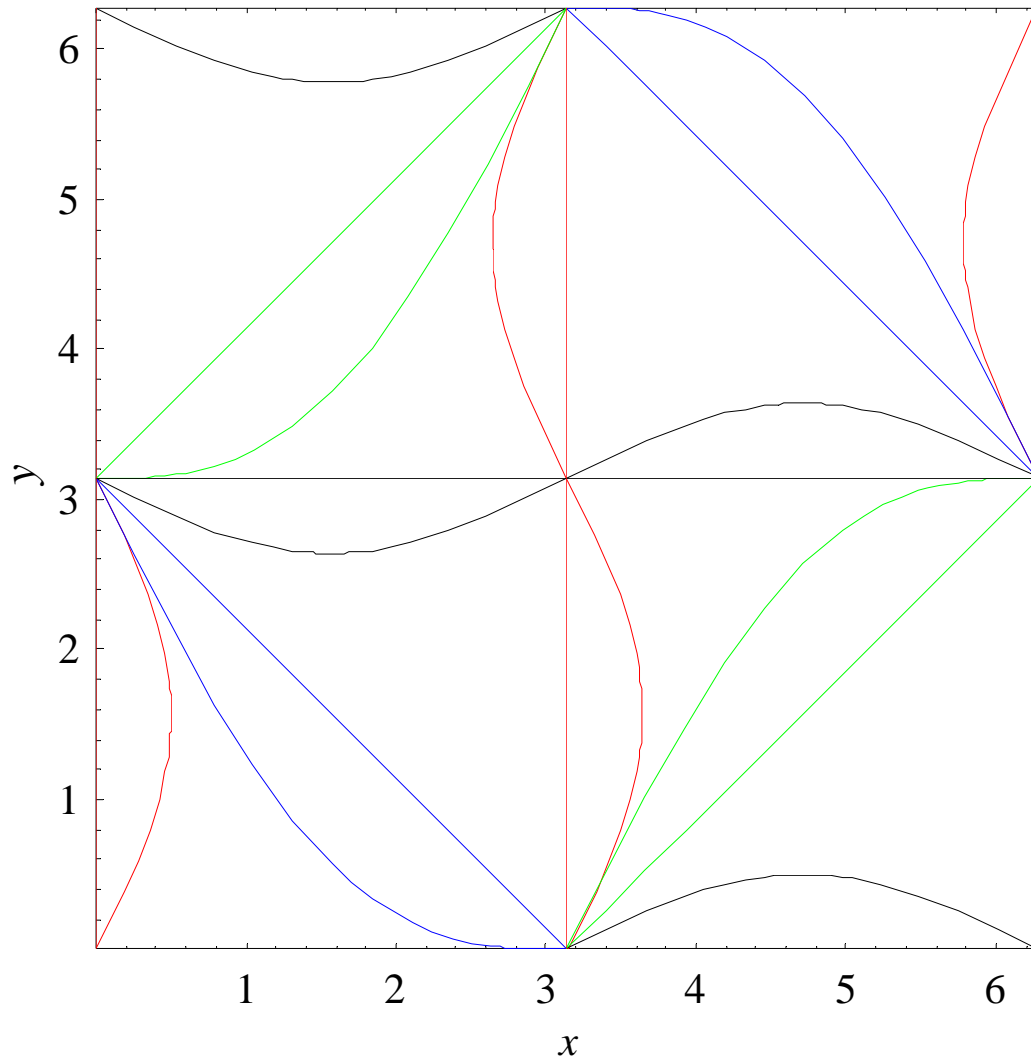
対称線 $H_3 : y = \pi - x, G_3 : y = \pi - x - f(x)$

左斜めの対称性

$$H_4 \begin{cases} x \leftarrow y - \pi \\ y \leftarrow x + \pi \end{cases} \quad G_4 \begin{cases} x \leftarrow y + f(x) - \pi \\ y \leftarrow x + f(y + f(x)) + \pi \end{cases}$$

対称線 $H_4 : y = x + \pi, G_3 : y = x - f(x) + \pi$

対称線



赤:左右

黒:上下

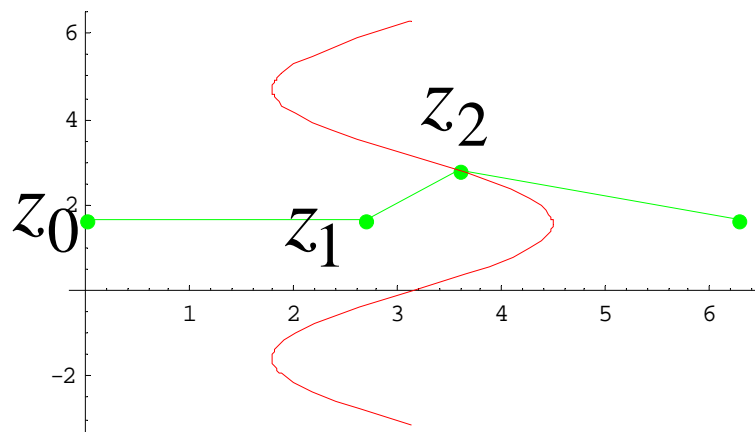
青:左斜め

緑:右斜め

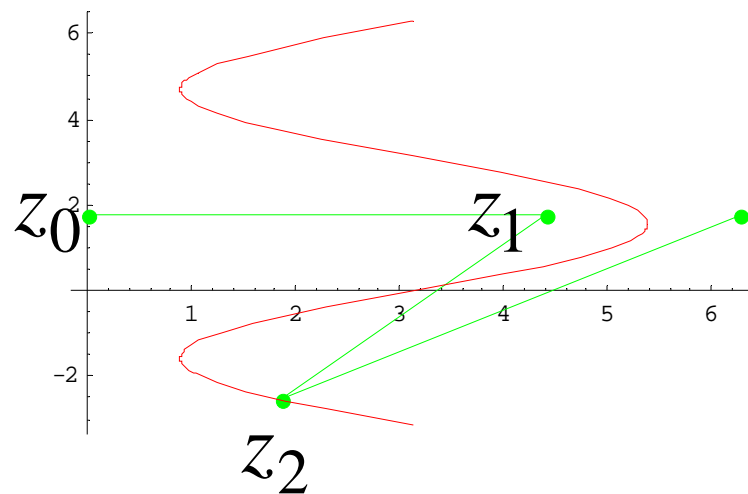
1重対称性(左右)周期軌道

加速モード: x 方向への異常拡散に寄与

左右

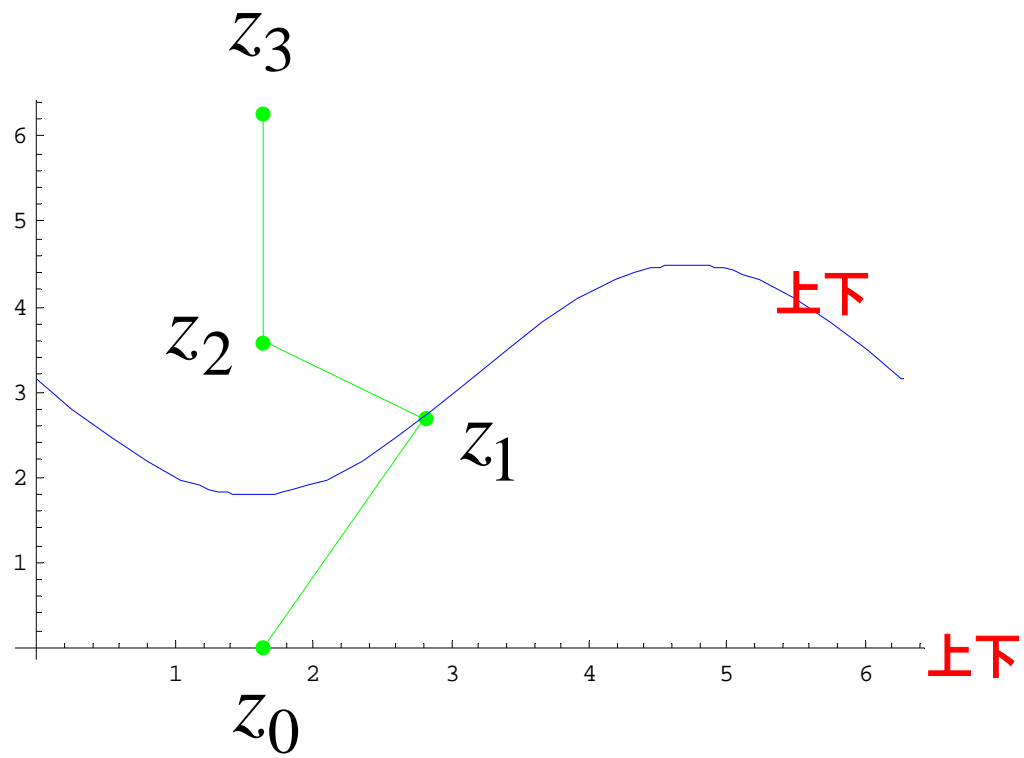


左右



1重対称性(上下)周期軌道の例

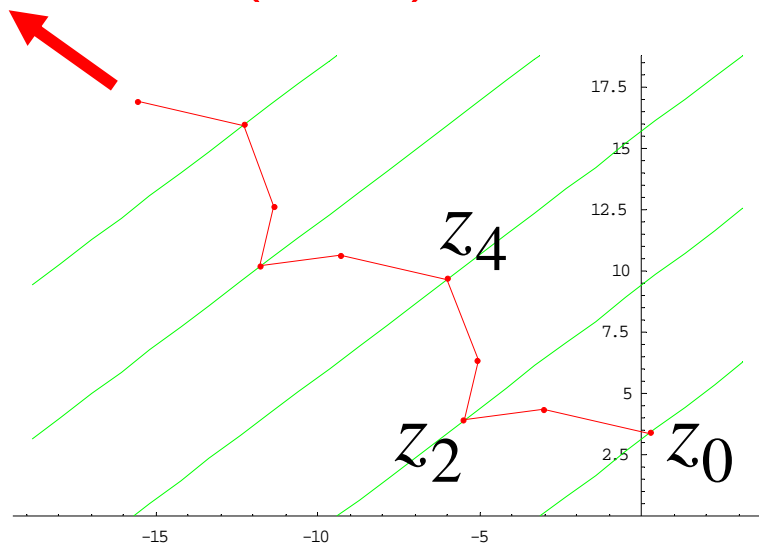
加速モード: y 方向への異常拡散に寄与



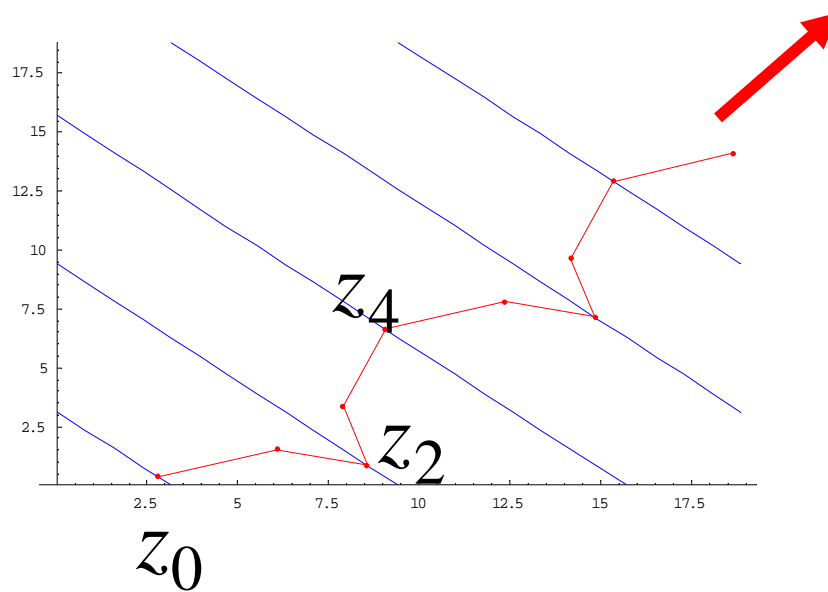
1重対称周期軌道の例

加速モード x 、 y 方向への異常拡散

(右斜め)

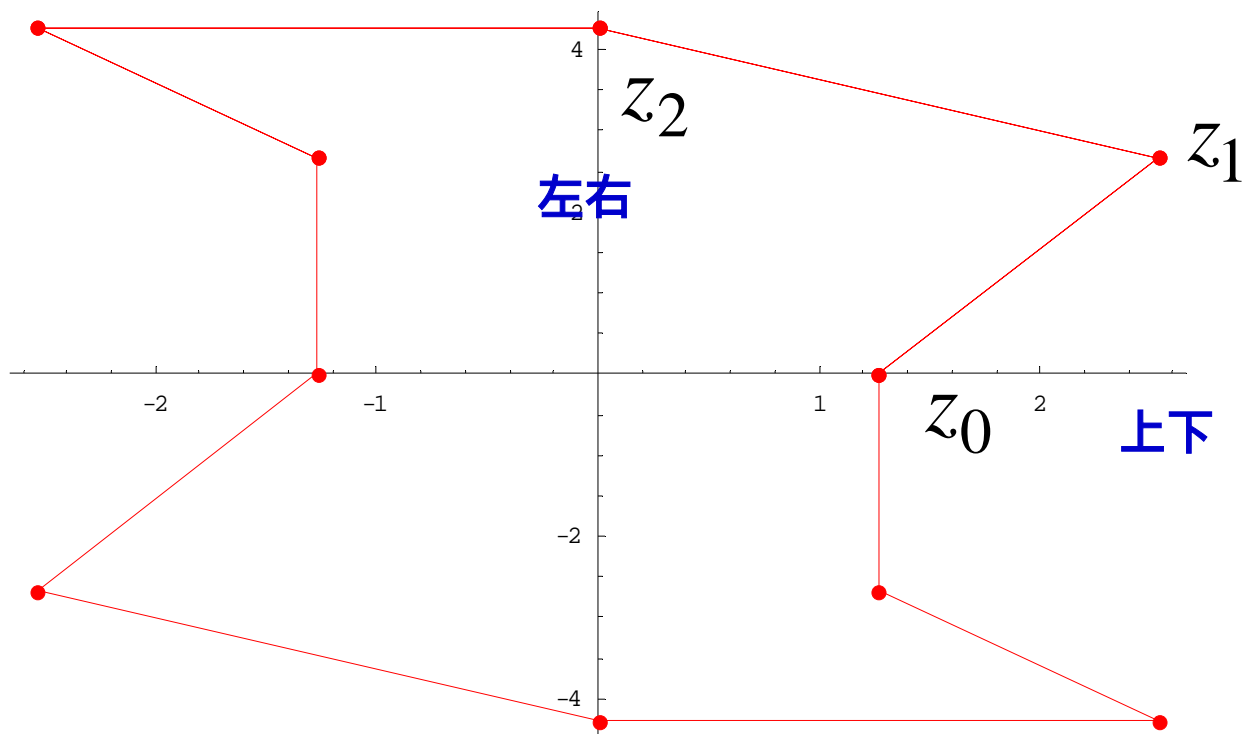


(左斜め)



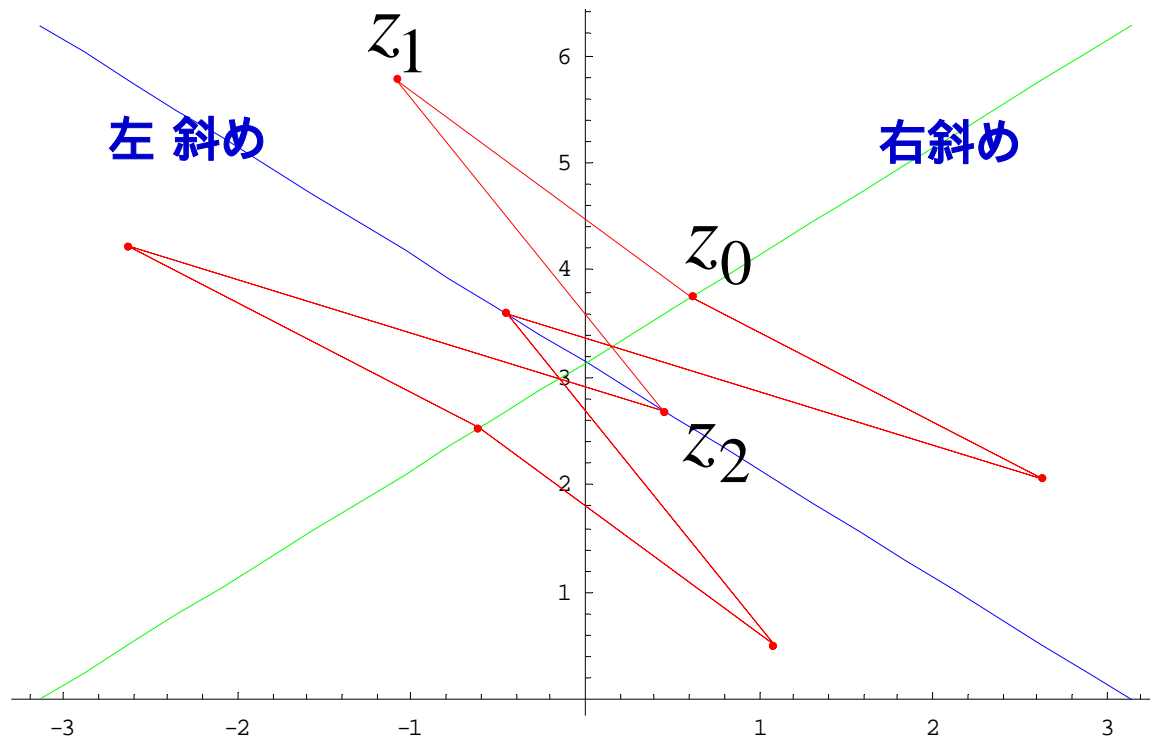
2重対称周期軌道の例

「上下」 「左右」



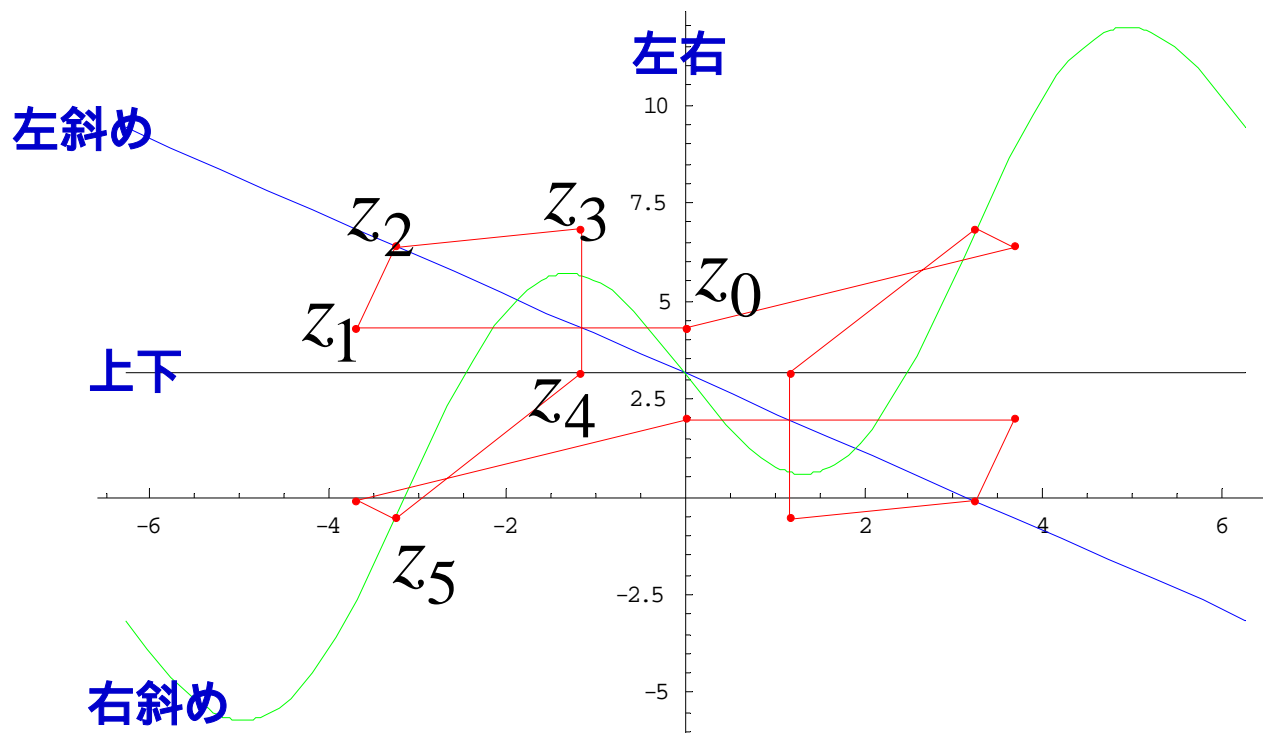
2重対称周期軌道の例

右斜め 左斜め



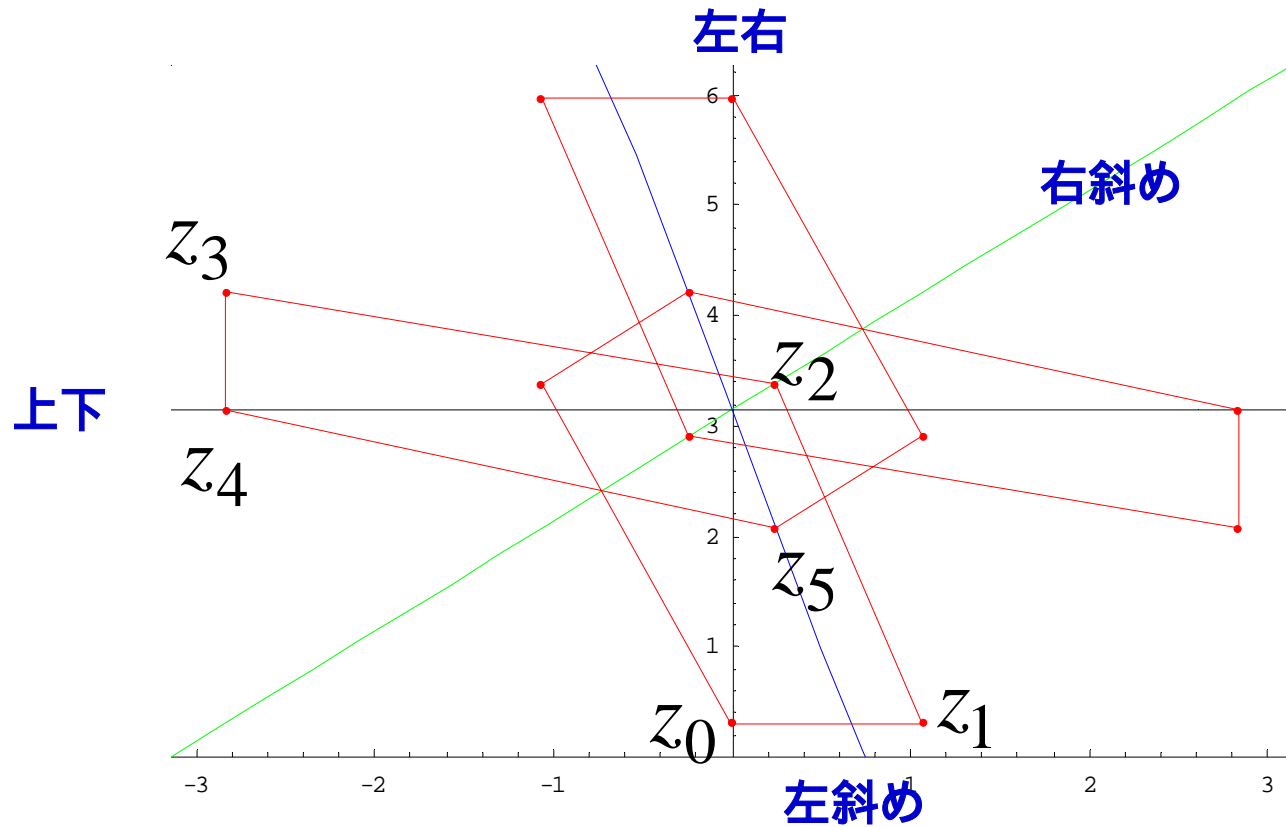
4重対称周期軌道の例

左右 左斜め 上下 右斜め



4重対称周期軌道の例

左右 右斜め 上下 左斜め



まとめ

- (1) 1重, 2重, 4重対称周期軌道
これらの軌道の分類(詳細は集録を見てください)
- (2) 楕円点から分岐して生じる周期解は除くと、周期解は「サドルノード分岐」によって生じる

課題

- (1) **Birkhoff型**、**NonBirkhoff型** という分類が、ノンツイスト写像で意味があるのか？
- (2) 「**サドルノード分岐**」で生じた対称周期点はどこにあるのか？
これらの出現順序関係？