

星形成・星間現象のための輻射流体コードの開発

総合研究大学院大学 物理科学研究科 天文科学専攻

国立天文台 理論研究部

富田 賢吾

tomida@th.nao.ac.jp

目次

第 1 章	星形成の数値シミュレーション	9
1.1	低質量星形成シミュレーション	9
1.2	多次元への拡張とバロトロピック近似	12
1.3	バロトロピック近似の影響	15
1.4	これまでの研究	19
第 2 章	輻射流体力学	21
2.1	流体力学の基礎方程式	21
2.2	輻射輸送方程式とモーメント方程式	21
2.3	輻射流体力学の基礎方程式	23
第 3 章	輻射輸送の数値計算法	27
3.1	Flux Limited Diffusion Approximation	27
3.2	M_1 Closure Scheme	28
第 4 章	コード開発	31
4.1	時間推進 – 陰解法	31
4.2	計算の手順	34
4.3	各スキームの実装	36
4.4	Newton-Raphson 法	40
4.5	行列反転	43
4.6	テストと比較	44
第 5 章	ngmhd コードへの実装	57
5.1	多重格子法	57
5.2	時間推進の手順	58
5.3	多重格子法における輻射流体の計算	61

第 6 章	分子雲の重力収縮	65
6.1	球対称	65
6.2	回転のある場合	70
第 7 章	まとめと今後	79
7.1	まとめ	79
7.2	コードの拡張	79
7.3	科学的な対象	84
	参考文献	87

目次

1.1	一次元球対称輻射流体シミュレーションによる重力収縮するガス雲の進化。左上：温度、右上：密度、左下：動径方向の速度、右下：半径 R 内の質量。Masunaga & Inutsuka (2000) の Fig.1。	11
1.2	一次元球対称輻射流体シミュレーションによる重力収縮するガス雲の中心要素の密度-温度平面上での熱的進化トラック。Masunaga & Inutsuka (2000) の Fig.2。	12
1.3	三次元 SPH + FLD シミュレーションによる重力収縮する球対称なガスの密度-温度平面上での熱的進化。破線が Masunaga & Inutsuka (2000) から求められたポリトロプ関係式で、各色の線が各時刻でのスナップショットを表す。Whitehouse & Bate (2006) の Fig.4。	14
1.4	初期に回転と摂動を与えた Boss & Bodenheimer (1979) のモデル。図 1.3 と同様。Whitehouse & Bate (2006) の Fig.6。	14
1.5	Toomre の不安定条件を満たすが、Gammie の分裂条件を満たさない場合。円盤は乱流的になりその散逸によって安定に保たれる。Gammie (2001) の Fig.4。	17
1.6	Toomre の条件・Gammie の条件の両方を満たす場合。冷却が効率的なため重力不安定によってできた構造はそのまま分裂・収縮する。同論文の Fig.5。	17
3.1	Levermore & Pomraning (実線) と Minerbo (点線) の定式の比較。上：流束制限関数、下：(スカラー) エディントンファクター。Turner & Stone (2001)[47] の Fig.1。	29
4.1	格子境界 $i + \frac{1}{2}$ での流束の決め方	37
4.2	光学的に薄い場合の流束制限関数と流束。赤：流束制限関数 $\lambda(R) \times 3$ 、緑： F_r/cE_r	39

4.3	波面の伝播のテスト。実線： $dt = 0.1 \times \frac{\Delta x}{2c}$ 破線： $dt = \frac{\Delta x}{2c}$ 点線： $dt = 10 \times \frac{\Delta x}{2c}$ Turner & Stone (2001)[47] の Fig.7。	45
4.4	FLD による波面の伝播のテスト。赤： $dt = 0.1 \times \frac{\Delta x}{2c}$ 緑： $dt = \frac{\Delta x}{2c}$ 青： $dt = 10 \times \frac{\Delta x}{2c}$	47
4.5	M_1 Closure Scheme による波面の伝播のテスト。図 4.4 と同様。	48
4.6	FLD によるパルスのテスト。光学的に厚い場合。	50
4.7	M_1 Closure Scheme によるパルスのテスト。光学的に厚い場合	50
4.8	FLD によるパルスのテスト。光学的に薄い場合。	51
4.9	M_1 Closure Scheme によるパルスのテスト。光学的に薄い場合	51
4.10	FLD によるパルスのテスト。高解像度。光学的に厚い場合。	52
4.11	M_1 Closure Scheme によるパルスのテスト。高解像度。光学的に厚い場合	52
4.12	M_1 Closure Scheme によるビームのテスト。 $dt = dx/c$ として計算。 . .	54
4.13	M_1 Closure Scheme によるビームのテスト。 $dt = L_x/c$ として計算。 .	54
4.14	M_1 Closure Scheme によるビームの交差問題のテスト。交差点では系に 2 次以上の異方性があるためもはや M_1 Closure Scheme では正しく表現できない。	55
5.1	多重格子法の概念図。ある格子の内側の必要な領域に高解像度の格子を入れ子状に生成する。Ziegler & Yorke (1997) の Fig.2。	58
5.2	独立時間刻みの概念図。Matsumoto (2007) の Fig.2。	59
5.3	同期時間刻みの概念図。図 5.2 と同じ計算を行う場合、必要な計算回数が増加する。	59
5.4	nested-grid における時間刻みの取り方の影響のデモンストレーション。 $7.5 \times 10^{12} \text{cm} \leq x \leq 22.5 \times 10^{12} \text{cm}$ の領域に 2 倍解像度の高い格子を置いた。左の境界から 1000K の輻射場を入れて FLD で計算した場合の各時刻各格子における輻射温度の分布を示した。赤：粗い格子、 $t = dt$ 緑：粗い格子、 $t = 0.5dt$ 青：細かい格子、 $t = 0.5dt$ 、独立時間刻み（境界条件を $t=0$ と $t=dt$ からの時間内挿で求めた場合）紫：細かい格子、独立時間刻み（青を更に $t = dt$ まで進めた）灰：細かい格子、 $t = dt$ 、同期時間刻み（ $t = dt$ まで中間ステップを取らずに一度で進めた）	60
5.5	単純な体積平均操作の模式図。最高解像度の分布（赤）を最低解像度の格子（青）で見た時、格子点 $x = 2$ での値はその格子内の平均値ではあっても「その座標の値」の近似値にはなっておらず、結果勾配の評価は大きく変わってしまう。	63

6.1	球対称な重力収縮過程における密度プロファイルの進化	66
6.2	同、動径速度プロファイル	66
6.3	同、ガス温度プロファイル	67
6.4	同、輻射温度プロファイル	67
6.5	同、密度-温度平面での進化	68
6.6	Whitehouse & Bate (2006) の Fig.4 (再掲)	68
6.7	球対称な重力収縮過程におけるエントロピー $K = \frac{P}{\rho^\gamma}$ の分布の進化 . . .	69
6.8	$n = 28800$ における各レベルでの密度の等値面の図。pc スケールから AU 以下のスケールまで破綻なく一度に取り扱うことができることを示している。回転によって支えられた円盤状の First Core や重力不安定性で生じた渦状腕などの構造がわかる。	70
6.9	$l = 14$ 段目の格子における $x = 0$ 断面の密度分布と速度分布 (矢印)。一辺の長さは縦・横ともに $L \simeq 10\text{AU}$ (以下同様)	71
6.10	$l = 14$ 段目の格子における $z = 0$ 断面の密度分布。 $m = 2$ のスパイラルモードがはっきりと認められる。	71
6.11	$l = 14$ 段目より内側の格子におけるガス温度分布の断面図。	72
6.12	$l = 14$ 段目より内側の格子におけるガスのエントロピー ($K = P/\rho^\gamma$) 分布の断面図。	73
6.13	y 軸に沿った密度分布。 $l=14$ の格子が覆う領域を青線で示した (以下同様)	74
6.14	z 軸に沿った密度分布	74
6.15	y 軸に沿ったガス温度分布	75
6.16	z 軸に沿ったガス温度分布	75
6.17	y 軸に沿った輻射温度分布	76
6.18	z 軸に沿った輻射温度分布	76
6.19	y 軸に沿ったエントロピー分布	77
6.20	z 軸に沿ったエントロピー分布	77
6.21	y,z 軸に沿った密度-温度平面のスナップショット	78
7.1	横軸：磁場 縦軸：初期回転の強さとした時の回転磁気雲の分裂の様子。パネルの色によって青：軌道長半径大 赤：軌道長半径小 緑：分裂せず 灰：収縮せずに分類されている。回転と磁場の強さが分裂に与える影響が鮮明に見えている。Machida et al. (2008) の Fig.5.	85
7.2	First Core のサブミリ波による観測予測。Saigo et al. in prep.	86

概要

星形成や星間現象等の分野は ALMA や HiCIAO 等の次世代大型観測計画の重要なターゲットであり、今後十年で大きな進展が期待される分野である。これらの観測計画に合わせ、観測と直接比較できるような、今までよりも精密かつ現実的な理論モデルを構築することが要求されている。

我々のグループでは主に星形成現象を対象に MHD シミュレーションを用いて研究に取り組んできたが、これまでのシミュレーションコードではガスの熱的進化をバロトロピック近似によって取り扱っていた。これはガスの熱的進化を支配する輻射輸送の効果を取り入れることがこれまでの計算機資源の制限から困難であったためであるが、近年輻射流体力学シミュレーションの結果によりこの近似が妥当でないことが示されている [49]。また、これまでの計算コードでは大質量星などの輻射が支配的な現象を取り扱うこともできなかった。そこでより現実的にガスの熱的進化を取り扱ったより精密なモデルを構築するため、またこれまでよりも幅広い現象を対象とした研究を行うため、これまでのプログラムを拡張し輻射輸送を組み込んだシミュレーションコードの開発を行った。輻射輸送の解法にはモーメント方程式に基づくスキームとして Flux Limited Diffusion Approximation 及び M_1 Closure Scheme を採用し、性能及び精度の評価を行った。その結果 M_1 Closure Scheme には大きな科学的・数値的な優位性があるものの、現時点では計算時間と安定性の観点から FLD の方が妥当であると判断し、これを多重格子磁気流体シミュレーションコードに実装した。多重格子と組み合わせることにより幾つかの問題が発生するが、これを回避して尤もらしい結果を得られるコードを開発することができた。

このような輻射流体力学シミュレーションは従来はその大きな計算量のために現実的問題に適用するのは困難であった。しかし近年では、宇宙物理学や流体力学研究の進展及び計算機技術の急速な発展により、計算物理学の最先端の課題として精力的に取り組まれるようになってきている。輻射輸送を取り入れることでコードの適用範囲は大幅に広がるため、このようなツールを開発することは星形成現象の研究に限らず重要である。

この中間レポートはこれまでのコード開発についての報告であり、以下のような構成からなる：まず第 1 章は導入であり、これまでのシミュレーションとその問題点について概観し、輻射流体シミュレーションの必要性について説明する。第 2 章では取り扱う輻射流体力学の基礎方程式系を整理する。第 3 章では輻射輸送の数値的に取り扱うスキームについて述べ、続く第 4 章でその実装とテストについて説明する。実際の問題に適用するための ngmhd コードへの実装について第 5 章で説明し、更に第 6 章で preliminary ではあるが幾つかの計算結果を示す。最後に第 7 章でまとめと今後のコードの開発方針及び科学的対象について記す。

第 1 章

星形成の数値シミュレーション

星形成は pc スケールの分子雲コアが輻射でエネルギーを放出しながら重力で収縮し AU 以下のスケールの原始星を形成するという、非常に大きなダイナミックレンジと複雑な物理過程を伴う現象である。これを取り扱うために我々のグループでは (ii) 少ない計算量で (必要な領域だけ局所的に) 高解像度を実現する nested-grid^{*1} (または Adaptive Mesh Refinement; AMR^{*2}) (iii) 磁場 (MHD^{*3}) (iv) 自己重力を取り入れたシミュレーションコード: ngmhd コード (開発: 松本倫明氏 (法政大学)) を用いて研究を行ってきた。しかしこれまでの計算ではガスの熱的進化についてはバロトロピック近似^{*4}によって取り扱っており、これがこのコードの大きな制約となっていた。以下、これまでの低質量星形成シミュレーションの概要とその熱的進化の取り扱いの問題点について述べる。

1.1 低質量星形成シミュレーション

まず、低質量星形成の研究について概要を述べる。低質量星形成、特に自己重力による収縮過程については古くから解析的・数値的に研究がなされてきた。数値シミュレーションによる研究は初期には一次元球対称で始められたが、のちに二次元・三次元へと拡張され、さらに磁場などの物理過程の効果も取り入れられてきた。従来の多次元の計算では輻射輸送の効果を取り入れるのは困難なため、一次元の輻射流体計算の結果から作ったポルトローブ関係式で近似的にその効果を取り扱ってきた。これを理解するためにまず一次元球対称輻射流体シミュレーションによる星形成現象の概要を説明する。

^{*1} 多重格子法: 複雑な構造ができると予想される位置に必要な応じて細かい格子を生成して実効的に高い解像度を実現する手法。AMR の簡易版の一種と言える。[56]

^{*2} 解適合細分化格子法: 計算領域中の任意の場所に必要な応じて細かい格子を生成することで高解像度の計算を行う手法。近年積極的に研究・開発されている。[4, 26]

^{*3} Magneto-Hydrodynamics

^{*4} barotropic: 圧力 (または温度) が密度のみの関数で書けるという近似。

星形成現象の一次元球対称での計算は昔から行われてきた。その中で重要なのは Larson (1969)[19] 及び Winkler & Newman (1980a,b)[51, 52] の研究であるが、ここではこれまでになされた研究の中で最も精密なモデルと考えられる Masunaga & Inutsuka (2000)[25] の結果に基づいて説明する。なおこれらの研究はその解像度や輻射の取り扱いなどで違いがあるものの、系の大局的進化についてはほぼ同一の結果が得られており、球対称下での低質量星形成のモデルについては良い理解が得られていると考えられている。

1.1.1 一次元球対称輻射流体シミュレーション

Masunaga & Inutsuka (2000) は一次元球対称な流体シミュレーションに周波数依存性も含めた輻射輸送計算を組み合わせた研究である。彼らはこの研究から原始星からの放射スペクトルなど様々な情報を示しているが、ここでは単に一次元の星形成シミュレーションの概要についてだけ述べる。彼らは初期に一様な密度 $\rho = 1.415 \times 10^{-19} \text{ g cm}^{-3}$ とほぼ $T \simeq 10\text{K}$ の温度^{*5}を持つ半径 $R = 10^4 \text{ AU}$ の $1M_{\odot}$ の分子雲コアの進化を計算した。各物理量の進化のスナップショットを図 1.1 に、密度-温度平面上での中心要素の熱的進化トラックを図 1.2 に示す。

図 1.2 において横軸は中心密度 ρ_c 、縦軸は中心温度 T_c であるが、横軸は時間と読み替えてもよい。 $\rho_c < 10^{-13} \text{ g/cm}^{-3}$ の収縮の初期は分子雲全体がダストの熱放射に対して光学的に薄いためほぼ等温的に進化する ($\gamma \simeq 1$)。ガス球の重力収縮する条件は $\gamma < \frac{4}{3}$ ($\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ は比熱比) であるため、この段階ではガスは暴走的に収縮する ("first collapse")。この過程は Larson-Penston の自己相似解 [19, 32] で良く記述できることが知られている (図 1.1 の 1~3 の時期)。中心密度が $\rho_c > 10^{-13} \text{ g/cm}^{-3}$ に達すると中心部のコアが光学的に厚くなるため $T\rho^{1-\gamma} = \text{constant}$ ($\gamma \sim \frac{7}{5}$; 水素分子の比熱比^{*6}) の線に沿って断熱的に進化する。この段階ではガスは圧力で支えられた断熱的なコアを形成する ("first core": 4~6)。これ以後の中心要素の進化は降着率とガスの化学的性質 (より高密度高温では核物理的性質) によって決まる。断熱コアは周囲からの降着によって中心温度が上昇していき、 $T_c \simeq 2000\text{K}$ に達すると水素分子の解離反応が始まる。この反応は吸熱反応であるため状態方程式が柔らかくなり、実効的に $\gamma \leq \frac{4}{3}$ ^{*7} となって再び収縮を始める ("second collapse": 6~7)。解離反応の終了とともに再びガスは断熱的となってコアを形成し ("second core", "protostellar core": 8~9) 以後は降着によって進化し、原始星段階を経て主系列へと進化する (主降着期)。

^{*5} 彼らの計算では外部境界から 10K の放射を入れるのではなく、外部境界条件は宇宙背景輻射に対応する 2.73K の黒体輻射とし、中心部で 10K 程度になるように宇宙線起源の様な加熱を与えている。そのため初期の等温的に進化する段階においても全域が常に 10K に保たれているわけではない。このことは定性的な進化には影響しないが、定量的な議論の際には注意すべき点である。

^{*6} 低温な初期段階では衝突で回転遷移を励起できないため、並進自由度のみが比熱に寄与し $\gamma \sim \frac{5}{3}$ となる。

^{*7} この段階では $\gamma \simeq 1.1$ になることが知られている。

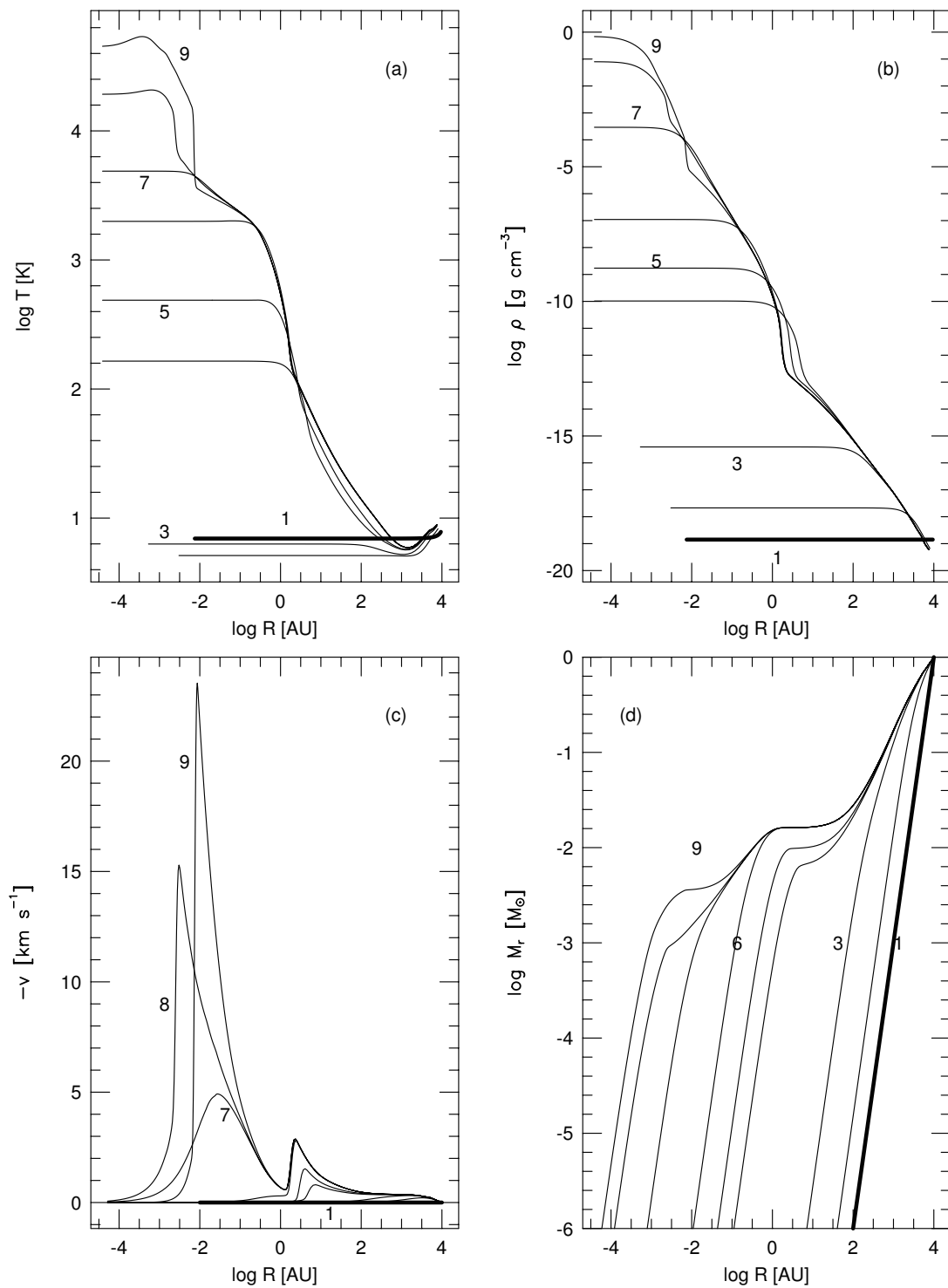


図 1.1 一次元球対称輻射流体シミュレーションによる重力収縮するガス雲の進化。左上：温度、右上：密度、左下：動径方向の速度、右下：半径 R 内の質量。Masunaga & Inutsuka (2000) の Fig.1.

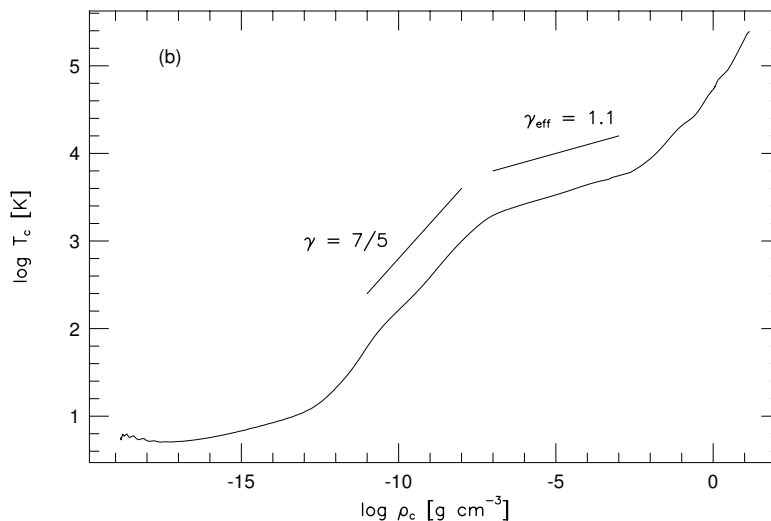


図 1.2 一次元球対称輻射流体シミュレーションによる重力収縮するガス雲の中心要素の密度-温度平面上での熱的進化トラック。Masunaga & Inutsuka (2000) の Fig.2。

1.2 多次元への拡張とバロトロピック近似

上に見たように一次元球対称の下では非常に精密な数値モデルが構築されてきたが、実際の星形成の問題には多次元性の効果が重要となる。星形成の母体となる分子雲コアは CO などの分子輝線による観測から非零の角運動量を持っていることが分かっている。分子雲コアから原始星に至るまでに自己重力によって半径で 5 桁にも及ぶ収縮過程を経るため、初期には小さな角運動量であっても十分に収縮を妨げることができ、遠心力で支えられた円盤を作る。そのため現実的な星形成の状況を考えると、この角運動量を如何に輸送するかが重要な問題となる。角運動量輸送を担う過程としては自己重力不安定によって形成される非軸対称的な構造による重力トルクや、磁場を介した Magnetic-Braking 及び Outflow による角運動量放出などが存在する。これらを取り扱うために自己重力を取り入れた多次元の MHD シミュレーションを用いた研究がなされ、一次元の場合とは定性的に異なる多数の興味深い結果をもたらした [45, 28]。

1.2.1 バロトロピック近似

輻射輸送の計算は一般に非常に計算量が多く、多次元の流体力学計算と組み合わせるには従来の計算機資源では困難であった。そこで上にあげたようなこれまでの多次元計算では、前出の Masunaga & Inutsuka (2000) などの一次元輻射流体力学シミュレーショ

ンによる重力収縮するガス雲の中心要素 (ρ_c, T_c) の進化から求めたポリトロープ関係 $P = P(\rho)$ (図 1.2) を全域 (ρ, T) に適用することで、近似的に輻射の効果を取り入れてガスの熱的進化を取り扱っていた。これは大まかに言ってガスはダストの熱放射に対して光学的に厚くなるある密度までは等温的に進化し、そこからは状態方程式に従って断熱的に進化するという描像になっている。この近似は計算機資源の制約の中で計算を行うには必要な現実的手法であるが、次のような問題点がある。

- ガスは要素毎に異なるエントロピーを持つため、全域に同じポリトロープ関係 (= エントロピーが同じ) を適用できるという保証はない。
- この近似では局所的な情報だけでガス要素の状態が決まるが、実際には周囲の要素からの影響を受ける。
- 輻射輸送を解いていないため輻射が重要な問題にはそもそも適用できない。
- 球対称で求められたポリトロープ関係がそれ以外の場合に適用できるかどうかは自明ではない。
- 問題設定に合わせてポリトロープ関係を作り直す必要がある。

このため、この近似では(中心以外の)ガスの熱的進化については正しく取り扱えていない可能性がある。バロトロピック近似の妥当性を調べるためにはガスのエントロピー分布を調べればよいが、Masunaga & Inutsuka (2000) ではエントロピー分布については言及されていない。そこで、SPH^{*8}に grey 近似^{*9}の FLD^{*10}を組み合わせた輻射流体力学シミュレーションを星形成過程に適用した研究である Whitehouse & Bate (2006)[49]において、Masunaga & Inutsuka (2000) と同等のセットアップ (Boss & Myhill (1992)[8] の初期条件: $\rho = 1.7 \times 10^{-19} \text{ g cm}^{-3}$, $T = 10\text{K}$, $R = 10^4 \text{AU}$, $M = 1.2M_{\odot}$ の一様球^{*11}) で計算した結果を図 1.3 に示す。

破線は Masunaga & Inutsuka (2000) の計算結果の中心要素の進化から求められたポリトロープ関係式であり、各色の線が各時刻でのガスの分布のスナップショットを表している。バロトロピック近似を課すということは全てのガス要素がこの破線に沿って進化することを意味する。逆にいえば、この破線からのずれがバロトロピック近似の破れの大きさを表している。彼らの結果によれば、中心要素の進化はポリトロープ関係で良く記述できる(これは FLD で輻射輸送がある程度正しく計算できていることを意味するとも考えられるが、中心要素については単にある密度以降は断熱的に進化するだけであるため、光

*8 Smoothed Particle Hydrodynamics: 流体力学方程式を有限個の粒子の運動として記述する有限要素法の一つ。密度の高い (= 粒子数の多い) 領域で自然に高い解像度が得られるため重力収縮の計算にはよく用いられる。

*9 周波数については積分して 1 成分の熱放射として取り扱う近似。

*10 流束制限拡散近似: 0 次のモーメント方程式に基づく輻射輸送の近似解法。第 3 章で詳述する。

*11 Masunaga & Inutsuka (2000) と比べるとやや質量が大きいが定性的には違いはない。

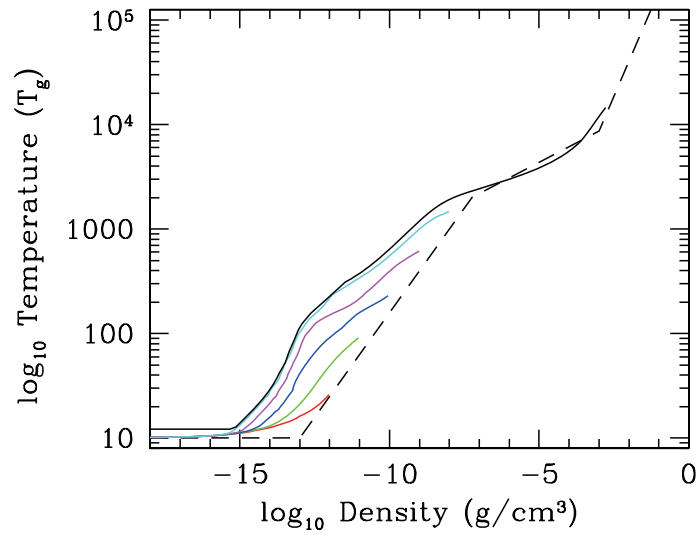


図 1.3 三次元 SPH + FLD シミュレーションによる重力収縮する球対称なガスの密度-温度平面上での熱的進化。破線が Masunaga & Inutsuka (2000) から求められたポリトロップ関係式で、各色の線が各時刻でのスナップショットを表す。Whitehouse & Bate (2006) の Fig.4。

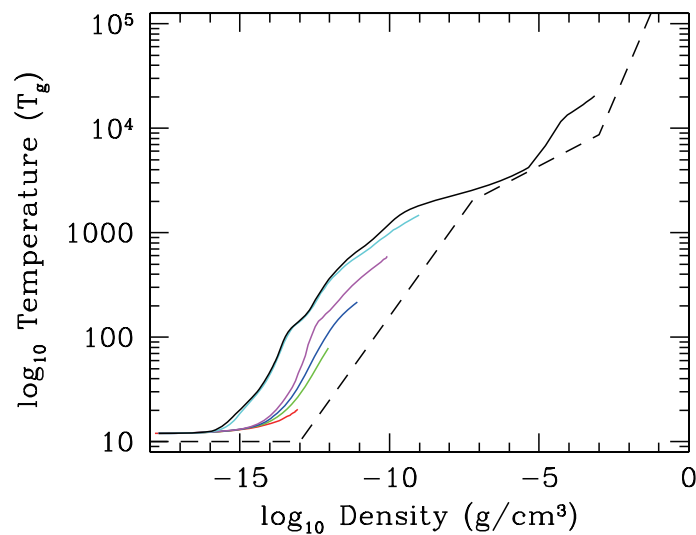


図 1.4 初期に回転と摂動を与えた Boss & Bodenheimer (1979) のモデル。図 1.3 と同様。Whitehouse & Bate (2006) の Fig.6。

学的厚さが正しく計算できているというほぼ自明の結果である)が、外側については適当でないことがわかる。同じ密度で見ればバロトロピック近似の場合と比べて温度が高くなる傾向があり、差が大きい所で温度が一桁異なっていることが分かる。

さらに、初期に二本腕の摂動と回転を入れたモデル (Boss & Bodenheimer (1979)[7] の初期条件: $\rho_0 = 1.44 \times 10^{-17} \text{g cm}^{-3}$, $\rho = \rho_0[1 + 0.5 \cos(m\phi)]$ ($m = 2$) の初期密度分布を持つ $T = 10\text{K}$, $R = 3.2 \times 10^{16} \text{cm} \simeq 2100\text{AU}$, $M = 1.0M_{\odot}$, $\omega = 1.6 \times 10^{-12} \text{rad s}^{-1}$ の剛体回転するガス球^{*12})での計算結果を図 1.4 に示す。このモデルではガス雲は分裂して連星系を形成する。このような非対称性が強い場合には球対称的な場合よりも更に近似が悪化しており、もはや最大密度の領域を含む全域でバロトロピック近似は妥当でないことが見て取れる。このように、バロトロピック近似はエントロピーの分布を正しく取り扱うことができず、その結果温度を過小評価する傾向があることがわかる。

1.3 バロトロピック近似の影響

バロトロピック近似は輻射が重要な系ではそもそも適用不可能であるが、前節でみたように輻射の重要性が自明でないような場合であってもガスの熱的進化を大きく誤ることが指摘されている。ただし、この近似が系の全体的な描像を変えてしまう程重大であるかは自明ではない。重力収縮問題を考える上では、特に系が球対称に近いような状況ではバロトロピック近似でも中心付近の熱的進化は適切に表現できており、その領域が系の全体的な進化において支配的であると考えればこの近似は正当化されうる。しかし、初期に有限の角運動量がありガスが円盤を形成するような場合にはこの近似は妥当でないことが予想される。ここでは、バロトロピック近似が対象とする系の全体的な振る舞いにどれくらい影響しうるかを(少し一般的に)考えてみる。

1.3.1 連星系形成条件

回転している分子雲コアが重力収縮する過程で分裂し連星系を形成する問題について考える。この問題は Machida et al. (2008)[23] や Saigo et al. (2008)[40] でバロトロピック近似を用いた 3 次元 MHD シミュレーションによる系統的な研究がなされており、かなり確立した描像が得られている。

自己重力的なガス雲が分裂する条件を最も簡単に評価する指標としては Jeans 質量が考えられる。Jeans 質量は温度 T の $3/2$ 乗に比例する。

$$M_J \sim \rho \lambda_J^3 \sim \rho (c_s t_{ff})^3 \propto \rho^{-1/2} T^{3/2} \quad (1.1)$$

^{*12} このモデルはかなり初期の密度が高く半径の小さい初期条件を置いている上に中心付近で非現実的に強い摂動が入っており、極端な状況設定になっているという点に留意する必要がある。

バロトロピック近似によって密度が同じ所で温度が（最悪の場合で）10 倍誤っていると、Jeans 質量はおよそ 30 倍も変わってくる。このことから単純に考えて、輻射流体計算を行うとバロトロピック近似を用いた場合よりも分裂しにくくなると推測される。これは最も大雑把な評価ではあるが、系の大域的な動的進化に熱的進化の取り扱いが大きく影響する可能性があることの一つの根拠になるであろう。

やや状況設定は異なるが、自己重力的円盤の分裂条件の評価が Gammie (2000)[13] によってなされている。彼はガスの冷却時間 τ_{cool} をパラメータとして 2 次元の局所的な shearing-shear^{*13} のシミュレーションを行い、 τ_{cool} の値による分裂条件を調べた。その結果、円盤が重力で分裂する条件として次の二つが必要であることを見出した：

(1) Toomre の不安定条件：

$$Q = \frac{c_s \Omega}{\pi G \Sigma} < Q_{crit} \sim 1 \quad (1.2)$$

(c_s は音速、 Ω は回転角速度、 G は重力定数、 Σ は質量面密度。 Q_{crit} は円盤の構造や状態方程式に依存する 1 程度の定数)

(2) 冷却時間が動的時間スケール (= 回転周期) より短い (所謂 Gammie criterion)：

$$\tau_{cool} \lesssim C(\gamma) \Omega^{-1} \quad (1.3)$$

($C(\gamma)$ は状態方程式に依存する 1 程度の定数) (1) の Toomre の条件は円盤が重力的に不安定になる条件であり、これを満たさない場合は円盤は安定なまま何も起こらない。(1) を満たし (2) を満たさない場合、円盤は重力不安定性により分裂・収縮しようとするが冷却が不十分で収縮できない。収縮のエネルギーは乱流に転換されて散逸し、円盤を加熱・安定化する ($Q \sim 1$ の状態が保たれる：図 1.5)。 (1) と (2) の両方を満たす場合には円盤は分裂・収縮する (図 1.6)。

これらの評価を現実的な系にそのまま適用することはできないにしても (例えば Gammie の系には質量の出入りがなく、円盤の垂直方向の構造も考慮していないため現実的な降着円盤とは対応しない。また、重力トルクによる角運動量輸送は本質的には非局所的であり shearing-shear 近似は必ずしも適切ではない)、自己重力的なガスが分裂する・しないというマクロな振る舞いがミクロな加熱・冷却の評価によって影響を受ける可能性が高いことを示していると言えるであろう。

^{*13} 円盤全域をシミュレーションすることは困難なので、その一部を取り出して計算するための手法。基本的には周期境界条件だが、動径方向の境界を超える際に回転に対応する速度を付与する ("shearing") ことで差動回転の効果を近似する。3 次元の場合は shearing-box と呼ぶ。

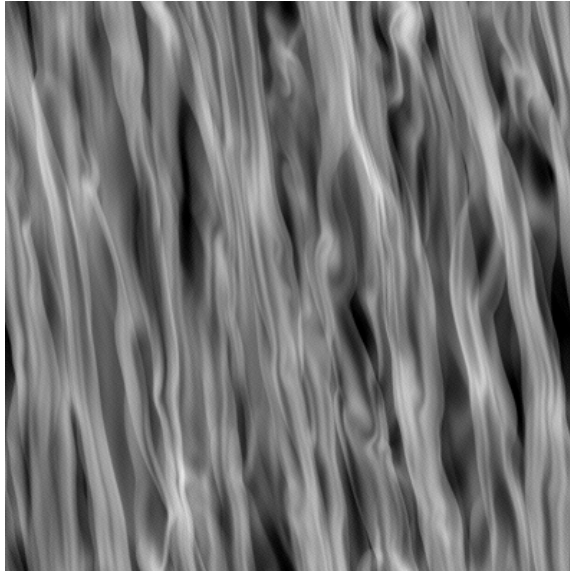


図 1.5 Toomre の不安定条件を満たすが、Gammie の分裂条件を満たさない場合。円盤は乱流的になりその散逸によって安定に保たれる。Gammie (2001) の Fig.4。



図 1.6 Toomre の条件・Gammie の条件の両方を満たす場合。冷却が効率的なため重力不安定によってできた構造はそのまま分裂・収縮する。同論文の Fig.5。

1.3.2 磁気拡散

磁場は星形成過程の角運動量輸送において重要な役割を果たすが、磁場が存在する状況下では更に別の過程によりバロトロピック近似の影響が現れる可能性がある。理想 MHD 近似による取り扱いの下では磁場は常に流体に凍結^{*14}して運動するが、実際の低温な星間ガスは電離度の低い弱電離プラズマでありこの近似は必ずしも適当でない。多くの状況下では理想 MHD 近似は良い近似になっているが、比較的低密度な領域では Ambipolar diffusion、高密度な領域では Ohmic dissipation などのメカニズムが働いて磁場とガスの結合が悪くなる領域が存在する。磁場の散逸を決める抵抗率は一般に密度と温度の関数であり、その値は Nakano et al. (2002)[30] で調べられている。Machida et al. (2006)[22] はそれを用いて実際の星形成過程におけるアウトフローとジェット生成について調べた研究であり、磁場の散逸の有無によってジェットの性質が変わることを指摘している。この計算もバロトロピック近似によって行われているため、輻射輸送を取り入れることによって温度分布が変われば結果に影響を及ぼす可能性がある。磁場の散逸は最終的に形成

*14 Frozen-In

される星に持ち込まれる磁場を決定する上でも重要な過程である。

また、原始惑星系円盤などの降着円盤の構造を考える際には角運動量輸送が重要であり、角運動量輸送を担う物理過程としては乱流による粘性が有力であると考えられている。その乱流の駆動機構として磁気回転不安定性 [2] (MRI; Magneto-Rotational Instability) が重要だが、その飽和する強度を決めるのは磁場の散逸であり、これは密度や温度に依存する。

このように (あくまで一般論としてではあるが) 非理想的な抵抗性 MHD シミュレーションにおいて重要となる抵抗率を正しく求めるためにも、輻射輸送計算によって温度分布を正しく求めることは重要となりうる。

1.3.3 渦度生成 – 乱流

以上の二つは温度の変化を介して輻射が動的進化に影響するという例であったが、実はバロトロピック近似ではそもそも取り入れることのできない流体力学的な素過程が存在する。外力のない流体力学の運動方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1.4)$$

の rotation を取る (両辺に $\nabla \times$ を作用させる) と

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p \quad (1.5)$$

となる ($\boldsymbol{\omega}$ は渦度ベクトル)。この右辺を baroclinic term と言い、密度と圧力の勾配によって渦度が生成される効果を表している。今、バロトロピック近似 (具体的な関数形に依らず、圧力 p が密度 ρ のみの関数として書ける場合) を考えると $p = p(\rho)$ より

$$\nabla p = \frac{dp}{d\rho} \nabla \rho \quad (1.6)$$

$$\nabla \rho \times \nabla p = 0 \quad (\nabla \rho // \nabla p) \quad (1.7)$$

となりこの項による渦度生成は起こらないことが示される (特に初期に渦度 0 の場合、時間発展させても渦が全く生成しない)。実際に星周円盤においてこの baroclinic な効果で生成された渦が角運動量輸送に寄与することが指摘されている [33, 34] ため、この効果を自然に取り入れるためにも輻射流体計算は重要となる。

1.3.4 まとめ – 輻射流体力学のモチベーション

以上のように、バロトロピック近似による熱的進化の取り扱いが系の全体的な進化に影響を及ぼす可能性がある。そのため、輻射輸送を取り入れて熱的進化を適切に取り扱うこ

とで、これまでとは異なる結果が得られるかもしれない。このような問題に取り組むため、そして将来的には例えば大質量星形成や原始惑星系円盤におけるスノーラインのような輻射が重要となる問題に研究対象を拡大するために、輻射輸送を取り入れた輻射（磁気）流体シミュレーションが重要となる。

このようなシミュレーションは主に計算機資源及び技術的な困難のため数年前まではあまり取り組まれてこなかったが、近年になって計算機資源の向上により現実的に計算が可能になり積極的に取り組まれつつある、いわばシミュレーション物理学の最前線の一つである。今の所まだこのようなコードは多くなく、特に AMR と組み合わせたものは数例しか存在しない。そのため現時点でこのようなコードを開発しそれを用いて研究を行うことは科学的に価値が高い。加えて、HiCIAO や数年以内に稼働する ALMA などの次世代大型観測計画に合わせ、これまでよりも精密な、観測と直接比較できるような理論モデルを提供することはまさに時代の要請であると言えるだろう。

1.4 これまでの研究

本論に入る前に、宇宙物理学における（多次元の）輻射流体シミュレーションコードの既存の実装について俯瞰しておく。

多次元輻射流体シミュレーションコードの初期の実装としては Stone, Mihalas, Norman らによる ZEUS-2D コード [44] が挙げられる。これは輻射輸送方程式を所謂 Short-Characteristics 法を用いて解いてエディントンテンソルを求める高度な実装ではあったが、1992 年当時の計算機資源では使い物にならない程計算コストが高かったようで、コードは公開^{*15}されていたもののこれを用いた論文は殆ど出ていない（輻射を除いた MHD コードとしての ZEUS-2D コードは広く使われ、そこから派生したコードが今日に至るまで利用されている）。

輻射輸送方程式に基づいて輻射輸送を解くことは非現実的に計算コストが高く、現在に至るまで流体と同時に輻射輸送を解く多次元の輻射流体力学シミュレーションには殆どの場合モーメント方程式に基づく手法が使われている（光源が点源かつ有限個で散乱が無視できるような場合には輸送方程式を解く場合もある）。0 次のモーメント方程式を解く FLD を用いた研究は古くから行われており、1995 年には既に Yorke & Kaisig [55] によって nested-grid と組み合わせた星周円盤に応用した研究がなされている。

Turner & Stone (2001) [47] は ZEUS-2D コードに FLD による輻射輸送モジュールを実装したという論文であり、現在でも FLD による輻射流体シミュレーションの実装の一つの基準になっている。ZEUS コードはその後更新され、現在は並列化された 3 次元の

^{*15} <http://www.astro.princeton.edu/~jstone/zeus.html>

輻射磁気流体シミュレーションコード ZEUS-MP[16] として公開^{*16}されている。

格子法以外の実装として SPH による流体シミュレーションに FLD を導入した Whitehouse & Bate[48, 50, 49] の例があり、低質量星形成や星団・褐色矮星形成の問題などに適用されている。

Krumholz らによる Orion コード [18] は非公開ではあるが AMR の輻射磁気流体コードの先進的な実装の一つと考えられる。このコードは輻射流体力学の定式化に mixed-frame を採用していることが特徴であり、更に相対論的に高次の項も取り入れている。彼らはこのコードを用いて乱流速度場の存在する状況下での大質量星形成のシミュレーションを行っている。

Los Alamos のグループによる RAGE コード [14] はおそらく現時点で最も高度な輻射流体シミュレーションコードの一つだろう。彼らのコードは多成分の流体や化学反応を扱えるだけでなく、輻射についても正確な解を得るために様々な工夫が凝らされている。この他にも公開されていないものの AMR に FLD を取り入れたシミュレーションプログラムの開発が各国の複数グループで行われているものと思われる。

一方、FLD 以外のモーメント法による実装として、1 次モーメントまで取り入れた M_1 Closure Scheme を実装した HERACLES コード [15] が発表されている。この手法については後 (第 3 章) で詳しく述べるが、FLD から比較的少ない計算量の増加で異方性のある問題に対して適用範囲を拡大することができるため、注目に値する。

このように輻射流体シミュレーションは近年盛んに取り組まれている宇宙物理学におけるシミュレーションの最先端の課題である。

^{*16} <http://lca.ucsd.edu/portal/codes/zeusmp2/>

第 2 章

輻射流体力学

2.1 流体力学の基礎方程式

まず以下の流体力学方程式から出発する。実際のシミュレーションには磁場や自己重力の効果が入り込んでいるが、ここでは簡単のために輻射と流体のみを取り扱う。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \mathcal{I}] = \mathbf{F} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{v}(e + p)] = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \Gamma - \Lambda \quad (2.3)$$

ここで ρ は質量密度、 \mathbf{v} は流体の速度、 p は流体の圧力、 e は流体の内部エネルギー密度であり、各式はそれぞれ順に連続の式（質量保存則）、運動方程式、エネルギー方程式である。右辺に現れる $\mathbf{F}, \Gamma, \Lambda$ は（単位体積あたりの）外力、加熱率、冷却率であり、これらについて輻射場との相互作用の場合の具体的表式を与える必要がある。一般には輻射だけでなく（自己）重力や磁場、宇宙線加熱や化学反応などの効果が入り、自己重力場のポアソン方程式や磁場の誘導方程式、気体の状態方程式などを組み合わせて、対象とする系を記述する閉じた方程式系を構成する。

2.2 輻射輸送方程式とモーメント方程式

輻射輸送の数値計算法は大きく二つに分けられる。一つは輻射強度 I_ν についての輻射輸送方程式

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu = j_\nu - (\kappa_\nu + \sigma_\nu) I_\nu + \sigma_\nu J_\nu \quad (2.4)$$

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega \quad (2.5)$$

(J_ν は mean intensity、 ν は振動数、 $j_\nu, \kappa_\nu, \sigma_\nu$ はそれぞれ放射率と吸収係数、散乱係数。ただし等方的な散乱を仮定している) を解く Long-Characteristics 法、Short-Characteristics 法、Monte-Carlo 法などの手法であり、もう一つは輻射輸送方程式を角度方向について積分したモーメント

$$E_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega \quad (2.6)$$

$$\mathbf{F}_\nu = \int \mathbf{n} I_\nu d\Omega \quad (2.7)$$

$$\mathcal{P}_\nu = \frac{1}{c} \int \mathbf{nn} I_\nu d\Omega \quad (2.8)$$

(E_ν は輻射エネルギー密度、 \mathbf{F}_ν は輻射エネルギー流束、 \mathcal{P}_ν は輻射圧テンソル。ここでは二次までのモーメントを示したがモーメントは無限に高次まで存在する) についてのモーメント方程式

$$\frac{\partial E_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_\nu = 4\pi j_\nu - c\kappa_\nu E_\nu \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_\nu}{\partial t} + c^2 \nabla \cdot \mathcal{P}_\nu = -c(\kappa_\nu + \sigma_\nu) \mathbf{F}_\nu \quad (2.10)$$

を解く手法である。

前者の輻射輸送方程式を解く方法は空間の各点・各方向について光線に沿った輻射輸送方程式を解くことで輻射強度 I を求め、そのモーメントを取ることで必要な輻射の物理量を計算する。これらの手法は原理的に正しいが、振動数について分割しないとしても輻射強度 I は空間3 + 方向2 = 5次元の独立変数に依る問題になり、計算量は空間の一次元方向の分割数を N とすると少なくとも $\mathcal{O}(N^5)^{*1}$ である(実際の問題は非線形なので、系全体が consistent な解を得るには iteration が必要であり、計算量は更に増大する)。一辺 N 点の三次元流体シミュレーション(計算量 $\mathcal{O}(N^3)$) と組み合わせることを考えると、これはあまりに計算量が多く到底現実的とは言えない。

そのため、流体力学と組み合わせた輻射流体力学シミュレーションには後者のモーメント方程式を解く手法が用いられることが多い。輻射が流体に及ぼす効果を $\mathcal{O}(\frac{v}{c})$ まで考慮すると、輻射流体力学方程式に現れるのは0次、1次、2次のモーメント $E, \mathbf{F}, \mathcal{P}$ だけである。流体の運動を正しく取り扱うには、輻射強度 I を計算する代わりにこれらの必要な量だけを求めることができれば十分であるというのがこの手法の考え方である。これらの輻射の物理量は三次元空間の各点で定義されており、流体と同じ空間離散化した格子点上で計算することができる。モーメント量はもはや方向には依らないため、解くべき問題は三次元の問題となって大幅に計算量を低減することができる。

*1 計算の支配的な部分にかかる計算量が N^5 に比例するという意味。

しかし、モーメント方程式は無限に高い次数まで存在し有限の次数では閉じた方程式系を構成することができない。低い次数の物理量だけで完結した方程式系を構成するには何らかの非自明な closure relation が必要となる。ボルツマン方程式から流体力学方程式を導出する際には気体の状態方程式を closure relation として用いることで閉じた方程式系を構成することができるが、輻射輸送方程式の場合は光子が無衝突であるために局所的な情報だけではこれらのモーメント量の間を決めることはできず、流体の場合程適用範囲の広い一般的な closure relation は存在しない。そのため、輻射の場合には限定された状況下で成立する近似を一般の状況にまで外挿した closure relation を用いて方程式系を構成するのが普通である。このような戦略を取った場合、近似が成立しない状況においてはもはや得られた解は正しくない。そのため近似が悪い領域を含む結果の物理的解釈には注意を要するが、現実的に許容できる計算時間内で「妥協できる」結果が得られる現実的な手法として広く用いられている。

2.3 輻射流体力学の基礎方程式

前節で挙げた輻射輸送及びそのモーメントの方程式は流体との相互作用の具体的表式については考慮していなかった。輻射流体力学の基礎方程式を構成する際には輻射と流体の相互作用の具体的に記述する必要があるが、これに関連し輻射の物理量をどのような座標系で定義するかによって三つの定式化が存在する。

- comoving-frame : 輻射及び流体との相互作用に関わる物理量を全て流体の運動に乗った共動座標系で定義する
- laboratory-frame : 輻射及び流体との相互作用に関わる物理量を全て実験室座標系で定義する
- mixed-frame : 輻射に関する物理量は実験室系で定義するが、流体との相互作用に関わる部分は共動系で定義する

これらの定式化にはそれぞれ長所・短所が存在する。comoving-frame での定式化は流体に乗った座標系で輻射に関係するものが全て定義されているため、流体との相互作用項が簡単に書けるのが利点であるが、一方で各点での座標系の違いに起因して方程式に保存形でない項が現れるという欠点が存在する。逆に laboratory-frame での定式化は方程式は保存系になるが、流体との相互作用項は各点での座標変換を含むため複雑な表式になる。mixed-frame はこの二つの長所を両立しようというものであり、保存則を満たしつつ比較的複雑にならない定式化になっているが、それでも comoving-frame の式と比べると複雑になる。

過去の研究を眺めてみると、laboratory-frame の基礎方程式は相互作用項が複雑で数値的に扱いにくいいため、これを採用したシミュレーションコードは現在の所おそらく存在しない。数値シミュレーションにおいて最も採用例が多いのは comoving-frame の定式化であり、これまでになされた殆ど全ての研究がこれを採用している [47, 16, 14, 15]。Krumholz らによる Orion コード [18] の実装は mixed-frame での定式を採用していることが特徴であるが、それ以外のコードではあまり採用されていない。今回は定式化が最も簡単かつこれまでに採用例の多い comoving-frame で定義された基礎方程式を採用した。この座標系での解くべき方程式は次のようになる [9]。ただしここでは対象を非相対論的な状況に限定し $\mathcal{O}(\frac{v}{c})$ まで取り入れた定式化を採用する。また簡単のためスペクトルは一温度で表現できる熱放射を仮定し振動数について積分した grey 近似を課した。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{u}] = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathcal{I}] = \frac{\sigma_F + \sigma_s}{c} \mathbf{F}_r \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial e_g}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{u}(e_g + p_g)] = -c(\sigma_P a_r T_g^4 - \sigma_E E_r) + \frac{\sigma_F + \sigma_s}{c} \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{u} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{u} E_r] + \nabla \cdot \mathbf{F}_r + \mathcal{P}_r : \nabla \mathbf{u} = c(\sigma_P a_r T_g^4 - \sigma_E E_r) \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{u} \mathbf{F}_r] + c^2 \nabla \cdot \mathcal{P}_r + (\mathbf{F}_r \cdot \nabla) \mathbf{u} = -c(\sigma_F + \sigma_s) \mathbf{F}_r \quad (2.15)$$

ここで添え字 g を付した量は流体の物理量、 r を付した量は輻射の物理量であることを意味する。grey 近似を課したことによりガスの放射項は黒体放射のエネルギー放射率 $a_r T_g^4$ となっている ($a_r = \frac{8\pi^5 k_b^4}{15c^3 h^3} \simeq 7.566 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$ 、 T_g はガスの温度)。また、幾つかの σ が式に現れるがこれらは周波数について「適当な」加重平均を取った opacity であり、それぞれ次のように定義される。

$$\sigma_P = \frac{\int_{\nu} \kappa_{\nu} B_{\nu}(T_g) d\nu}{\int_{\nu} B_{\nu}(T_g) d\nu} \quad (2.16)$$

$$\sigma_E = \frac{\int_{\nu} \kappa_{\nu} E_{\nu} d\nu}{\int_{\nu} E_{\nu} d\nu} \quad (2.17)$$

$$\sigma_F = \frac{\int_{\nu} \kappa_{\nu} |\mathbf{F}_{\nu}| d\nu}{\int_{\nu} |\mathbf{F}_{\nu}| d\nu} \quad (2.18)$$

$$\sigma_s = \frac{\int_{\nu} \sigma_{\nu} |\mathbf{F}_{\nu}| d\nu}{\int_{\nu} |\mathbf{F}_{\nu}| d\nu} \quad (2.19)$$

このうち Planck 平均 σ_P については周波数に依存する吸収係数 κ_ν が既知であれば（密度と温度の関数として）与えることができるが、残りについては grey 近似ではスペクトルについての情報がないため厳密には決めることができない。そこでここではスペクトルが温度 T_g の黒体放射に近いことを仮定して $\sigma_E = \sigma_P$, $\sigma_F + \sigma_s = \sigma_R$ とする^{*2}。ここで σ_R は opacity の Rossland 平均で、以下で定義される。

$$\sigma_R = \frac{\int_\nu (\kappa_\nu + \sigma_\nu) \frac{\partial B_\nu(T_g)}{\partial T_g} d\nu}{\int_\nu \frac{\partial B_\nu(T_g)}{\partial T_g} d\nu} \quad (2.20)$$

今考えている星形成や星間現象においては opacity の主要な成分は（低温領域では）ダストである。ダストの性質については未知のことが多いが、適当なモデルを仮定することによって Planck 平均・Rossland 平均の opacity が求められている。これらを数値計算コードから（密度・温度の関数として）参照可能な形にしたテーブルが幾つか提供されている（7.2 で後述）。

^{*2} やや乱暴だが、全て σ_P または σ_R にしてしまう場合もある。ただし、Krumholz ら [18] の用いている mixed-frame の定式化では σ_P と σ_R との違いが影響する項が存在する。

第 3 章

輻射輸送の数値計算法

前章で述べたように、輻射流体力学シミュレーションに用いるには輻射のモーメント方程式を用いるのが（少なくとも現時点では）現実的である。モーメント方程式に基づく数値計算法は古くから開発されている。今回は、0 次モーメントのみを解き光学的に厚い状況で成立する拡散近似を拡張した流束制限拡散近似（Flux Limited Diffusion Approximation; FLD）[21] と、0 次と 1 次のモーメントを取り扱っている状況の下で成立する Eddington Tensor を用いて方程式を閉じる M_1 Closure Scheme[15] の二つを取り上げた。この二つのスキームについて以下で詳述する。いずれの手法もある条件下で成立する近似を一般の場合にまで外挿したものであるため、計算結果を解釈するにはその適用限界を理解して十分注意する必要がある。

3.1 Flux Limited Diffusion Approximation

最も簡単な手法として 0 次でモーメント方程式を閉じる手法は古くから研究されており、その中で今日最も広く使われているのがこの FLD である。FLD では光学的に厚い極限で成立する次の拡散近似（Fick の法則）を closure relation として用いることを考える。

$$\mathbf{F} = -D\nabla E \quad (3.1)$$

$$D = \frac{c}{3\sigma} \quad (3.2)$$

（ E , \mathbf{F} は輻射のエネルギー密度とエネルギー流束、 $\sigma = \rho\kappa$ は opacity、 c は光速）この表式は光学的に薄い極限（Streaming limit: $\sigma \rightarrow 0$ ）では $|\mathbf{F}| \rightarrow \infty$ となるが、 E と \mathbf{F} の間には本来 $|\mathbf{F}| \leq cE$ という制限（因果律）がある。この制限を守るように、FLD では次のように流束制限関数（Flux Limiter） λ を導入し、この極限での流束を修正する。

$$\mathbf{F} = -\frac{c\lambda}{\sigma}\nabla E \quad (3.3)$$

λ は光学的に厚い極限 (diffusion limit) で $\lambda = \frac{1}{3}$ 、光学的に薄い極限 (streaming limit) で $|\mathbf{F}| \rightarrow cE$ となるように決められる。この決め方には幾つかの流儀が存在するが、良く使われるのは FLD のオリジナル論文 Levermore & Pomraning (1981)[21] で提唱された次のようなものである*¹。

$$\lambda(R) = \frac{1}{R} \left(\coth R - \frac{1}{R} \right) \quad (3.4)$$

$$R = \frac{|\nabla E|}{\sigma E} \quad (3.5)$$

通常はさらにこれを有理関数で近似したものとして

$$\lambda(R) = \frac{2 + R}{6 + 2R + R^2} \quad (3.6)$$

が使われることが多い。この他に Minerbo の制限関数などが提唱されているが、これらの選択によって (その値はかなり異なるにも関わらず) 結果はあまり大きく変わらないことが知られているためここではこれを採用する (図 3.1)。

輻射流体力学方程式には E, \mathbf{F} の他に 2 次のモーメントである輻射圧テンソル $\mathcal{D} = DE$ が現れるため、これを E で表現する必要がある。その表式は Levermore (1984)[20] で与えられている:

$$\mathcal{D} = \frac{1 - \chi}{2} \mathcal{I} + \frac{3\chi - 1}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (3.7)$$

$$\chi = \lambda + \lambda^2 R^2 \quad (3.8)$$

(\mathcal{I} は単位テンソル、 $\mathbf{n} = \frac{\nabla E}{|\nabla E|}$ は流束の方向ベクトル、 χ は (スカラー) エディントンファクター)。これは diffusion limit と streaming limit の両極限で正しい値 (それぞれ $\mathcal{D} = \frac{1}{3}\mathcal{I}, \mathcal{D} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$) を与える。以上で閉じた方程式系を構成することができる。

FLD は解くべき方程式が移流拡散方程式となるため比較的容易に取り扱いが可能であり、歴史は古いながら今日でも盛んに用いられている。特に Adaptive Mesh Refinement と組み合わせた輻射流体力学計算には現時点でほぼ唯一の手法となっている。しかし、拡散近似は本質的に輻射場が等方的に近いということを含んでいるため、異方性の強い現象には適さない。(特に多次元の問題において) 光学的に薄い領域を含む計算結果を解釈する際には注意が必要である。

3.2 M_1 Closure Scheme

FLD では 0 次のモーメントだけを取り扱ったが、より多くの情報を含む高次のモーメントを取り扱うことにより近似を改善することができる。しかし一般に、高次のモーメ

*¹ この関数は一意に決まるようなものではないが、(よく批判されるように) 全くの人為的なものというわけでもない。

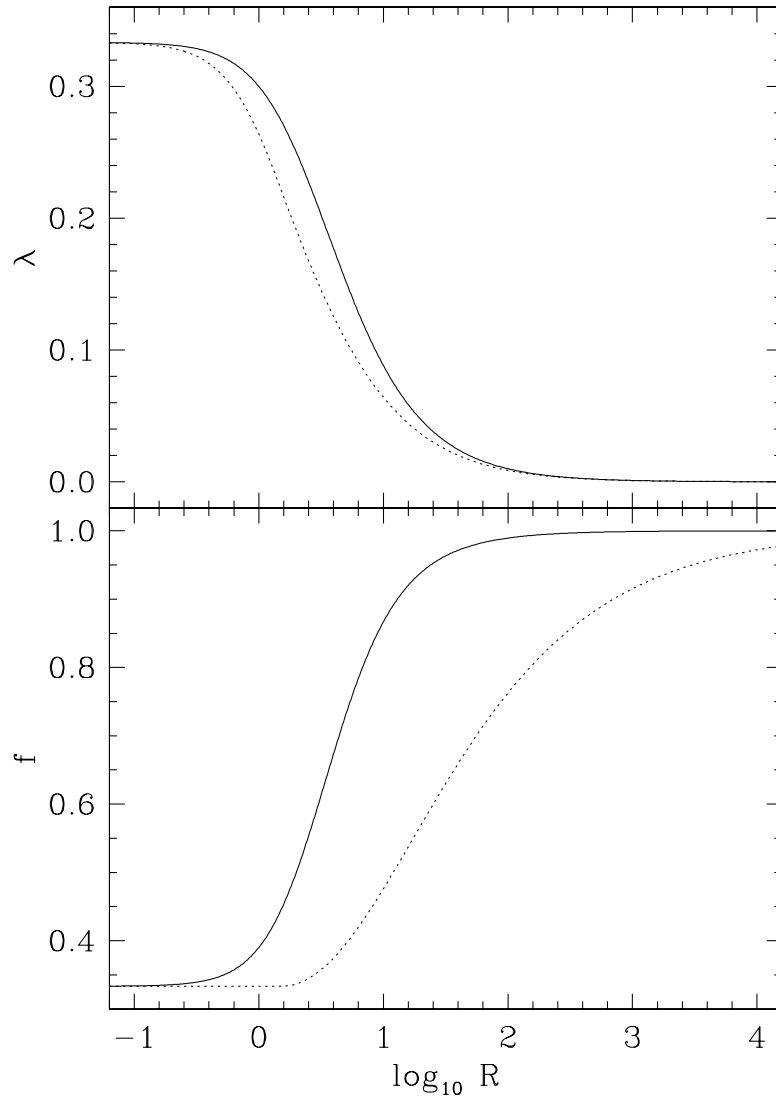


図 3.1 Levermore & Pomraning(実線)と Minerbo(点線)の定式の比較。上: 流束制限関数、下:(スカラー)エディントンファクター。Turner & Stone (2001)[47] の Fig.1。

ント方程式に対する closure relation を構成するのは困難である。輻射輸送方程式を 1 次モーメントまで解くことを考えると、0 次と 1 次のモーメント E, F で輻射圧テンソル $\mathcal{P} = DE$ を表現することができれば閉じた方程式系を構成することができる。最も簡単な closure relation としては輻射場が等方的である場合のエディントンテンソル $\mathcal{D} = \frac{1}{3}\mathcal{I}$ を用いることが考えられるが*2、この手法は異方性を取り扱うことのできる 1 次モーメントの利点を活かせず、また流束が $\frac{cE}{\sqrt{3}}$ に制限されるため輻射の伝わる速度を誤ることが知られている。近年宇宙物理学においても使われるようになりつつある M_1 Closure

*2 P_1 Scheme と呼ぶことがある。

Scheme では以下のような closure relation を用いる。

$$\mathcal{D} = \frac{1-\chi}{2}\mathcal{I} + \frac{3\chi-1}{2}\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (3.9)$$

$$\chi = \frac{3+4|\mathbf{f}|^2}{5+2\sqrt{4-3|\mathbf{f}|^2}} \quad (3.10)$$

($\mathbf{n} = \frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|}$ は流束の方向ベクトル、 $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}}{cE}$ は”reduced flux”と呼ばれる量で異方性の強さを表すパラメータ。 $|\mathbf{f}| \leq 1$ であることに注意)。このエディントンテンソルは FLD で用いたものと本質的に同じものであり、輻射強度 I が輻射流束 \mathbf{F} の周りで軸対称であるという幾何学的な仮定から導出することができる。エディントンファクター χ はある系で等方的な輻射場をローレンツ変換したもので書けると仮定するか、あるいは輻射のエントロピーを最小化すると仮定することで得られる。これらの仮定はもちろん常に成立するものではないが比較的自然而適用範囲の広い条件であり、FLD よりも幅広い問題に適用できると期待される。特に、1 次のモーメントまで取り扱っていることから 1 方向だけならば異方性の強い問題も解け、陰やビームといった FLD では取り扱うことが不可能な現象を表現できることが決定的な違いであり大きな利点である。一方で、あくまで正しく取り扱うことができるのは 1 次までであり、例えば輻射の波面が交差するような、一点で二つ以上の方向性が存在する問題に対しては要請している仮定が成立しないため正しく取り扱うことができないことに注意が必要である*³ (4.6 参照)。

M_1 Closure Scheme の FLD と比べた際のもう一つの大きな利点は方程式が双曲型であり、もとの輻射輸送方程式の持つ「光速度で情報が伝播する」という性質を自然に持っていることである。更に方程式が双曲型であることは対象とする問題によっては数値計算における大きなメリットになり得るが、これについては第 7 章で説明する。

*³ ここでは深入りしないが、この問題についてモーメント積分を取る際に方向を 2 方向に分割して各方向 (例えば右向き・左向き) のモーメント量についての方程式を解く Half Moment 法 [10, 37] という手法が提唱されている。複数の方向性を取り扱うことができるので、波面の交差などに対しても適用できる。ただし多次元問題については自明でない上、計算も複雑になる。

第 4 章

コード開発

星形成や星間現象といった低温低速度の流体の問題を対象に輻射流体シミュレーションを行う場合、輻射と流体のタイムスケールが大幅に異なることがポイントとなる。例えば星形成の問題では系の最大速度は典型的には数 km/s 程度であるのに対し輻射は光速 30 万 km/s で伝播するため、タイムスケールは 4~5 桁異なることになる。一方、もし系全体で常に輻射のタイムスケールが流体よりも遙かに短いという条件が満たされるならば輻射場については定常解を適用することができるが、星形成の問題ではこれも不適切である。というのも、星形成では重力収縮が進むと中心部では極めて光学的に厚いコアが形成されるため、そのような状況では流体の方が輻射が拡散で伝播するよりも短いタイムスケールで進化し、輻射場は定常状態に達することができないだろう。このような問題のシミュレーションを行うためには幅広いタイムスケールを取り扱うことのできるスキームが必要となる。

4.1 時間推進 – 陰解法

時間発展の微分方程式を離散化して数値的に解く時、多くの場合は陽的 (explicit) な解法が用いられる。簡単のため一次元の拡散方程式を例にとって説明する。

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = D \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (4.2)$$

ここで n は時間、 i は空間の離散化された格子点の番号、 $\Delta t, \Delta x$ は時間・空間を離散化した格子間隔、簡単のために時間 1 次精度^{*1}、空間 2 次精度の時間前進・空間中心差分法

^{*1} 各ステップでの誤差の主要項が Δt^2 に比例し、ある時間積分した際の誤差が Δt に比例するスキーム。

(Forward-Time, Center-Space) で表現した。この手法は未知数は左辺に現れる f_i^{n+1} だけであり、時間発展に必要な情報が全て既知の物理量で表現されているため、極めて簡単に未知数を求め時間発展を計算することができる。宇宙物理学のシミュレーションにおいては通常このような（より高次精度のスキームを用いるが）陽的な解法が使われている。

陽的な解法は取り扱いが簡単であるが、安定^{*2}に解くためには時間刻み Δt に制限がある。導出は省くが、von Neumann の安定性解析によれば拡散方程式の場合、時間刻みを

$$\Delta t < \Delta t_{CFL} = \frac{\Delta x^2}{2D} \quad (4.3)$$

を満たすように取らなければならない。これを CFL^{*3}条件と呼び、拡散方程式に限らず偏微分方程式の陽的な時間推進法には必ず伴う厳しい制限である。移流方程式

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + c \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = -c \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (4.5)$$

(時間一次精度、空間一次精度の時間前進・風上差分法^{*4}) の場合も同様に

$$\Delta t < \Delta t_{CFL} = \frac{\Delta x}{c} \quad (4.6)$$

という制限がつく。これらはいずれも情報が1格子間隔を伝わるタイムスケールであり、陽的解法では1ステップの計算では隣の格子にしか情報が伝わるということに対応する制限である。まとめると、CFL条件は対象とする現象のタイムスケールよりも短く時間刻みを切らなければならないという制限であると言い換えることができる。

今対象にしている輻射流体力学の問題について考える。ガスの運動のタイムスケールは $\Delta t = \Delta x/v, v \sim \max(v_b + c_s)$ (v_b は流体の運動の速度、 c_s は音速・最も速いモードの特性速度) で与えられ、星形成の問題ではせいぜい $v \sim 10\text{km/s}$ 程度である。輻射のタイムスケールは $\Delta t = \Delta x/c$ であり、光速 $c \sim 3 \times 10^5\text{km/s}$ は流体の速度よりも遙かに大きい。これは流体の1ステップの間に輻射を 10^4 ステップ計算しなければならないということの意味しており、星形成や星間現象のような低温の流体に輻射を取り入れる場合、このような陽的な解法は計算コストの観点から非現実的である。

現実的な計算時間内に結果を得るためには流体のタイムスケールで時間刻みを決めて計算を進めることが必要となる。このような問題に対しては通常次のような陰的な解法が用

^{*2} 数値解の誤差が無限に増幅せず、真の解の適当な近似解になる。

^{*3} Courant-Friedrichs-Lewy

^{*4} 双曲型方程式に陽的解法を適用する場合、安定に解くためには情報が伝播する方向を考慮した離散化をする必要があり、それを風上差分法と呼ぶ。

いられる。

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = D \frac{f_{i+1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (4.7)$$

これは陽解法の右辺の時刻 n で評価していた値を時刻 $n+1$ のものに置き換えたものである。von Neumann の安定性解析によればこの手法は Δt の大きさによらず無条件に安定になる。この場合未知数が両辺に現れており、しかも両隣の格子の未知数まで関係してくるため、解を得るには連立方程式を解くこと（行列反転）が必要になる。これは計算コストが高いために通常の流体シミュレーションなどにはあまり用いられないが、今回のような問題に対しては時間刻みを大幅に大きく取ることができるようになるため結果的には計算量を低減することができ、有用な手法となる。

陰解法は時間刻みの取り方に依らず無条件安定であるが、安定であることと精度が高い（誤差が小さい）ことは別問題であり時間刻みを大きく取れば解は鈍ってしまう。ただしこの手法の良い点は、定常解（ $\Delta t \rightarrow \infty$ の極限）は正しく解けるという点である。そのため、現象の物理的なタイムスケールと比べ数値計算の Δt が小さい場合と極端に大きい場合に正しく、中間的な場合に精度が低い。

陰的解法では行列反転が必要になるためあまり複雑な式を解くことは難しい（単に計算量が増加するだけでなく、場合によっては数値的な安定性にも問題を生じることがある）ため、時間・空間ともに精度を向上するのは容易ではない。比較的低コストに時間精度を向上する試みとして Crank-Nicolson 法を用いた実装が幾つか提唱されている [17, 18]。 θ を 0 から 1 の間の値をとるパラメータとして、方程式を次のように離散化する。

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = D \frac{\theta(f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n) + (1 - \theta)(f_{i+1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i-1}^{n+1})}{\Delta x^2} \quad (4.8)$$

これは θ を重みとして陽的な成分と陰的な成分の加重平均によって時間発展を決めるという式になっており、 $\theta = 1/2$ の時に時間二次精度が実現される（ $\theta = 1$ の時に陽的な前進オイラー法、 $\theta = 0$ とすると後退オイラー法に対応する）。この手法は後退オイラー法の場合と比べて未知数が増えないため、計算コストを殆ど増加させることなく精度を向上させることができる。このスキームは時間刻みに依らず無条件に安定だが、実際には Δt が大きい場合には非物理的な数値振動を生じることが知られている。上に挙げた実装例では現象のタイムスケールに対して計算の時間刻みが小さく安全である場合にだけ二次精度とし、危険な領域では一次精度に落として安定性を保つように工夫されている。これは比較的簡単に実現可能で、輻射の時間スケールが長い（＝光学的に厚い）場合に二次精度が達成されることは有利である。しかし、実際の（特に星形成のような）問題ではこの条件が実現される領域は必ずしも広くない上、多重格子と組み合わせた場合に細粗の格子で異なる振舞いをすると問題を生じる可能性があるため今回は採用していない。

4.2 計算の手順

もう一度解くべき系の基礎方程式を以下に示す。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{u}] = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathcal{I}] = \frac{\sigma_F + \sigma_s}{c} \mathbf{F}_r \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial e_g}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{u}(e_g + p_g)] = -c(\sigma_{Pa_r} T_g^4 - \sigma_E E_r) + \frac{\sigma_F + \sigma_s}{c} \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{u} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{u} E_r] + \nabla \cdot \mathbf{F}_r + \mathcal{P}_r : \nabla \mathbf{u} = c(\sigma_{Pa_r} T_g^4 - \sigma_E E_r) \quad (4.12)$$

FLD :

$$\mathbf{F}_r = -\frac{c\lambda}{\sigma_R} \nabla E_r, \quad \lambda = \frac{2 + R}{6 + 3R + R^2}, \quad R = \frac{|\nabla E_r|}{\sigma_R E_r} \quad (4.13, 14, 15)$$

M₁ Closure Scheme :

$$\frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{u} \mathbf{F}_r] + c^2 \nabla \cdot \mathcal{P}_r + (\mathbf{F}_r \cdot \nabla) \mathbf{u} = -c(\sigma_F + \sigma_s) \mathbf{F}_r \quad (4.16)$$

$$\mathcal{P}_r = D E_r, \quad D = \frac{1 - \chi}{2} \mathcal{I} + \frac{3\chi - 1}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \chi = \frac{3 + 4|\mathbf{f}|^2}{5 + 2\sqrt{4 - 3|\mathbf{f}|^2}} \quad (4.17, 18, 19)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{F}_r}{|\mathbf{F}_r|}, \quad \mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}_R}{c E_r} \quad (4.20, 21)$$

これを計算しやすいように以下のような手順に分割して分割する^{*5} (オペレータスプリット)。その際、時間刻みはSTEP1の流体部の CFL 条件を満たすように決める^{*6}。

^{*5} FLD についての実装。M₁ Closure Scheme については今回は STEP2 の輻射部のみ実装・評価した段階でそれ以降の開発を見送ったためここまではやっていない。この分割には任意性があるため安定性や精度について実験・評価する必要がある。

^{*6} 陰解法は時間刻みの取り方に依らず絶対的に安定だが、計算の精度という意味で無条件に大きな値を取って良いかどうかは議論があり、実際に幾つかのコードではエネルギーの変化に制限を付けるなどして時間刻みを制限している。今回の実装ではそのような制限は課していないが、第5章で後述するように nested-grid で計算を行う場合には最も細かい格子で決まる時間刻みで計算を進めるため粗い格子では相対的に短い時間刻みを用いることになり、問題は生じないかもしれない。実際には計算の時間刻みを変えてみて収束を確認する必要があるだろう。

STEP1 (流体部):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{u}] = 0 \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathcal{I}] = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial e_g}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{u}(e_g + p_g)] = 0 \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{u} E_r] = 0 \quad (4.25)$$

STEP2 (輻射部):

$$\frac{\partial e_g}{\partial t} = -c(\sigma_{Pa_r} T_g^4 - \sigma_E E_r) \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_r + \mathcal{P}_r : \nabla \mathbf{u} = c(\sigma_{Pa_r} T_g^4 - \sigma_E E_r) \quad (4.27)$$

STEP3 (輻射力に伴う源泉項):

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\sigma_F + \sigma_s}{c} \mathbf{F}_r \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial e_g}{\partial t} = \frac{\sigma_F + \sigma_s}{c} \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{u} \quad (4.29)$$

STEP1 は通常の流体力学と、流体の運動に伴って輻射エネルギーが流れる項である。これらは MUSCL^{*7}内挿を施した Roe 法 [38] によって空間・時間ともに二次精度で陽的に時間推進することができる [58, 59]。

STEP2 は輻射輸送と流体・輻射相互作用の項であり、流体よりも短いタイムスケールで進化するため陰的な解法を用いて時間推進を行う。この取り扱いについては次節で詳述する。

STEP3 に含まれる項は通常小さいため、陽的に積分することで簡単に計算できる。

なお、ここで採用した分割は先行研究のコードとは異なる。ZEUS-MP コード [16] は保存系の流束を用いる代わりに移流項のみを分離して解いているため STEP1 の取り扱いが異なる。HERACLES コード [15] では流体運動に伴う輻射エネルギーの移流項 (STEP1 の (4.25) 式) を STEP2 に含めて陰的に解いているが、これはガスエネルギーの移流項と整合的でないと考えられる。ここでは移流については流体部に含め、ガスと輻射で整合性を取るようにしている^{*8}。ZEUS-FLD コード [47] は更に輻射の拡散項と相互作用項を分離して次のように解いている：

^{*7} Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws

^{*8} 流体の速度での移流については陽的な取り扱いが可能であり、その方が精度も高い

$$\frac{\partial E_r}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_r = 0 \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial e_g}{\partial t} = -c(\sigma_P a_r T_g^4 - \sigma_E E_r) \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial t} + \mathcal{P}_r : \nabla \mathbf{u} = c(\sigma_P a_r T_g^4 - \sigma_E E_r) \quad (4.32)$$

これは \mathbf{F}_r に含まれる拡散係数と流束制限関数を iteration 中に更新しないことにすれば拡散項は線形な拡散方程式になるため取り扱いが容易になる。更に相互作用項については常微分方程式になるため4次の代数方程式を解けば解が得られる。この分割は計算を劇的に簡単にする^{*9}が、現象のタイムスケールよりも長い時間刻みで計算を行う場合はこのようなオペレータスプリットは正当化できない^{*10}ため、近年の殆ど全ての実装では分割しないで取り扱われている。

Yorke & Kaisig (1995)[55]の研究はより大雑把で、輻射とガスが平衡状態にあることを仮定して $T_g = T_r$ ($E_r = a_r T_r^4$) として相互作用項を解いていない。これは光学的に厚い領域でのみ成立するが、一般には良い仮定ではない。

4.3 各スキームの実装

以下では説明を簡単にするため、流体が静止しているとして各スキームでの輻射の輸送と流体の相互作用項についての実装を説明する。ここで除外した項の実装は容易である。

4.3.1 FLD

流体が静止しているとする、STEP2 で解くべき方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial e_g}{\partial t} = -c(\sigma_P a_r T_g^4 - \sigma_E E_r) \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{c\lambda}{\sigma_R} \nabla E_r \right) = c(\sigma_P a_r T_g^4 - \sigma_E E_r) \quad (4.34)$$

$$\lambda(R) = \frac{2 + R}{6 + 2R + R^2}, \quad R = \frac{|\nabla E|}{\sigma E} \quad (4.35,36)$$

^{*9} 収束の保証がない Newton-Raphson 法とは違い、解の範囲がわかっている常微分方程式であれば絶対に正しい解が得られる二分法を取ることができるため安定性も高い。

^{*10} 流体部と輻射部を分離することは、流体部のタイムスケールよりも短い時間刻みで計算している(= CFL 条件を守る)ことで正当化できる。これによって精度は幾らか失われているはずであるが、このオペレータスプリットを外すためには全ての項を陰的に解く(あるいは全ての項を陽的に扱えるような短い時間刻みを取る)必要があり、どちらも(少なくとも星形成の問題については)到底実現不可能である。

これを次のように陰的に離散化した非線形連立方程式を解けばよい（一次元の場合）：

$$\frac{e_{g,i}^{n+1} - e_{g,i}^n}{\Delta t} = -c\sigma_P^{n+1}(a_r(T_{g,i}^{n+1})^4 - E_{r,i}^{n+1}) \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_{r,i}^{n+1} - E_{r,i}^n}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{c\lambda}{\sigma_R} \right)_{i+\frac{1}{2}}^* \frac{E_{i+1}^{n+1} - E_i^{n+1}}{\Delta x} - \left(\frac{c\lambda}{\sigma_R} \right)_{i-\frac{1}{2}}^* \frac{E_i^{n+1} - E_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \right] \\ = c\sigma_P^{n+1}(a_r(T_{g,i}^{n+1})^4 - E_{r,i}^{n+1}) \end{aligned} \quad (4.38)$$

ここでポイントとなるのは拡散係数 $D_{i+\frac{1}{2}}^* = \left(\frac{c\lambda}{\sigma_R} \right)_{i+\frac{1}{2}}^*$ の評価である。まず空間方向の離散化について、格子境界 $i \pm \frac{1}{2}$ での R や σ の値を求めるために $\rho_{i+\frac{1}{2}}, e_{g,i+\frac{1}{2}}, E_{r,i+\frac{1}{2}}$ を決定する必要がある。最も安易な方法としては単純に i と $i+1$ における物理量 ρ, e_g, E_r を内挿した値を用いて評価することが考えられるが、ここでは RAGE コード [14] で用いられている手法を採用する。この手法では $(i, i + \frac{1}{2}), (i + \frac{1}{2}, i + 1), (i, i + 1)$ で評価した三つの（流束制限されていない）流束 F_L, F_R, F （図 4.1）が一致するように $i + \frac{1}{2}$ での物理量を定める。

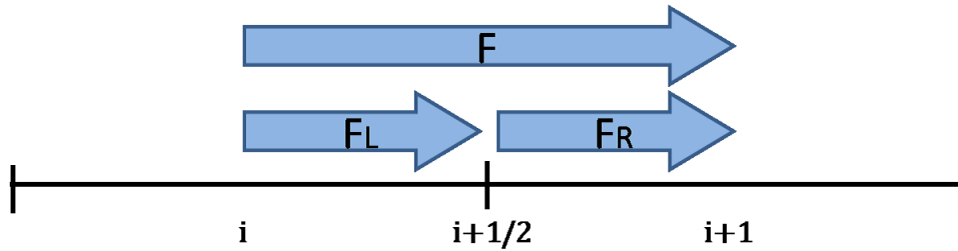


図 4.1 格子境界 $i + \frac{1}{2}$ での流束の決め方

$$F_L = -D'_L \frac{E_{i+\frac{1}{2}} - E_i}{\Delta x/2} = -\frac{c}{3} \frac{E_{i+\frac{1}{2}} - E_i}{\Delta\tau_L} \quad (4.39)$$

$$F_R = -D'_R \frac{E_{i+1} - E_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x/2} = -\frac{c}{3} \frac{E_{i+1} - E_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta\tau_R} \quad (4.40)$$

$$F = -D'_{i+\frac{1}{2}} \frac{E_{i+1} - E_i}{\Delta x} = -\frac{c}{3} \frac{E_{i+1} - E_i}{\Delta\tau_{LR}} \quad (4.41)$$

($D' = \frac{c}{3\sigma}$ は流束制限されていない拡散係数、 $\tau_{L,R} = \sigma_{L,R}\Delta x/2$) $F = F_L = F_R$ としてこれを解くと

$$E_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta\tau_L E_R + \Delta\tau_R E_L}{\Delta\tau_L + \Delta\tau_R} \quad (4.42)$$

$$D'_{i+\frac{1}{2}} = \frac{c}{3} \frac{\Delta x}{\Delta\tau_L + \Delta\tau_R} \quad (4.43)$$

が得られる。これは輻射エネルギーは実空間の距離ではなく光学的な距離を用いて内挿する、また光学的厚さには単純な加算が成立する ($\tau_{LR} = \tau_L + \tau_R$) という自然な形になっている。

時間方向の離散化について、整合性のある陰的な解法にするためには $*$ は $n + 1$ とすべきである。しかし、これには次のような困難がある：

1. 多次元の場合、格子境界 $i + \frac{1}{2}$ で R を評価しようとする $|\nabla E|$ の評価に斜め隣の点が必要になり、ヤコビ行列の計算に必要なステンシル^{*11}が 2 次元 5 点、3 次元 7 点に収まらない。
2. Newton-Raphson 法で用いるヤコビ行列の解析的な表記が複雑である^{*12}。
3. λ は極めて非線形性の強い関数であり、少しの引数の変化で大きく値が変わる (図 4.2)。このような関数に対して Newton-Raphson 法は脆弱であり、特に光学的に薄い (流束制限関数が強く作用する) 状況で発散したり、リミットサイクル的な振動を生じたりすることがある。

3. について、流束制限関数の振舞いを具体的に調べるため、 $E_{i+1} = E$, $E_i = E + \Delta E = E(1 + \delta)$, $\sigma \Delta x = \tau_{cell} = 10^{-6}$ (1 格子あたりの光学的厚さ：極めて光学的に薄い場合) の場合に $\delta = \Delta E/E$ の関数として流束制限関数と cE で規格化した流束の振舞いを示したのが次の図 4.2 である。 $\delta = 0$ をわずかでも外れると鋭く流束制限関数が効いている。簡単な評価から、 $\delta \sim \tau_{cell}$ 程度の幅で流束制限関数が激しく変動することが分かる。

この問題を回避するため、ZEUS-MP コードや Orion コードでは拡散係数 $(\frac{c\lambda}{\sigma_R})_{i \pm \frac{1}{2}}^*$ を $* = n$ で評価し iteration の間更新しないことで対処している。これは輻射場が変動するタイムスケールよりも長い時間刻みを取った場合には原理的には正しくないが、安定な計算のためにはやむを得ない選択であるとも言える (ただし、後のテストの項で述べるようにこれによってまた別の問題が発生する可能性がある)。この対処によって計算の信頼性が失われる領域は光学的に薄い領域であり、元々そのような領域では FLD の信頼性は低い。RAGE コードなど最近の実装では拡散係数も含めて iteration するよう工夫されているが、これはかなり複雑である。今回の実装では一様格子では $* = n$ で拡散係数を評価することにした。ただし、第 5 章で詳しく述べる nested-grid と組み合わせた計算では $* = n + 1$ における拡散係数の適当な推定値を利用できるため、これを用いることで数値的な不安定を生じることなく (近似的に) $* = n + 1$ で評価した解を得ることができる。

^{*11} ある 1 点の時間発展を求める際に必要になる近傍の格子点のこと。3 次元であれば上下・左右・前後 + 中心の 7 点に収まると簡単で良い。また、NEC SX-9 の ASL ライブラリには 2 次元 5 点、3 次元 7 点差分用にチューニングされた行列反転ルーチンが提供されているためできればこれに収めたい。

^{*12} 数値微分を用いれば解析的な表記は不要だが、数値微分はしばしば不安定な振る舞いの原因となるため今回は使用しない。

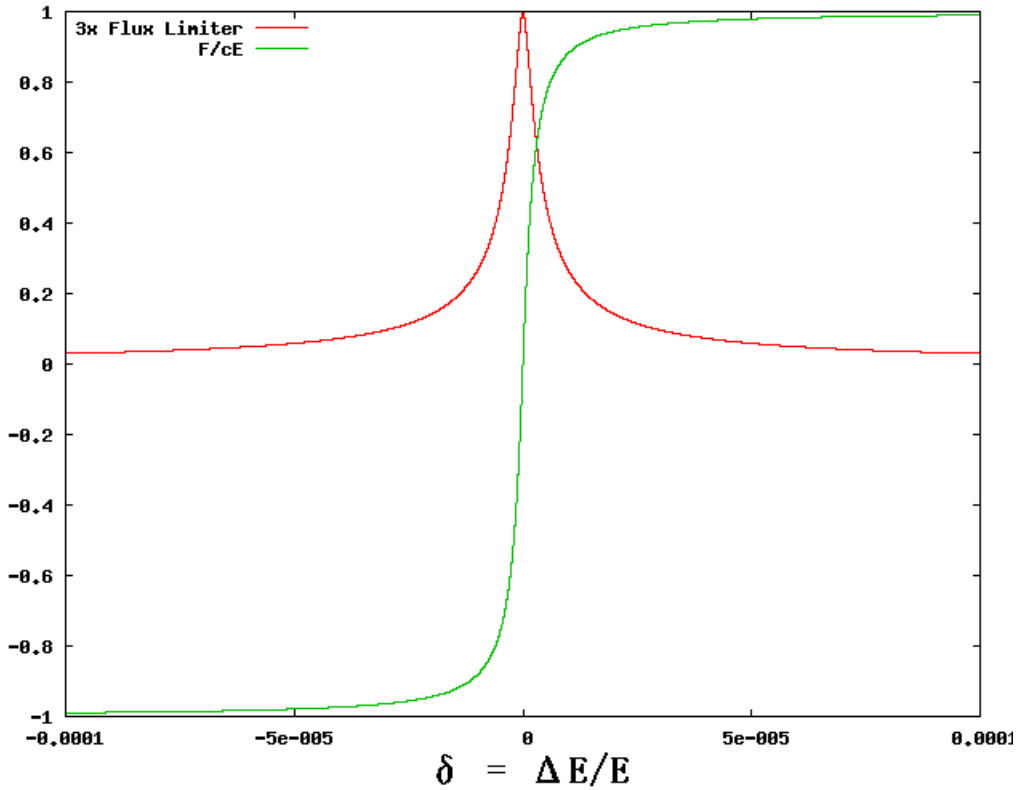


図 4.2 光学的に薄い場合の流束制限関数と流束。赤：流束制限関数 $\lambda(R) \times 3$ 、緑： F_r/cE_r

FLD は輻射輸送の近似としてはかなり粗いものであるというだけでなく、(数学的表現は簡単だが) 数値的取り扱いにおいて幾つかの病的ともいえる危険性を孕んでいる。必ずしも素性の良いスキームではないことに注意が必要である。

4.3.2 M_1 closure

M_1 Closure Scheme では解くべき方程式は次のようになる：

$$\frac{\partial e_g}{\partial t} = -c(\sigma_P a_r T_g^4 - \sigma_E E_r) \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_r = c(\sigma_P a_r T_g^4 - \sigma_E E_r) \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial t} + c^2 \nabla \cdot \mathcal{P}_r = -c\sigma_R \mathbf{F}_r \quad (4.46)$$

$$\mathcal{P}_r = D E_r, \quad D = \frac{1-\chi}{2} \mathcal{I} + \frac{3\chi-1}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{F}_r}{|\mathbf{F}_r|} \quad (4.47, 48, 49)$$

$$\chi = \frac{3 + 4|\mathbf{f}|^2}{5 + 2\sqrt{4 - 3|\mathbf{f}|^2}}, \quad \mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}_r}{cE_r} \quad (4.50, 51)$$

M_1 Closure Scheme では FLD の場合とは異なりステンスルは元から 2 次元で 5 点、3 次元で 7 点である。更に、FLD の流束制限関数のような数値的取り扱いの難しい非線形性の強い成分はない。更に言えば Newton-Raphson 法で用いるヤコビ行列の解析的な表記を求めるのも比較的容易である。(これらの点で M_1 Closure Scheme は FLD よりも数値的な素性が良く扱いやすいスキームであると言える) そのため、上記の方程式をそのまま全て陰的に離散化することができる^{*13} (一次元の場合):

$$\frac{e_{g,i}^{n+1} - e_{g,i}^n}{\Delta t} = -c\sigma_P^{n+1}(a_r(T_{g,i}^{n+1})^4 - E_{r,i}^{n+1}) \quad (4.52)$$

$$\frac{E_{r,i}^{n+1} - E_{r,i}^n}{\Delta t} + \frac{F_{r,i+\frac{1}{2}}^{n+1} - F_{r,i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x} = c\sigma_P^{n+1}(a_r(T_{g,i}^{n+1})^4 - E_{r,i}^{n+1}) \quad (4.53)$$

$$\frac{F_{r,i}^{n+1} - F_{r,i}^n}{\Delta t} + c^2 \frac{\mathcal{P}_{r,i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \mathcal{P}_{r,i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x} = -c\sigma_R^{n+1} F_{r,i}^{n+1} \quad (4.54)$$

ここで格子境界での流束 $F_{r,i\pm\frac{1}{2}}, \mathcal{P}_{r,i\pm\frac{1}{2}}$ を評価する必要がある。HERACLES コード [15] では Godunov 系の近似 Riemann Solver の一種である HLLE^{*14}法 [12] を用いてこれを評価している。更に、HLLE 法ではヤコビ行列の固有値 (情報の伝播速度) が必要になるため計算は複雑になるが、これを計算する代わりに光速 c で固定することで計算を簡略化する手法 (Lax のスキームに対応する) も提案されている。前者の方が数値的な散逸は少ないが、後者でも解は鈍るものの十分に良い結果が得られる [1] ため今回はこれを採用した。このスキームによる格子境界の流束は次のように与えられる:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{F_i + F_{i+1} - c(E_{i+1} - E_i)}{2} \quad (4.55)$$

以上の非線形連立方程式の解を Newton-Raphson 法で求めればよい。

4.4 Newton-Raphson 法

非線形の連立方程式の解を求める万能かつ一般的な処方箋は残念ながら存在しない。ただ、解の良い初期推定値が得られるならば、以下に説明する Newton-Raphson 法 [36] によって比較的高速に数値解を求めることができる。今回のような時間発展を求めるような計算の場合は、時間発展させる前の時刻の値が次の時刻の解の比較的良好な初期推定値

^{*13} HERACLES コード [15] は Gauss-Seidel 法で行列反転を行うために時間刻みを輻射の CFL 条件よりも短くなるよう制限している。またポストプロセスによる輻射場の計算に M_1 Closure Scheme を用いる ATON コード [1] では陽解法で解いている。そのため本研究のような完全陰解法による実装例はおそらく今の所他に存在しない。

^{*14} Hartman-Lax-van Leer-Einfeldt

となっていることが期待できる。更に第 5 章で後述するように、同期時間刻みを取った nested-grid 及び AMR による計算の場合、粗い格子で求めた解が細かい格子の解の良い初期推定値として利用できる。

今、 N 個の変数 $x_i (i = 1, 2, \dots, N)$ についての N 本の連立方程式 $f_i(\mathbf{x}) = 0 (i = 1, 2, \dots, N)$ の解を求めることを考える。正しい解の初期推定値を \mathbf{X} 、正しい解への変位ベクトルを $\delta\mathbf{X}$ とする ($f_i(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}) = 0$: この時 $f_i(\mathbf{X})$ は正しい解からの「ずれ」を表す残差ベクトルである)。この $\delta\mathbf{X}$ の近似値を求めて辿って行けば正しい解に近づくことができる、というのが Newton-Raphson 法の精神である。 $\delta\mathbf{X}$ について Taylor 展開を行うと

$$f_i(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}) = f_i(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta X_j + \mathcal{O}(\delta\mathbf{X}^2) \quad (4.56)$$

となる。初期推定値が良い場合には $\delta\mathbf{X}$ は小さいと期待されるため、高次の項を無視して

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta X_j = -f_i(\mathbf{X}) \quad (4.57)$$

を解けば $\delta\mathbf{X}$ が得られる。線形問題ならば二次以上の項が存在しないためこの操作を一度行えば解が得られるが、問題が非線形の場合には高次の効果が残るためこの操作を繰り返す (iteration) ことで正しい解に近づけていく。残差ベクトル f_i (正確にはこれを規格化した f_i/x_i) 及び変位 δX_i が全て十分 0 に近くなれば正しい解が得られたと判断する。FLD の場合の残差ベクトルの具体的な表式は次のようになる (簡単のため次元の場合について示してある):

$$f_g^i = e_{g,i}^{n+1} - e_{g,i}^n + \Delta t c \sigma_P^{n+1} (a_r (T_{g,i}^{n+1})^4 - E_{r,i}^{n+1}) \quad (4.58)$$

$$f_r^i = E_{r,i}^{n+1} - E_{r,i}^n + \Delta t \left[\frac{1}{\Delta x} \left\{ \left(\frac{c\lambda}{\sigma_R} \right)_{i+\frac{1}{2}}^* \frac{E_{i+1}^{n+1} - E_i^{n+1}}{\Delta x} - \left(\frac{c\lambda}{\sigma_R} \right)_{i-\frac{1}{2}}^* \frac{E_i^{n+1} - E_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \right\} - c \sigma_P^{n+1} (a_r (T_{g,i}^{n+1})^4 - E_{r,i}^{n+1}) \right] \quad (4.59)$$

これをそのまま解いても良いのだが、一工夫することによって計算量を低減しつつ安定性を向上し更にエネルギーの保存性も改善することができる (ZEUS-MP コード [16] 及び Howell & Greenough (2003) [17] で提唱されている手法)。前節で説明したように、 $*$ = $n, n+1$ のどちらを取る場合であっても iteration の間拡散係数を更新しないことにする。この場合について Newton-Raphson 法で解くべき方程式を形式的に書き下すと次のようになる:

$$\frac{\partial f_i^g}{\partial e_{g,i}^{n+1}} \delta e_{g,i}^{n+1} + \frac{\partial f_i^g}{\partial E_{r,i}^{n+1}} \delta E_{r,i}^{n+1} = -f_i^g \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial f_i^r}{\partial e_{g,i}^{n+1}} \delta e_{g,i}^{n+1} + \frac{\partial f_i^r}{\partial E_{r,i}^{n+1}} \delta E_{r,i}^{n+1} + \frac{\partial f_i^r}{\partial E_{r,i+1}^{n+1}} \delta E_{r,i+1}^{n+1} + \frac{\partial f_i^r}{\partial E_{r,i-1}^{n+1}} \delta E_{r,i-1}^{n+1} = -f_i^r \quad (4.61)$$

ここで解くべき変数は $\delta e_{g,i}^{n+1}$ と $\delta E_{r,i}^{n+1}$ である。今、拡散係数を固定したことによって、 $\delta e_{g,i}^{n+1}$ は輻射エネルギーについての f_i^r の式 (4.61) には同一格子点の $\delta e_{g,i}^{n+1}$ 一つだけしか入っていない。 f_i^g の式 (4.60) は簡単に解けるので、これを用いて $\delta e_{g,i}^{n+1}$ を $\delta E_{r,i}^{n+1}$ で表し f_i^r の式から消去することができる。その結果、解くべき方程式は次のようになる：

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f_i^r}{\partial E_{r,i}^{n+1}} - \frac{\partial f_i^r}{\partial e_{g,i}^{n+1}} \frac{\partial f_i^g}{\partial E_{r,i}^{n+1}} / \frac{\partial f_i^g}{\partial e_{g,i}^{n+1}} \right) \delta E_{r,i}^{n+1} + \frac{\partial f_i^r}{\partial E_{r,i+1}^{n+1}} \delta E_{r,i+1}^{n+1} + \frac{\partial f_i^r}{\partial E_{r,i-1}^{n+1}} \delta E_{r,i-1}^{n+1} \\ & = \frac{\partial f_i^r}{\partial e_{g,i}^{n+1}} / \frac{\partial f_i^g}{\partial e_{g,i}^{n+1}} f_i^g - f_i^r \end{aligned} \quad (4.62)$$

この方程式系の解を Newton-Raphson 法によって求め、得られた $\delta E_{r,i}$ から (4.60) 式を用いて $\delta e_{g,i}$ を計算すれば結果が得られる。この手続きによってステンシルの形を変えることなく解くべき連立方程式の数を半分に減らすことができる。ここで消去したのはガスと輻射の相互作用項であり、非線形性が強く行列要素が大きな値を持つ。このような項を対角項に繰り込むことができるため、行列反転の安定性・収束性を改善することに寄与する^{*15}。更に、この処理によってガスエネルギーと輻射エネルギーの相互作用項を独立に解く場合よりもエネルギーの保存性が改善することが期待される。M₁ Closure Scheme でもガスエネルギーは輻射エネルギー・流束の式に同じ格子点上のものしか入っていないため、同様の処理をすることで行列を縮小することができる。

実際の計算では f_i が十分小さい場合でも数値誤差のために収束判定が困難な場合がある。具体的には、光学的に薄く流束が卓越しているような場合には $\Delta t \nabla \cdot F_r = \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2})$ の項が支配的であるが、この項が所謂桁落ち^{*16}を起こしやすい。このような状況になると何度 iteration をかけても $f_{r,i}/E_{r,i}$ がほとんど減らないように見える。このような場合には δX の値を確認して大きければ iteration を続行、十分小さければ警告を出して計算を進めることにしている。実際の nested-grid と組み合わせた計算ではこの問題は初期の光学的に薄い段階でわずかに発生するだけで、計算が進めば起こらなくなる（全てのレベルで同じ時間刻みを使うため、粗い格子では $\Delta t/\Delta x$ が小さくなるため多少の誤差があっても収束し、細かい格子の覆う領域は光学的に厚いためこの問題が発生しない）。

ここで解く問題は $\frac{\partial f_i^g}{\partial e_{g,i}^{n+1}}$ が 0 ないし非常に小さい絶対値を持つような場合には数値的に破綻を引き起こす可能性がある。これは opacity が温度上昇に対して急激に減少するよ

^{*15} 対角要素を小さくしてしまうこともあるため常に改善するとは限らないが、一般に値の大きい行列要素が非対角成分に存在することは行列反転の計算を難しくするため、それを回避できることは効果が大きい。

^{*16} 値の近い二数の引き算を行った時に浮動小数点数の有効数字が失われ精度が低下する現象。

うな場合に起こるが、ある成分の dust が破壊される温度ではこの状況が実現するためこの問題が現実には発生するかもしれない^{*17}。今回は opacity を定数にしているためこのような問題は起こらないが、opacity の変化を取り入れてより現実的な計算を行う際には対処を考える必要があるだろう。ただし低質量星形成の動的進化を見る上では opacity の急劇な変化（の途中）を分解すること自体が物理的に重要なわけではない^{*18}ため、当面は opacity が急激に変化する場所を smoothing するなどして安定に計算を進めることができれば十分だと考えている。

Newton-Raphson 法は初期推定値が正しい解の良い推定値となっていない場合には必ずしも収束する保証がないという点に注意が必要である。また、行列の性質が悪い場合には反復法が収束しないために行列反転に失敗するということもある。収束しなかった場合には、時間刻みを小さく取りなおすことで初期推定値と正しい解の差異を小さくし収束性を改善する。

4.5 行列反転

Newton-Raphson 法ではヤコビ行列 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ の逆行列を求める必要がある。行列反転には様々な手法があるが、LU 分解などの直接解法は行列のランク（=問題の変数の数） R に対して $\mathcal{O}(R^3)$ （一辺の格子数 N の三次元問題であれば $\mathcal{O}(N^9)$ ）^{*19}の莫大な計算量になり現実的でない。偏微分方程式を有限差分法で三次元格子に離散化した場合、解くべきヤコビ行列は殆どが零要素の極めて疎な行列になる。このような場合は反復法 [3, 57] を使うと計算量を大幅に低減できることが知られている。反復法の中で比較的アルゴリズムが平易で実装が簡単かつ高速な手法として Jacobi 法や Gauss-Seidel 法、及びそれを外挿して収束を加速する SOR 法が挙げられるが、これらの手法は収束半径が狭い（十分条件ではあるが、行列が強優対角^{*20}であることが一つの目安となる）。今回の輻射輸送の場合、行列の優対角性は保証されない（dt が小さい場合には優対角になるが、これは輻射の CFL 条件を満たすような小さい時間刻みを取ることとほぼ同義であり実用的でない）ため、安定な計算のためにはより強力な解法と収束を改善するための前処理^{*21}が必要になる。今回は多数の反復解法と前処理を搭載した Lis ライブラリ^{*22}を用いて手法の比較・評価を

^{*17} ただし現実には dust は複数の成分の混合物であり、opacity は特定の温度で減少することはあってもそれほど鋭い勾配にはならないかもしれない（そもそも星間空間における dust の性質は不定性が大きい）。

^{*18} もちろん対象とする問題によってはこれは重要な物理過程となるだろう。例えば大質量星形成を考える際にはダストの破壊面の構造や位置が重要となる。

^{*19} 行列が疎なバンド行列であることを考慮しても $\mathcal{O}(R^2) = \mathcal{O}(N^6)$ 。

^{*20} $|A_{ii}| > \sum_{j \neq i} |A_{ij}| \quad (\forall i)$

^{*21} 比較的計算量の少ない処理によって行列を解きやすい（逆行列に近い/優対角に近い）形に変換する手法。

^{*22} <http://ssi.is.s.u-tokyo.ac.jp/lis/>

行った結果、不完全 LU 分解前処理をした BiCGStab 法^{*23}及び TFQMR 法^{*24}が良好な収束性と速度を実現することが分かったためこれを採用した。反復法は内部で収束するまで iteration を行うが、計算量は一回の iteration あたり $\mathcal{O}(R) = \mathcal{O}(N^3)$ 、収束に必要な iteration の回数は経験的に $\mathcal{O}(N)$ 程度であり、まとめて $\mathcal{O}(N^4)$ 程度の計算量が必要になる（非線形の問題ではさらに iteration が必要になるが、収束に必要な iteration 回数は大抵数回程度でありほぼ N に依らない）。これは $\mathcal{O}(N^3)$ の流体部と比べると計算量が多いが、元の輻射輸送方程式を解くよりは大幅に計算量が低減されておりまだ実用に耐えうる計算量であると言える。実際の計算には PC では Lis ライブラリを、SX-9^{*25}では NEC の提供する ASL ライブラリ^{*26}を利用した。

4.6 テストと比較

ここではコードのテストと、FLD と M_1 Closure Scheme の比較を行う。以下の計算は全て PC 上で Lis ライブラリを利用して行った。SX-9 上でも同じ結果が得られることを確認しているが、行列反転に使用しているライブラリのチューニングの違いのため FLD と M_1 Closure Scheme で実行速度に大幅な差が生じる。

4.6.1 一次元での波面の伝播

まず最も簡単なテスト問題として Turner & Stone (2001) (ZEUS-FLD) [47] で行われている一次元で波面の伝播を解くテストを行う（図 4.3）。この問題では初期に一樣に $E_r = 10^{-22}$ erg cm⁻³ の媒質中に左端から $E_r = 1$ erg cm⁻³ の輻射場を入れる。計算領域の長さは $x = 1$ cm、opacity は $\kappa_R = 0.4$ cm² g⁻¹、密度は $\rho = 0.025$ g cm⁻³ であり、計算領域での光学的厚さは $\tau = 0.01$ と光学的に薄い。計算領域を空間的に 100 格子に分割した： $\Delta x = 0.01$ cm。計算は輻射場の伝播のみで、ガスとの相互作用は解いていない。 $dt = \frac{\Delta x}{2c}$ を基準として時間刻みを変えた時の振舞いの違いを見る。同じ（右端の境界条件は異なる）状況設定で FLD で計算を行った結果を図 4.4 に示す。

小さい時間刻みを取れば、光速度で情報が伝搬するという性質を FLD でも表現できることがわかる。時間刻みを短く取った計算では基本的に ZEUS-FLD と同じ結果を再現することができたが、基準値よりも 10 倍大きな時間刻みを取った場合には大きく異なる結果となった。これは輻射場の時間変動のタイムスケールを分解していないため流束制限

*23 安定化双共役勾配法：Bi-Conjugate Gradient-Stable

*24 Transpose-Free Quasi-Minimal Residual

*25 国立天文台で稼働している NEC 製ベクトル型スーパーコンピュータ。1CPU あたり 102.4Gflops（理論値）という極めて高速なプロセッサを搭載している。

*26 Advanced Science Library

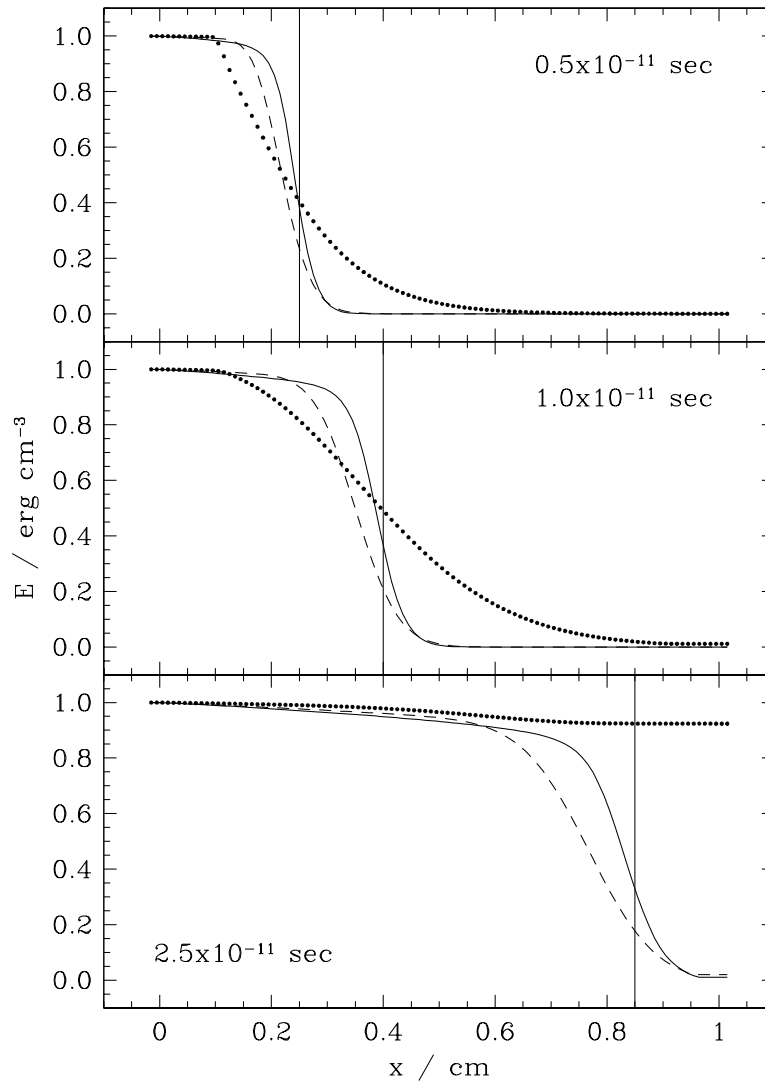


図 4.3 波面の伝播のテスト。実線： $dt = 0.1 \times \frac{\Delta x}{2c}$ 破線： $dt = \frac{\Delta x}{2c}$ 点線： $dt = 10 \times \frac{\Delta x}{2c}$ Turner & Stone (2001)[47] の Fig.7.

関数と拡散係数を $* = n$ で評価したことの悪影響が顕著に表れているものである。この手法で正しい解を得るためには原理的には（陰的に時間推進を行っていても）輻射場が変動するタイムスケール（= 輻射の CFL 条件）で計算する必要がある。この悪影響は本研究でより深刻であるが、これは時間推進法の違い（ZEUS-FLD は時間二次精度の ADI 法^{*27}）に起因すると考えられる。これは極めて大きな勾配（というより不連続）のある初期条件を設定したために発現した問題であり、現実の問題よりも極めて厳しい状況設定になっている。しかし、輻射場が短いタイムスケールで変動するような問題をそれよりも大きな時間刻みで解いた場合にはこの手法はもはや正確ではないことに注意しなければな

*27 Alternating Direction Implicit

らない。ただし、現実の問題では輻射場は流体の運動によって変動するのでその変化のタイムスケール自体が極端に短いわけではない（更に、そのような変化は光学的に厚い領域で起こる）。また、現実の問題では輻射場の伝播を分解すること自体はあまり重要ではない。そのため原理的にはこれは手法の問題点であるが、現実的には重要でないという可能性もある。後に述べる（第5章）ように本研究の実際の計算では多重格子と組み合わせて $* = n + 1$ で拡散係数を評価することでこの問題を回避している。

同様の計算を M_1 Closure Scheme で行った結果を図 4.5 に示す。 M_1 Closure Scheme では輻射エネルギー E_r の他に輻射流束 F_r にも境界・初期条件を設定する必要があるが、このテスト問題と対応させるために左端 10 格子を $F_r = cE_r$ 、その他の初期条件は $F_r = 0$ とし、左端は $F_r = cE_r$ の固定境界条件を課した。

この問題では M_1 Closure Scheme では $dt = 10 \times \frac{\Delta x}{2c}$ では大きな内部反復数を指定しても行列反転が収束しなかった。これは M_1 Closure Scheme に現れるヤコビ行列が（次元数 +2）のバンド幅を持っているため FLD の場合よりも計算が困難であることによると考えられる。ただし、後で示すように必ずしもこの程度の時間刻みで不安定になるわけではない。ここでは $dt = 8 \times \frac{\Delta x}{2c}$ の時の結果を示した。

安定性に問題はあっても、 M_1 Closure Scheme は幾つかの（スキームの性質上自明ではあるが）興味深い結果を出している。まず、CFL 条件を守っていれば（ $dt < \frac{dx}{c}$ であれば）数値的な散逸が大きく変わらないという点が挙げられる。また、時間刻みを大きく取っても散逸が大きくなるだけで FLD のような非物理的な振る舞いはしない。更に（やや微妙ではあるが）波面が通過した領域で輻射エネルギーが 1 よりも僅かに大きくなっている。これはこの系が光学的に薄いとは言え有限の opacity を持っているため輻射エネルギーが滞留していることによる。 M_1 Closure Scheme では流束も計算しているため、このような状況でも境界からエネルギーを流し込むことができる。FLD では勾配がなければエネルギーを輸送することができないことと対照的である。

この問題では FLD と M_1 Closure Scheme の実行速度に顕著な差が出るが、これは FLD の行列が 1 次元の場合は特別に簡単な 3 重対角行列になっており行列反転の内部 iteration がほぼ一回で終了することと、ガスと輻射の相互作用を解いていない場合にはもはや問題は線形の拡散方程式であり外部 iteration も一回で済むことが原因である。そのため、この計算で両者の性能比較をすることには意味がない。

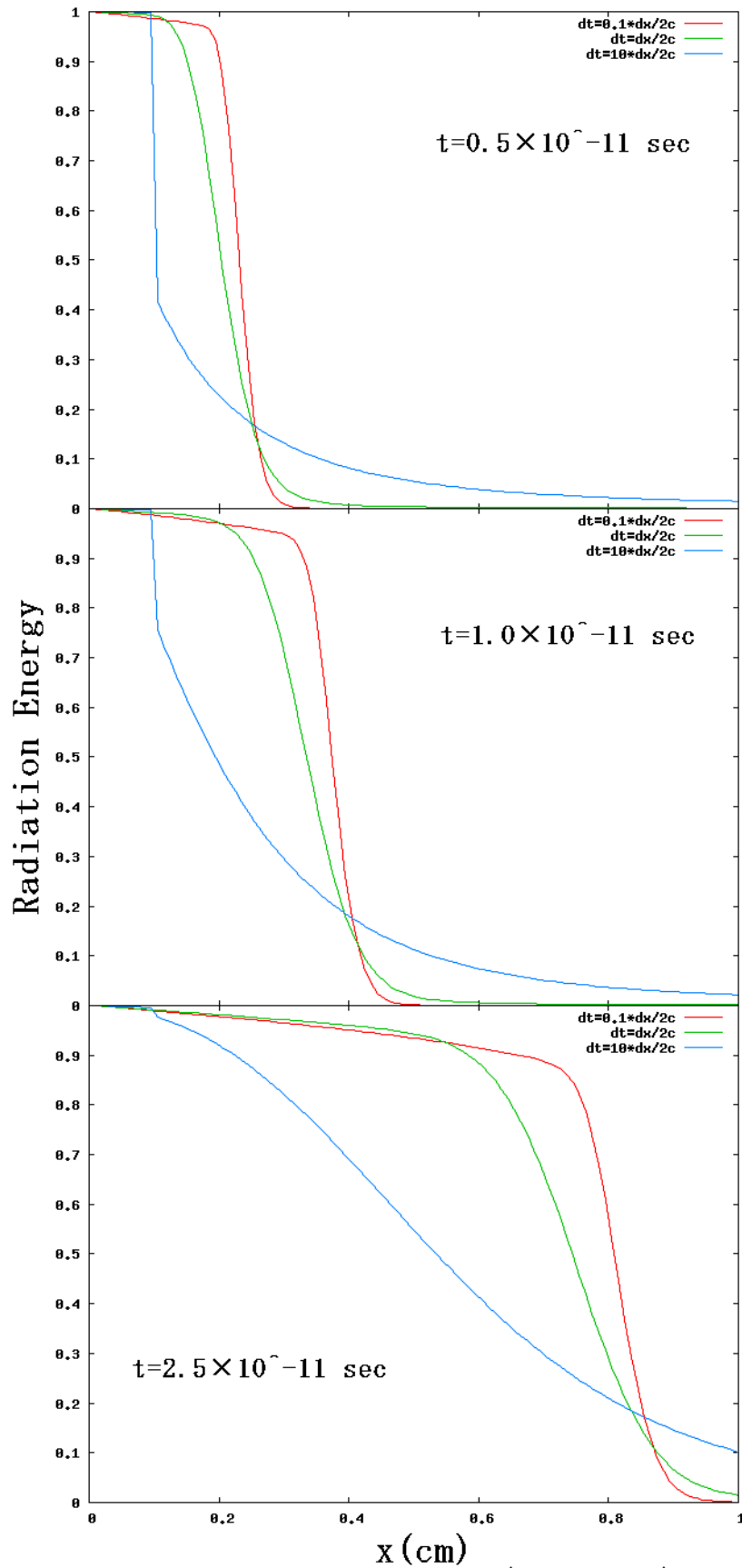


図 4.4 FLD による波面の伝播のテスト。赤： $dt = 0.1 \times \frac{\Delta x}{2c}$ 緑： $dt = \frac{\Delta x}{2c}$ 青： $dt = 10 \times \frac{\Delta x}{2c}$

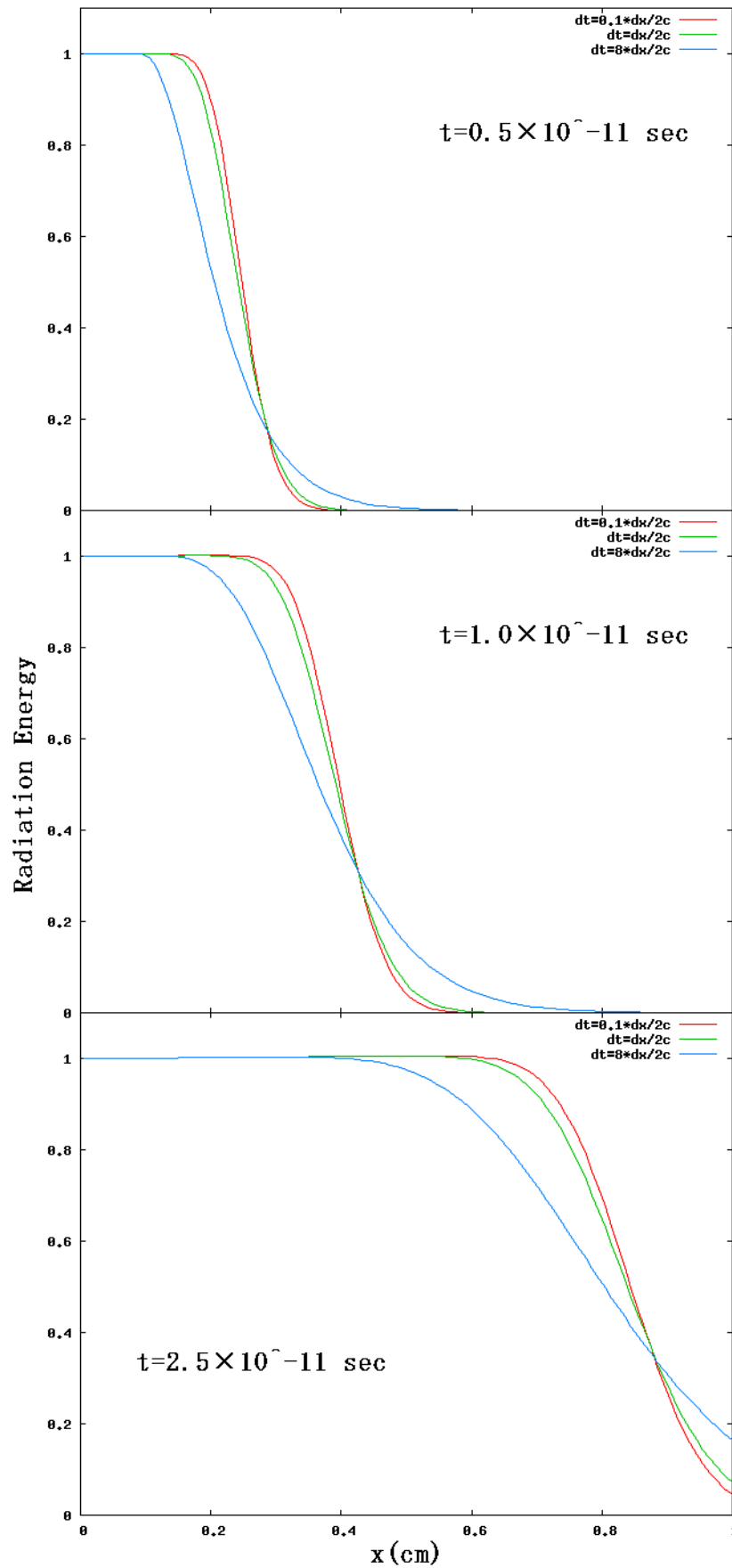


図 4.5 M_1 Closure Scheme による波面の伝播のテスト。図 4.4 と同様。

4.6.2 2次元問題 – 速度の比較

実行速度の比較を兼ねて、2次元のテスト問題で FLD と M_1 Closure Scheme の違いをしてみる。光学的に厚い場合と薄い場合の二通りについて計算領域の中心に輻射エネルギーを置いた場合の時間発展を計算する。計算領域を $L_x = L_y = 10\text{cm}$ としてこれを 64^2 の格子に分割する。初期条件として中心の 2×2 格子に $E_r = 1 \text{ erg cm}^{-3}$ を置く (M_1 Closure Scheme では更に $\mathbf{F}_r = \mathbf{0}$ とする)。時間刻みは CFL 条件を守るように $\Delta t = \frac{\Delta x}{2c}$ とし、横断時間の半分 $T_{end} = \frac{L_x}{4c}$ まで計算した。光学的に薄い場合には $\sigma L_x = 0.01$ 、光学的に厚い場合には $\sigma L_x = 100$ とした。なお、ガスとの相互作用も解いているが、結果は輻射エネルギーについてのみ示す (図 4.6 ~ 4.9)。

Intel Xeon E5450 (3GHz x4 コア) を 2 機 (計 8 コア) 搭載した計算機を用いて計算を行ったところ、 M_1 Closure Scheme では光学的に薄い場合で 3 分 10 秒、光学的に厚い場合で 2 分 45 秒の計算時間を要した。ただし、 M_1 Closure Scheme ではヤコビ行列を構築する部分のチューニングを殆ど行っておらず、コンパイラ^{*28}の自動並列機能では 20% 程しか並列化効率が出なかった。仮に 90% 程度の実行効率を得られたとすると、計算時間は 40 秒前後になると予測される。一方 FLD では 90% 以上の並列化率が得られており、どちらも 1 秒前後で結果が得られた^{*29}。大雑把な評価ではあるが、この二つのスキームには数十倍という圧倒的な速度差がある。これは M_1 Closure Scheme では変数が増えたことによりヤコビ行列と残差ベクトルの構築及び行列反転に要するコストが大幅に増大したことによる。SX-9 では FLD では 3 次元 7 点差分用にチューニングされたルーチンが利用できるため、この差はより広がる。非線形問題の収束に必要な外部 iteration の回数は FLD では 1 ~ 2 回程度であったのに対し、 M_1 Closure Scheme では 2 ~ 4 回程度と若干の増加がみられた^{*30}。

計算時間以外にも、FLD と M_1 Closure Scheme は異なる振舞いを見せる。光学的に薄い場合、FLD では輻射は内部の詰まった円状に広がるが、 M_1 Closure Scheme では円環状に広がる。これは FLD が勾配がなければエネルギーを流せないのに対し、 M_1 Closure Scheme では中心に置いたパルス状の輻射が自然に光速で広がっていく性質を保っていることを示している。

一方光学的に厚い場合、 M_1 Closure Scheme は FLD よりも広がった結果を与える。これは M_1 Closure Scheme で流束の評価に用いている Lax のスキームが極めて強い (安定

*28 Intel Fortran Version 10.1

*29 SX-9 で ASL を用いると 1PE であってもこれより 10 倍程度高速化する。

*30 どちらのスキームでも、opacity や状態方程式の温度依存性を取り入れるとこの回数は増加すると予想される。

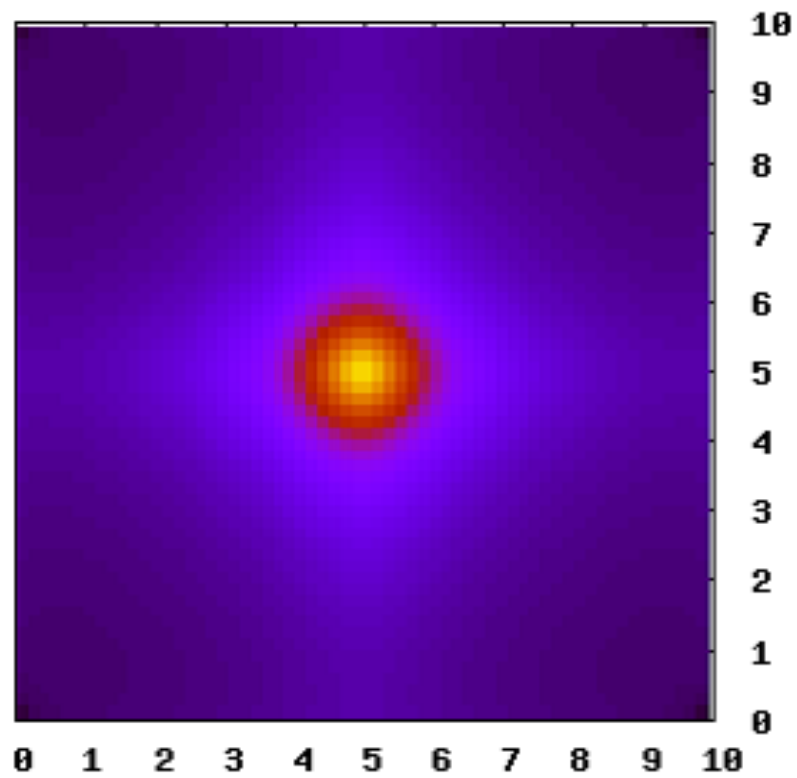


図 4.6 FLD によるパルスのテスト。光学的に厚い場合。

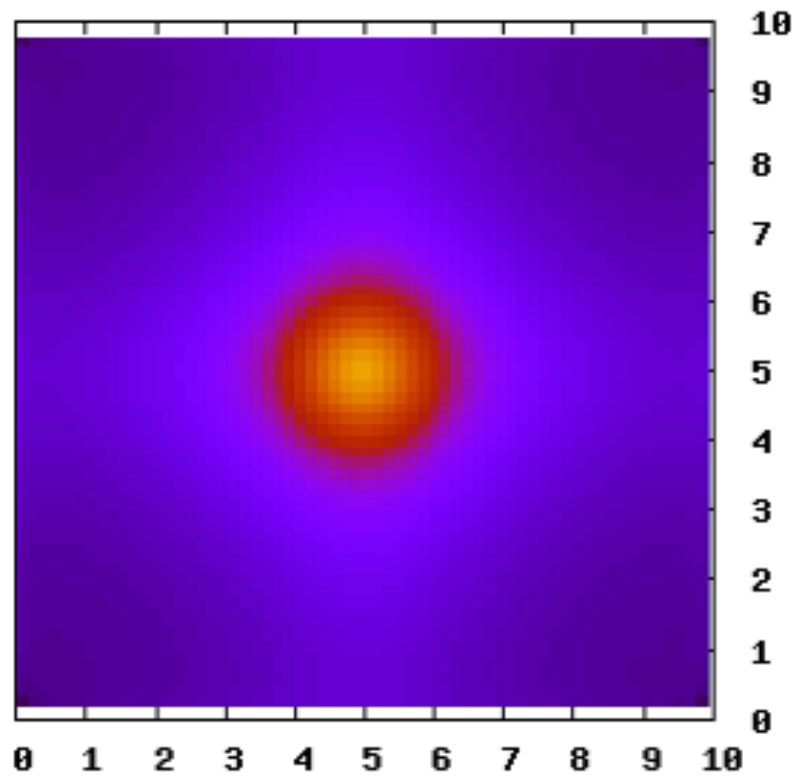


図 4.7 M_1 Closure Scheme によるパルスのテスト。光学的に厚い場合

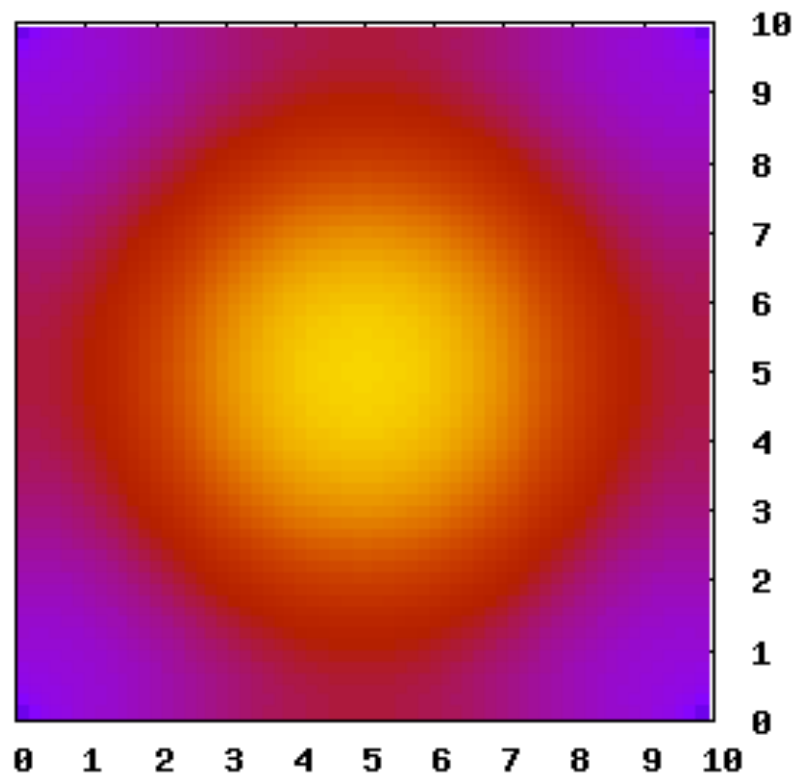


図 4.8 FLD によるパルスのテスト。光学的に薄い場合。

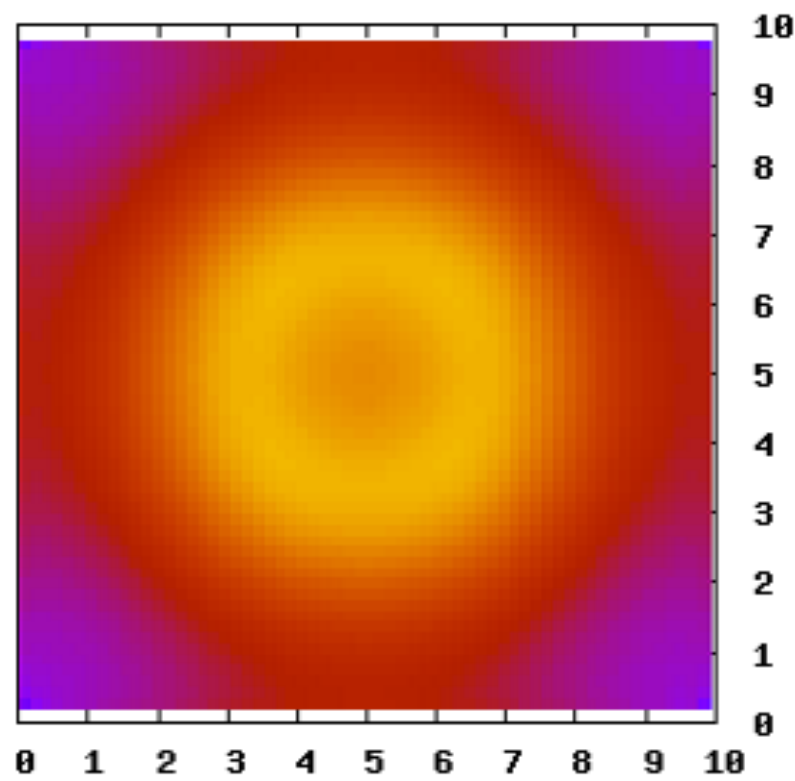


図 4.9 M_1 Closure Scheme によるパルスのテスト。光学的に薄い場合

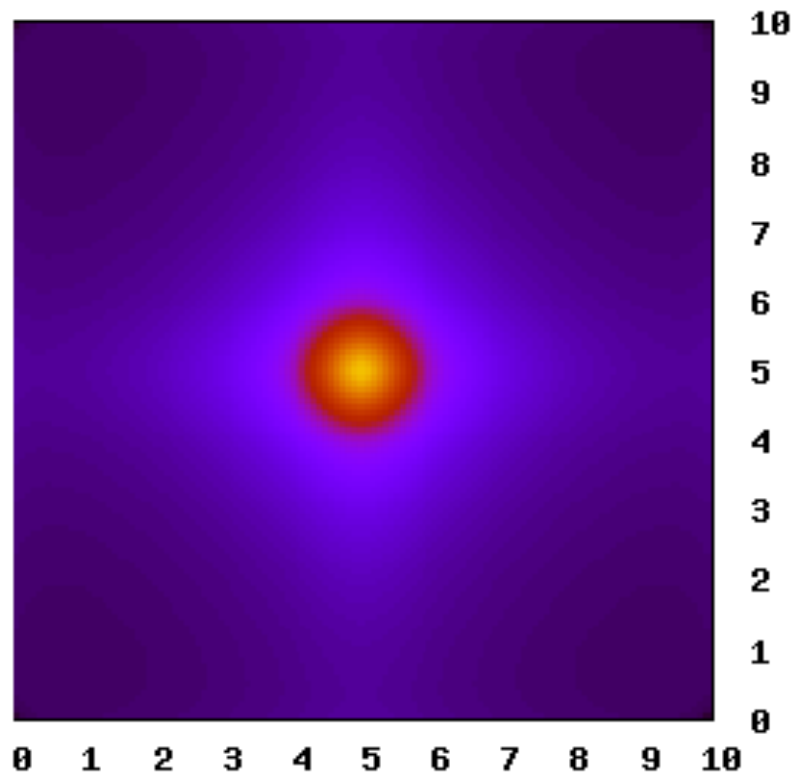


図 4.10 FLD によるパルスのテスト。高解像度。光学的に厚い場合。

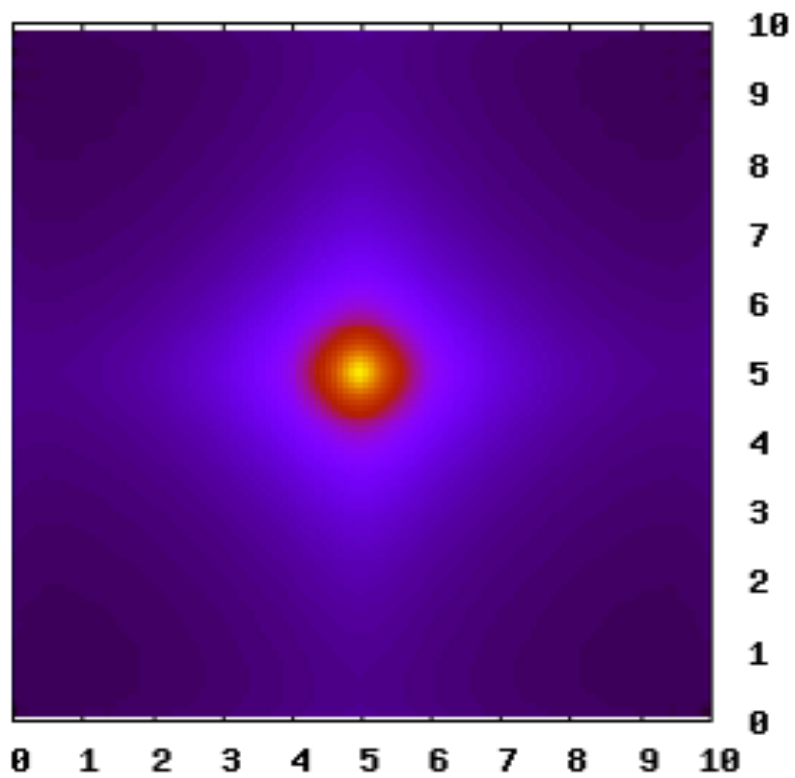


図 4.11 M_1 Closure Scheme によるパルスのテスト。高解像度。光学的に厚い場合

性を保つ範囲で許される最大の) 数値拡散が入っていることが原因である。このことを見るために、同じ初期条件(中心の 4×4 格子に $E_r = 1 \text{ erg cm}^{-3}$ を置く)を与えて二倍の解像度で計算を行った結果を図 4.10 と図 4.11 に示す。FLD は解像度を変えてもほぼ同じ結果が得られているのに対し、 M_1 Closure Scheme では大きく異なる結果が得られる。これはこの拡散の原因が数値的なものであることを示しており、 M_1 Closure Scheme で正しい解を得るためには高い解像度が必要になることを意味している。これを改善するにはより数値拡散の少ない高精度なスキーム(例えば HLLE[12])を用いることが考えられるが、行列反転を行う陰解法にはあまり複雑なスキームは使えない。一方で高解像度にすることは多大な計算時間を要するため現実的でない。このことは M_1 Closure Scheme の大きな弱点と言える。

4.6.3 2次元のビーム

FLD では取り扱うことのできない、 M_1 Closure Scheme ならではの異方性の強い現象についてのテスト結果を示す。これは HERACLES コードの論文 [15] で行われているテスト問題と同等である。この問題では opacity を 0 とした完全に光学的に薄い計算領域に斜め 30 度のビームを入射させ、横断時間 L_x/c まで時間発展させる。計算領域は $L_x = L_y = 10\text{cm}$ 四方をそれぞれ 64 分割してある。時間刻みを輻射の CFL 条件を守るように決めて計算した結果を図 4.12 に、系の横断時間 L_x/c を 1step で計算した結果を図 4.13 に示す。

ある程度拡散はするが(これは各物理量が格子上で定義されているモーメント法の性質上やむを得ない。また、流束の評価に使用している Lax のスキームが非常に強い数値粘性を含んでいるため更に拡散が強くなっている)、ビームの伝播が定性的に正しく解けている。CFL 条件で決まる時間刻みを取った場合、1step あたりの iteration の回数は 3~5 回程度であった。この問題の場合、CFL 条件を大幅(64 倍)に超えるような時間刻みを取った場合でも、散逸は強いものの正しい結果が得られる。このような大きな時間刻みでも 26 回の iteration で計算は収束し、それより更に 20 倍大きな時間刻みを取っても同じ回数 of iteration で収束した。多少不思議ではあるが、この(直感的には次元問題よりも困難と想像される)問題では、 M_1 Closure Scheme はかなり安定に解が得られるようである。

最後に、 M_1 Closure Scheme が破綻するケースとしてビームを交差させた場合の結果を図 4.14 に示す。ビームの交差点ではもはや一つの方向では輻射場を表現できないため、輻射は単にモーメントを保存するよう、上方向に流れてしまう。このような状況はビームのような極端な状況でなくとも、光源が複数あればほぼ確実に現れる。この問題を解決するために Half-Moment 法が提唱されている [10]。

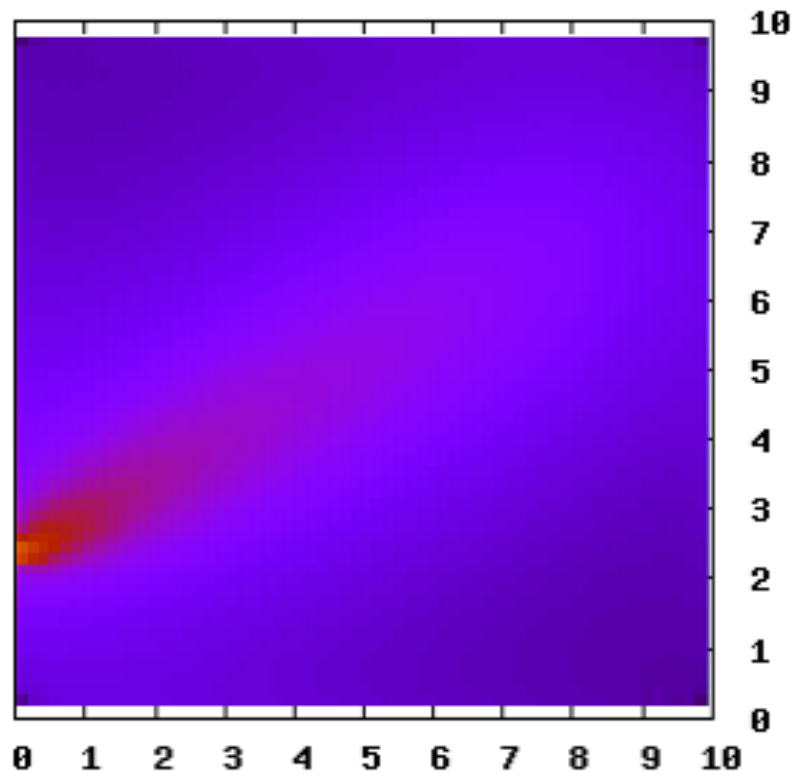


図 4.12 M_1 Closure Scheme によるビームのテスト。 $dt = dx/c$ として計算。

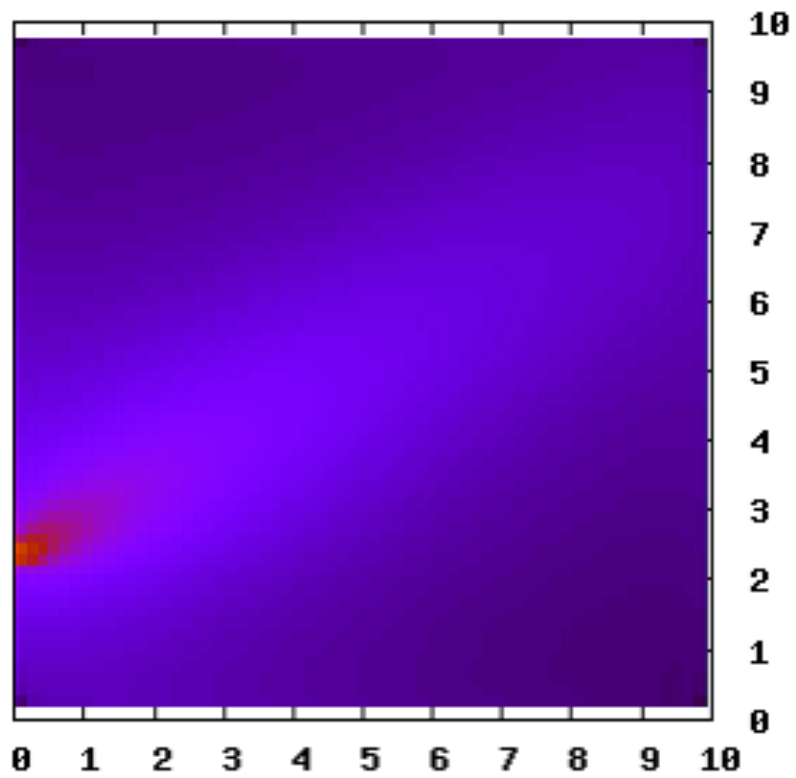


図 4.13 M_1 Closure Scheme によるビームのテスト。 $dt = L_x/c$ として計算。

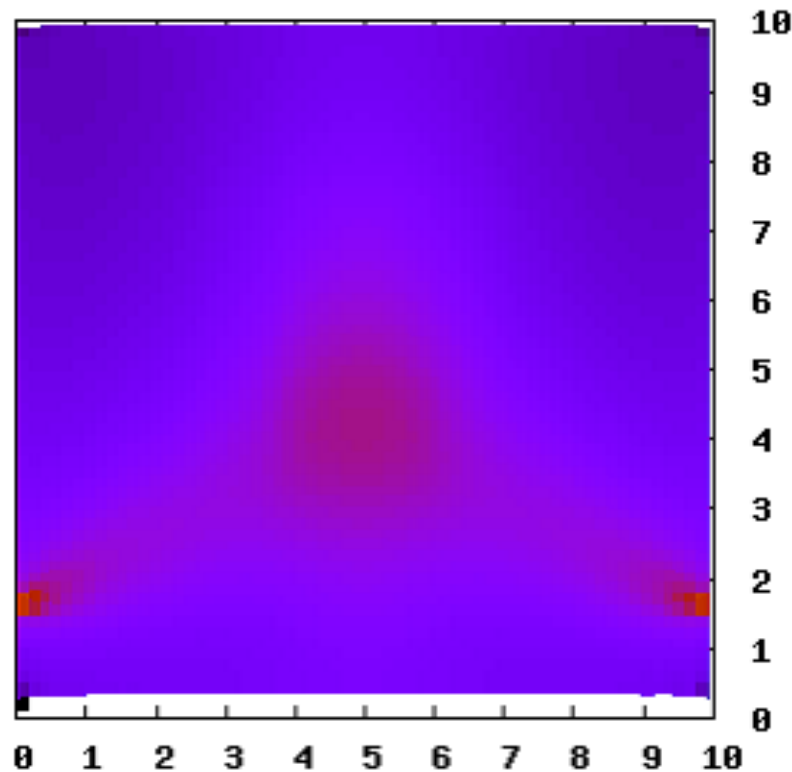


図 4.14 M_1 Closure Scheme によるビームの交差問題のテスト。交差点では系に 2 次以上の異方性があるためはや M_1 Closure Scheme では正しく表現できない。

4.6.4 テストのまとめ

以上のように、 M_1 Closure Scheme は幾つかの点で FLD よりも優れた性質を持っているが、一方で安定性と収束性で FLD に劣る場合があることがわかった。テスト問題は多くの科学的問題よりもシビアな設定になっているため、科学的対象に適用した場合には問題は発生しない可能性はある。とはいえ、安定性に問題があることは実用上大きなリスクを伴うこと、また実行速度と空間解像度に対する収束性^{*31}の面で FLD にかなり劣ることから、今回は M_1 Closure Scheme の ngmhd コードへの実装は見送ることとした。それでも、 M_1 Closure Scheme の持つ優れた性質は科学的に興味深い応用対象があるため、今後の課題として継続的に取り組んでいきたいと考えている。

*31 今回のテストでは不連続な分布を初期条件としたために極端に差が出ている。実際の問題において収束に必要な解像度は問題ごとにテストを行って決定する必要がある。

第 5 章

ngmhd コードへの実装

この章では実際に星形成などの問題に応用するための、多重格子（磁気）流体力学コードへの FLD による輻射輸送の実装について説明する。ベースとなる数値計算コードとして法政大学の松本倫明氏に ngmhd コードを提供して頂いた。このコードは多重格子法に空間・時間二次精度の Roe 法による MHD エンジンとマルチグリッド法による高速な自己重力ソルバ [27, 59] が実装されており、主に星形成の問題において多数の実績がある [40, 23, 28, 22]。

5.1 多重格子法

星形成に限らず自己重力が支配的な系では、重力によってガスは収縮し極めて小さい構造を作る。このような大きなダイナミックレンジを持つ問題を一様な細かい格子で取り扱うことは計算量の観点から極めて困難である。実際には微細な構造ができる場所は限られているため、計算領域の全域に高解像度の格子を置く必要はない。簡単には格子間隔を非一様にとるという手もあるが、より洗練された手法として高解像度の必要な領域だけ細かい格子を生成して計算する解適合細分化格子法 (Adaptive Mesh Refinement; AMR) [4] が考案された。AMR では計算結果に適合するよう必要な場所に自動的に格子を生成するが、今考えているような（単一の）星形成のような問題の場合、細かい構造ができる場所は初めから予測することができる*¹。このような場合には計算コードを大幅に簡略化することができるため、この簡易版 AMR と呼べる手法は非常に有用である。このような手法を多重格子法 (nested-grid)[56] と呼ぶ (図 5.1)。

これらの手法では各解像度（レベル）の格子をそれぞれ独立な一様格子として計算する。粗い格子の情報を境界条件として細かい格子の計算を行い、得られた結果を粗い格子

*¹ 分裂して連星になるような場合や初期に乱流速度場を与えた場合には細かい構造のできる位置を完全に決定することはできないため、近年では AMR への移行が進んでいる [26]。

に射影することでレベル間の情報のやり取りが実現され、全体として整合性のある解が得られる。

AMR または多重格子法において細かい格子を生成する条件には計算の対象と目的に応じて幾つかの流儀があるが、星形成の問題では自己重力系のシミュレーションに必要な解像度を定めた Truelove et al. (1997)[46] の Jeans 条件を用いる。この条件は Jeans 長 $\lambda_J = \left(\frac{\pi c_s^2}{G\rho}\right)^{1/2}$ を最低 4 格子（実際には安全係数を見込んで 8~20 格子）で分解しなければ非物理的な分裂を引き起こすというものである。この条件を満たすため計算中 Jeans 長を監視しこの条件に該当した場合には細かい格子を生成する。多重格子法の場合細かい格子を生成する位置が固定されているため、連星系になった場合などこの条件を満たすことができなくなることがあるが、そのような場合はそこで計算を終了する。

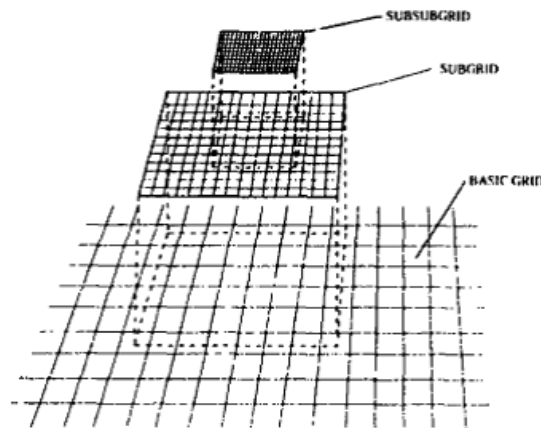


図 5.1 多重格子法概念図。ある格子の内側の必要な領域に高解像度の格子を入れ子状に生成する。Ziegler & Yorke (1997) の Fig.2。

5.2 時間推進の手順

多重格子法において各レベル間で整合性を保ちつつ時間積分を進める手法をここでは説明する。簡単のため時間一次精度の場合を例にとるが、二次精度にする場合でも中間ステップの値を適当に評価する必要があるだけで基本的には変わらない。

まず大枠として時間推進の方法には二種類ある。一つは全てのレベルで同じ時間刻みを取る同期時間刻み法 (Synchronous Timestep) であり (図 5.3)、この場合時間刻みは各レベルの CFL 条件で決まる時間刻みのうち最も短いものになる。もう一つは各レベルで異なる時間刻みを用いる独立時間刻み法 (Adaptive Timestep) である (図 5.2)。この手法では各レベルで CFL 条件で決まる時間刻みを最も長い時間刻みの $1/2^n$ 倍になるように調整して用いる (細粗レベル間で同期を取るため)。細かい格子で計算を行う際には境

界条件に粗い格子の情報が必要になるが、この手法を取った場合には必ずしもその時刻の情報が存在しないことがある（例えば図 5.2 ではレベル 2 のステップ 4 を計算するときに level 1 の同時刻の情報がない）。このような時には時間的な内挿を行うことでその時刻の境界条件を生成する。この手法は同期時間刻みと比べて (1) 計算量が少ない (2) 各レベルで CFL 条件に近い時間刻みを取れるため数値的な散逸が小さい*² という二つの長所があり、殆ど全ての多重格子法及び AMR の計算でこちらが使われている*³。

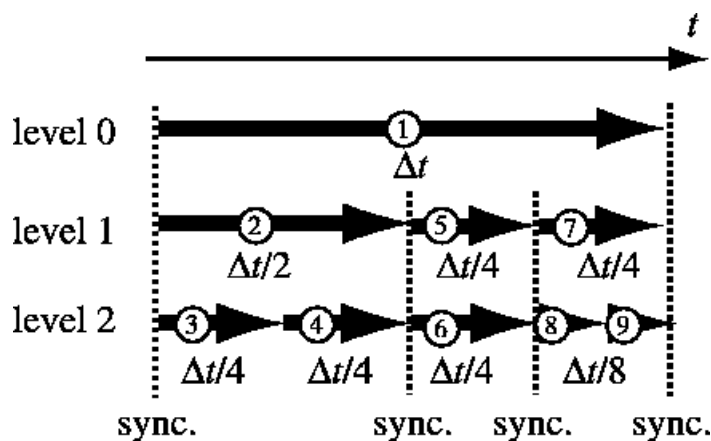


図 5.2 独立時間刻みの概念図。Matsumoto (2007) の Fig.2.

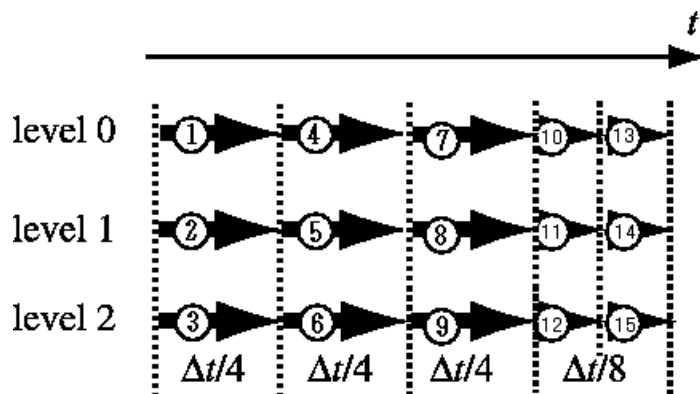


図 5.3 同期時間刻みの概念図。図 5.2 と同じ計算を行う場合、必要な計算回数が増加する。

通常の流体の場合のように陽的な時間推進を行う場合には必要な情報が全て既知であるため、計算の順番に任意性がある。図 5.2 は粗い格子から順に時間を進めた場合の計算順

*² 時間刻みは小さければ良いというものではなく、CFL 条件を満たしつつできるだけ大きく取った場合に最も誤差が小さくなる。

*³ 自己重力を取り入れた場合は流体に時間二次精度のスキームを使っていても、重力の計算に必要な粗いレベルにおける密度分布の時間精度が失われているため時間一次精度に低下するという問題があるが、通常この効果による誤差は小さいと考えられるためあまり問題にされない。

序を示しているが、これとは逆に細かい格子から時間を進めることも可能である。しかし今回のように輻射場の陰的な時間推進を行う場合には境界条件に次の時刻における値が必要になるため、粗い格子から先に計算する以外の選択肢はない。

更に、CFL 条件よりも大きな時間刻みで陰的に時間推進を行う場合には同期時間刻みを取らなければならない。独立時間刻みでレベル間で時刻がずれている場合には、時間的に内挿することで境界条件を求めていた（例えば $E(t = 0.5dt) = (E(t = 0) + E(t = dt))/2$ ）。これは CFL 条件を守る小さい時間刻みを取っている限りは適切な近似となっているが、時間刻みが大きい場合にはもはや全く適当でない。具体的な計算例を図 5.4 に示す。

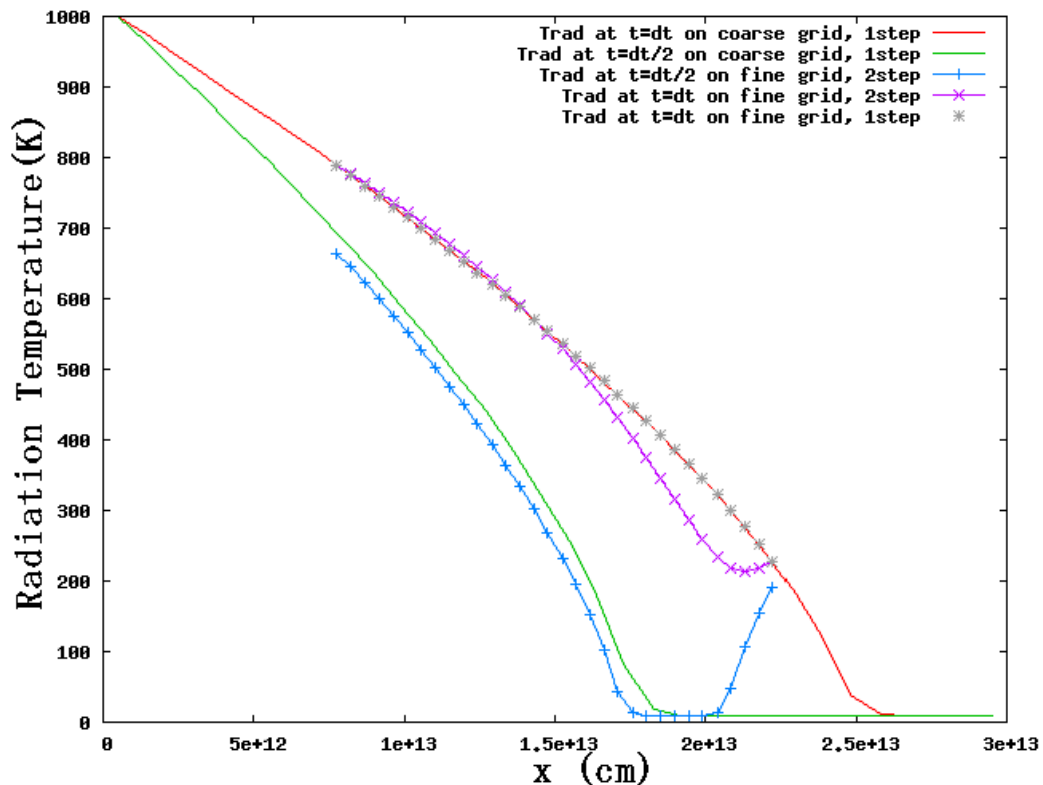


図 5.4 nested-grid における時間刻みの取り方の影響のデモンストレーション。 $7.5 \times 10^{12} \text{cm} \leq x \leq 22.5 \times 10^{12} \text{cm}$ の領域に 2 倍解像度の高い格子を置いた。左の境界から 1000K の輻射場を入れて FLD で計算した場合の各時刻各格子における輻射温度の分布を示した。赤：粗い格子、 $t = dt$ 緑：粗い格子、 $t = 0.5dt$ 青：細かい格子、 $t = 0.5dt$ 、独立時間刻み（境界条件を $t=0$ と $t=dt$ からの時間内挿で求めた場合）紫：細かい格子、独立時間刻み（青を更に $t = dt$ まで進めた）灰：細かい格子、 $t = dt$ 、同期時間刻み（ $t = dt$ まで中間ステップを取らずに一度で進めた）

時間内挿で境界条件を求めた場合に $t = 0.5dt$ の細かい格子における温度分布（青）は粗い格子のそれ（緑）と全く一致しない。また、中間ステップで分布を誤った結果、それ

を用いた $t = dt$ の分布 (紫) も粗い格子で解いたもの (赤) と合わない。一方、同期時間刻みを取った場合は粗い格子と細かい格子で整合性のある解が得られる (灰)。

このような事実にも関わらず AMR と組み合わせた輻射流体シミュレーションコード (Orion コード [18] と RAGE コード [14] くらいしか実装例がないが、RAGE コードの論文には時間刻みの取り方について情報がない) では独立時間刻み法が使われている。また、Whitehouse & Bate [48, 50, 49] の SPH における実装でも、独立時間刻み^{*4}が採用されている。この問題は輻射場があまり急に変動しないような系では深刻な問題にはならないため、実際の科学的計算では回避されている可能性はある。多くの宇宙物理学的応用では輻射場そのものの変動を分解することは重要ではないが、このような問題が存在することには十分に注意する必要がある。

同期時間刻みを取った場合の計算量の増加を見積もってみる。粗い側から level 番号を $l = 0, 1, 2, \dots, L$ とする。最も細かいレベル L で CFL 条件から決まる時間刻みを $dt = dt_L$ とし、一段粗くなるごとに 2 倍になるとする: $dt_{l-1} = 2dt_l$ 。この時最も粗いレベル 0 での 1step は $dt_0 = 2^L dt_L$ となり、全てのレベルをこの時間だけ進めるのに必要な計算回数は $\sum_{l=0}^L 2^l = 2^{L+1} - 1$ 回。一方同じ時間を同期時間刻みで計算すると必要な計算回数は $L2^L$ 回であり、独立時間刻みの場合のおよそ $\frac{L}{2}$ 倍となることがわかる。星形成の場合 First Core まででも典型的に $L \gtrsim 15$ 、Second Collapse 以後まで計算するためには $L \gtrsim 30$ と多数のレベルを必要とするため、これは大幅に計算量が増大することを意味しているが、上に示したように独立時間刻みを取ると定性的に結果を誤ることがあるためコードの信頼性を保つために不可避の選択であると考えられる。

流体部と輻射部を分離した計算の手順については 4.2 で述べたが、多重格子と組み合わせた場合ここでも手順に任意性がある。即ち (1) $l = 0, 1, 2, \dots, L$ の順に流体を解く $l = 0, 1, 2, \dots, L$ の順に輻射を解く (2) $l = 0$ の流体を解き、輻射を解く $l = 1, 2, \dots, L$ と続けるという二通りの方法が考えられるが、ここではレベル間の状態に整合性のある (1) を採用した。

5.3 多重格子法における輻射流体の計算

多重格子法や AMR では境界条件や粗い格子へのマッピングを除き、各レベルは通常の一様格子と同様に計算する。輻射流体の場合にも基本的にはこれと同じ戦略を取るが、幾つか異なる点があるためここではその違いについて説明する。

4.3 で説明したように、FLD では流束制限関数は極めて非線形性が強いいため、安定に計

^{*4} ここでの独立刻みでは輻射だけでなく各粒子の運動自体を独立な時間刻みで扱う手法のことを指す。SPH や重力多体問題の計算においてしばしば用いられる [24]。

算をするためには iteration の間更新することができない。このため一様格子の場合は拡散係数を $* = n$ で陽的に評価するしかなかった。多重格子の場合、粗い格子を先に時間推進するため、その結果を $* = n + 1$ での解の良い初期推定値として使うことができ、これを用いて $* = n + 1$ での拡散係数を推定することもできる（もちろん空間分解能は失われるが、あくまで拡散係数の評価のみなので悪影響は小さい。拡散係数を $* = n$ で評価するよりは良いと考えられる）。最も粗い格子ではこの手法が使えないため $* = n$ で評価するしかないが、同期時間刻みを用いると粗いレベルにとっては極めて短い時間刻みを取っていることになるためこれは比較的良い近似となる^{*5}。

多重格子法では細かい格子で解いた結果を粗い格子へ射影する際は、通常全エネルギーや運動量などが保存するように物理量の加重平均を取る。しかしこのような粗視化操作によって物理量の勾配は変わってしまうため、流束を勾配で評価する FLD^{*6}で輻射輸送を計算する場合にこのような射影を行うと流束の評価が粗細の格子間で大きく違ってしまふ。その結果粗い格子で求めた解が細かい格子の解の適切な近似にならない。このことを図 5.5 に示す。

粗い格子（緑、青）の格子点での値は各格子内の値の平均値である。1 レベルの平均操作（赤 緑）ならばこの単純な平均値は「格子点の座標」における値の適切な近似にもなっている（緑における $x = 1$ の点の値は赤における $x = 0.5$ と $x = 1.5$ の点の近似値になっている）が、2 レベルの平均操作（赤 青）を経ると得られた結果はもはや「格子点の座標」における値を適切に表現してはいない（青における $x = 2$ の点の値は赤における $x = 1.5$ と $x = 2.5$ の値の近似値にはなっていない）。FLD では輻射エネルギーの勾配によって流束を評価するため、このような平均操作を経た格子で流束を評価すると細かい格子での評価とは大きく（精度の差の範囲を超えて）異なる値が出てしまう。その結果粗い格子と細かい格子で解の整合性が失われ、細粗の境界で不自然に物理量が変化するなどの非物理的な結果を生じる^{*7}というのがこの問題である^{*8}。

この問題を回避するためには、粗い格子に粗視化する際に勾配を適切に近似できるような値を求めればよい。勾配を近似するのに必要となるのはその格子内の物理量の平均値ではなく、格子点の座標における物理量の近似値である。このため、細かい格子から粗い格子に勾配を求めるのに使う物理量（この場合輻射とガスの温度またはエネルギー^{*9}）を

^{*5} 多重格子が 15 段程度あると時間刻みは典型的に $2^{-15} \sim 3 \times 10^{-5}$ 倍になるため、流体の速度が 1km/s であっても最も粗い格子では輻射の CFL 条件を満たす（！）。この時は $* = n$ で拡散係数を評価することは適切な近似になっている。

^{*6} M_1 Closure Scheme の場合は流束まで計算するためこの問題は発生しない可能性がある。今回は ngmhd コードへの M_1 Closure Scheme の実装は行っていないため、この検証は今後の課題としたい。

^{*7} 結果を見れば問題が生じているのがわかるという点でまだ性質は良い。

^{*8} 全エネルギーを保存するように平均を取ると細かい格子内の分解できない速度分散や磁場のエネルギーが粗い格子では熱エネルギーとして表現されるため、ガスエネルギーについては状況はより悪くなる。

^{*9} これには任意性があるが、ここでは温度を用いて内挿する。これは輻射とガスが平衡状態にある領域を粗

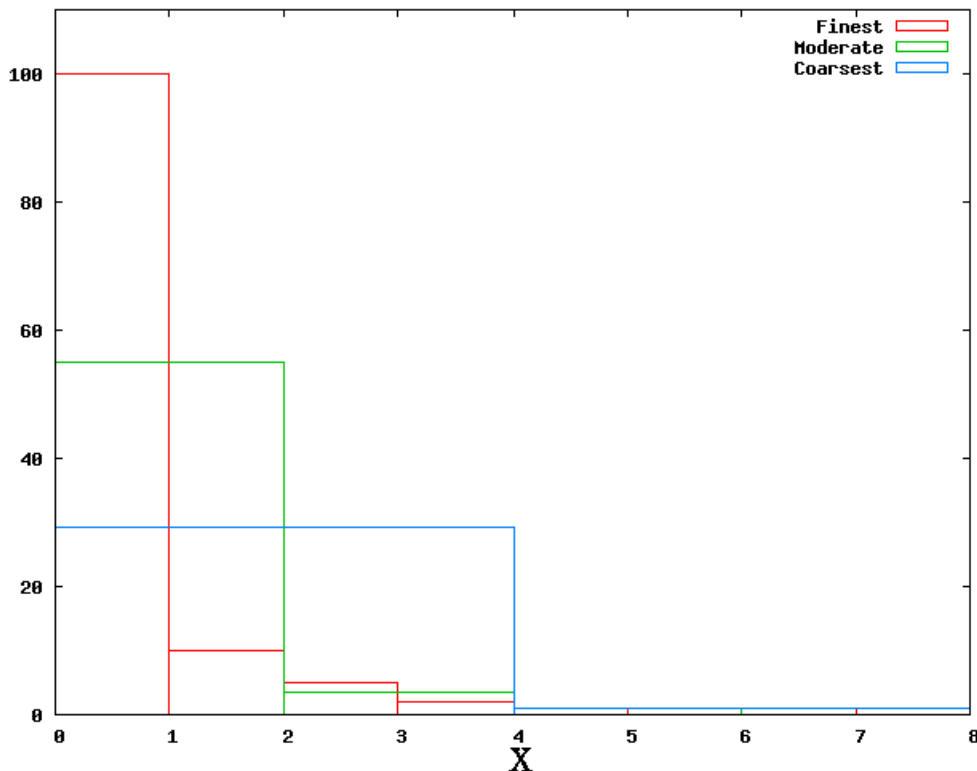


図 5.5 単純な体積平均操作の模式図。最高解像度の分布（赤）を最低解像度の格子（青）で見た時、格子点 $x = 2$ での値はその格子内の平均値ではあっても「その座標の値」の近似値にはなっておらず、結果勾配の評価は大きく変わってしまう。

マッピングする際には、格子内の物理量を平均する代わりにその点を含む最も細かい格子から直接近傍の点の値を内挿する^{*10}（図 5.5 で言えば粗い格子（青）の格子点 $x = 2$ の値を求めるのに最も細かい格子（赤）の $x = 1.5, 2.5$ の値だけの平均を取る）。これにより粗い格子でも細かい格子の適当な近似解を得ることができると考えられる。この内挿を行った（細かい格子と重複している）格子ではもはや保存則を満たしていないため注意を要するが、最終的にこの格子は（保存則を満たす）細かい格子の結果で上書きされるためここで保存則を満たすこと自体はそれほど重要ではない。

この処理を行った結果非物理的な振舞いを回避することはできたが、この処理は（ある状況では正当化できるとしても）必ずしも自明ではないことは否めない。CFL 条件を守る時間刻みを用いる陽的な解法の場合は 1 格子しか情報が伝わらないため、細かい格子と重なっている領域は（境界条件を計算するための袖の部分を除いて）正しい必要はなく、実は計算する必要さえない（単にコードの実装のしやすさとわかりやすさのために計算し

視化した際に平衡状態を保つためである。

*10 密度や速度については通常通り保存則を満たすように体積平均を取る。これらの物理量は勾配を求めるには使われず、その格子の光学的厚さや熱容量を適切に表現するためにはこのような平均を取る必要がある。ただしこの場合格子内の熱エネルギーなどは正しく表現されていないことに注意が必要である。

ているだけで、実際にはその領域は細かい格子の計算結果で上書きされてしまう)。しかし今のように CFL 条件よりも大きな時間刻みを取っている場合、最終的に細かい格子の情報で上書きされる領域からも情報が伝わってしまう。そのため、このような領域でも適切な近似解を得る必要がある(全域で正確である必要は必ずしもないが、細かい格子と重複がない領域の結果が正しく求められる必要がある。そのために重要なのは保存則を守ることではなく流束が正しく近似できることである、というのがこの方法の考えである^{*11})。

この問題は輻射輸送では相互作用が局所的でないこと、粗い格子だけの情報で細かい格子と整合的な近似解を自明に構成できないこと、FLD では流束を勾配で評価すること^{*12}、勾配が粗視化によって変わってしまうこと、用いている解法の空間精度が一次であること^{*13}など複数の要因が複合していると考えられる。今回取った対策は(全く根拠がないわけではないものの)残念ながら「こうすれば上手く行く」という経験則的なものであることは否定できない。次章で示すように幾つかの現実的な問題とほぼ同等のセットアップのテスト問題に対して非物理的な振る舞いをしないよう計算を行うことができたが、これは(悲観的に見れば)幸運によるものである可能性もある。問題の本質的解決のためには、全てのレベル間で整合性のある解が得られるまで iteration を行うような、(自己重力の解法と同様の)マルチグリッド的手法が必要になる可能性がある。このような手法の研究にも今後取り組んで行かなければならないと考えている(開発できたとして、計算量が増大する可能性が高いが)。これが現状のコードの最も大きな不安であり、非物理的な振る舞いをしていないか常に計算の結果を確認する必要がある。

以上をまとめて、計算の流れは以下ようになる。

1. $l = 0, 1, 2, \dots, L$ の順に流体を解く(必要ならば格子生成もここで行う)
2. 各レベルで細かい格子から各格子点でのガス・輻射の温度を求める
3. $l = 0$ の輻射を解く。この時拡散係数は $* = n$ の値で陽的に評価する
4. $l = 1, 2, \dots, L$ の順に以下の処理を行う
 - (a) 粗い格子で計算した結果を境界条件に設定する
 - (b) 粗い格子で計算した結果を線形補間で内挿し、解の初期推定値とする
 - (c) 初期推定値を用いて $* = n + 1$ での拡散係数の推定値を求める
 - (d) 輻射を解く
5. 細かい格子の値を粗い格子に保存則を満たすように射影する
6. 計算終了条件を満たすまで 1. に戻って繰り返す

^{*11} 細かい格子と重複のない領域では局所的保存則を満たしていることに注意されたい。

^{*12} これが原因だとすれば M_1 Closure Scheme ならばこの問題は回避できる可能性がある。

^{*13} 高次の微分情報を保持しているようなスキームであれば正しい流束を得られるかもしれない。ただしそのようなスキームは複雑であり陰解法にするのは困難だろう。

第6章

分子雲の重力収縮

ここでは開発したコードを現実的な問題に適用した幾つかの計算結果を示す。共通事項として、解像度は 32^3 、初期の密度場は中心密度 $\rho_c = 10^{-19} \text{ g cm}^{-3}$ の Bonnor-Ebert 球 [6, 11] (半径をスケールすることで質量を変える)、初期温度は 10K、剛体回転と摂動を加えた初期速度場を与える (質量と回転速度は問題ごとに設定)。初期密度による自由落下時間は $t_{ff} = 2.1 \times 10^5 \text{ yr}$ である。輻射の境界条件として $T_{rad} = 10\text{K}$ の固定境界条件を課した。その他の境界条件として球境界条件 (計算領域に内接する球の外を初期値で毎回書きする。近似的に球面状の固定境界条件と考えてよい) を課している。状態方程式は比熱比一定 $\gamma = \frac{7}{5}^{*1}$ 、opacity についても一定 $\kappa_P = 0.1 \text{ cm}^2/\text{g}$, $\kappa_R = 0.04 \text{ cm}^2/\text{g}$ とした^{*2}。ここで示す計算結果は解像度が低い計算コードの能力と妥当性を十分示しており、またこれまでのバロトロピック近似による計算とは異なる興味深い結果が既に得られている。

6.1 球対称

ここでは質量 $M \simeq 4.2M_\odot$ 、計算領域の半径は $R = 0.16 \text{ pc}$ 、初期回転・摂動のない場合の結果を示す。この系は、質量や初期の密度分布が違う (先行研究は一様球を初期条件に置いている。これと対応づけた研究は今後行う) もの、定性的には Masunaga & Inutsuka (2000)[25] や Whitehouse & Bate (2006)[49] のシミュレーションと同様の振舞いを示すはずである。

現状のコードには Second Collapse 以降の計算に必要な状態方程式が入っていないため、中心温度が Second Collapse を起こす温度 $T_c = 2000\text{K}$ に達した時点で計算を終了する。各物理量の動径プロファイルの時間進化を図 6.1 ~ 6.4 に示す。図にはステップ数

*1 水素分子の比熱比

*2 Semenov et al. (2003)[42] の opacity の $T=10\text{K}$ における値。

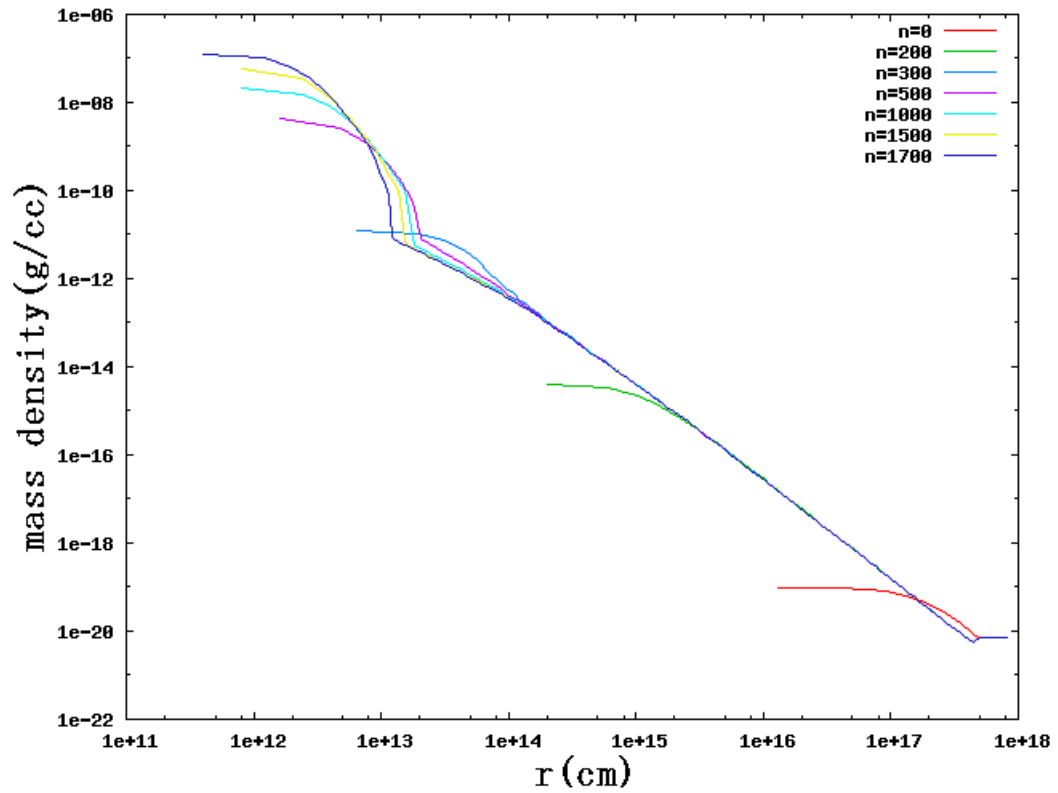


図 6.1 球対称な重力収縮過程における密度プロファイルの進化

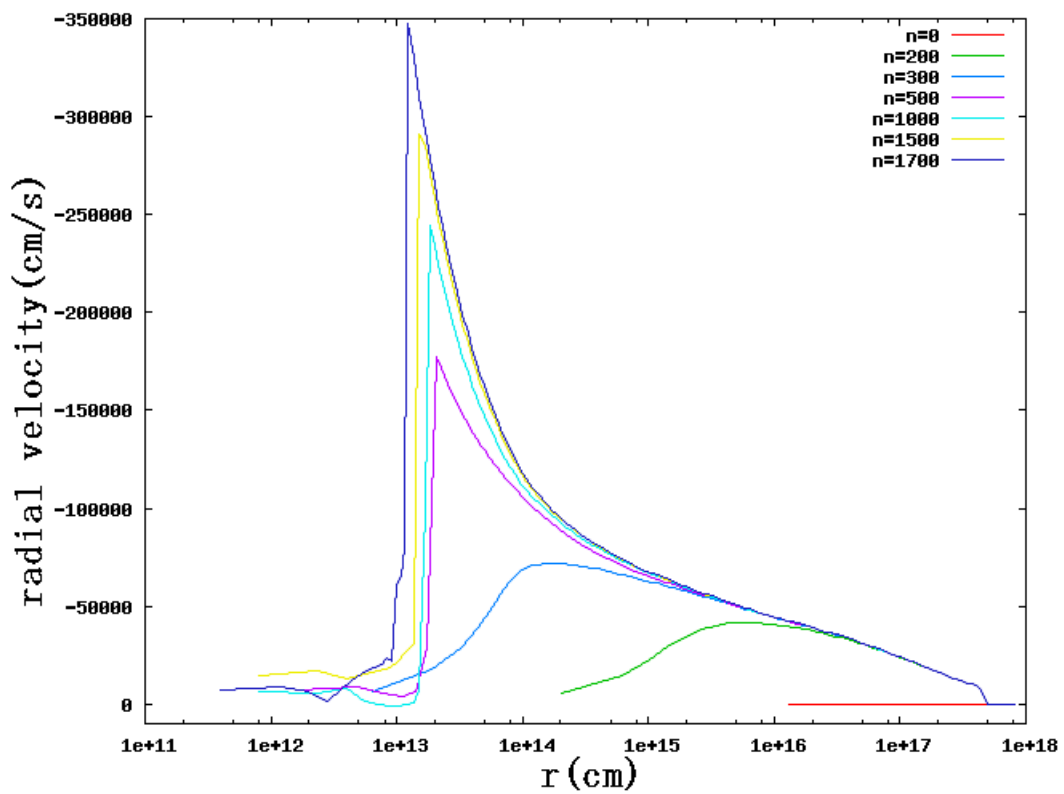


図 6.2 同、動径速度プロファイル

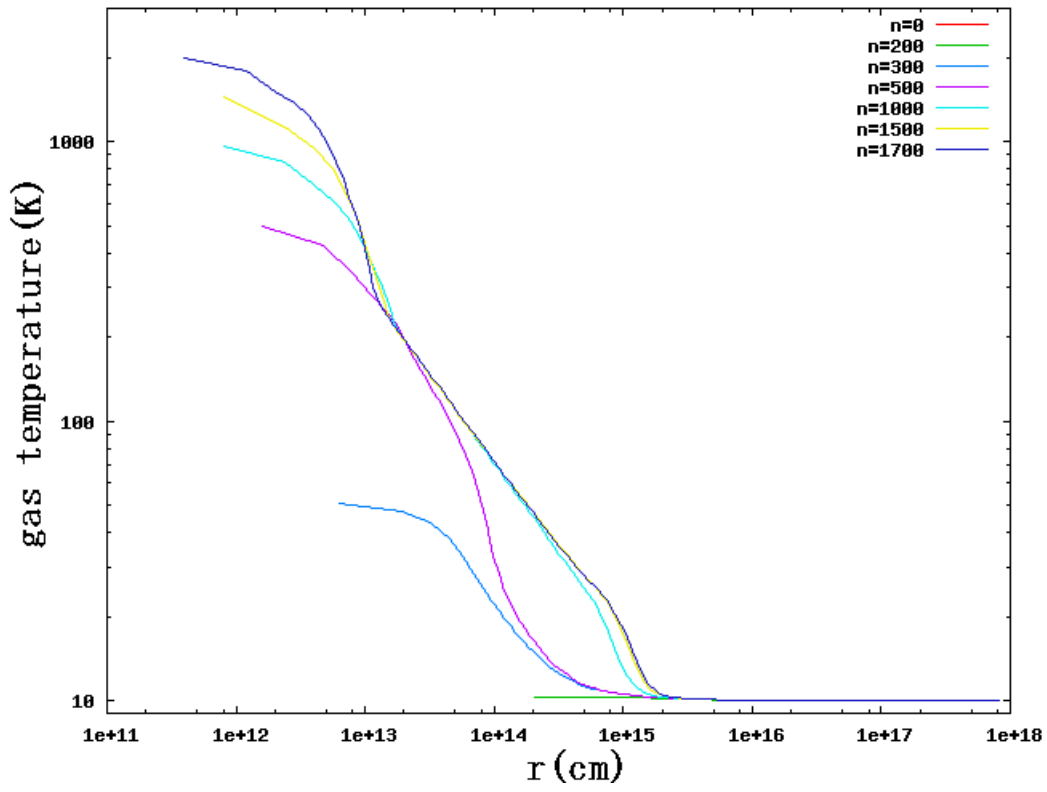


図 6.3 同、ガス温度プロファイル

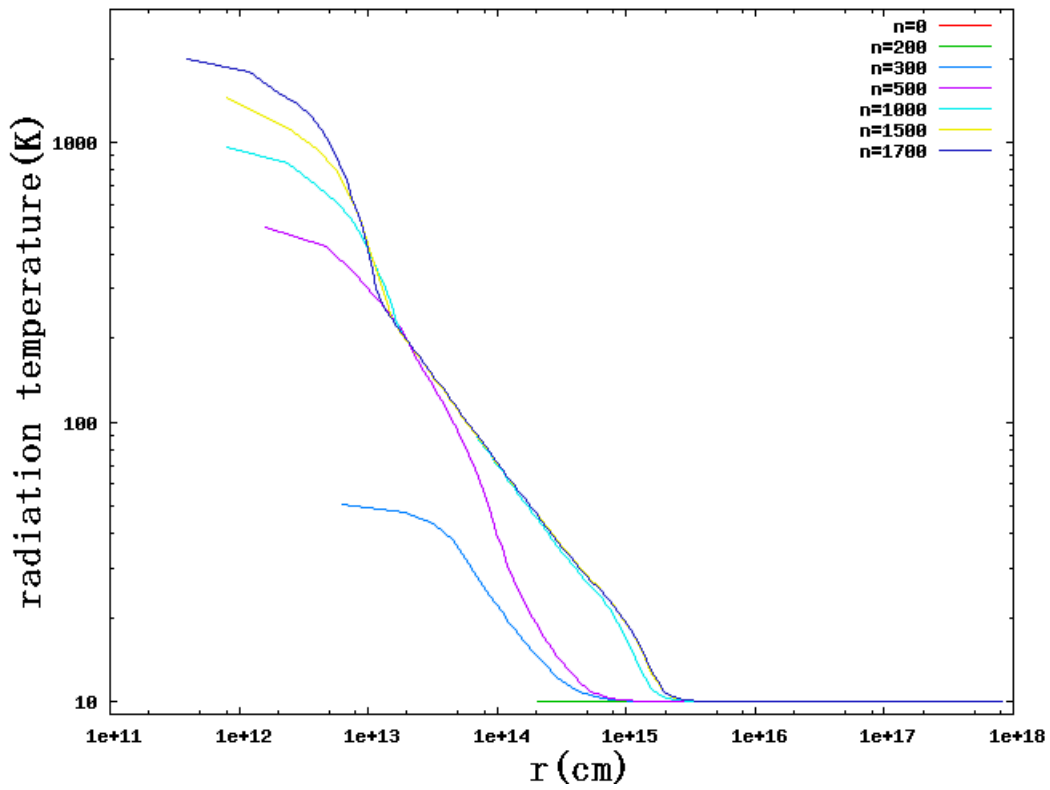


図 6.4 同、輻射温度プロファイル

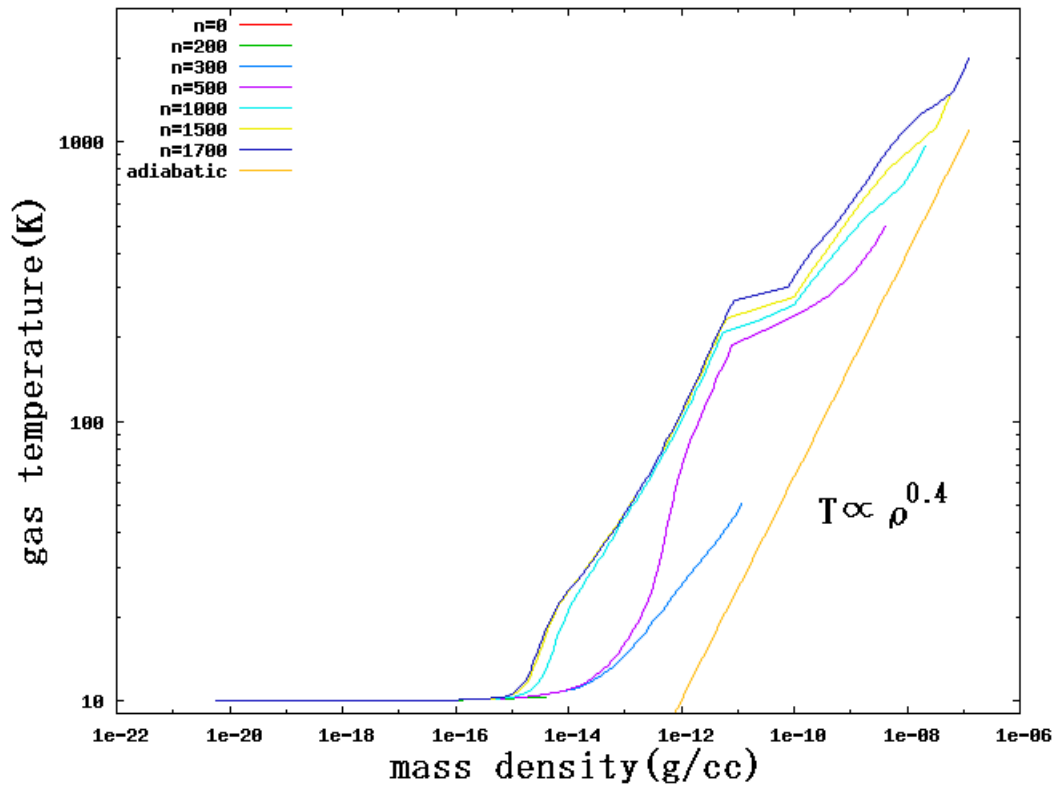


図 6.5 同、密度-温度平面での進化

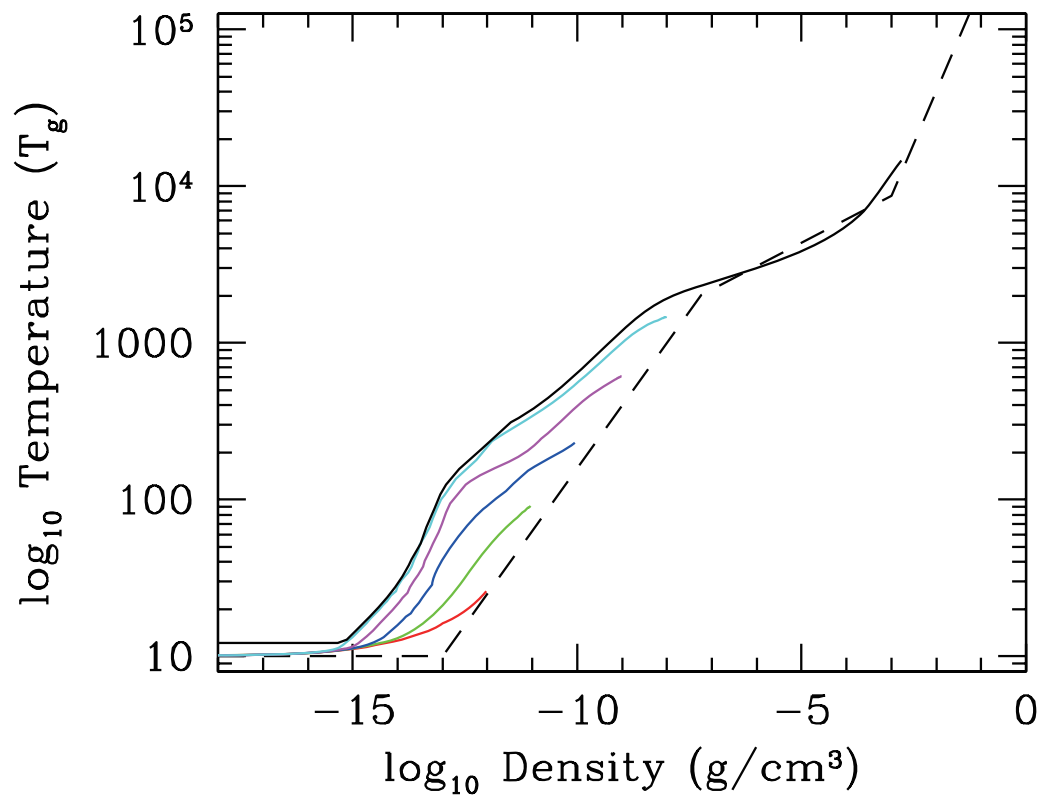


図 6.6 Whitehouse & Bate (2006) の Fig.4 (再掲)

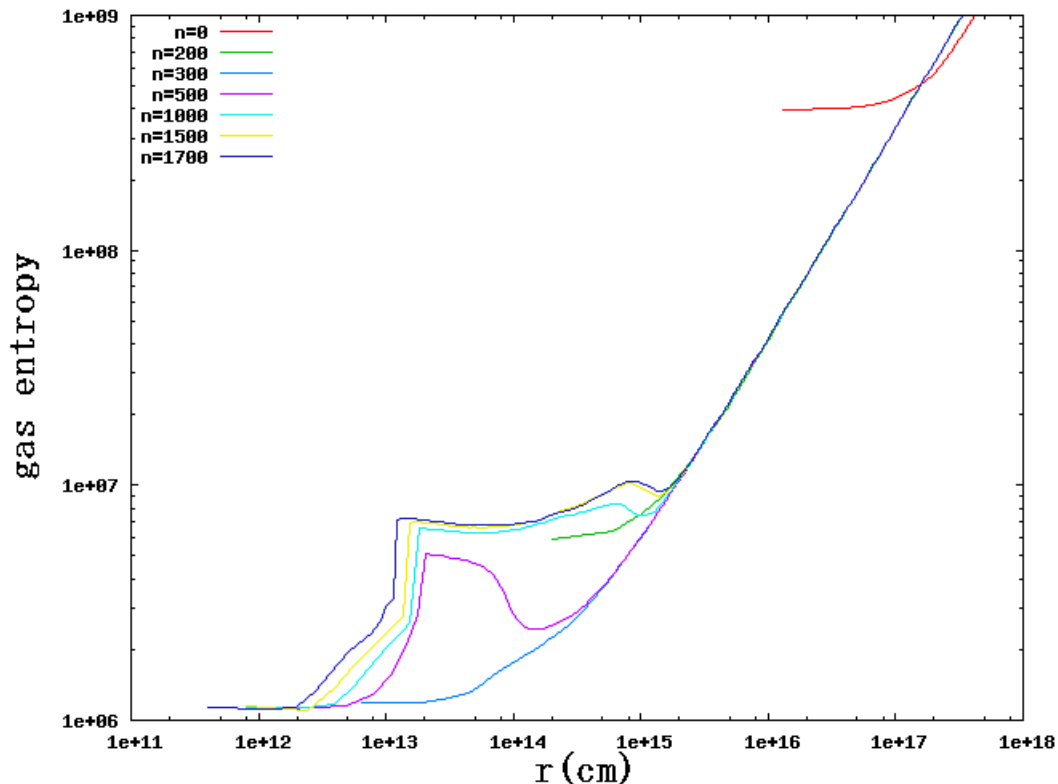


図 6.7 球対称な重力収縮過程におけるエントロピー $K = \frac{P}{\rho^\gamma}$ の分布の進化

$n = 0, 200, 300, 500, 1000, 1500, 1700$ の結果を示しているが、これは初期の自由落下時間を単位として $\frac{t}{t_{ff}} = 0, 2.5745, 2.5783, 2.57845, 2.57855, 2.57860, 2.57862$ の時刻にそれぞれ対応する。これらの結果は定性的には初期の等温収縮段階及び First Core の形成を良く再現している。この計算には Intel Xeon E5450 (3GHz x4 コア) を 2 機 (計 8 コア) 搭載した計算機を用いて実時間でおよそ 3 時間半を費やした*³。

図 6.5 に密度-温度平面におけるガスの熱的進化を示す。状態方程式や状況設定が異なるため直接の比較はできないが、比較のため図 6.6 に Whitehouse & Bate (2006) の Fig.4 を再掲する。本研究の結果では $\rho \sim 10^{-13}$ g/cc 付近で鋭く折れ曲がる所があるが、これは First Core に伴う衝撃波面である。First Core の表面付近ではまだ完全に光学的に厚くはなっていないため輻射による冷却が効いており、衝撃波面における Rankine-Hugoniot 関係は等温の場合 $\gamma \simeq 1$ に近くなっている。Whitehouse & Bate (2006) の計算結果ではこのような構造ははっきりとは見られないが、これは SPH では外側で十分な粒子数が得られないこと、強い人工粘性と粒子分布からプロファイルを導く際の平均操作によって解が鈍ってしまっていることが原因と考えられる。First Core 形成以後の中心要素の進化はエントロピー一定の線に沿っており、断熱的に進化していることがわかる。エントロピー

*³ まだチューニングの余地があると考えている。

($K = \frac{P}{\rho\gamma}$) の分布 (図 6.7) を見ると衝撃波の内側では外側程エントロピーが高くなっており、後から降着したもののほうが深い重力ポテンシャルによって強い衝撃波を経験したことを示している。また、生成されたエントロピーが輻射によって外部へと輸送されている様子も見て取れる。

以上のように、定性的には先行研究と矛盾のない結果を得ることができた。多重格子の細粗境界において非物理的な振る舞いも見られない。この結果の定量的な解析及び先行研究との比較については今後の課題としたい。

6.2 回転のある場合

$M = 8M_{\odot}$ 、 $\Omega = \frac{t_{ff}}{t_{period}} = 0.04$ の剛体回転、二本腕 ($m = 2$, $A = \frac{\delta\omega}{\omega} = 0.01$) 及び三本腕 ($m = 3$, $A = 0.00001$) の摂動を速度場に与えた場合の計算結果を示す。 $n = 28800$ ($t \simeq 1.605t_{ff}^{*4}$) の密度の等値面を図 6.8 に示す。また、各物理量の断面図を図 6.9~6.12 に示す。これらの図は 17 段の多重格子のうち $l = 14$ 番目より内側の格子を取りだして描いたものである。この時の最大密度は $\rho_{max} \simeq 8 \times 10^{-8} \text{g/cc}$ 、最大温度は $T_{max} \simeq 1700 \text{K}$ に達している。この計算にはおよそ三日間の計算時間を要したが、これは回転がある場合には角運動量のサポートのため進化が妨げられ、計算を終了する温度に達するまでに多くの計算ステップを要することが主な要因である。

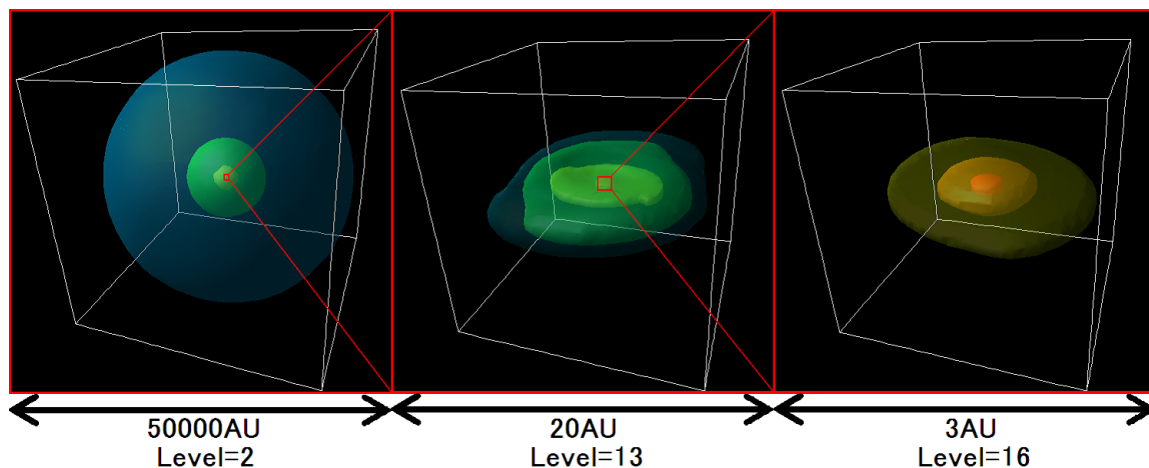


図 6.8 $n = 28800$ における各レベルでの密度の等値面の図。pc スケールから AU 以下のスケールまで破綻なく一度に取り扱うることができることを示している。回転によって支えられた円盤状の First Core や重力不安定性で生じた渦状腕などの構造がわかる。

*4 球対称のものより質量が大きいため進化が速い。

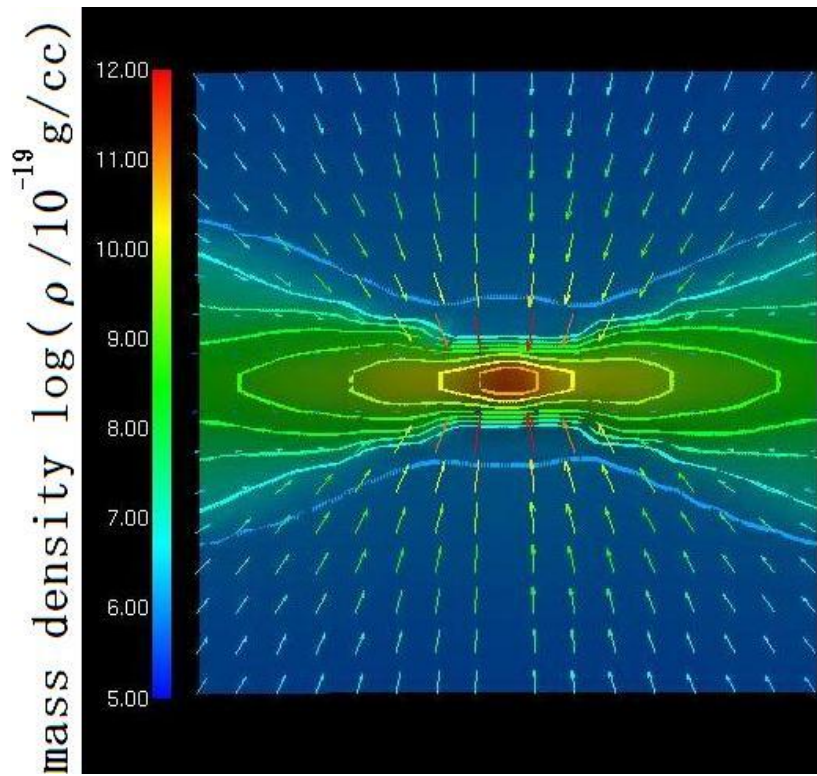


図 6.9 $l = 14$ 段目の格子における $x = 0$ 断面の密度分布と速度分布 (矢印)。一辺の長さは縦・横ともに $L \simeq 10\text{AU}$ (以下同様)。

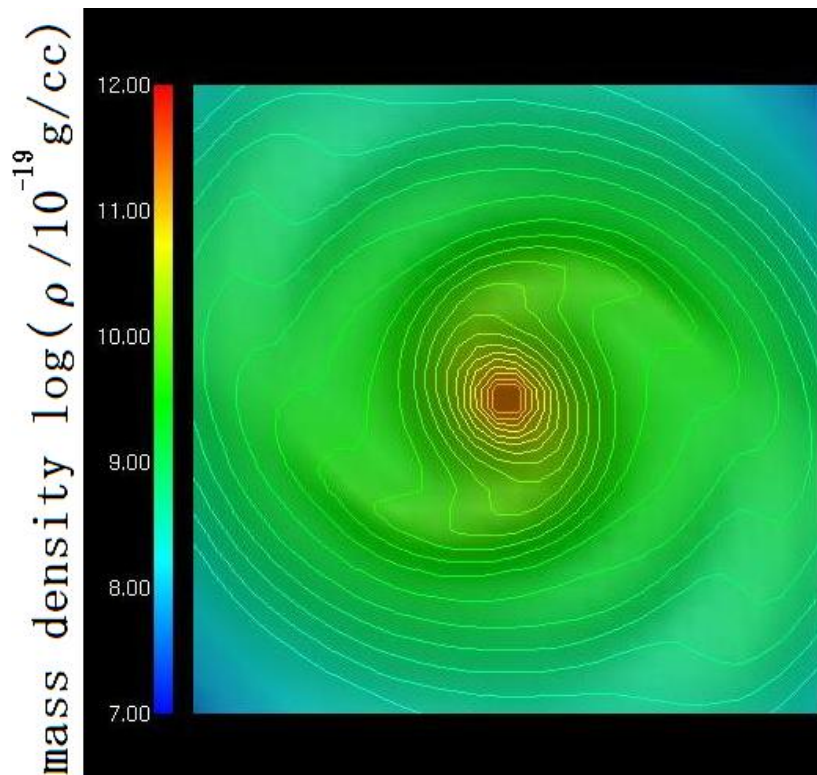


図 6.10 $l = 14$ 段目の格子における $z = 0$ 断面の密度分布。 $m = 2$ のスパイラルモードがはっきりと認められる。

密度及び速度の分布の $x = 0$ の断面図 (図 6.9) から円盤状の First Core が形成されており、その表面に衝撃波が存在することがわかる。密度と温度の分布 (図 6.11) を比較すると、顕著に円盤状になっている密度分布と比べて温度分布の方が球状に近づいている。バロトロピック近似を課した場合には温度は単に密度の関数として決まるため同じ分布となるはずであり、これは輻射輸送の影響を端的に表している。 $z = 0$ の断面図 (図 6.10) を見ると渦状腕がはっきりと認められる。この渦状腕は自己重力不安定性によって生成したもので、この構造が重力トルクによる角運動量輸送を担う。

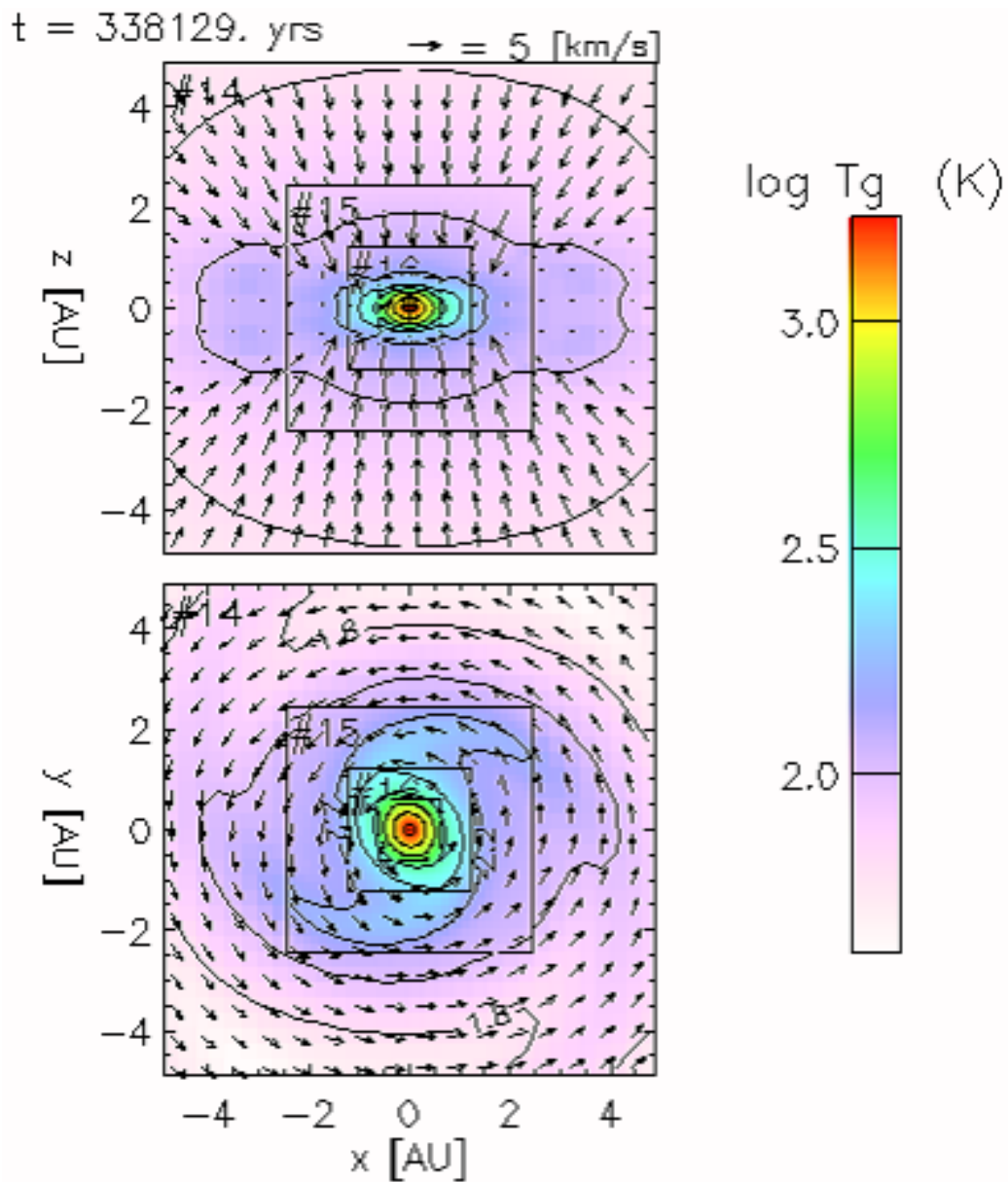


図 6.11 $l = 14$ 段目より内側の格子におけるガス温度分布の断面図。

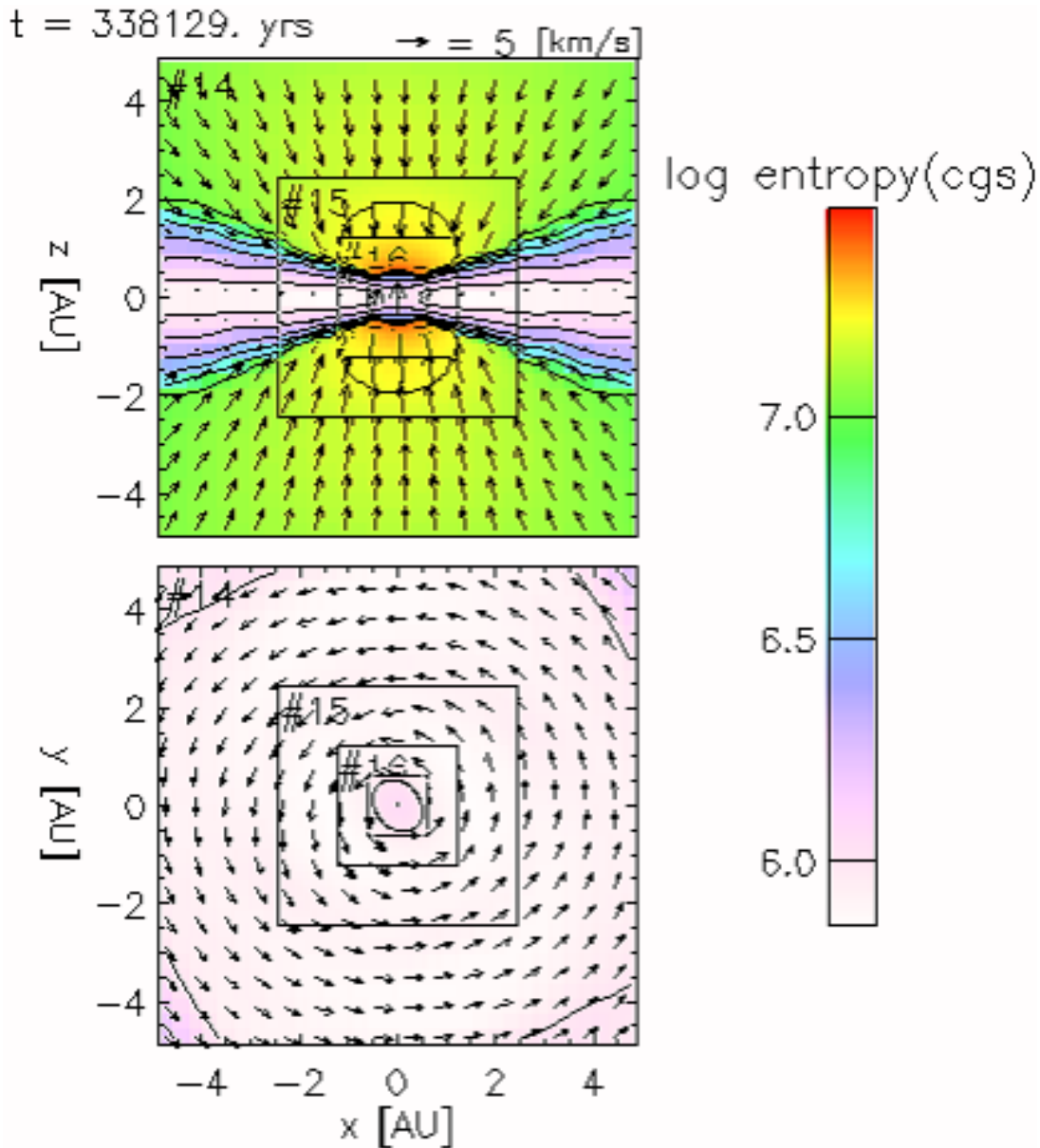


図 6.12 $l = 14$ 段目より内側の格子におけるガスのエントロピー ($K = P/\rho^\gamma$) 分布の断面図。

y 軸及び z 軸に沿った各物理量の分布を全てのレベルについて横断的に描いたものを図 6.13 ~ 図 6.20 に示す。 z 軸方向は球対称の場合よりも急な分布になるが、First Core ~ 外層という構造は基本的に変わらない。 y 軸方向は円盤の構造に伴って複雑な分布を示す。 z 軸方向と y 軸方向を比較すると衝撃波面の強さが顕著に異なるが、これは y 軸方向では回転によって動径方向への落下が妨げられているためである。特に興味深いことは、断面図 (図 6.12) からわかるように円盤内のエントロピー $K = P/\rho^\gamma$ が低くなっていることである。これは回転のため衝撃波でのエントロピー生成が弱いことと、輻射によって上下方向に効率的にエネルギーが輸送されることによると考えられる。このことは y, z 軸

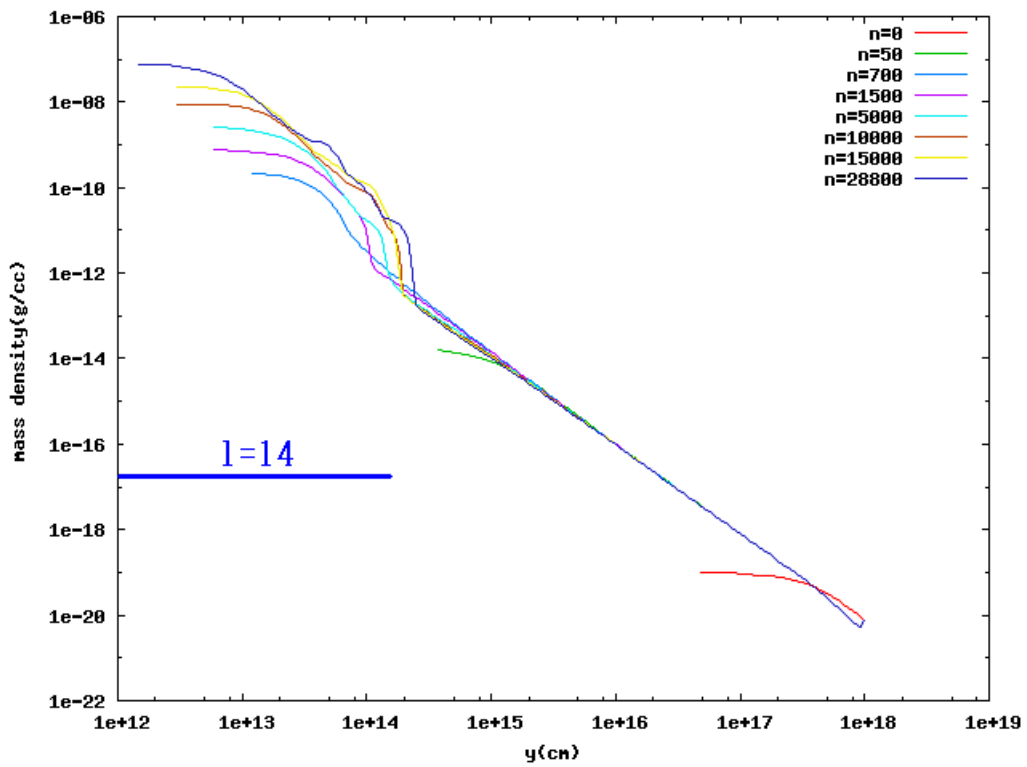


図 6.13 y 軸に沿った密度分布。 $l=14$ の格子が覆う領域を青線で示した（以下同様）。

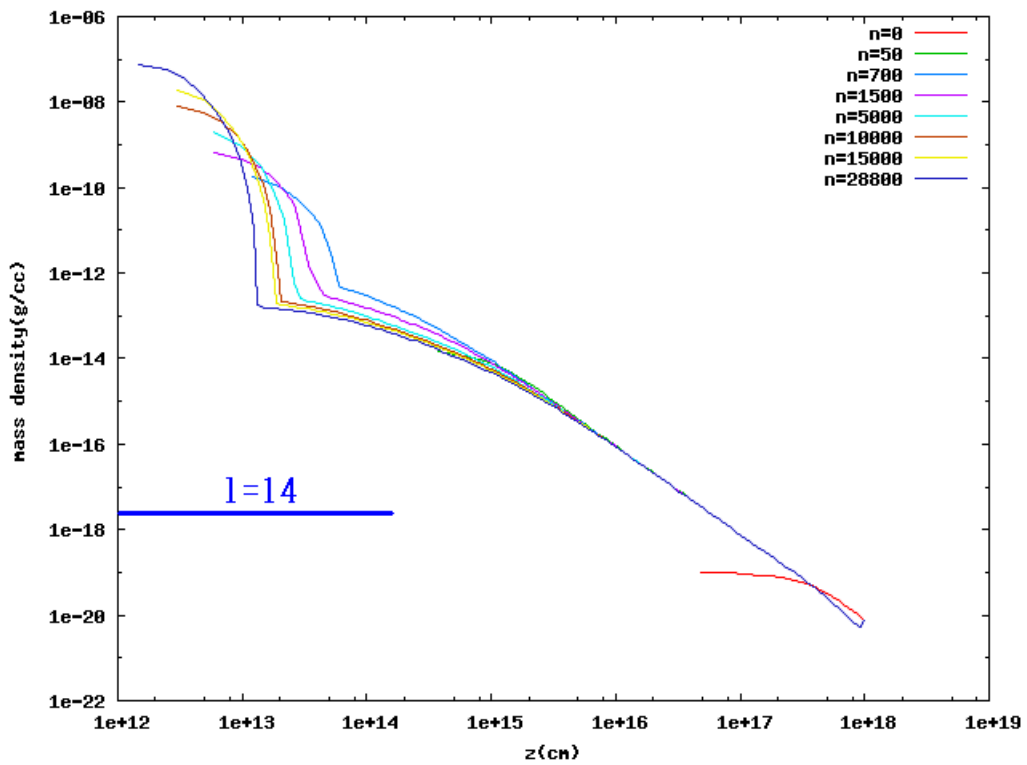


図 6.14 z 軸に沿った密度分布

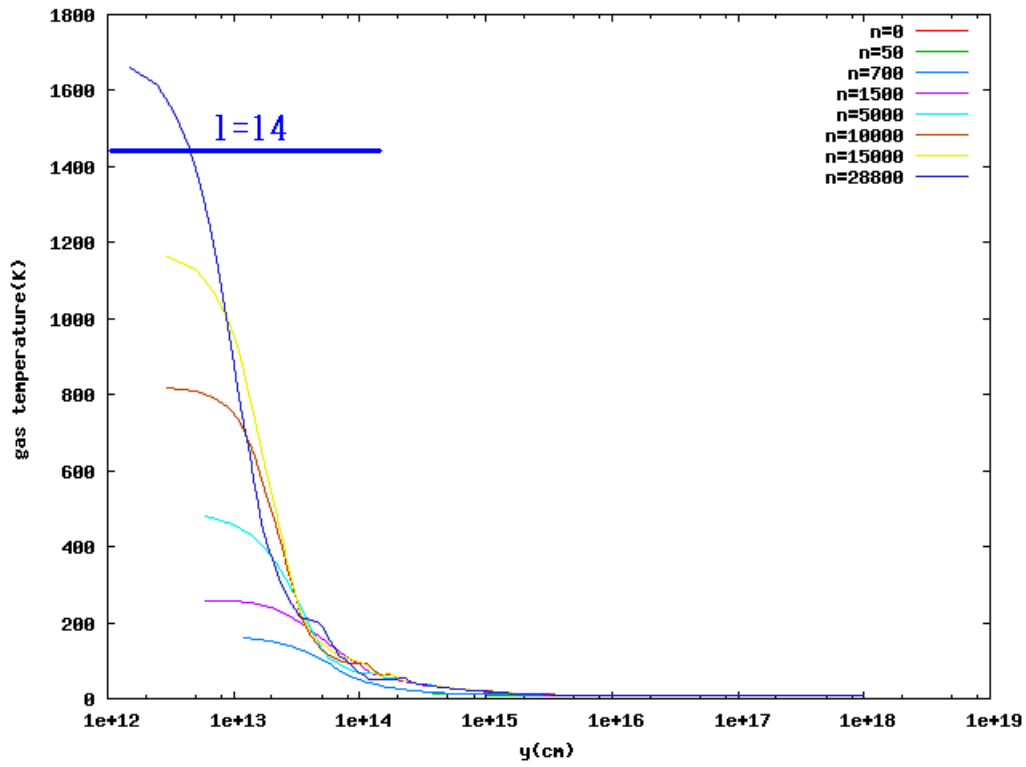


図 6.15 y 軸に沿ったガス温度分布

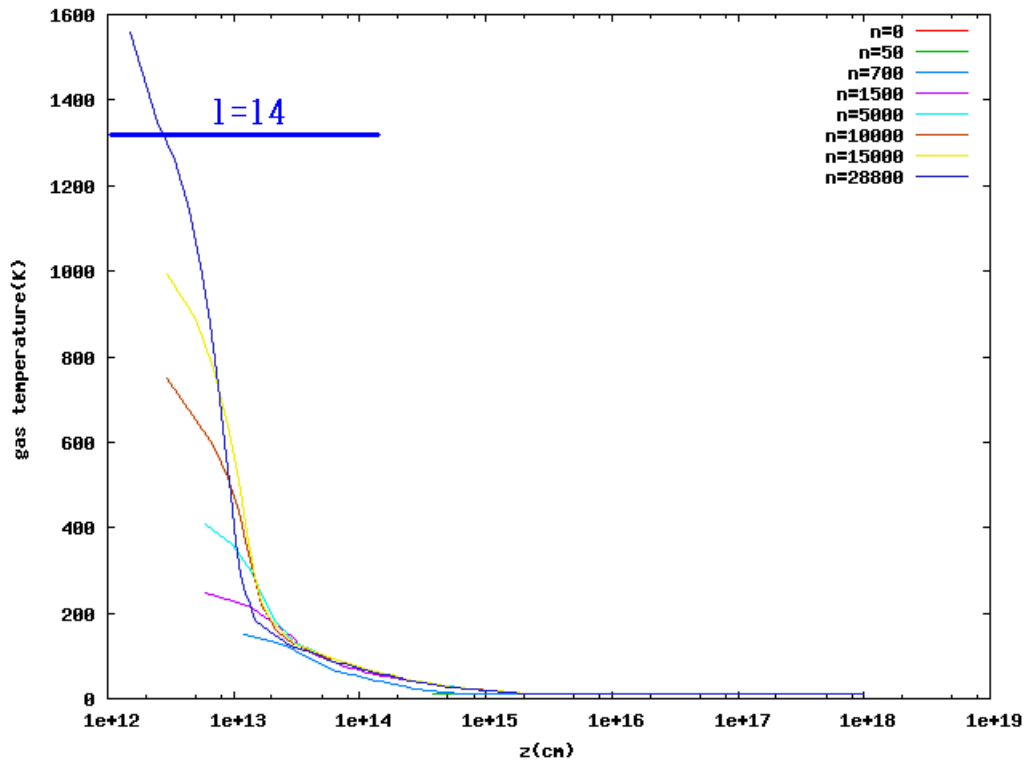


図 6.16 z 軸に沿ったガス温度分布

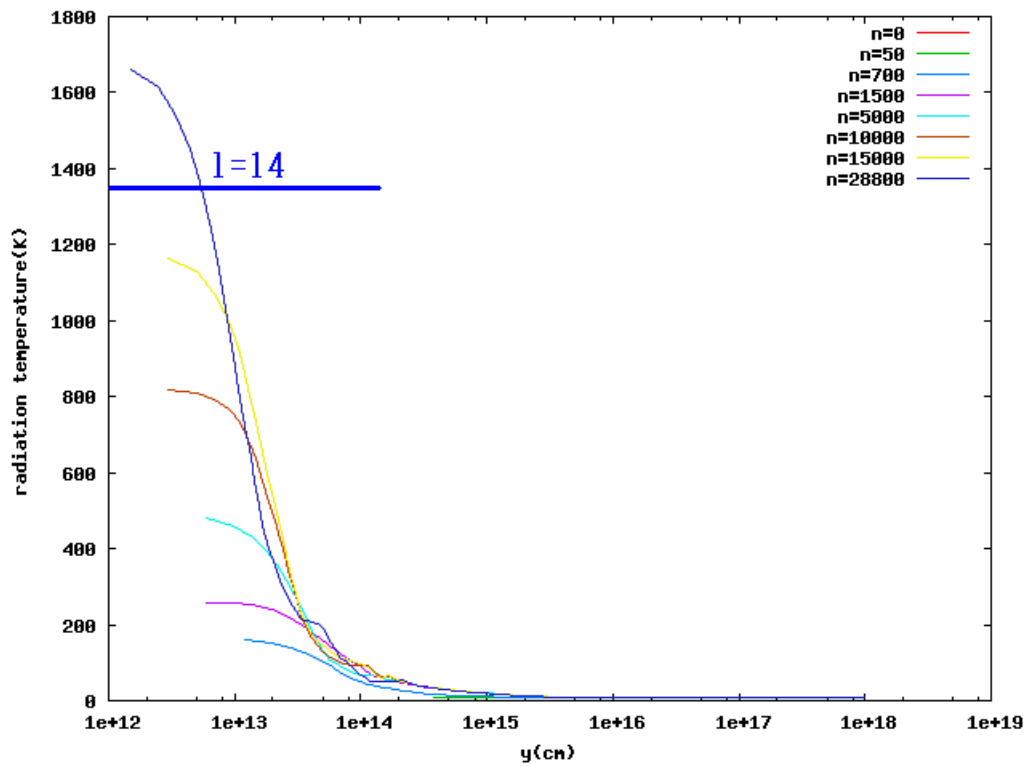


図 6.17 y 軸に沿った輻射温度分布

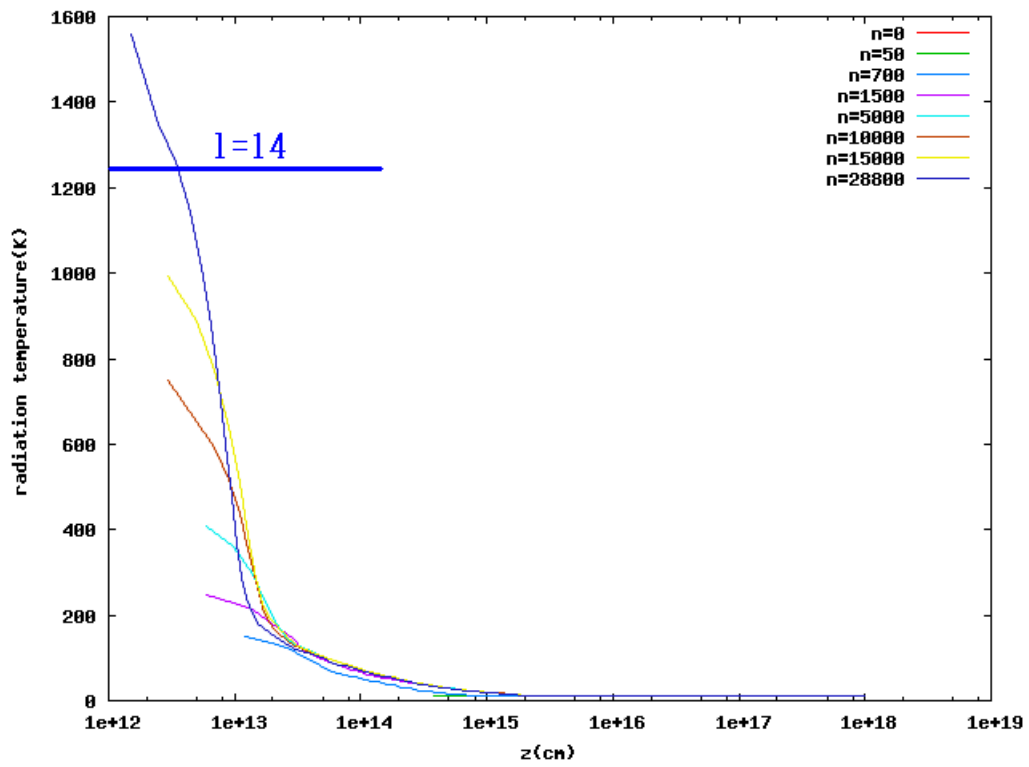


図 6.18 z 軸に沿った輻射温度分布

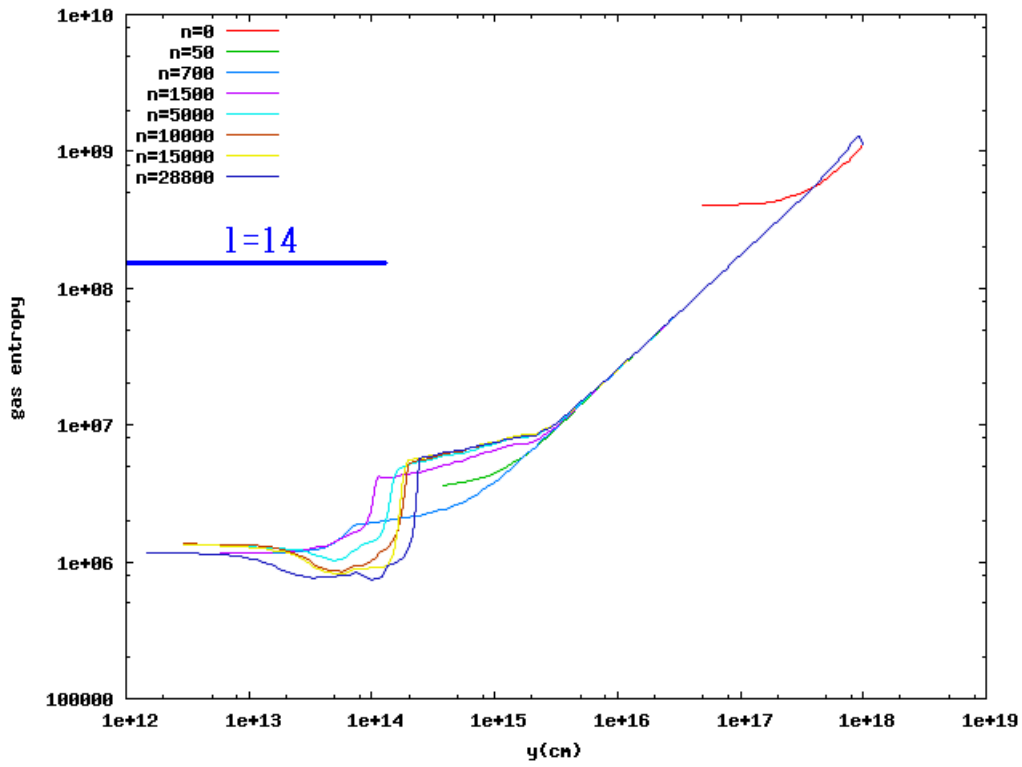


図 6.19 y 軸に沿ったエントロピー分布

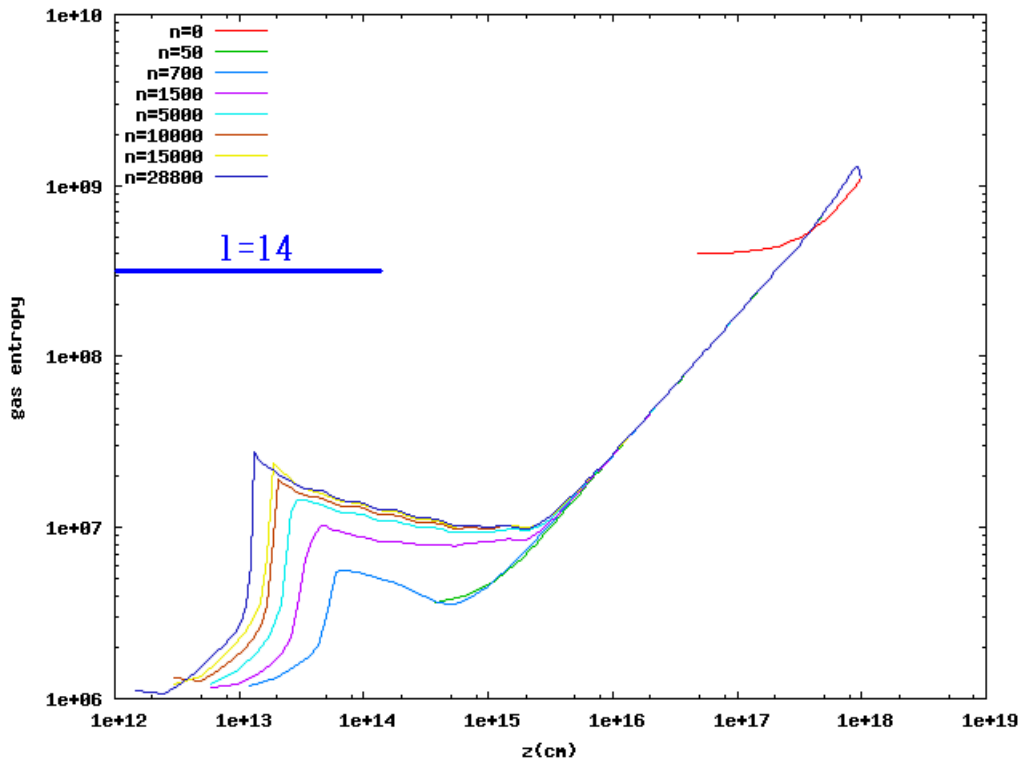


図 6.20 z 軸に沿ったエントロピー分布

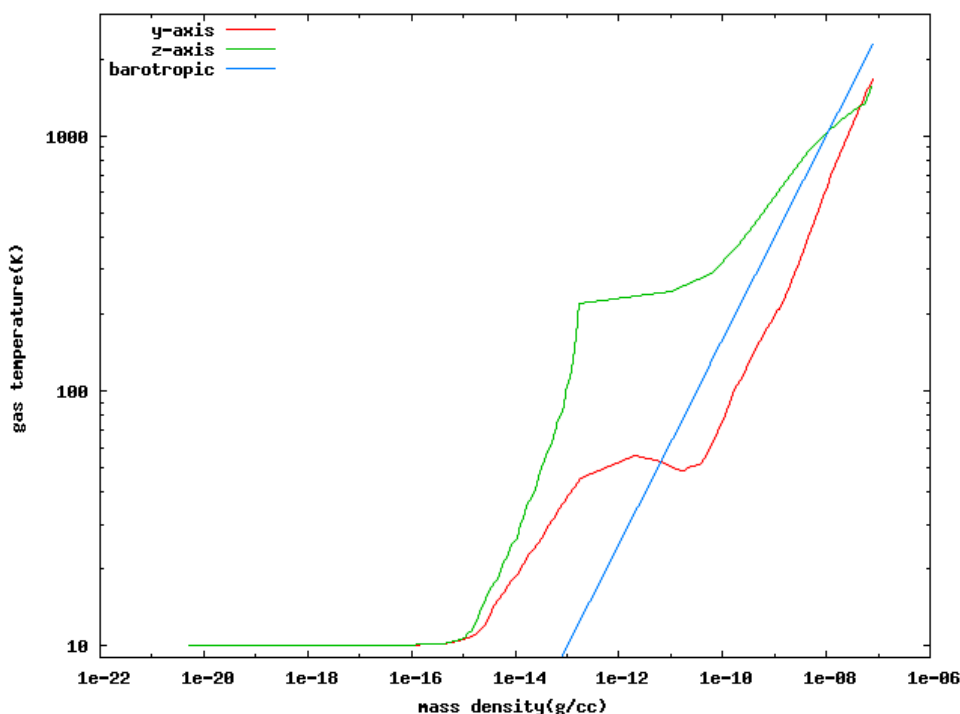


図 6.21 y,z 軸に沿った密度-温度平面のスナップショット

に沿って描いた密度-温度平面でのスナップショットとバロトロピック近似を比較すると良く分かる (図 6.21)。z 軸方向には輻射によって熱が輸送されて高いエントロピーのガスが外側に分布しているが、y 軸方向では球対称計算を元に構成したポリトロップ関係式よりも (同じ密度で) 低い温度^{*5}になっている。この結果は第一章で述べた直感的な予想 (「バロトロピック近似は温度を過小評価する傾向があるため、輻射輸送を取り入れると分裂しにくくなる」) とは逆に、回転のサポートと上下方向への効率的な輻射輸送によって円盤の温度が下がり^{*6}、むしろ分裂を促進する可能性を示している。いずれにせよ、球対称の計算から構成したポリトロップ関係式を全域に適用することは不適切である。

これまでの多次元の星形成の研究においてはこのような輻射輸送が熱的進化に及ぼす影響、そしてそれが系の全体的な動的進化に与える効果は殆ど考慮されていなかった。一方で、一次元球対称の計算では精密な輻射流体力学計算が行われているが、一次元では回転や磁場の効果を取り入れることができなかった。本研究の計算は解像度が低く、opacity や気体の状態方程式が簡単化されており、またモデルのパラメータも先行研究と完全には対応していないため直接定量的な比較をすることはできない。それでも今回の計算の結果は単なる計算コードのデモンストレーションに留まらず、(特に多次元的な問題において) 輻射輸送を取り入れることの重要性とそれが動的進化に影響を与える可能性を示している。現実的な物理過程を取り入れた高解像度な計算と定量的な解析は今後の課題である。

*5 低温での状態方程式を正しく取り入れることでバロトロピックと同程度の温度になる可能性がある。

*6 渦状腕の温度は周囲の要素より高いが、その影響は相対的に小さい。

第7章

まとめと今後

7.1 まとめ

これまで、主に星形成の問題に適用することを目標として、(磁気)流体力学シミュレーションコードに組み込む輻射輸送のプログラムを開発してきた。モーメント方程式に基づく輻射輸送の数値解法として流束制限拡散近似法 (FLD) と比較的最近使われるようになった M_1 Closure Scheme の実装と評価を行い、 M_1 Closure Scheme の方が良い結果を得られることがわかったが、計算機資源の制限と安定性の不安から FLD を採用しこれを ngmhd コードに組み込んだ。輻射輸送はもはや計算の時間刻みにおいては相互作用が局所的でないため、これを前提とする nested-grid や AMR といった手法と安易に組み合わせると様々な問題が発生することを見出したが、それを回避し不自然でない解を得られるコードを開発することができた。ただし問題を回避するために幾つか非自明な処理を行っているため、コードの動作について常に確認する必要があるだろう。より網羅的かつ精密なテストを行い、必要ならば問題を解決する方法を考えるのが今後の課題である。また、現時点では時間の制限により幾つか取り入れられていない物理的素過程があるため、これらの実装についても今後取り組んでいく。今後の取り組みについて次節で述べる。

7.2 コードの拡張

本レポートの範囲内で開発したコードにはまだ取り入れられていない物理過程が幾つかあるため、短期的にこれらを実装していきたいと考えている。また、もう少し長期的な問題として更に精密な理論モデルの構築に向けてコードを拡張したいと考えている点が既に幾つかある。これらについて以下に述べる。

7.2.1 状態方程式

ここまでの研究ではコード開発の第一段階として First Core までを計算できればよいと考えていた。この範囲では状態方程式を顕著に変えるような化学変化は起こらないため、比熱比を定数 $\gamma = \frac{7}{5}$ として一定にしていた。しかし実際には First Core までの領域であっても、低温では水素分子の回転遷移を励起できないためこの遷移が比熱に寄与せず、 $\gamma = \frac{5}{3}$ の領域が存在する。Whitehouse & Bate (2006) と完全に対応づけて比較するためには少なくともこの効果を導入する必要がある。

より話を進め Second Collapse 以後も対象とするためには、まず第一に水素分子の解離反応を取り入れる必要がある。また、Second Core 形成後にも水素の電離反応や縮退圧の効果などがあり単純に $\gamma = \frac{5}{3}$ で良いわけではない。これらの効果を取り入れた状態方程式として古くは Black & Bodenheimer (1975)[5] の状態方程式があるが、Masunaga & Inutsuka (2000) ではよりアップデートされた Saumon et al. (1995)[41] の状態方程式が用いられているためこれを実装するのが良いと考えられる。Saumon et al. の状態方程式はテーブルとして与えられているため、これをコードに組み込むことは困難ではないと考えている。

7.2.2 opacity

今回は opacity についても定数としていた。等温の間は opacity は単に密度 ρ に比例するだけであり、また一度光学的に厚くなり断熱的になってしまえば opacity の多少の大小はガスの熱的進化に殆ど影響しない。そのため少なくとも中心部の進化についてはこれはそれほど現実と外れた設定ではない。しかし一般にはこれは適切ではなく、系の大局的進化を見るためにはやはり現実的な opacity を用いる必要がある。Opacity のデータとしては昔は Pollack et al. (1994)[35] の Planck・Rossland 平均 opacity が良く使われていた。近年では Semenov et al. (2003)[42] においてより精密かつ幅広い密度・温度の領域をカバーするテーブルが提供されているためこれをコードに実装する。このテーブルを読み出す Fortran77 形式のルーチンも同時に提供されているため既に一度はコードに組み込んだが、最適化が不十分でかなり低速であった（特に SX-9 においては演算がベクトル化されず致命的なまでの速度低下を引き起こした）。また、ダストが蒸発する温度で急激に opacity が減少する点が幾つかあり、このような点では微分が大きな値を持つため Newton-Raphson 法の収束を悪化させる可能性もある。これを回避するには急激な変化を抑制するようなスムージングをかけるなどの対応が必要となる。これらの手間を考慮して今回のレポートでは実装を見送ったが、短期的にこの実装と最適化にも取り組む。

7.2.3 陰解法のマルチグリッド化

CFL 条件を満たさないような大きな時間刻みを取る場合、相互作用はもはや局所的ではない。このような場合、粗い格子の結果を細かい格子の境界条件に用い、細かい格子の結果を粗い格子に射影するという従来の手続きでは全体で整合的な解を得られない可能性がある。粗い格子で解いた結果が細かい格子の適当な近似解になっていれば問題ないが、そうでない場合はレベル間で整合性がなくなり結果として解は主に細粗境界付近で非物理的な振舞いを示すだろう。今回テストした範囲では非物理的な振舞いは起きていない（ように見える）が、原理的にこの問題を解消するには全てのレベルで整合的な解が得られるように iteration を行うマルチグリッド的手法が必要になるだろう。現在の所、このような実装になっているものは存在しない*1。非線形かつ多変数の問題に対してこのような手法を開発するのは困難が予想されるが、解決に向け研究を行う。

7.2.4 M_1 Closure Scheme

今回 M_1 Closure Scheme については評価を行ったのみで、計算速度と安定性の観点から時期尚早であると判断して ngmhd コードへの実装は見送った。テストに用いた問題は多くの場合現実的な対象よりも数値的に厳しいセットアップになっているため、実際の問題に応用する場合には安定性の問題は回避ないし軽減できる可能性が高い。計算速度を向上するには行列反転に使用するアルゴリズムの改良が必要だが、これについても問題を改善できる可能性がある（最適化と並列化の項を参照）。

M_1 Closure Scheme は FLD と比べ異方性に強く、元の輻射輸送方程式の持つ双曲型の性質を保つという優れた性質を持っているため上記の問題が解決すれば取り組む価値は高いと考えている。当面は FLD を用いて研究を進めつつ、並行してこちらの開発にも取り組んでいきたい。

更に、FLD と比較した場合の M_1 Closure Scheme の数値計算における利点として、方程式が双曲型であることが挙げられる。陽的な時間推進法を用いる場合、CFL 条件によって放物型方程式である FLD では時間刻みを $\Delta t < \frac{\Delta x^2}{2D}$ に取らなければならないが、これは高解像度の計算には時間刻みを非常に小さく取らなければならないことを意味する。通常はこの制限を回避するために陰的な時間推進法を用いるが、陰解法は並列化を妨げる非局所的な演算を伴う。一方、双曲型の方程式であればこの制限は $\Delta t < \frac{\Delta x}{c}$ である。流体力学の方程式は双曲型であるため同様に $\Delta t < \frac{\Delta x}{v}$ の制限がある。今回対象としている星形成などの問題では輻射による制限は極めて厳しいが、系の典型的な速度 v が極め

*1 そもそも実装例が少ない。またマルチグリッド化以前の問題として独立時間刻みを採用している。

て（相対論的なまでに）大きければこの二つは比較的近くなる。このような問題としては例えばブラックホール周囲の降着円盤や超新星爆発等が考えられるが、このような問題に対しては時間刻みを輻射で制限しても計算量の増加は小さいため、陽的な時間推進法を採用することが可能となる。陽解法は単純に計算が簡単である上に、相互作用が局所的に決まるために領域分割による並列化が極めて容易である（既存の流体力学と全く同じ手法で並列化できる）。 M_1 Closure Scheme ならば FLD よりも物理的に良い結果が得られる上に、これまでよりも遙かに大規模な計算を行うことが可能となるため、大規模並列計算機に実装する上での極めて大きなアドバンテージとなる。そこで既に FLD を用いてブラックホール降着円盤の輻射流体シミュレーションを行っている [31] 大須賀健氏（国立天文台/CfCA）に陽解法の M_1 Closure Scheme の導入を提案し、共同で研究を行っている。

7.2.5 Adaptive Mesh Refinement

今回用いた nested-grid は、初めから細かい構造のできる位置が分かっている（かつそれが動かない）問題については十分に機能する。しかしながら、初期に強い回転があり収縮過程で分裂するような場合には中心部だけを高解像度にしても不十分である。また、乱流速度場が存在するような場合にはもはやどこに細かい構造ができるかを前もって予測することは不可能であり、nested-grid ではこのような問題には対応できない。そこで用いられるのが解適合細分化格子（AMR）であり、これは文字通り計算結果に合わせて必要な領域に必要な解像度の格子を自動的に生成する手法である。今回ベースとなる ngmhd コードを提供して頂いた松本倫明氏（法政大学）は AMR シミュレーションコード ‘Sfumato’ [26] を開発しているため、氏と協議の上こちらにも輻射輸送を組み込んでいくことを検討している。

7.2.6 周波数空間の分割

grey 近似は周波数について M 個に分割すると計算量は当然 M 倍になるだけでなく、（ドップラー効果等に起因する）幾つかの付加項が現れて計算は複雑になる。全体的なエネルギー収支や動的進化を見る上では grey 近似はそれほど悪い近似ではないと期待しているが、実際には opacity は周波数によって大きく異なる（ダストの opacity はダストのスケールよりも長い波長と短い波長で大きく変わるため、例えば可視光では極めて光学的に厚い場合でもサブミリ波では十分に透過できる^{*2}）。現時点では周波数分割を行った（Multigroup とする）輻射流体シミュレーションはそれほど多くは行われていないものの、幾つかコードの実装の論文も出てきており今後重要となってくるのはほぼ確実である

^{*2} これこそが星形成研究における ALMA の強みである。

う。現状では計算機資源の制約からもやむを得ないが、将来的にはこの近似を外し周波数方向にも分割してその効果を取り入れていきたいと考えている。

7.2.7 最適化と並列化

現時点のコードと計算機資源では現実的計算時間（数時間から長くて数日程度）で結果を得るには1レベルあたりPCで 32^3 、SX-9を利用して 64^3 の解像度が限界である。これは全く不足しているという程ではないが、計算の信頼性を保証するためには当然解像度は高い方が望ましい。現状のコードでは1ステップあたりの計算量は $O(N^4)$ であるため解像度を2倍にすると1stepあたりの計算量は約16倍になるが、時間刻みが約半分になるため同じ計算をするには32倍の計算時間が必要になる^{*3}。SX-9においては行列反転に使用している不完全LU分解前処理が並列化されていないことが計算速度を制限している主な要因となっている。SX-9は共有メモリ並列のベクトル型計算機であるため、演算の依存関係を解消するようなアルゴリズムを用いれば並列化・ベクトル化は比較的容易である。このようなアルゴリズムとして多色順序付けやブロックRed-Black順序付けなどが提案されており、（それを私自身が開発するか、既存の実装を探すかは別として^{*4}）原理的には性能向上の余地があると言える。現実的研究手段としてはパラメータを変えて複数の計算を行うため、SX-9のように1プロセッサあたりの性能が高い計算機であればパラメータ並列によって計算を行うことで並列化の問題を回避するという選択もあり得る。

近年大規模数値計算の標準となっているPCクラスタやCray XT4^{*5}のような分散メモリ型大規模並列計算機の場合は問題はより深刻である。このような計算機は安価な装置を多数接続することで性能を稼ぐという構成になっているため、1ノードあたりの演算性能やメモリ量は十分でない。流体のような局所的な相互作用の問題ならば計算領域を分割して境界部分だけをやり取りすればいいためこのような計算機の性能を活用することができる。しかし輻射や自己重力といった非局所的な相互作用を取り扱う場合、全体で整合性のある解を得るためには全体の情報を知っている必要があり、分散メモリ型並列計算機では頻繁に全対全の高コストな通信が発生することになる。このようなシミュレーションプログラムは開発が困難だけでなく、たとえ完成したとしても効率が上がらないことが危惧される。これは問題の性質上やむを得ないとは言え、今後の大規模数値計算の装置は基本的にこの方向を推し進めていく方向で発展していくと考えられるため、アルゴリズムの見直しも含めやや長期的に対応していく必要がある。

^{*3} nested-gridの段数が一段減るが、この効果は相対的に小さい。またループ長の増加による性能向上を考慮していない見積もりである（ASLライブラリは十分ベクトル化されているためこの効果は小さい）。

^{*4} NECのASL開発部門の方と相談し、並列版の開発に前向きな回答を得ている。

^{*5} 国立天文台で稼働しているスカラー大規模並列型スーパーコンピュータ。クアッドコアのOpteronの計算ノードをSeastar-2という高速なネットワークで接続している。

7.3 科学的な対象

今回開発したコードを用いて研究することのできる興味深い問題は無数に存在する。その中から、比較的短期的に取り組みたいと考えているテーマについて以下で述べる。

7.3.1 連星系形成条件

Machida et al. (2008)[23] 及び Saigo et al. (2008)[40] は回転する分子雲が収縮過程で分裂する条件について系統的かつ定量的に調べた研究である。これらの研究では初期の回転と磁場の強さ、摂動の振幅などをパラメータとして多数の数値実験を行っており、その結果の一例を図 7.1 に示す。この研究によると回転の強さに応じて分裂の様相は変わり、回転が強い場合には First Core 段階で分裂するため軌道長半径の大きい連星に、回転が比較的弱い場合には Second Collapse 以降に分裂し軌道長半径の小さい連星になり更に回転が弱ければ分裂しないという傾向があることがわかる。また、磁場は系から角運動量を抜き去るため分裂を抑制するという結果が得られている。

これは観測的に知られている連星の軌道長半径分布の起源を説明する興味深い研究であり、またこのような収縮過程における分裂は最終的な星の初期質量関数 (Initial Mass Function; IMF) を決定する重要な過程となるため、その意味でも重要である。

この研究はバロトロピック近似を課した ngmhd コードを用いて行われた。そのため、ガスの熱的進化については正確に計算できていない可能性がある。第 1 章で見たように、ガスの熱的進化の取り扱いは系のマクロな動的進化に影響しうするため、輻射輸送を取り入れることでこの結果は変わってくる可能性がある。バロトロピック近似では外側のガスのエントロピー・温度を過小評価する傾向があるため、輻射輸送を取り入れることで直感的には分裂を抑制することが予想されたが、前章の結果では円盤の中心面の温度はむしろ下がっており、分裂が促進される可能性がある。この問題は広いパラメータ範囲について網羅的かつ定量的な研究がなされているため、これと同等の計算を行って比較することで輻射輸送が系の全体的な進化に与える影響を系統的に比較することができると考えている。また、このような低質量星形成過程は確立された良い描像が得られているため、コードのテストとしても適当な問題となるだろう。

7.3.2 観測的可視化

現在から数年以内の近い未来にかけて、ALMA や HiCIAO といった次期の大型観測装置の稼働が予定されている。これらの観測計画はこれまでの装置よりも桁違いの性能を有するものであり、これまでよりも遙かに精密な観測データが得られるようになると期待さ

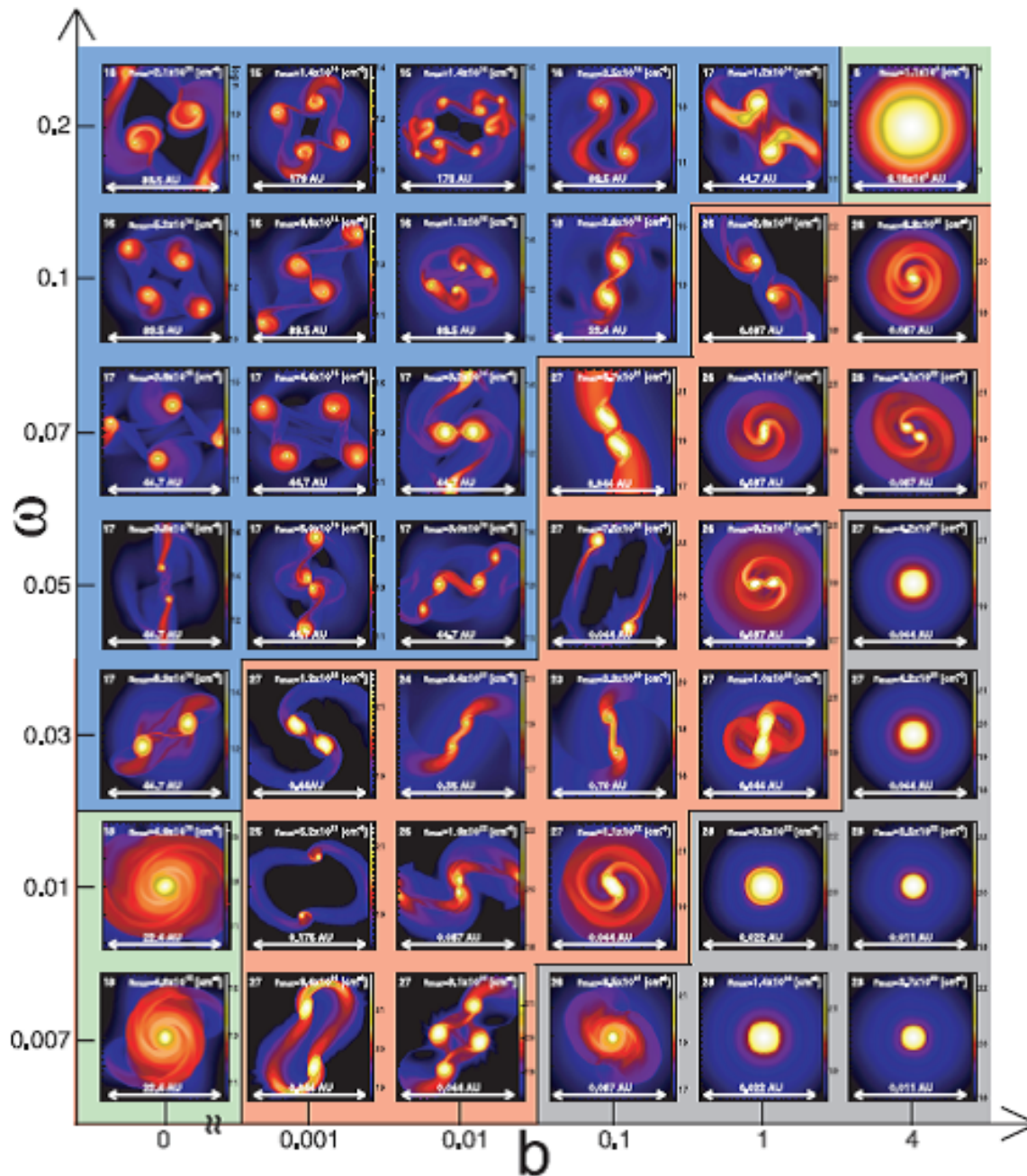


図 7.1 横軸：磁場 縦軸：初期回転の強さとした時の回転磁気雲の分裂の様子。パネルの色によって青：軌道長半径大 赤：軌道長半径小 緑：分裂せず 灰：収縮せずに分類されている。回転と磁場の強さが分裂に与える影響が鮮明に見えている。Machida et al. (2008) の Fig.5.

れる。このような現状にあって、観測データと直接比較できるような精密な理論モデルを提示することが理論家に求められる務めであると考えられる。

シミュレーションによって得られる結果は3次元の密度や温度などの物理量の分布である。一方で観測によって得られる情報は2次元に投影された周波数ごとの輻射強度の分布であり、その結果から本来の3次元的な分布に焼き直すことは容易ではない。シミュレーションの結果と観測的に得られる情報を対応づけて理解を深めるため、観測的可視化と呼ばれる技術の開発が進められている。これは端的にいえばシミュレーション結果に対して輻射輸送計算を行い、観測される輻射強度の分布を求めることである。近年 ALMA や HiCIAO に向けて積極的に取り組まれており、既に幾つかの結果が得られている [43]。

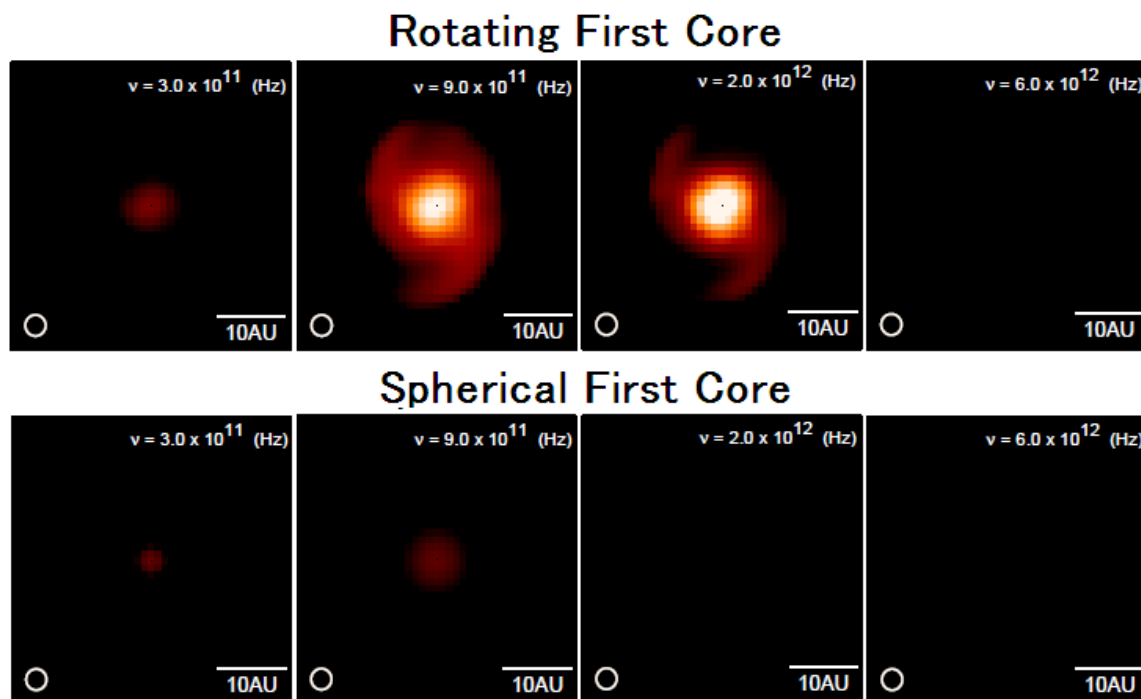


図 7.2 First Core のサブミリ波による観測予測。Saigo et al. in prep.

例えば Saigo et al. in prep (図 7.2) では First Core^{*6} のダストからのサブミリ帯連続波放射の観測予測を行っている。また、速度や電離度などより豊富な情報を持つ分子輝線に対する観測的可視化の研究も行われている [54, 53]。輻射磁気流体シミュレーションを用いればこのような観測的可視化に対しこれまでよりも精密なデータを提供できる。宇宙物理学的現象の観測的性質は密度や温度の分布に敏感なので、観測結果の解釈において理論モデルを精密化することは重要である。

^{*6} First Core は 40 年前からその存在が予言されているが、存在する時期が短くまた観測自体も困難であるためこれまで実際に観測された例はない。ALMA の観測能力ならばそれが可能ではないかと期待されており、「理論家の夢」の検証が期待されている。

参考文献

- [1] D. Aubert and R. Teyssier. A radiative transfer scheme for cosmological reionization based on a local Eddington tensor. *MNRAS*, Vol. 387, pp. 295–307, June 2008.
- [2] S. A. Balbus and J. F. Hawley. A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis. II - Nonlinear evolution. *ApJ*, Vol. 376, pp. 214–233, July 1991.
- [3] Richard Barrett, Tony F. Chan, Jone Donato, Michael Berry, James Demmel(著), 長谷川里美, 藤野清次, 長谷川秀彦 (翻訳). 反復法 Templates(応用数値計算ライブラリ). 朝倉書店, 1996.
- [4] M.J. BERGER and P. COLELLA. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, Vol. 82, No. 1, pp. 64–84, 1989.
- [5] D. C. Black and P. Bodenheimer. Evolution of rotating interstellar clouds. I - Numerical techniques. *ApJ*, Vol. 199, pp. 619–632, August 1975.
- [6] W. B. Bonnor. Boyle’s Law and gravitational instability. *MNRAS*, Vol. 116, pp. 351–359, 1956.
- [7] A. P. Boss and P. Bodenheimer. Fragmentation in a rotating protostar - A comparison of two three-dimensional computer codes. *ApJ*, Vol. 234, pp. 289–295, November 1979.
- [8] A. P. Boss and E. A. Myhill. Protostellar hydrodynamics: Constructing and testing a spatially and temporally second-order-accurate method. I - Spherical coordinates. *ApJS*, Vol. 83, pp. 311–327, December 1992.
- [9] J. I. Castor. *Radiation Hydrodynamics*. Radiation Hydrodynamics, by John I. Castor, pp. 368. ISBN 0521833094. Cambridge, UK: Cambridge University Press, November 2004.
- [10] B. Dubroca and A. Klar. Half-Moment Closure for Radiative Transfer Equations.

- Journal of Computational Physics*, Vol. 180, No. 2, pp. 584–596, 2002.
- [11] R. Ebert. Temperatur des interstellaren Gases bei großen Dichten. Mit 1 Textabbildung. *Zeitschrift für Astrophysik*, Vol. 36, pp. 222–229, 1955.
- [12] B. Einfeldt, CD Munz, PL Roe, and B. Sjögren. On Godunov-type methods near low densities. *Journal of Computational Physics*, Vol. 92, No. 2, pp. 273–295, 1991.
- [13] C. F. Gammie. Nonlinear Outcome of Gravitational Instability in Cooling, Gaseous Disks. *ApJ*, Vol. 553, pp. 174–183, May 2001.
- [14] M. Gittings, R. Weaver, M. Clover, T. Betlach, N. Byrne, R. Coker, E. Dendy, R. Hueckstaedt, K. New, W. R. Oakes, D. Ranta, and R. Stefan. The RAGE radiation-hydrodynamic code. *Computational Science and Discovery*, Vol. 1, No. 1, 015005, October 2008.
- [15] M. González, E. Audit, and P. Huynh. HERACLES: a three-dimensional radiation hydrodynamics code. *A&A*, Vol. 464, pp. 429–435, March 2007.
- [16] J. C. Hayes, M. L. Norman, R. A. Fiedler, J. O. Bordner, P. S. Li, S. E. Clark, A. ud-Doula, and M.-M. Mac Low. Simulating Radiating and Magnetized Flows in Multiple Dimensions with ZEUS-MP. *ApJS*, Vol. 165, pp. 188–228, July 2006.
- [17] L. H. Howell and J. A. Greenough. Radiation diffusion for multi-fluid Eulerian hydrodynamics with adaptive mesh refinement. *Journal of Computational Physics*, Vol. 184, pp. 53–78, January 2003.
- [18] M. R. Krumholz, R. I. Klein, C. F. McKee, and J. Bolstad. Equations and Algorithms for Mixed-frame Flux-limited Diffusion Radiation Hydrodynamics. *ApJ*, Vol. 667, pp. 626–643, September 2007.
- [19] R. B. Larson. Numerical calculations of the dynamics of collapsing proto-star. *MNRAS*, Vol. 145, pp. 271–295, 1969.
- [20] C. D. Levermore. Relating Eddington factors to flux limiters. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 31, pp. 149–160, 1984.
- [21] C. D. Levermore and G. C. Pomraning. A flux-limited diffusion theory. *ApJ*, Vol. 248, pp. 321–334, August 1981.
- [22] M. N. Machida, S.-i. Inutsuka, and T. Matsumoto. Second Core Formation and High-Speed Jets: Resistive Magnetohydrodynamic Nested Grid Simulations. *ApJ*, Vol. 647, pp. L151–L154, August 2006.
- [23] M. N. Machida, K. Tomisaka, T. Matsumoto, and S.-i. Inutsuka. Formation Scenario for Wide and Close Binary Systems. *ApJ*, Vol. 677, pp. 327–347, April 2008.

-
- [24] J. Makino and S. J. Aarseth. On a Hermite integrator with Ahmad-Cohen scheme for gravitational many-body problems. *PASJ*, Vol. 44, pp. 141–151, April 1992.
- [25] H. Masunaga and S.-i. Inutsuka. A Radiation Hydrodynamic Model for Protostellar Collapse. II. The Second Collapse and the Birth of a Protostar. *ApJ*, Vol. 531, pp. 350–365, March 2000.
- [26] T. Matsumoto. Self-Gravitational Magnetohydrodynamics with Adaptive Mesh Refinement for Protostellar Collapse. *PASJ*, Vol. 59, pp. 905–927, October 2007.
- [27] T. Matsumoto and T. Hanawa. A Fast Algorithm for Solving the Poisson Equation on a Nested Grid. *ApJ*, Vol. 583, pp. 296–307, January 2003.
- [28] T. Matsumoto and K. Tomisaka. Directions of Outflows, Disks, Magnetic Fields, and Rotation of Young Stellar Objects in Collapsing Molecular Cloud Cores. *ApJ*, Vol. 616, pp. 266–282, November 2004.
- [29] D. Mihalas and B. Weibel Mihalas. *Foundations of radiation hydrodynamics*. New York: Oxford University Press, 1984.
- [30] T. Nakano, R. Nishi, and T. Umebayashi. Mechanism of Magnetic Flux Loss in Molecular Clouds. *ApJ*, Vol. 573, pp. 199–214, July 2002.
- [31] K. Ohsuga, M. Mori, T. Nakamoto, and S. Mineshige. Supercritical Accretion Flows around Black Holes: Two-dimensional, Radiation Pressure-dominated Disks with Photon Trapping. *ApJ*, Vol. 628, pp. 368–381, July 2005.
- [32] M. V. Penston. Dynamics of self-gravitating gaseous spheres-III. Analytical results in the free-fall of isothermal cases. *MNRAS*, Vol. 144, pp. 425–448, 1969.
- [33] M. R. Petersen, K. Julien, and G. R. Stewart. Baroclinic Vorticity Production in Protoplanetary Disks. I. Vortex Formation. *ApJ*, Vol. 658, pp. 1236–1251, April 2007.
- [34] M. R. Petersen, G. R. Stewart, and K. Julien. Baroclinic Vorticity Production in Protoplanetary Disks. II. Vortex Growth and Longevity. *ApJ*, Vol. 658, pp. 1252–1263, April 2007.
- [35] J. B. Pollack, D. Hollenbach, S. Beckwith, D. P. Simonelli, T. Roush, and W. Fong. Composition and radiative properties of grains in molecular clouds and accretion disks. *ApJ*, Vol. 421, pp. 615–639, February 1994.
- [36] W. H. Press, W. T. Vetterling, S. A. Teukolsky, B. P. Flannery (著), 丹慶勝市, 佐藤俊郎, 奥村晴彦, 小林誠 (訳). ニューメリカルレシピ・イン・シー日本語版 C言語による数値計算のレシピ. 技術評論社, 1993.
- [37] J.F. Ripoll and AA Wray. A half-moment model for radiative transfer in a 3D gray medium and its reduction to a moment model for hot, opaque sources.

- Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 93, No. 4, pp. 473–519, 2005.
- [38] PL Roe. Characteristic-Based Schemes for the Euler Equations. *Annual Reviews in Fluid Mechanics*, Vol. 18, No. 1, pp. 337–365, 1986.
- [39] G. B. Rybicki and A. P. Lightman. *Radiative Processes in Astrophysics*. Radiative Processes in Astrophysics, by George B. Rybicki, Alan P. Lightman, pp. 400. ISBN 0-471-82759-2. Wiley-VCH, June 1986.
- [40] K. Saigo, K. Tomisaka, and T. Matsumoto. Evolution of First Cores and Formation of Stellar Cores in Rotating Molecular Cloud Cores. *ApJ*, Vol. 674, pp. 997–1014, February 2008.
- [41] D. Saumon, G. Chabrier, and H. M. van Horn. An Equation of State for Low-Mass Stars and Giant Planets. *ApJS*, Vol. 99, pp. 713–741, August 1995.
- [42] D. Semenov, T. Henning, C. Helling, M. Ilgner, and E. Sedlmayr. Rosseland and Planck mean opacities for protoplanetary discs. *A&A*, Vol. 410, pp. 611–621, November 2003.
- [43] D. Semenov, Y. Pavlyuchenkov, T. Henning, S. Wolf, and R. Launhardt. Chemical and Thermal Structure of Protoplanetary Disks as Observed with ALMA. *ApJ*, Vol. 673, pp. L195–L198, February 2008.
- [44] J. M. Stone, D. Mihalas, and M. L. Norman. ZEUS-2D: A radiation magnetohydrodynamics code for astrophysical flows in two space dimensions. III - The radiation hydrodynamic algorithms and tests. *ApJS*, Vol. 80, pp. 819–845, June 1992.
- [45] K. Tomisaka. Collapse of Rotating Magnetized Molecular Cloud Cores and Mass Outflows. *ApJ*, Vol. 575, pp. 306–326, August 2002.
- [46] J. K. Truelove, R. I. Klein, C. F. McKee, J. H. Holliman, II, L. H. Howell, and J. A. Greenough. The Jeans Condition: A New Constraint on Spatial Resolution in Simulations of Isothermal Self-gravitational Hydrodynamics. *ApJ*, Vol. 489, pp. L179–L183, November 1997.
- [47] N. J. Turner and J. M. Stone. A Module for Radiation Hydrodynamic Calculations with ZEUS-2D Using Flux-limited Diffusion. *ApJS*, Vol. 135, pp. 95–107, July 2001.
- [48] S. C. Whitehouse and M. R. Bate. Smoothed particle hydrodynamics with radiative transfer in the flux-limited diffusion approximation. *MNRAS*, Vol. 353, pp. 1078–1094, October 2004.
- [49] S. C. Whitehouse and M. R. Bate. The thermodynamics of collapsing molecu-

- lar cloud cores using smoothed particle hydrodynamics with radiative transfer. *MNRAS*, Vol. 367, pp. 32–38, March 2006.
- [50] S. C. Whitehouse, M. R. Bate, and J. J. Monaghan. A faster algorithm for smoothed particle hydrodynamics with radiative transfer in the flux-limited diffusion approximation. *MNRAS*, Vol. 364, pp. 1367–1377, December 2005.
- [51] K.-H. A. Winkler and M. J. Newman. Formation of solar-type stars in spherical symmetry. I - The key role of the accretion shock. *ApJ*, Vol. 236, pp. 201–211, February 1980.
- [52] K.-H. A. Winkler and M. J. Newman. Formation of solar-type stars in spherical symmetry. II - Effects of detailed constitutive relations. *ApJ*, Vol. 238, pp. 311–325, May 1980.
- [53] M. Yamada, W. Keiichi, and K. Tomisaka. Three Dimensional Line Transfer Study of Energy Sources in Compact Molecular Gas in Active Galaxies – AGN/Starburst Connection –. *ArXiv e-prints* (arXiv:0811.3541), November 2008.
- [54] M. Yamada, K. Wada, and K. Tomisaka. HCN to HCO⁺ Millimeter Line Diagnostics of AGN Molecular Tori. I. Radiative Transfer Modeling. *ApJ*, Vol. 671, pp. 73–84, December 2007.
- [55] H. W. Yorke and M. Kaisig. Use of multiply nested grids for the solution of flux-limited radiation diffusion and hydrodynamics. *Computer Physics Communications*, Vol. 89, pp. 29–44, August 1995.
- [56] U. Ziegler and H. W. Yorke. A nested grid refinement technique for magneto-hydrodynamical flows. *Computer Physics Communications*, Vol. 101, pp. 54–74, April 1997.
- [57] 藤野清次, 張紹良. 反復法の数理 (応用数値計算ライブラリ) . 朝倉書店, 1996.
- [58] 藤井孝蔵. 流体力学の数値計算法. 東京大学出版, 1994.
- [59] 富阪幸治, 花輪知幸, 牧野淳一郎 (編集). シミュレーション天文学 (シリーズ現代の天文学). 日本評論社, 2007.

謝辞

まず、このような取り組み甲斐のある最先端の研究テーマを与えて下さった指導教員である富阪幸治教授に感謝します。富阪教授は丁寧な指導をして下さっただけでなく、私の性格と趣味と（幾らか神経質ともいえる）こだわりを良く理解し、温かく見守って下さいました。法政大学の松本倫明准教授にはベースとなる数値計算コードを提供して頂いた上、技術的・科学的両面で様々な指導を頂きました。着任されたばかりの大須賀健助教には、輻射流体力学シミュレーションの先達として経験に基づいた有用なアドバイスを多数頂きました。PDの西合一矢さんにもセミナー等で役に立つ議論をして頂きました。副指導教員である和田桂一准教授には研究面のみならず私生活においても御世話になりました。この方々の温かい指導がなければ私は途方に暮れていたことでしょう。ここにお礼を申し上げます。理論研究部の牧野淳一郎教授、小久保英一郎准教授、大向一行助教、工藤哲洋助教、固武慶助教にも教育的あるいは精神的に様々な支援を頂きました。他にも名前を挙げれば切りがありませんが、全ての国立天文台理論研究部のスタッフと先輩方に感謝します。特に研究テーマの近い細川隆史さんにはしばしば議論（と愚痴）の相手になっていただきました。同室の町田真美さん、関口雄一郎さん、瀬戸直樹さんにも感謝を捧げます。また、理論研究部の秘書である泉塩子さん、研究支援系の佐藤陽子さんにも研究生活を全面的に支えて下さったことに特別のお礼を述べなければなりません。最後に、しばしば滅入りそうになる私の気晴らしの相手になってくれた友人達・同級生達に感謝します。精神的に健康・健全に研究を進めことができたのはひとえに周囲の人々の支えがあったからに他ならず、そのことにいくら感謝の念を表しても足りません。

本研究の計算の一部は国立天文台天文シミュレーションプロジェクト（CfCA）の計算機（NEC SX-9 及び解析用サーバ）を利用して行いました。