AUSM法

富阪幸治

2000年2月21日

1 AUSM法

流束分離法の一種にAUSM法(Liou 1993 Lec. Notes in Physics 414, 115–119; 1995 AIAA-95-1701-CP)がある。流束(E)を流れによって運ばれる部分$(E^{(c)})$と圧力に分解する。すなわち、流体力学の基礎方程式

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}=0 \tag{1}$$

ただしQとEはそれぞれ保存量とそれに対応する流束で

$$Q=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ e\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}\rho u\\ p+\rho u^2\\ (e+p)u\end{pmatrix}, \tag{2}$$

の流束部分を

$$E=E^{(c)}+P \tag{3}$$

のように、ふたつに分離する。ここで流れによって運ばれる流束の部分$E^{(c)}$は、

$$E^{(c)}=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u u\\ (e+p)u\end{pmatrix}=Mc\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ e+p\end{pmatrix}\equiv Mc\Phi, \tag{4}$$

と表され、それ以外の圧力に関連する項は

$$P=\begin{pmatrix}0\\ p\\ 0\end{pmatrix}, \tag{5}$$

で与えられる。ここでcとMはそれぞれ音速とマッハ数を表す。

ふたつの数値流束$E^{(c)}$とPのグリッド境界での値、$E^{(c)}_{j+1/2}=M_{j+1/2}a_{j+1/2}\Phi_{j+1/2}$と$P_{j+1/2}$をどのようにとるかを次に考える。

1.1 $\Phi_{j+1/2}$

$$\Phi_{j+1/2}=\begin{cases}\Phi_j, & \text{if } m_{j+1/2}\geq 0,\\ \Phi_{j+1}, & \text{otherwise}\end{cases} \tag{6}$$

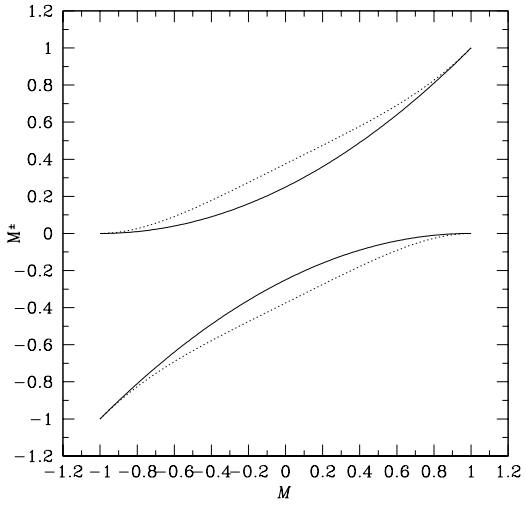

図 1: $\mathcal{M}^{\pm}(M)$ のマッハ数 $(-1 < M < 1)$ による変化。実線は $\beta = 0$、点線は $\beta = 1/8$ の場合。

1.2 $M_{j+1/2}$

中間値を左側の値で決まる $\mathcal{M}_j^+$ と右側の値で決まる $\mathcal{M}_{j+1}^-$ の和として

$$\begin{aligned} M_{j+1/2}(M_j, M_{j+1}) &\equiv \mathcal{M}_j^+ + \mathcal{M}_{j+1}^- \\ &\equiv \mathcal{M}^+(M_j) + \mathcal{M}^-(M_{j+1}) \end{aligned} \tag{7}$$

を考える。これは、右向きに進む波の成分 $\mathcal{M}^+$ と左向きに進む波の成分 $\mathcal{M}^-$ に分解することに対応している。マッハ数が 1 を越える場合は、$M > 0$ の時は $\mathcal{M}^+ = M$ で $\mathcal{M}^- = 0$、また $M < 0$ の時は $\mathcal{M}^+ = 0$ で $\mathcal{M}^- = M$ となるように、

$$\mathcal{M}^{\pm} \equiv \begin{cases} \frac{1}{2}(M \pm |M|), & \text{if } |M| \geq 1, \\ \mathcal{M}_{\beta}^{\pm}(M) & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{8}$$

のようにする。ここで、マッハ数が 1 以下の場合の関数 $\mathcal{M}_{\beta}^{\pm}$ については

$$\mathcal{M}_{\beta}^{\pm} = \pm\frac{1}{4}(M \pm 1)^2 \pm \beta(M^2 - 1)^2, \text{for } -\frac{1}{16} \leq \beta \leq \frac{1}{2} \tag{9}$$

のようにとるが、これは次のような性質をもっていればよい。それは

1. $\mathcal{M}^+(M) + \mathcal{M}^-(M) = M$,
2. $\mathcal{M}^+(M) \geq 0$ で $\mathcal{M}^-(M) \leq 0$,
3. $\mathcal{M}^{\pm}(M)$ は M に対して単調増加関数であること、
4. 対称性から $\mathcal{M}^+(M) = -\mathcal{M}^-(-M)$ であること、
5. $\mathcal{M}^{\pm}(M)$ は連続で微分可能であること。

式 (9) の関数をいくつかの β の値についてプロットすると、図 1 のようになる。

このようにして決まる $\mathcal{M}^{\pm}$ から得られる $M_{j+1/2}$ を用いて、流束 $E^{(c)}$ を定めれば良い。

$$E^{(c)} = \begin{cases} M_{j+1/2}\Phi_j a_j, & (\text{if } M_{j+1/2} > 0) \\ M_{j+1/2}\Phi_{j+1} a_{j+1}, & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{10}$$

$c_{j+1/2}$ については Liou (1995 AIAA-95-1701-CP) では、別のとり方を推奨しているが、以下の計算例では $c_{j+1/2}$ についても風上の値をとったものを示した。

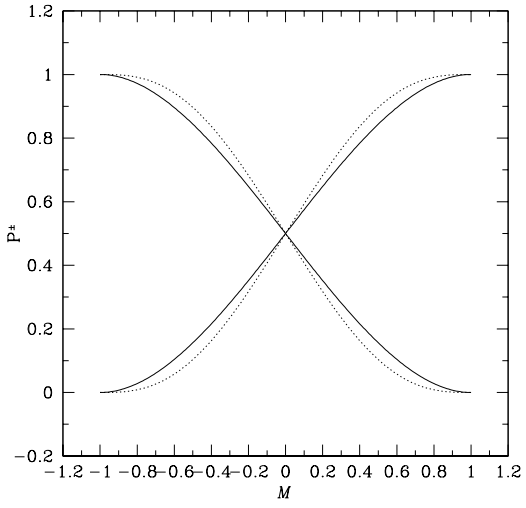

図 2: $\mathcal{P}^{\pm}(M)$ のマッハ数 $(-1 < M < 1)$ による変化。実線は $\alpha = 0$、点線は $\alpha = 3/16$ の場合。

1.3 $p_{j+1/2}$

P の分解は

$$\begin{aligned} p_{j+1} &= \mathcal{P}^{+} p_j + \mathcal{P}^{-} p_{j+1} \\ &= \mathcal{P}^{+}(M_j) p_j + \mathcal{P}^{-}(M_{j+1}) p_{j+1}, \end{aligned} \tag{11}$$

M の分解と異なり、$\mathcal{P}^{\pm}$ は $0 < \mathcal{P}^{\pm} < 1$ で、$M > 1$ の時は $\mathcal{P}^{+} = 1$ で $\mathcal{P}^{-} = 0$、また $M < -1$ の時は $\mathcal{P}^{-} = 1$ で $\mathcal{P}^{+} = 0$ とならなければならないことは、M の分解からもわかるだろう。$-1 < M < 1$ の間は、$\mathcal{P}^{\pm}$ としては、関数値が、0 と 1 の間を変化し、連続で微分可能な関数である、$\mathcal{P}^{\pm}_{\alpha}(M)$ を採用する。

$$\mathcal{P}^{\pm}_{\alpha}(M) \equiv \frac{1}{4}(M \pm 1)^2(2 \mp M) \pm \alpha M(M^2 - 1)^2, \tag{12}$$

ここで、α はパラメータで、$-3/4 < \alpha < 3/16$。式 (10) と合わせると、数値流束は、if $M_{j+1/2} > 0$ の時は、

$$E_{j+1/2} = M_{j+1/2}\Phi_j c_j + (\mathcal{P}^{+}_{j} p_j + \mathcal{P}^{-}_{j+1} p_{j+1}), \tag{13}$$

また、if $M_{j+1/2} < 0$ の時は、

$$E_{j+1/2} = M_{j+1/2}\Phi_{j+1} c_{j+1} + (\mathcal{P}^{+}_{j} p_j + \mathcal{P}^{-}_{j+1} p_{j+1}), \tag{14}$$

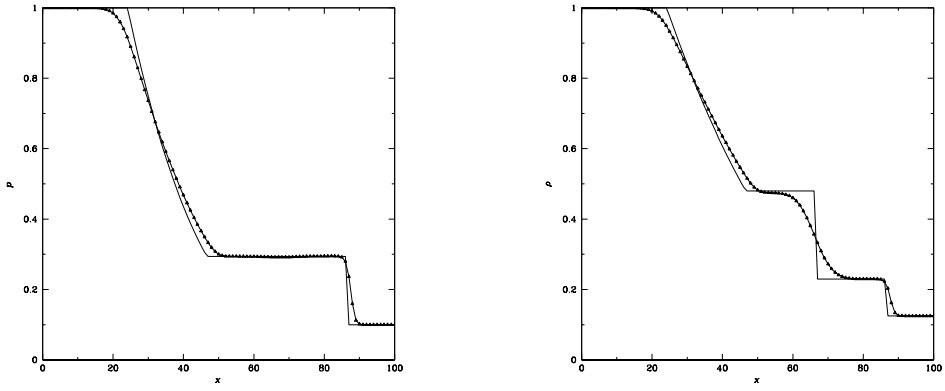

図 3: Liu の AUSM 法による衝撃波管問題の解。初期条件は同じ。$\Delta t/\Delta x = 0.25$

のようになる。式 (12) の関数をいくつかの α の値についてプロットすると、図 2 のようになる。

$\alpha = \beta = 0$ の時の空間 1 次精度の AUSM 法のプログラムを用いて、前とおなじ衝撃波管問題を AUSM 法を用いて解いた結果を図 3 に掲げる。FDS 法、FVS 法とほぼ同等の性質の解が得られることがわかる。

1.4 高精度化

1.4.1 $\Phi_{j+1/2}$ と $c_{j+1/2}$

この方法も MUSCL 法と同時に用いることによって高精度化をはかることができる。式 (6) を MUSCL 法を用いて内挿した値を用いて以下のように求める。

$$\Phi_{j+1/2} = \begin{cases} \Phi^L_{j+1/2}, & \text{if } m_{j+1/2} \geq 0, \\ \Phi^R_{j+1/2}, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{15}$$

ただし、ここで、$\Phi^L_{j+1/2}$ と $\Phi^R_{j+1/2}$ は、それぞれ基本量を左側から補間してえたグリッド境界 $j+1/2$ での値と、おなじく基本量を右側から補間してえた $x_{j+1/2}$ での値をあらわす。

$c_{j+1/2}$ についても式 (15) と同じように、

$$c_{j+1/2} = \begin{cases} c^L_{j+1/2}, & \text{if } m_{j+1/2} \geq 0, \\ c^R_{j+1/2}, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{16}$$

のように取れば良い。

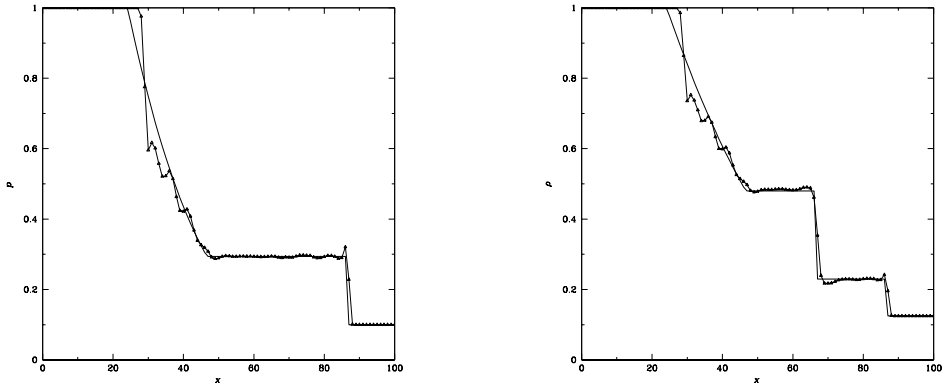

図 4: Liu の AUSM 法による衝撃波管問題の解 (MUSCL 法によって 2 次精度化された例)。初期条件は同じ。$\alpha = \beta = 0$ で $\kappa = 0$ としている。

1.4.2 $M_{j+1/2}$ と $p_{j+1/2}$

流束分離をおこなう $M_{j+1/2}$ と $p_{j+1/2}$ については、式 (7) を以下のように置き換える。

$$\begin{aligned} M_{j+1/2}(M^L_{j+1/2}, M^R_{j+1/2}) &\equiv \mathcal{M}^+_j + \mathcal{M}^-_{j+1} \\ &\equiv \mathcal{M}^+(M^L_{j+1/2}) + \mathcal{M}^-(M^R_{j+1/2}) \end{aligned} \tag{17}$$

1.4.3 数値計算例

このようにして高精度化した AUSM 法で同じ衝撃波管問題を解いた結果を図 4 に載せる。

1.5 まとめ

1.5.1 AUSM 法の数値流束

AUSM 法の数値流束は

$$\tilde{E}_{j+1/2} = m_{j+1/2} c_{j+1/2} \frac{\Phi_j + \Phi_{j+1}}{2} - \frac{c_{j+1/2}}{2} |m_{j+1/2}| \Delta_{j+1/2} \Phi + p_{j+1/2}, \tag{18}$$

ここで $\Delta_{j+1/2}\{\cdot\} \equiv \{\cdot\}_{j+1} - \{\cdot\}_j$ である。重要なことは、右辺第 2 項 (これは拡散に相当する) の係数 $|m_{j+1/2}|$ が単なるスカラーであることである。

1.5.2 FDS 法、FVS 法の数値流束

Roe の FDS 法 (既出) をこのように書き表すと、

$$\tilde{E}_{j+1/2} = \frac{(u\Phi)_j + (u\Phi)_{j+1}}{2} - \frac{1}{2}(R|\Lambda|R^{-1})_{\rm Roe}\Delta_{j+1/2}Q + \frac{1}{2}(p_j + p_{j+1}), \tag{19}$$

$(R|\Lambda|R^{-1})_{\rm Roe}$ は、グリッド境界 $j+1/2$ に対して近似 Riemann 解法を用いて得られる値を表す。

また Steger と Warming(1981) 流の FVS 法 (既出) は

$$\tilde{E}_{j+1/2} = \frac{(u\Phi)_j + (u\Phi)_{j+1}}{2} - \Delta_{j+1/2}\left[\frac{1}{2}R(\Lambda^+ - \Lambda^-)R^{-1}Q\right] + \frac{1}{2}(p_j + p_{j+1}), \tag{20}$$

と表せる。ここで $(\Lambda^+ - \Lambda^-)/2 = |\Lambda|$。

また van Leer(1982: Lec. Notes in Physics 170, 507) と Hänel et al. (1987: AIAA paper 87-1105-CP) 流の FVS 法は

$$\tilde{E}_{j+1/2} = \frac{(u\Phi)_j + (u\Phi)_{j+1}}{2} - \frac{1}{2}\Delta_{j+1/2}|\mathcal{M}|c\Phi + p_{j+1/2}, \tag{21}$$

のように書き表せる。ここで、$|\mathcal{M}| = \mathcal{M}^+_{\beta=0}(M_j) - \mathcal{M}^-_{\beta=0}(M_j)$ である。

これらと比べれて見れば明らかなように、Roe の FDS 法や Steger と Warming(1981) 流の FVS 法に含まれるヤコビ行列式の演算が AUSM スキームには含まれていない。そのため、計算時間が短くてすむことも特徴である。また、Roe の FDS 法と Steger と Warming(1981) 流の FVS 法の差はヤコビ行列式の値を差分オペレータの外で評価するか (FDS 法、ただしヤコビ行列式は近似 Riemann 解法によって j と $j+1$ 両方の量によっている)、中で評価するか (FVS 法) の違いである。そういう意味では、AUSM 法は FDS 法的な方法であるといえるが、式 (18) と式 (21) を比較すると、拡散係数としてマッハ数が選ばれている点が良く似ていることがわかる。そういう意味では、AUSM 法は FDS 法と FVS 法のハイブリッドな方法であるともいえる。