差分法による数値流体力学

富阪幸治

1999.3

目 次

第 1 章　数値流体力学の基礎的事項 **3**
1.1　流体の方程式 3
1.2　差分法 4
1.2.1　差分 4
1.2.2　陽解法と陰解法 5
1.3　数値流束 5
1.4　精度 6
1.4.1　FTCS スキーム 7
1.4.2　Lax スキーム 8
1.4.3　Lax-Wendroff 法 8
1.4.4　空間 1 次精度のスキーム 10
1.5　安定性 11
1.6　再度数値流束 14
1.6.1　FTCS 15
1.6.2　Lax-Wendroff スキーム 15
1.6.3　Lax スキーム 15
1.6.4　空間 1 次精度のスキーム 15

第 2 章　高精度風上差分 **17**
2.1　流束制限関数 17
2.2　計算例 19
2.3　MUSCL 法 20
2.3.1　MUSCL 内挿 21
2.3.2　高次精度風上差分 23
2.3.3　計算例 23

第 3 章　流体力学方程式の差分解法 **25**
3.1　流体力学方程式 25
3.1.1　オイラー方程式 25
3.1.2　特性速度 26
3.2　衝撃波管問題 29
3.3　Lax 法、Lax-Wendroff 法 29
3.3.1　Lax 法 29
3.3.2　Lax-Wendroff 法 30

3.3.3　2 段階 Lax-Wendroff 法 32
3.3.4　人工粘性項 33
3.4　流体力学方程式の風上差分法 (1) —Flux Difference Splitting 法 34
3.5　流体力学方程式の風上差分法 (2) —Flux Vector Splitting 法 37
3.6　流体力学方程式の高解像度風上差分法 39
3.6.1　FDS 法 40
3.6.2　FVS 法 41
3.7　多次元問題 (2 次元、 3 次元) への適用 42

第１章　数値流体力学の基礎的事項

1.1　流体の方程式

まず最初の基礎方程式は、ある体積の中に含まれる流体の質量が単位時間に流れ込む質量流速によって増減するという連続の式

$$\frac{\partial \int_V \rho dV}{\partial t} = -\int_S \rho \mathbf{v} d\mathbf{S} \tag{1.1}$$

から得られる。右辺を体積積分に変換し、V として微小体積を考えれば、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{1.2}$$

が得られる。

つぎに、ある体積の中に含まれる流体の運動量は、質量と同じように、単位時間に流れ込む運動量流速によって増減するが、それに加えて運動量の場合は、この流体の体積に加わっている「力」によっても増減する。流体の中でかならず考慮しなければならない圧力による力は、圧力勾配に比例するので、

$$\frac{\partial \int_V \rho \mathbf{v} dV}{\partial t} = -\int_S \rho \mathbf{v}\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} - \int_V \mathrm{grad} p dV \tag{1.3}$$

となる。ここで、右辺を体積積分に変換し、V として微小体積を考えれば、

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \mathrm{div} \rho \mathbf{v}\mathbf{v} = -\mathrm{grad} p \tag{1.4}$$

が得られる。この式は添字をつけて書くと、

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{1.5}$$

と書ける。もちろん、$x_1 = x$、$x_2 = y$、$x_3 = z$ を表している。

さて、断熱の場合のエネルギーに関する方程式は、

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}(e + p)\mathbf{v} = 0 \tag{1.6}$$

ここで e は単位体積あたりの全エネルギーで

$$e = \rho |\mathbf{v}|^2/2 + \epsilon \tag{1.7}$$

第 1 項は単位体積当たりの運動エネルギー、第 2 項はおなじく熱エネルギーを表す。理想気体の場合は $\epsilon = p/(\gamma - 1)$ である。

質量と同じように、全エネルギーの増減はエネルギー流速によるだけなら、$\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}(e\mathbf{v}) = 0$ となるはずであるが、そうではない。熱力学の第 1 法則で断熱の場合を考えると、内部エネルギー U と体積 V は

$$\frac{dU}{dt} + p\frac{dV}{dt} = 0 \tag{1.8}$$

という関係で変化する。これから、単位体積あたりの熱エネルギー ϵ は

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \mathrm{div}(\epsilon\mathbf{v}) = -p\mathrm{div}\mathbf{v} \tag{1.9}$$

という関係にしたがって変化することが簡単な計算でわかる。これと式 (1.4) から得られる運動エネルギーの変化を表す (この式の右辺が単位体積 ・単位時間に流体素片になされた仕事を表すことに注意)

$$\frac{\partial \rho|\mathbf{v}|^2/2}{\partial t} + \mathrm{div}(\frac{\rho|\mathbf{v}|^2}{2}\mathbf{v}) = -\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}p \tag{1.10}$$

の和をとれば全エネルギーに関する方程式 (1.6) が得られる。

流体力学の基礎方程式は、式 (1.2)、(1.4)、(1.6) ということになる。 1 次元の流体の基礎方程式は、3 つの式をベクトルのように並べて書いて、

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \tag{1.11}$$

と書けるただし、Q と E は物理量をならべたベクトルで、

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ (e+p)u \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

である。

1.2　差分法

微分の定義式

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1.13}$$

で、Δx を小さくとって、近似した式

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \simeq \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1.14}$$

のことを差分と呼ぶ。差分法とは、微分方程式をこのような形に差分化し、その解を求める方法をいう。

1.2.1　差分

空間微分の差分化を考える。空間を格子に分割しその格子点上の物理量 Q_j を計算する。ここで j は格子点につけた番号を表す。

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_j = \frac{Q_{j+1} - Q_j}{\Delta x}, \tag{1.15}$$

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_j = \frac{Q_j - Q_{j-1}}{\Delta x}, \tag{1.16}$$

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_j = \frac{Q_{j+1} - Q_{j-1}}{2\Delta x}. \tag{1.17}$$

この 3 つの表現は Δx が小さい極限ではおなじ $\frac{dQ}{dx}$ を与えるが、Δx^2 のオーダで違う量を与える (詳しくは後に述べる)。式 (1.15) のようにとるのを前進差分、式 (1.16) のようにとるのを後退差分、式 (1.17) のようにとるのを中心差分と呼ぶ。前進差分 (1.15) と後退差分 (1.16) を使って、2 階微分は

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{Q_{j+1} - 2Q_j + Q_{j-1}}{\Delta x^2} \tag{1.18}$$

のような 3 点差分を使うことが多い。

どのような差分をとるかということは、計算方法の安定性、収束性などに影響を与える。これはこの授業の主要な内容にあたる。

1.2.2 陽解法と陰解法

式 (1.12)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0, \tag{1.19}$$

を時間について差分化する方法も、前進、後退、中心差分を考えることができる。時間に関する添字を n とし、n ステップめの物理量から $n+1$ ステップめのそれを求める (時間進化を求める) ことを考える。これが流体力学の非定常問題の解を求めることに相当している。

時間に関しては前進差分、中心差分そして後退差分を適用すると、それぞれ

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \Delta t \frac{\partial E^n}{\partial x}, \tag{1.20}$$

$$Q_j^{n+1} = Q_j^{n-1} - 2\Delta t \frac{\partial E^n}{\partial x}, \tag{1.21}$$

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \Delta t \frac{\partial E^{n+1}}{\partial x}, \tag{1.22}$$

のようになる。ここで、前の 2 つは Q_j^{n+1} を求めるのに、過去の情報 $E^n = E(Q^n)$ や Q^{n-1} のみを使っている。したがって既に知れている情報で求める 1 つ時間ステップ進んだ後の物理量の値を決めることができる。このようにな方法を陽解法と呼ぶ。それに対して、式 (1.22) では、$E^{n+1} = E(Q^{n+1})$ だから、1 つ時間ステップ進んだ後の物理量の値を決めるのに、それを右辺に含んでいる。このような解法は陰解法とよばれ、1 つ時間ステップ進んだ後の物理量の値を決めるのに、それら自身の間にある関係を使わなければならないことになっている。具体的には、陰解法では、空間の格子点数 $\times$ 従属変数の種類だけの変数に関する連立方程式を 1 ステップごとに解く必要がある。

1.3 数値流束

前節の式 (1.20)、(1.21)、(1.22) では、流束の空間微分に関する部分をどうとるかということには触れなかった。流体力学の数値解法は、つまるところ、空間微分に関する差分と時間微分に関する差分をどのようにとるか、ということに集約できる。

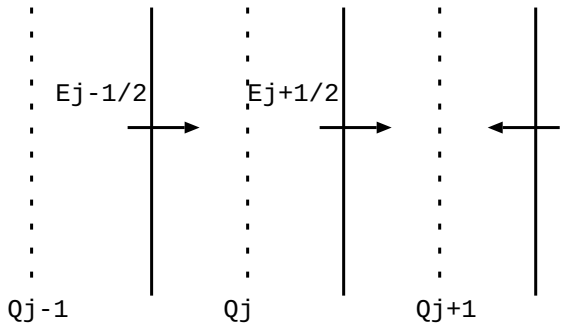

図 1.1: 物理量と流束の関係

式 (1.12) を

$$\frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} + \frac{\tilde{E}_{j+1/2}^n - \tilde{E}_{j-1/2}^n}{\Delta x} = 0 \tag{1.23}$$

このような差分に書き直した時、グリッドの中心での値である Q_j に対して、$\tilde{E}_{j+1/2}$ や $\tilde{E}_{j-1/2}$ はグリッドの境界での値であるべきである。

このときどのようにして $\tilde{E}_{j+1/2}$ などの量を決めれば良いのだろうか。

ここで、$\tilde{E}_{j+1/2}$ を $E_j = E(Q_j)$、$\tilde{E}_{j-1/2}$ を $E_{j-1} = E(Q_{j-1})$ とすれば、空間後退差分 ･時間前進差分のスキームが $\tilde{E}_{j+1/2}$ を $E_{j+1} = E(Q_{j+1})$、$\tilde{E}_{j-1/2}$ を $E_j = E(Q_j)$ とすれば、空間前進差分 ･時間前進差分のスキームができる。空間中心差分のスキームには、$\tilde{E}_{j+1/2}$ を $(E(Q_j) + E(Q_{j+1}))/2$、$\tilde{E}_{j-1/2}$ を $(E(Q_j) + E(Q_{j-1}))/2$ のようにすれば良いことは容易にわかるだろう。

数値流体力学の計算方法とは、この $\tilde{E}_{j+1/2}$ などの流束の値を、どのよう決めればよいかという問題に帰着する。このような立場に立ってスキームに現れる $\tilde{E}_{j+1/2}$ などの流束のことを数値流束と呼ぶ。数値流速の決め方こそ数値流体力学の計算方法のポイントといえる。数値計算スキームによってこの数値流束のとりかたは異なるが、いくつかの例について後に見ることになる。

1.4　精度

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0, \tag{1.24}$$

で、$v = c$ =const を考える。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{1.25}$$

流体の基礎方程式の差分法による解析に進む前に、しばらくは、この線形の方程式に関する差分法による解析についてみてゆく。この方程式に関する差分法による解析は、後に、流体の基礎方程式の高精度風上差分法を構築する上での基礎となるので、しばらくつき合っていただきたい。

1.4.1 FTCS スキーム

時間前進差分 ・空間中心差分の FTCS(Forward in Time and Central Difference in Space) スキームは、式 (1.25) を

$$\frac{\rho_j^{n+1}-\rho_j^n}{\Delta t}+c\frac{\rho_{j+1}^n-\rho_{j-1}^n}{2\Delta x}=0 \tag{1.26}$$

のように差分化して

$$\rho_j^{n+1}=\rho_j^n-c\frac{\Delta t}{2\Delta x}(\rho_{j+1}^n-\rho_{j-1}^n), \tag{1.27}$$

として解く方法である。Pascal のプログラムでは

```
for j:=0 to jm do
  w[j]:=u[j];
for j:=1 to jm-1 do
  u[j]:=w[j]-nu/2*(w[j+1]-w[j-1]);
```

のよう書けば良い。ν(プログラム中でnu と書かれている量) はクーラン数と呼ばれ、$\nu=c\Delta t/\Delta x$ で定義される量である。1 ステップで進む時間の長さと、2 つの格子点の間の距離の間の関係をつけている量であるといえる。

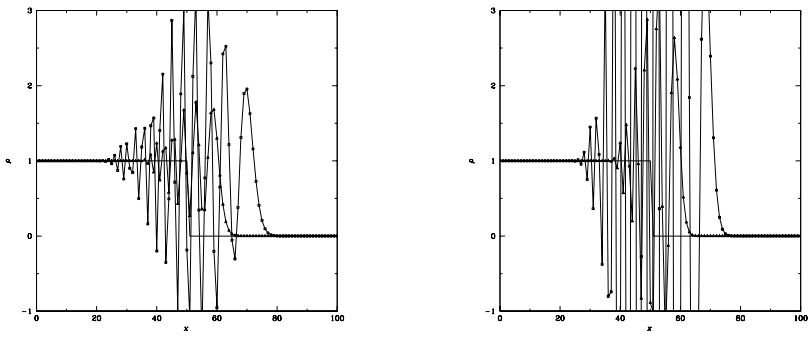

図 1.2: FTCS スキームで、初期値として、$j=1,\ldots,50$ に対して $\rho=1$、$j=51,\ldots,100$ に対して $\rho=0$ としクーラン数 $\nu\equiv c\Delta t/\Delta x=0.25$ で 50 ステップ、100 ステップ計算した時の ρ をプロットした (左)。同じ初期条件で、クーラン数 $\nu=0.5$ で 25 ステップ、50 ステップ計算したものが右図である。

このスキームで、初期値として、

$$\rho=\begin{cases} 1,\ldots\text{for j}=1,\ldots,50 \\ 0,\ldots\text{for j}=51,\ldots,100 \end{cases} \tag{1.28}$$

をとり、クーラン数 $\nu=c\Delta t/\Delta x$ を 0.25 と 0.5 の場合について $\nu\times N_{\rm step}=25$ まで計算した結果が図 1.2 に示してある。この初期条件に合致する厳密解は、密度が 1 から 0 へ飛ぶ位置が、1 ステップごとに右に ν だけ移動してゆくものにならなければならないことは容易にわかるだろう。しかし、図 1.2 に

示したように、この FTCS スキームを用いて計算すると、厳密解の回りに余分の振動が発生してしまうことがわかる。

この差分化にどれくらいの誤差が混入しているかを考える。時間方向にテイラー展開して、

$$\rho^{n+1} = \rho^n + \left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|^n \Delta t + \left.\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}\right|^n \frac{\Delta t^2}{2} + \mathcal{O}(\Delta t^3), \tag{1.29}$$

また空間方向にテイラー展開して、

$$\rho_{j+1} = \rho_j + \left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_j \Delta x + \left.\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right|_j \frac{\Delta x^2}{2} + \left.\frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3}\right|_j \frac{\Delta x^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta x^4), \tag{1.30}$$

$$\rho_{j-1} = \rho_j - \left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_j \Delta x + \left.\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right|_j \frac{\Delta x^2}{2} - \left.\frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3}\right|_j \frac{\Delta x^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta x^4), \tag{1.31}$$

となる。$\mathcal{O}\Delta t^3$ は、Δt^3 に比例する項もしくはそれよりも高次の項　(Δt^3 より小さい) が省略されていることを示す。これを (1.26) に代入すると、(1.24) と完全に同じになるわけではなく、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c\frac{\partial \rho}{\partial x} + c \left.\frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3}\right|_j \frac{\Delta x^2}{6} + \left.\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}\right|^n \frac{\Delta t}{2} = 0, \tag{1.32}$$

となる。このように、空間方向に Δx^2、時間方向に Δt の誤差を含むスキームを、空間 2 次精度、時間 1 次精度のスキームと呼ぶ。

1.4.2　Lax スキーム

この FTCS スキームは図 1.2 に見えるように、正しい解の回りで振動を生じており、実際に使うことはできない。そこで、式 (1.26) の右辺第 1 項 ρ_j を $(\rho_{j-1} + \rho_{j+1})/2$ で置き換えた式

$$\rho_j^{n+1} = \frac{\rho_{j-1}^n + \rho_{j+1}^n}{2} - c\frac{\Delta t}{2\Delta x}(\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n), \tag{1.33}$$

を解く方法が Lax 法　(図 1.3) である。この方法のプログラムは

```
for j:=0 to jm do
  w[j]:=u[j];
for j:=1 to jm-1 do
  u[j]:=(w[j-1]+w[j+1])/2-nu/2*(w[j+1]-w[j-1]);
```

のように書けば良い。FTCS スキームの数値的振動は押えられているが、密度の飛びは著しく鈍ってしまっている。

1.4.3　Lax-Wendroff 法

時間 2 次精度のスキームとするためには、

$$\rho^{n+1} = \rho^n + \left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|^n \Delta t + \left.\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}\right|^n \frac{\Delta t^2}{2} + \left.\frac{\partial^3 \rho}{\partial t^3}\right|^n \frac{\Delta t^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta t^4), \tag{1.34}$$

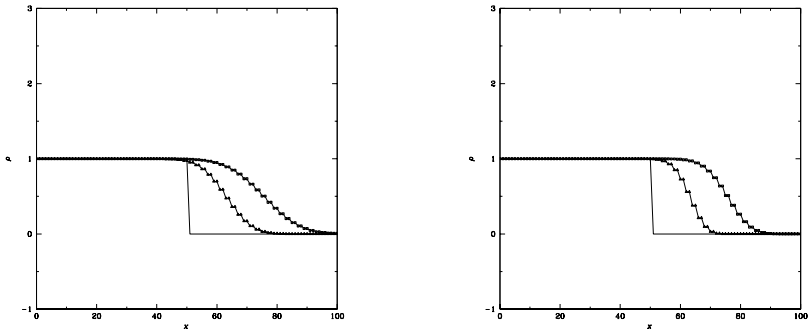

図 1.3: 図 1.2 とおなじ。ただし採用した計算スキームは Lax 法で、左はクーラン数 $\nu = 0.25$、右はクーラン数 $\nu = 0.5$ のもの。FTCS スキームに比べて、振動はおさえられているが、密度の飛びは鈍っている。

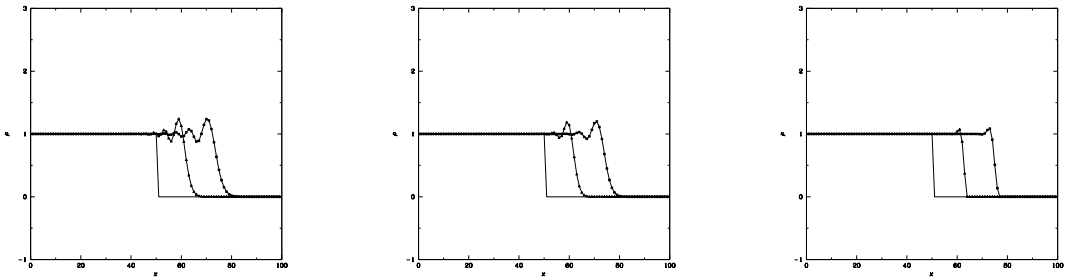

図 1.4: 図 1.2 とおなじ。ただし採用した計算スキームはオリジナルの Lax-Wendroff 法で、左はクーラン数 $\nu = 0.25$ で 50 ステップ、100 ステップ後、中央はクーラン数 $\nu = 0.5$ で 25 ステップ、50 ステップ後、右はクーラン数 $\nu = 0.95$ で 13 ステップ、26 ステップ計算したもの。

で、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -c\frac{\partial \rho}{\partial x}, \tag{1.35}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = +c^2\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \tag{1.36}$$

であることに注すると、

$$\rho^{n+1} = \rho^n - c\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_j \Delta t + \frac{c^2}{2}\left.\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right|_j \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3), \tag{1.37}$$

となる。この式を差分化するとオリジナルの Lax-Wendroff スキームが得られる。

$$\rho^{n+1} = \rho^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(\rho^n_{j+1} - \rho^n_{j-1}) + \frac{c^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}(\rho^n_{j+1} - 2\rho^n_j + \rho^n_{j-1}), \tag{1.38}$$

これは FTCS スキームに第 3 項の拡散項を加えたものとなっている。拡散項は、FTCS スキームで生じる振動を拡散によって鎮める効果を持つのでこのスキームはより安定化されることになる。プログラムは

```
for j:=0 to jm do
  w[j]:=u[j];
for j:=1 to jm-1 do
  u[j]:=w[j]-nu/2*(w[j+1]-w[j-1])+nu*nu/2*(w[j+1]-2*w[j]+w[j-1]);
```

とすれば良い。

1.4.4　空間 1 次精度のスキーム

$$\rho^{n+1}_j = \rho^n_j - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(\rho^n_j - \rho^n_{j-1}), \tag{1.39}$$

とすれば、時間については 1 次精度前進差分、空間については 1 次精度後退差分をとったスキームができる。プログラムは

```
for j:=0 to jm do
  w[j]:=u[j];
for j:=1 to jm do
  u[j]:=w[j]-nu*(w[j]-w[j-1]);
```

のようにすれば良い。

この問題では、現象は左から右へ伝わってゆくので、それをとらえられるように、空間については後退差分をとった。図 1.5 から、空間 1 次精度のスキームは、密度の飛びの部分で余分な振動を起こさないことがわかる。しかし同時に、密度の飛びの部分が時間が進むにつれて、ぼやけてゆくこともわかる。このように、空間 1 次精度のスキームは余分な振動を起こさない良い性質をもっているが、飛びの部分がぼやけてゆくという悪い性質を持っていることがわかる。テイラー展開を用いてこのスキームにどの

程度の誤差が含まれているかを見てみると、式 (1.39) は元の微分方程式 (1.25) に 2 つ余分な項を含んでおり

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -c\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right) \tag{1.40}$$

と等しくなることがわかる。ここで、$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -c\frac{\partial \rho}{\partial x}$ に気をつけて変形すると、これは

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{c}{2}(\Delta x - c\Delta t)\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \tag{1.41}$$

となる。この式で

$$\Delta t < \Delta x/c \tag{1.42}$$

のようにとると、右辺は正の拡散係数を持つ拡散項であることがわかる。つまりこのようにして作った空間 1 次精度のスキームは正の拡散係数を持つ拡散項を差分化にともなう誤差として含むために余分の振動を生じなくなっていることがわかる。

ここで式 (1.42) は早さ c で伝わる現象について時間進化を計算する場合に、情報が格子 1 つ分以上伝搬する時間以上に時間ステップをとってはならないという条件に相当しており、数値流体力学で非定常問題を解く場合の時間ステップに関する条件を与えるものである。これは、Courant, Friedrich, Lewy(1928) 条件 (CFL 条件) と呼ばれる。

1.5 安定性

前節で見たように、空間 2 次精度のスキームでは、余分な振動が発生した。空間 1 次精度のスキームは余分な振動は発生しなかったが、密度の飛びは時間がすすむとともに鈍ってゆくことがわかった。これらの差はどこからくるのだろうか。差分方程式に含まれる元の微分方程式からのずれ (誤差) に起因することは前に述べた。

ここでは、von Neumann の安定性解析を使って余分な振動や解の鈍りと差分スキームの間の関係を定量的に見てゆく。解をフーリエ分解して、

$$\rho_j^n = \sum_\theta g^n \exp(ij\theta) \tag{1.43}$$

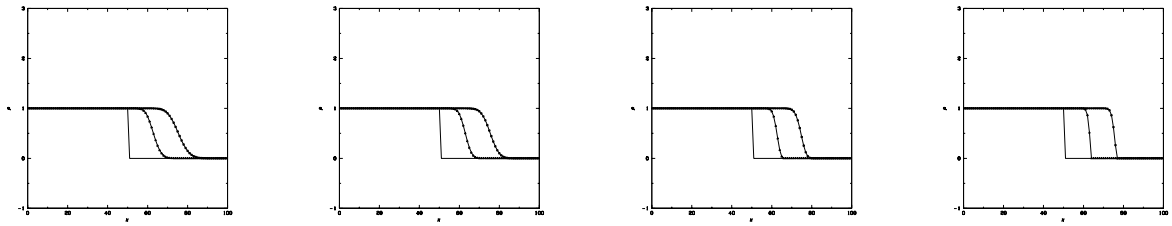

図 1.5: 図 1.2 とおなじ。ただし採用した計算スキームは空間 1 次精度後退差分をとったスキームで、クーラン数は左から $\nu = 0.25$、$\nu = 0.5$、$\nu = 0.8$、$\nu = 0.95$ をとっている。

と書く。ここで j は格子点の番号で、θ は格子間隔 Δx を単位とした波数つまり $\theta = 2\pi k\Delta x$ で $(0 \leq \theta \leq \pi)$ を表す。 (これは Δx だけ進んだ時の位相の変化を与える)

この式をスキームに代入し $\exp(ij\theta)$ に比例する項を取り出す。FTCS スキーム

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{\nu}{2}(\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n), \tag{1.44}$$

に対しては、

$$g^{n+1} = g^n - \frac{\nu}{2}g^n(\exp(i\theta) - \exp(-i\theta)), \tag{1.45}$$

となる。これから複素振幅 g が

$$g = 1 - i\nu\sin\theta, \tag{1.46}$$

となっていることがわかる。

この問題では厳密解は、$\rho_j^{n+1} = \rho_{j-\nu}^n$ を満足していなければならないので、

$$\rho_j^{n+1} = g^{n+1}\exp(ij\theta) = \rho_{j-\nu}^n = g^n\exp(i(j-\nu)\theta), \tag{1.47}$$

が成り立たねばならず、これから厳密解に対する複素振幅 g は

$$g_{\rm exact} = \exp(-i\nu\theta), \tag{1.48}$$

で与えられる。これは当然 $|g_{\rm exact}| = 1$ で、厳密解では位相だけが動いてゆくことになる。この $g_{\rm exact}$ からどれだけ異なっているかを調べれば、差分化にともなって、微分方程式の厳密解からずれた部分がわかることになる。

複素振幅 g の絶対値はある波の 1 ステップ後との振幅の比を与えるが、式 (1.46) に対しては

$$|g|^2 = 1 + \nu^2\sin^2\theta, \tag{1.49}$$

で与えられる。$\nu > 0$ に対しては波数 $\theta > 0$ の波は増幅されることがわかる。

つぎに複素振幅 g の位相 ϕ は、

$$\phi = \arcsin\frac{Im(g)}{|g|} \tag{1.50}$$

で、厳密解の位相に対する比は

$$\frac{\phi}{\phi_{\rm exact}} = \frac{\arcsin\frac{\nu\sin\theta}{\sqrt{1+\nu^2\sin^2\theta}}}{\nu\theta} \tag{1.51}$$

のように計算できる。これを図に書くと図 1.6 のようになる。$|g|$ と $\phi/\phi_{\rm exact}$ を図示する Mathematica のプログラムは

```
G[nu_,theta_]=Sqrt[1+nu^2 Sin[theta]^2]
Plot[G[0.5,theta],{theta,0,Pi},Frame -> True]
```

および

```
Phi[nu_,theta_]=ArcSin[nu Sin[theta]/Sqrt[1+nu^2 Sin[theta]^2]]/(nu theta)
Plot[Phi[0.5,theta],{theta,0.0001,Pi},Frame->True]
```

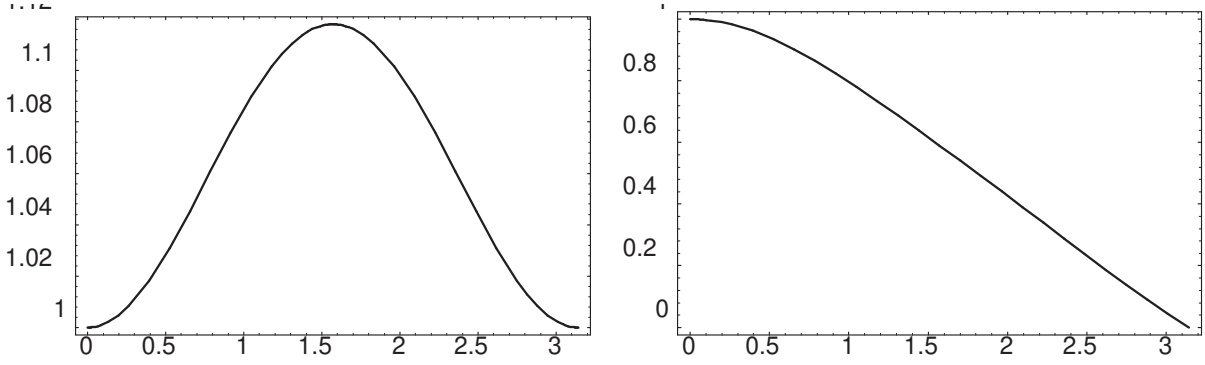

図 1.6: FTCS スキームで、クーラン数 $\nu = 0.5$ でにする複素振幅 g の絶対値 (左) と複素振幅 g の位相 ϕ と厳密解の位相に対する比 (右)。この図で、それぞれ 1 に近いほど厳密解に近いことになる。

である。

ここで、複素振幅 g の絶対値が $0 < \theta < \pi$ (0 と π 以外) に対して 1 を越えているので、初期値に含む周期的な波はかならず増幅されることになることがわかる。また、θ の大きな (短波長の) 波の方で厳密解に比べて、位相が遅れることもわかる。図 1.2 で短波長の波が後方に取り残されているように見えることもこのように説明される。

同じようにして、Lax のスキームでは、

$$g = \cos\theta - i\nu\sin\theta, \tag{1.52}$$

となり、絶対値と位相の比は、

$$|g|^2 = \cos^2\theta + \nu^2\sin^2\theta, \tag{1.53}$$

$$\frac{\phi}{\phi_{\rm exact}} = \frac{\arcsin\frac{\nu\sin\theta}{(\cos^2\theta+\nu^2\sin^2\theta)^{1/2}}}{(\nu\theta)} \tag{1.54}$$

で与えられる。これを図示する Mathematica のプログラムは

```
G[nu_,theta_]=Sqrt[Cos[theta]^2+nu^2 Sin[theta]^2]
Plot[G[0.5,theta],{theta,0,Pi},Frame -> True]

Phi[nu_,theta_]=ArcCos[Cos[theta]/G[nu,theta]]/(nu theta)
Plot[Phi[0.5,theta],{theta,0.0001,Pi},Frame->True]
```

のようになる。

図 1.7 (左) を見ると、すべての θ で $|g| < 1$ であり、周期的な振動はその振幅が減少してゆくことがわかる。特に、$\theta = \pi/2$ つまり 4 グリッドで 1 波長となる波が大きく減衰することがわかる。図 1.7 (右) からは、θ の大きい波に対して、正の位相誤差とを生じており、Lax スキームで飛びが鈍ってゆくにつれて前方に崩れてゆく構造がこれが原因となっていると見ることができる。

また、1 次のスキームに対しても同様の解析は可能で、

$$g = 1 - \nu(1 - \cos\theta) - i\nu\sin\theta, \tag{1.55}$$

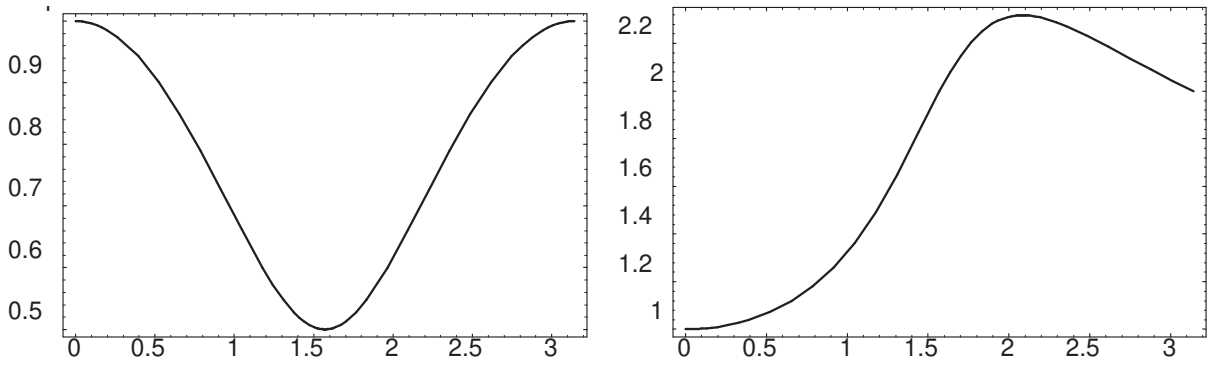

図 1.7: Lax スキームで、クーラン数 $\nu = 0.5$ に対する複素振幅 g の絶対値 (左) と複素振幅 g の位相 ϕ の厳密解の位相に対する比　(右)。

$$|g|^2 = (1 - \nu(1 - \cos\theta))^2 + \nu^2 \sin^2\theta, \tag{1.56}$$

$$\frac{\phi}{\phi_{\text{exact}}} = \frac{\arcsin\frac{\nu\sin\theta}{|g|}}{\nu\theta}, \tag{1.57}$$

で、図 1.8 で複素振幅 g の絶対値は、大きい波数に対して減少しており、短波長の波ほど減衰しやすいことがわかる。$\nu = 0.5$ の場合は $\nu = 1$ の場合とともに複素振幅 g の位相誤差は 0 になるが　(図 1.8 右)、$0.5 < \nu < 1$ では $\phi/\phi_{\text{exact}} > 1$ で前進位相誤差を、$0 < \nu < 0.5$ では $\phi/\phi_{\text{exact}} < 1$ で遅延位相誤差を持つ。

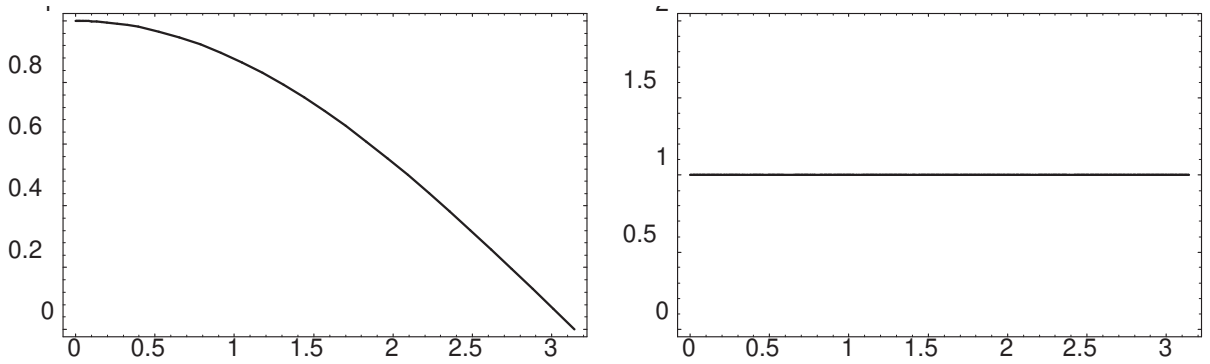

図 1.8: 図 1.6 と同じ、ただし、1 次精度空間後退差分スキームで、クーラン数 $\nu = 0.5$ でにする複素振幅 g の絶対値 (左) と複素振幅 g の位相 ϕ の厳密解の位相に対する比　(右)。

1.6　再度数値流束

ここまで、いくつかのスキーム　(差分法) について見てきた。これを 1.3 節で導入した数値流束という面からまとめておく。以降では差分式に出てくる従属変数 ρ ではなく u と書く。

1.6.1 FTCS

空間 2 次精度の FTCS スキームは、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\nu}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right), \tag{1.58}$$

であり、これを

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{j+1/2} - F_{j-1/2}\right), \tag{1.59}$$

の形に書き直すと、

$$F_{j+1/2} = c\frac{u_j + u_{j+1}}{2}, F_{j-1/2} = c\frac{u_j + u_{j+1}}{2}, \tag{1.60}$$

であるとわかる。つまり、この方法では、セルの境界である $j \pm 1/2$ での数値流速として、セルの中心での値の算術平均を取っていることがわかる。

1.6.2 Lax-Wendroff スキーム

Lax-Wendroff スキームでは

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\nu}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\nu^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \tag{1.61}$$

であるから、数値流速は

$$F_{j+1/2} = c\left(\frac{1-\nu}{2}u_{j+1} + \frac{1+\nu}{2}u_j\right), F_{j-1/2} = c\left(\frac{1-\nu}{2}u_j + \frac{1+\nu}{2}u_{j-1}\right), \tag{1.62}$$

となる。セルの境界での数値流速として、セルの中心での値に $(1-\nu)/2$ と $(1+\nu)/2$ の重みをつけて平均を取っていることがわかる。

1.6.3 Lax スキーム

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j-1}^n + u_{j+1}^n}{2} - \frac{\nu}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right), \tag{1.63}$$

であり、

$$F_{j+1/2} = c\left(\frac{1-1/\nu}{2}u_{j+1} + \frac{1+1/\nu}{2}u_j\right), F_{j-1/2} = c\left(\frac{1-1/\nu}{2}u_j + \frac{1+1/\nu}{2}u_{j-1}\right), \tag{1.64}$$

となる。セルの境界での数値流束として、セルの中心での値に $(1-1/\nu)/2$ と $(1+1/\nu)/2$ の重みをつけて平均を取っていることがわかる。

1.6.4 空間 1 次精度のスキーム

空間 1 次精度のスキームでは風上側を含んだ差分を取る必要がある。すなわち、$c > 0 (\nu > 0)$ に対しては後退差分、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \nu\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right), \tag{1.65}$$

を $c < 0(\nu < 0)$ に対しては前進差分、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \nu \left(u_{j+1}^n - u_j^n \right), \tag{1.66}$$

を取る必要がある。このようにとるスキームを 1 次精度風上差分とよぶ。これは、1 つの式で書くこともできて、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\nu + |\nu|}{2} \left(u_j^n - u_{j-1}^n \right) - \frac{\nu - |\nu|}{2} \left(u_{j+1}^n - u_j^n \right), \tag{1.67}$$

$\frac{\nu+|\nu|}{2}$ が、$\nu > 0$ の時は ν と等しく、$\nu < 0$ の時は 0 となることは容易にわかるだろう。$\frac{\nu-|\nu|}{2}$ は、$\nu < 0$ の時は ν と等しく、$\nu > 0$ の時は 0 となる。数値流束は

$$F_{j+1/2} = \frac{c - |c|}{2} u_{j+1} + \frac{c + |c|}{2} u_j, F_{j-1/2} = \frac{c - |c|}{2} u_j + \frac{c + |c|}{2} u_{j-1}, \tag{1.68}$$

となるが、この式は

$$F_{j+1/2} = \frac{F_{j+1} + F_j}{2} - \frac{|c|}{2}(u_{j+1} - u_j), F_{j-1/2} = \frac{F_j + F_{j-1}}{2} - \frac{|c|}{2}(u_j - u_{j-1}), \tag{1.69}$$

のようにも書き直せる。

第2章　高精度風上差分

2.1　流束制限関数

さて、前章で見たように、空間1次精度風上差分は単調な解を与えるが、飛びが時間的に鈍ってくるという欠点を持ち、空間2次精度のスキームは、飛びの鈍りは押えられるが、振動を生じるという欠点を持っている。

そこで、なるべく空間2次精度を保ちながら、振動を生じる（短波長の振動の原因となる）飛びの部分では空間1次精度に自動的に落ちるようなスキームはないかを考える。

Lax-Wendroff スキーム（数値流速は

$$F_{j+1/2} = \frac{c}{2}\left((1-\nu)u_{j+1} + (1+\nu)u_j\right), \tag{2.1}$$

であらわされる）と空間1次精度スキーム（数値流速は

$$F_{j+1/2} = cu_j \tag{2.2}$$

であらわされる）の中間のものを考える。式 (2.1) は

$$F_{j+1/2} = c\left(u_j + \frac{1-\nu}{2}\left(u_{j+1} - u_j\right)\right), \tag{2.3}$$

と書き直せるので、目標とする数値流速の形を

$$F_{j+1/2} = c\left(u_j + \frac{1-\nu}{2}B_{j+1/2}\left(u_{j+1} - u_j\right)\right), \tag{2.4}$$

とし、空間1次精度に落すべきところでは $B_{j+1/2}$ が0になるようなものを考える。そこで $B_{j+1/2}$ のことを流束制限関数と呼ぶ。上の式を時間進化を表す式に代入すると、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}c\left(u_j - u_{j-1}\right) - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}c(1-\nu)\left[B_{j+1/2}(u_{j+1} - u_j) - B_{j-1/2}(u_j - u_{j-1})\right] \tag{2.5}$$

または、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \nu\left(u_j - u_{j-1}\right) - \frac{1}{2}\nu(1-\nu)\left[B_{j+1/2}(u_{j+1} - u_j) - B_{j-1/2}(u_j - u_{j-1})\right] \tag{2.6}$$

となる。これから、$(u_j^{n+1} - u_j^n)/(u_{j-1}^n - u_j^n)$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{u_{j-1}^n - u_j^n} &= \nu - \frac{1}{2}\nu(1-\nu)B_{j-1/2} - \frac{1}{2}\nu(1-\nu)B_{j+1/2}\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{u_{j-1}^n - u_j^n}, \\ &= \nu\left[1 - \frac{1-\nu}{2}B_{j-1/2}\right] + \frac{1}{2}\nu(1-\nu)\frac{B_{j+1/2}}{r_j}\end{aligned} \tag{2.7}$$

ここで

$$r_j \equiv \frac{u_j - u_{j-1}}{u_{j+1} - u_j} \tag{2.8}$$

である。この $(u_j^{n+1} - u_j^n)/(u_{j-1}^n - u_j^n)$ が 0 と 1 の間にあれば単調であるべき部分でその単調性が保証され得る (monotonicity preserving)　(数値的振動をさけるための十分条件)。これは、u_j^{n+1} が u_j^n と u_{j-1}^n の間にあれば、新たなピークを作ることもしないし、振動の振幅を大きくすることもないことによっている。

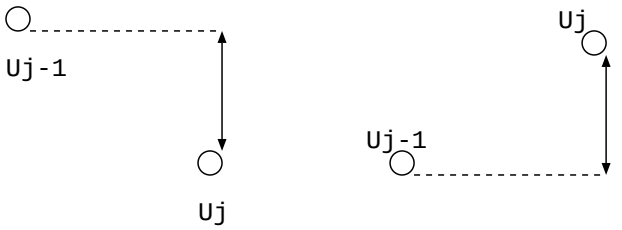

図 2.1: 流束制限の説明。u_j^{n+1} は u_j^n と u_{j-1}^n の間にあれば、新たなピークを作ることもしないし、振動の振幅を大きくすることもない。

$0 \le$ 右辺 ≤ 1 となる条件を考える。$0 \le$ 右辺 の方は

$$-\nu \le -\frac{\nu(1-\nu)}{2} B_{j-1/2} + \frac{\nu(1-\nu)}{2} \frac{B_{j+1/2}}{r_j}, \tag{2.9}$$

であるから、$-\nu(1-\nu)/2 < 0$ で割ると、

$$\frac{2}{1-\nu} \ge B_{j-1/2} - \frac{B_{j+1/2}}{r_j}, \tag{2.10}$$

となる。一方、右辺 ≤ 1 の方は

$$-\frac{\nu(1-\nu)}{2} B_{j-1/2} + \frac{\nu(1-\nu)}{2} \frac{B_{j+1/2}}{r_j} \le 1 - \nu, \tag{2.11}$$

であるから、同じように

$$B_{j-1/2} - \frac{B_{j+1/2}}{r_j} \ge -\frac{2}{\nu}, \tag{2.12}$$

となる。式 (2.10)、(2.12) より、数値的振動を避けるために流束制限関数のもつべき条件は、

$$-\frac{2}{\nu} \le B_{j-1/2} - \frac{B_{j+1/2}}{r_j} \le \frac{2}{1-\nu}, \tag{2.13}$$

$0 < \nu < 1$ なので、すくなくとも

$$-2 \le B_{j-1/2} - \frac{B_{j+1/2}}{r_j} \le 2, \tag{2.14}$$

であれば流束制限関数のもつべき条件を満足できる。ここでさらに流束制限関数 $B_{j+1/2}(r_j)$ に具体的条件をあたえるために、これを満足する十分条件を考える。

$$0 \le B_{j-1/2} \le 2, 0 \le \frac{B_{j+1/2}}{r_j} \le 2, \tag{2.15}$$

となっていれば、式 (2.14) を満足することはすぐにわかる。$r_j < 0$ の場合、すなわち、$u_{j+1} - u_j$ と $u_j - u_{j-1}$ の符合が異なっている場合、これは急激に振動が起こっているような場所に相当し、後ろ側の条件から、$B_{j+1/2} = 0$ となっていなければならない。それにともなって、数値流束は 1 次精度風上差分のものに落ちる。$r > 0$ の場合、図 2.2 の $B_{j+1/2} = 0$ より上、$B_{j+1/2} = 2$ より下で、$B_{j+1/2} = 2r$ より右下がわに B が来れば良いことがわかる。Lax-Wendroff の数値流束に一致するのが、$B = 1$ の場合であったから、なるべく $B_{j+1/2} = 1$ となるように選ぶ。これを満足する流束制限関数のうち代表的な minmod 関数と superbee 関数を図 2.2 に示した。

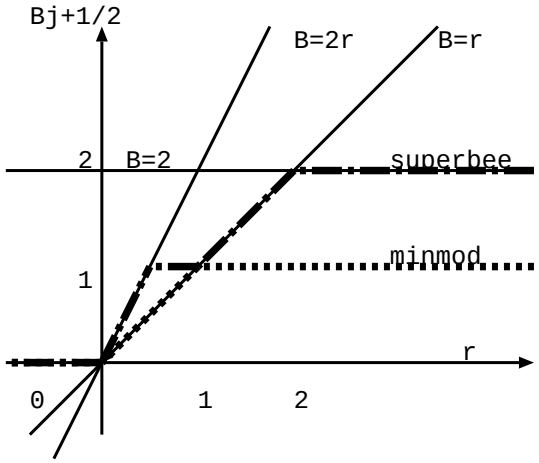

図 2.2: 代表的な流束制限関数。minmod 関数、superbee 関数の例があげてある。

これまでの説明で $\nu > 0$ としてきた (風上を j の小さい方にとってきた)。この時は、$B_{j+1/2}$ は r_j (u_{j-1}、u_j、u_{j+1}) の関数で

$$B_{j+1/2} = B\left(\frac{u_j - u_{j-1}}{u_{j+1} - u_j}\right), \tag{2.16}$$

である。しかし $\nu < 0$ の場合は、$B_{j+1/2}$ は r_{j+1} (u_j、u_{j+1}、u_{j+2}) の関数で

$$B_{j+1/2} = B\left(\frac{u_{j+2} - u_{j+1}}{u_{j+1} - u_j}\right), \tag{2.17}$$

であることに注意しなければならない。つまり、ステンシル (差分に用いる点例えば j の時間推進した値を得るために $j-1$、j、$j+1$ を使うといった差分の代表値同士の関係) が ν の正負によって変化するということに注意しなければならない。

2.2 計算例

前節で見た高精度風上差分についてその計算例を見てみよう。$B_{j+1/2}$ について、minmod 関数 (図 2.2) をとるとプログラムのおおよそは以下のとおりとなる。

```
begin
```

```
  for j:=1 to jm-1 do
    f[j]:=u[j]+0.5*(1-nu)*minmod(u[j]-u[j-1],u[j+1]-u[j])*(u[j+1]-u[j]);
  f[0]:=f[1];
  for j:=1 to jm-1 do
    u[j]:=u[j]-nu*(f[j]-f[j-1]);
end;
```

ここで、数値流束 $F_{j+1/2}$ は配列f[j] に格納されており、ながれは x 軸の正の方向に向いているとして $B_{j+1/2}$ に現れるステンシルを固定している。図 2.2 の minmod 関数はプログラムでは

```
function minmod(d1,d2: real):real;
begin
   if (d1*d2<=0) then
     result:=0.0
   else if (d1/d2<=1) then
     result:=d1/d2
   else
     result:=1.0
end;
```

のように表される。流束制限関数を superbee 関数に変えるには、以下の関数を用いれば良い。

```
function superbee(d1,d2: real):real;
begin
   if (d1*d2<=0) then
     result:=0.0
   else if (d1/d2<=0.5) then
     result:=2*d1/d2
   else if (d1/d2<=1) then
     result:=1.0
   else if (d1/d2<=2) then
     result:=d1/d2
   else
     result:=2.0
end;
```

これらを使って、図 1.2 と同じ計算を行なった例をつぎの図に示す。これをみると、流束制限関数が効いて不要な振動が押えられるとともにかなり小さいクーラン数 $\nu = 0.25$ をとっても、空間 1 次精度スキームのような飛びの鈍りも押えられていることがわかる。superbee 関数の方がシャープな結果を得るが、スキームの安定性では minmod 関数が勝っているといわれている。

2.3　MUSCL 法

高精度化を達成する方法の一つである MUSCL 法がある。後に流体力学の方程式に風上差分を適応したスキームをまなぶがこれを高精度化するためにも用いられる。

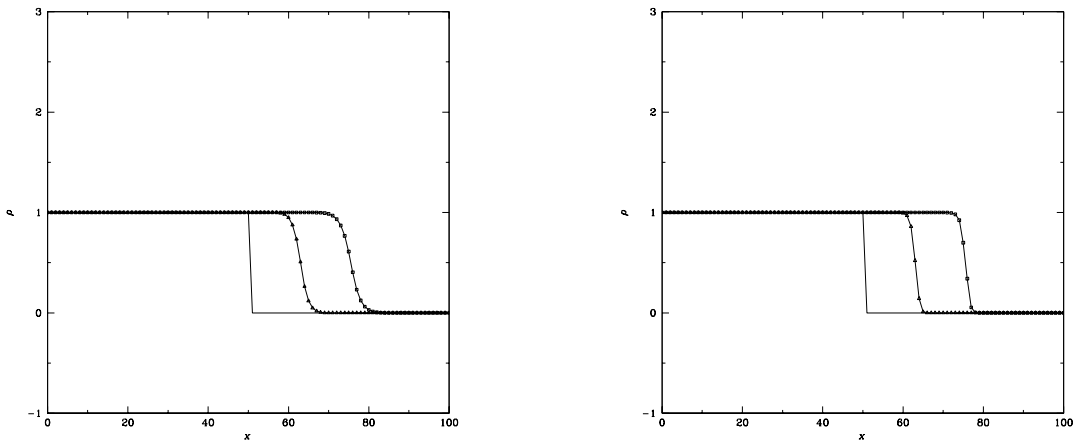

図 2.3: 代表的な流束制限関数を用いて advection 問題を解いた結果。minmod 関数 (左) superbee 関数 (右) を用いて、$\nu = 0.25$ で 50、100 ステップ時間を進めた結果を示している。

2.3.1 MUSCL 内挿

セルの境界での物理量をセルの中央でのそれから内挿する方法を考える。図 2.4 に示したように、$x_{j-1/2} \leq x \leq x_{j+1/2}$ に対して、物理量 u を内挿する。

$$u(x) = u_j + \frac{1}{\Delta x}(x - x_j)\delta_j u + \frac{3\kappa}{2\Delta x^2}\left[(x - x_j)^2 - \frac{\Delta x^2}{12}\right]\delta_j^2 u, \tag{2.18}$$

ただし、

$$\delta_j u = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2}, \tag{2.19}$$

$$\delta_j^2 u = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}, \tag{2.20}$$

である。右辺第 3 項で $\Delta x^2/12$ という項がつくのは、

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (x - x_j)^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} = \frac{\Delta x^2}{12} \tag{2.21}$$

であるから、この区間について、$u(x)$ を積分して得た平均値と、u_j を等しくするためである。このように区分多項式で近似したときの、$j + 1/2$ での値は、左つまり j 側から補間すると、

$$\begin{aligned}(u_L)_{j+1/2} &= u_j + \frac{1}{2}\delta_j u + \frac{\kappa}{4}\delta_j^2 u, \\ &= u_j + \frac{1}{4}(1 - \kappa)(u_j - u_{j-1}) + \frac{1}{4}(1 + \kappa)(u_{j+1} - u_j),\end{aligned} \tag{2.22}$$

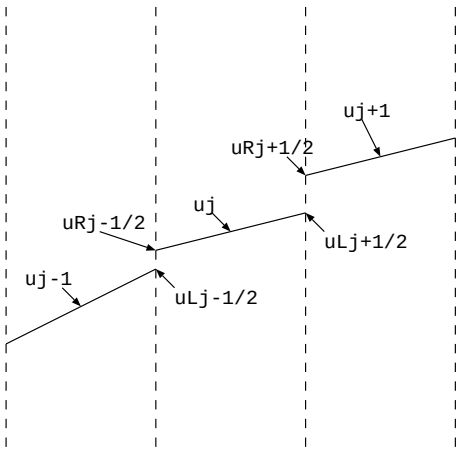

図 2.4: MUSCL 内挿法。

右つまり $j+1$ 側から補間すると、

$$\begin{aligned}(u_R)_{j+1/2} &= u_{j+1} - \frac{1}{2}\delta_{j+1}u + \frac{\kappa}{4}\delta_{j+1}^2 u, \\ &= u_{j+1} - \frac{1}{4}(1+\kappa)(u_{j+1}-u_j) - \frac{1}{4}(1-\kappa)(u_{j+2}-u_{j+1}),\end{aligned} \tag{2.23}$$

この表式は κ の値によって、異なった精度の内挿公式となっている。$\kappa = -1$ とすると、

$$(u_L)_{j+1/2} = u_j + \frac{1}{2}(u_j - u_{j-1}), \tag{2.24}$$

$$(u_L)_{j-1/2} = u_{j-1} + \frac{1}{2}(u_{j-1} - u_{j-2}), \tag{2.25}$$

であるが、これから

$$\begin{aligned}(u_L)_{j+1/2} - (u_L)_{j-1/2} &= u_j - u_{j-1} + \frac{1}{2}(u_j - 2u_{j-1} + u_{j-2}), \\ &\simeq \Delta x \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j + \frac{1}{2}\Delta x \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{j-1} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j \right\} \right], \\ &= \Delta x \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j - \frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j \right],\end{aligned} \tag{2.26}$$

であるから、この表式は空間 2 次精度になっていることがわかる。従って、左から u_L を外挿して得るのに適した風上の 3 点（$j-2$、$j-1$、j）を使ってできる 2 次の完全風上差分 (2nd-order fully upwind) となっていることがわかる。

また、$\kappa = 0$ とすると、

$$\begin{aligned}(u_L)_{j+1/2} - (u_L)_{j-1/2} &= u_j - u_{j-1} + \frac{u_{j+1} - u_j}{4} - \frac{u_{j-1} - u_{j-2}}{4}, \\ &= u_j - u_{j-1} + \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{4} + \frac{u_j - 2u_{j-1} + u_{j-2}}{4},\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$= \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j - \frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j + \frac{\Delta x^2}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{j-1} + \frac{\Delta x^2}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j,$$

$$= \Delta x \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j - \frac{\Delta x^2}{4}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{j-1/2}\right], \tag{2.28}$$

となる。これが空間 2 次精度になっていることは誤差が Δx^2 となっていることからわかり、式 (2.27) が左側から内挿したときに、風上側 3 点 $j-2$、$j-1$、j と風下側 1 点 $j+1$ をつかって表した 2 次精度の風上重点差分 (2nd-order upwind biased) であることがわかる。

$\kappa = 1$ とすると、式 (2.22) は

$$(u_L)_{j+1/2} = \frac{u_j + u_{j+1}}{2}, \tag{2.29}$$

のように境界での値はその中央での値の算術平均に一致する。

2.3.2 高次精度風上差分

この MUSCL 内挿を用いてそのセルの境界での値を求めそれを用いて、境界での数値流束を

$$\tilde{f}_{j+1/2} = \frac{(cu_R)_{j+1/2} + (cu_L)_{j+1/2} - |c|\left((u_R)_{j+1/2} - (u_L)_{j+1/2}\right)}{2}, \tag{2.30}$$

から計算すると高次精度風上差分を構成することができる。ここで、u_R と u_L は

$$(u_L)_{j+1/2} = u_j + \frac{1}{4}\left[(1-\kappa)\Delta_j^- + (1+\kappa)\Delta_j^+\right], \tag{2.31}$$

$$(u_R)_{j+1/2} = u_{j+1} - \frac{1}{4}\left[(1-\kappa)\Delta_{j+1}^+ + (1+\kappa)\Delta_{j+1}^-\right], \tag{2.32}$$

で与えられる。ただし

$$\Delta_j^+ = u_{j+1} - u_j \tag{2.33}$$

$$\Delta_j^- = u_j - u_{j-1} \tag{2.34}$$

である。実際に使う場合には制限関数を導入する。minmod 関数を制限関数に使う場合は、式 (2.31)、(2.32) の Δ^+ および Δ^- を

$$\bar{\Delta}_j^+ = \mathrm{minmod}(\Delta_j^+, b\Delta_j^-), \tag{2.35}$$

$$\bar{\Delta}_j^- = \mathrm{minmod}(\Delta_j^-, b\Delta_j^+), \tag{2.36}$$

で置き換えればよい。ただしここで、$b = \frac{3-\kappa}{1-\kappa}$ である。

2.3.3 計算例

これを計算するためのプログラムは以下のようになる。ただし、ここでも $c > 0$ であるとして、差分のステンシルを固定している。

```
function minmod0(x,y:real):real;
begin
  if (x*y<=0) then
    result:=0
  else if (abs(x)<abs(y)) then
    result:=x
  else
    result:=y
end;

kappa:=0;
B:=(3-kappa)/(1-kappa);
for j:=1 to jm-1 do    // uL only
  f[j]:=u[j]+0.25*((1-kappa)*minmod0(u[j]-u[j-1],B*(u[j+1]-u[j]))
                  +(1+kappa)*minmod0(u[j+1]-u[j],B*(u[j]-u[j-1])));
  f[0]:=f[1];
for j:=1 to jm-1 do
  u[j]:=u[j]-nu*(f[j]-f[j-1]);
```

advection の標準問題をクーラン数 $\nu = 0.5$ で 50 ステップ、100 ステップ解いて得られる構造を図 2.5 に示した。

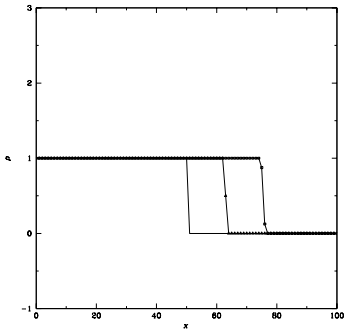

図 2.5: MUSCL 法で advection の標準問題を解いた結果。クーラン数 $\nu = 0.5$ で、50 ステップ後と 100 ステップ後の解を示している。

第3章　流体力学方程式の差分解法

3.1　流体力学方程式

これまでの基礎の上に立って、この章では、流体力学の方程式を差分法によって解くことを学ぶ。

これまでの advection 方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{3.1}$$

の解法から、(1) 単調な解を保つためには風上空間 1 次精度差分をとるべきであり、(2) しかし、それは飛びを持つなど必要な領域に限るべきで、解のシャープさを保つためには空間 2 次精度差分をとるべきである。ということがわかった。それでは流体力学の方程式でこれはどのように実現されるのだろうか。

3.1.1　オイラー方程式

1 次元の流体の基礎方程式は、 3 つの式をベクトルのように並べて書いて、

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \tag{3.2}$$

と書けるただし、Q と E は物理量を並べたベクトルで、

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ (e+p)u \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

である。ここで、$\rho u = m$ と書いて従属変数を

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ e \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

に書き直すと、E の方はこれを使って

$$E = \begin{pmatrix} m \\ (\gamma-1)e + \frac{3-\gamma}{2}\frac{m^2}{\rho} \\ \frac{1-\gamma}{2}\frac{m^3}{\rho^2} + \gamma\frac{em}{\rho} \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

のように書ける。質量密度、運動量密度、エネルギー密度は (大きな体積で積分すれば保存する量なので) 保存量と呼ばれる。

式 (3.2) を $\frac{\partial Q}{\partial t} + A\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ のように書き直すことを考える

$$\frac{\partial E_k}{\partial x} = \sum_l \frac{\partial E_k}{\partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial x} = A_{k,l}\frac{\partial Q_l}{\partial x} \tag{3.6}$$

のように書きなおせて、ここに出てくる

$$A_{k,l} = \frac{\partial E_k}{\partial Q_l} \tag{3.7}$$

を流束ヤコビアンと呼ぶ。具体的に書き下すと、

$$\begin{aligned}
A_{k,l} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial m}{\partial \rho} & \frac{\partial m}{\partial m} & \frac{\partial m}{\partial e} \\ \frac{\partial (\gamma-1)e+(3-\gamma)m^2/2\rho}{\partial \rho} & \frac{\partial (\gamma-1)e+(3-\gamma)m^2/2\rho}{\partial m} & \frac{\partial (\gamma-1)e+(3-\gamma)m^2/2\rho}{\partial e} \\ \frac{\partial (1-\gamma)m^3/2\rho^2}{\partial \rho} & \frac{\partial (1-\gamma)m^3/2\rho^2}{\partial m} & \frac{\partial (1-\gamma)m^3/2\rho^2}{\partial e} \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3-\gamma}{2}\frac{m^2}{\rho^2} & (3-\gamma)\frac{m}{\rho} & \gamma-1 \\ (\gamma-1)\frac{m^3}{\rho^3} - \gamma\frac{em}{\rho^2} & \frac{3(1-\gamma)}{2}\frac{m^2}{\rho^2} + \gamma\frac{e}{\rho} & \gamma\frac{m}{\rho} \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3-\gamma}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ (\frac{\gamma}{2}-1)u^3 - \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}u & \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \frac{3-2\gamma}{2}u^2 & \gamma u \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

保存量 Q (質量密度、運動量密度、エネルギー密度) を使って書いた式の代わりに、基本量 $q = (\rho, u, p)$ (密度、速度、圧力) を用いて非保存形の式を書くこともできて、

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix} = 0, \tag{3.9}$$

のように書くこともできる。シンボリックな書き方をすれば

$$\frac{\partial q}{\partial t} + M\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \tag{3.10}$$

となる。M は基本量 q に関する流束ヤコビアンである。

3.1.2　特性速度

式 (3.3) や (3.9) を第 1 章で見た advection の形に書き直すことを考える。すなわち、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_1'}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial Q_1'}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial Q_2'}{\partial t} + \lambda_2\frac{\partial Q_2'}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial Q_3'}{\partial t} + \lambda_3\frac{\partial Q_3'}{\partial x} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

の形に変形するのである。これができれば、それぞれの式に第 2 章でみた高精度風上差分の方法を適応することによって流体力学の方程式も解くことができる。

式 (3.9) を上の形に書き直すのは行列 M を対角化するということに相当する。行列 M を対角化するとは、

$$M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \tag{3.12}$$

となる固有ベクトル $\mathbf{x}$ と固有値 λ をもとめることに帰着する。これは、

$$\det(M - \lambda I) = 0 \tag{3.13}$$

$$\det\begin{pmatrix} u-\lambda & \rho & 0 \\ 0 & u-\lambda & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u-\lambda \end{pmatrix} = 0 \tag{3.14}$$

の特性方程式の解を求めると、

$$\begin{aligned} (u-\lambda)^3 - (u-\lambda)(\gamma p/\rho) &= 0, \\ [\lambda-(u-c)][\lambda-u][\lambda-(u+c)] &= 0, \end{aligned} \tag{3.15}$$

であるから、固有値は音速 $c = (\gamma p/\rho)^{1/2}$ を使って、

$$\lambda_1 = u - c, \tag{3.16}$$

$$\lambda_2 = u, \tag{3.17}$$

$$\lambda_3 = u + c, \tag{3.18}$$

$$\tag{3.19}$$

であることがわかる。

```
d={{u,rho,0},{0,u,1/rho},{0,g p,u}}

Simplify[Eigenvalues[d]]/.Sqrt[g]Sqrt[p]/Sqrt[rho]-> cs

{u, -cs + u, cs + u}
```

この速度は、それぞれ、物体の流れる速度 (λ_2)、物体に対して左方向に伝わる音波の速度 (λ_1)、おなじく右方向に伝わる音波の速度 (λ_3) である。さらに、固有ベクトルは

$$M\mathbf{x_1} = \lambda_1\mathbf{x_1}, \tag{3.20}$$

を解いて、

$$\begin{cases} cx_1 + \rho x_2 = 0, \\ cx_2 + \frac{1}{\rho}x_3 = 0, \\ \gamma p x_2 + cx_3 = 0, \end{cases} \tag{3.21}$$

から

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} \rho \\ -c \\ \rho c^2 \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

となる。同じようにして、

$$\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x_3} = \begin{pmatrix} \rho \\ c \\ \rho c^2 \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

となることがわかる。この固有ベクトルを横に並べた行列 (右固有行列)

$$R = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}) = \begin{pmatrix} \rho & \rho & \rho \\ -c & 0 & c \\ \rho c^2 & 0 & \rho c^2 \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

および、その逆行列 R^{-1} を考え、M に左から R^{-1} を、右から R を掛けると、

$$R^{-1} M \ R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \equiv \Lambda \tag{3.25}$$

となる。

R の逆行列は

```
R={{rho,rho,rho},{-c,0,c},{rho c^2,0,rho c^2}}
                                    2           2
{{rho, rho, rho}, {-c, 0, c}, {c  rho, 0, c  rho}}
Inverse[R]//MatrixForm//TeXForm
```

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2\,c} & \frac{1}{2\,c^2\,\rho} \\ \frac{1}{\rho} & 0 & -\frac{1}{c^2\,\rho} \\ 0 & \frac{1}{2\,c} & \frac{1}{2\,c^2\,\rho} \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

のようにして求められる。

式 (3.10) に左から R^{-1} を掛けると、

$$R^{-1}\frac{\partial q}{\partial t} + R^{-1} M R R^{-1}\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \tag{3.27}$$

となるが、R^{-1} が空間、時間の微小部分ついては一定と考えられるならば、

$$\frac{\partial R^{-1} q}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial R^{-1} q}{\partial x} = 0 \tag{3.28}$$

であり、3 つの独立したスカラー方程式に分離できたことになる。もうすこし正確にいうと、

$$R^{-1}\frac{\partial q}{\partial t} + \Lambda R^{-1}\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \tag{3.29}$$

とは、$\Delta x/\Delta t = \Lambda_i$ に沿って、$R_i^{-1}\Delta q$ (R_i^{-1} は R^{-1} の第 i 行のみでできた行ベクトル) が一定であることをいっている。たとえば、$R_1^{-1} = (0, -\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c^2\rho}) = \frac{1}{2\rho c^2}(0, -\rho c, 1)$ で $R_1^{-1}\Delta q = \frac{1}{2\rho c^2}(0\cdot\Delta\rho, \rho c\Delta u, 1\cdot\Delta p)$ $= \frac{1}{\rho c^2}(\Delta p - \rho c\Delta u)$ が $dx/dt = u - c$ に沿って 0 になることを意味している。

この独立したスカラー方程式それぞれは $R^{-1}q$ の 3 つの成分それぞれに対する advection の方程式に合致している。ただし、その速度が $\lambda_1 = u - c$、$\lambda_2 = u$、$\lambda_3 = u + c$ と異なっていることが違ってい

る。それぞれの変数に対して風上差分を考えることは第 2 章と同じようにできる。これが流体力学に関する高解像度風上差分の基本である。

なお流束ヤコビアン A から保存量に対する固有行列を求めておくと

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u-c & u & u+c \\ H-uc & \frac{1}{2}u^2 & H+uc \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(b_1 + \frac{u}{c}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} + b_2 u\right) & \frac{1}{2}b_2 \\ 1-b_1 & b_2 u & -b_2 \\ \frac{1}{2}\left(b_1 - \frac{u}{c}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} - b_2\right) & \frac{1}{2}b_2 \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

である。ただしここで

$$b_1 = \frac{\gamma-1}{2}\frac{u^2}{c^2} \tag{3.32}$$

$$b_2 = \frac{\gamma-1}{c^2} \tag{3.33}$$

を表す。

3.2 衝撃波管問題

圧力容器に仕切りを設けその片方に高圧の気体を反対側に低圧の気体を封入し、その仕切りを急に取り除くと、管の中に衝撃波が発生する (場合がある)。これを扱う問題を衝撃波管問題といい、解析的に解くことができるので遷音速ながれの計算法のチェックに用いられる。

ここでは $\gamma = 5/3$ の気体を、

$$p(x,0) = \begin{cases} 1 (j \le 50) \\ 0.1 (j > 50) \end{cases} \tag{3.34}$$

$$\rho(x,0) = \begin{cases} 1 (j \le 50) \\ 0.125 (j > 50) \end{cases} \tag{3.35}$$

で、静止状態に置き、中間のしきりをはずしたあとに生ずる流れを計算することにする。図 3.1 の実線は、解析的に求めた密度と圧力の分布を示している。もっとも右側に見える飛びは、右向きに進んでゆく衝撃波面、圧力は連続で、密度にのみ飛びを持っているのが接触不連続面、左側には希薄波が進行している。

3.3 Lax 法、Lax-Wendroff 法

3.3.1 Lax 法

図 3.1 に Lax 法で計算した $\Delta t = 0.25$ で $N_{\rm step} = 80$ ステップ計算したのち $t = 20$ の構造を示した。Lax 法は

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \tag{3.36}$$

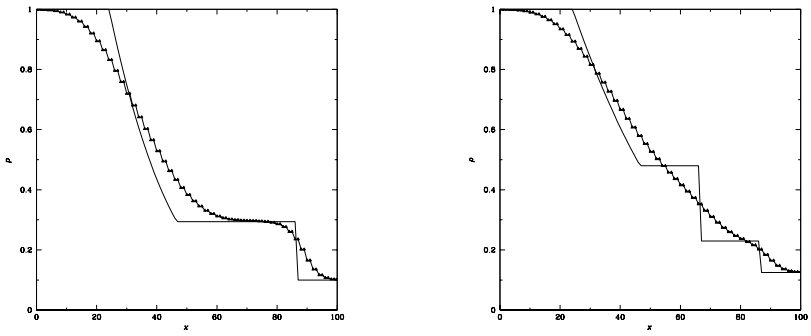

図 3.1: Lax 法による計算例。左 :圧力、右 :密度分布

を

$$Q_j^{n+1} = \frac{Q_{j-1}^n + Q_{j+1}^n}{2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(E_{j+1}^n - E_{j-1}^n) = 0 \tag{3.37}$$

のように差分化する。これはプログラムでは

```
for j:=1 to jm-1 do
begin
  rhon[j]:=(rho[j-1]+rho[j+1])/2-nu/2*(m[j+1]-m[j-1]);
  mn[j]:=(m[j-1]+m[j+1])/2-nu/2*(gam1*(e[j+1]-e[j-1])
                                +gam3/2*(Sqr(m[j+1])/rho[j+1]-Sqr(m[j-1])/rho[j-1]));
  en[j]:= (e[j-1]+e[j+1])/2-nu/2*(gamma*(e[j+1]*m[j+1]/rho[j+1]
                                        -e[j-1]*m[j-1]/rho[j-1])
                                 -gam1/2*(sqr(m[j+1]/rho[j+1])*m[j+1]
                                         -sqr(m[j-1]/rho[j-1])*m[j-1]))
end;
```

のように書ける。rhon[j] は ρ_j^{n+1} のように n のついた量は新しい $n+1$ での保存量を表す。なお、以下の流体力学のプログラム例では、nu はクーラン数ではなく、$\Delta t/\Delta x$ の値を示していることに注意して欲しい。

衝撃波面、接触不連続面ともに飛びのシャープさが全く失われていることがわかる。また、希薄波の部分でも密度、圧力分布とも解析解とかなり異なったものとなっている。

3.3.2　Lax-Wendroff 法

Lax-Wendroff 法は時間 2 次精度を達成するように FTCS スキームに拡散に相当する項を付け加えて得られた。そこで、ここでも同じようにして流体力学方程式に対する Lax-Wendroff 法を導くことにする。

$$Q_{tt} = -(E_x)_t$$

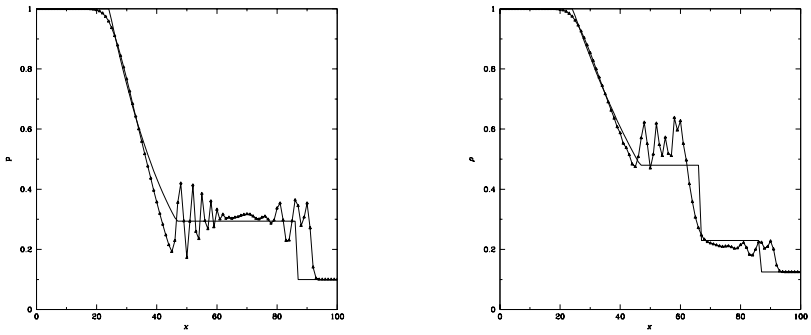

図 3.2: オリジナルの Lax-Wendroff 法による計算例。左 :圧力、右 :密度分布

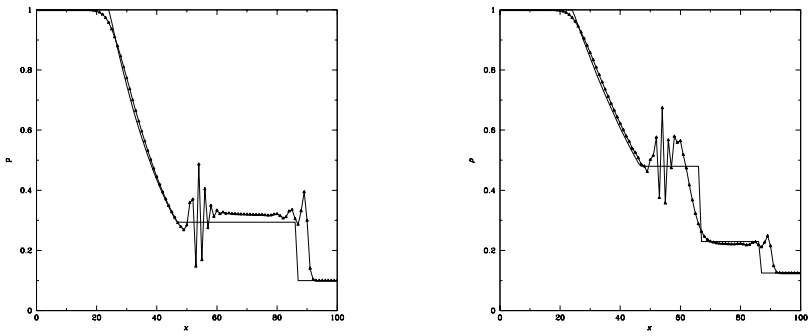

図 3.3: 2 段階 Lax-Wendroff 法による計算例。左 :圧力、右 :密度分布

$$= \quad -(E_t)_x = -(AQ_t)_x = (AE_x)_x, \tag{3.38}$$

これを用いて、時間微分項を空間微分項に書き換えると

$$\begin{aligned} Q_j^{n+1} &= Q_j^n + \Delta t Q_t + \frac{\Delta t^2}{2} Q_{tt}, \\ &= Q_j^n - \Delta t E_x + \frac{\Delta t^2}{2}(AE_x)_x, \end{aligned} \tag{3.39}$$

であり、

$$\begin{aligned} Q_j^{n+1} &= Q_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(E_{j+1} - E_{j-1}) \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}\left[A_{j+1/2}(E_{j+1} - E_j) - A_{j-1/2}(E_j - E_{j-1})\right] \end{aligned} \tag{3.40}$$

ここで、$A_{j+1/2}$ は $(A(Q_j) + A(Q_{j+1}))/2$ や $A((Q_j + Q_{j+1})/2)$ をとることになる。A_{ij} は式 (3.8) で与えられているので、前者の $A_{j+1/2}$ の評価法を選ぶとプログラムは以下のようになる。

```
for j:=1 to jm-1 do
begin
  rhon[j]:=rho[j]-nu/2*(m[j+1]-m[j-1])
                +nu*nu/2*(gam1*e[j+1]+gam3/2*m[j+1]*m[j+1]/rho[j+1]
                          -2*(gam1*e[j]+gam3/2*m[j]*m[j]/rho[j])
                          +gam1*e[j-1]+gam3/2*m[j-1]*m[j-1]/rho[j-1]);
  ....m と e に対する式は略
end;
```

3.3.3　2 段階 Lax-Wendroff 法

先のプログラム例で計算時間を要する部分は、省略されている AE の評価を行なっている部分である。この評価を行なわない方法が Richtmeyer によって考案された。

$$Q_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{Q_j^n + Q_{j+1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(E_{j+1}^n - E_j^n) \tag{3.41}$$

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(E_{j+1/2}^{n+1/2} - E_{j-1/2}^{n+1/2}) \tag{3.42}$$

これは線形の問題に関しては先のオリジナルの Lax-Wendroff 法と同じ解を与える。先の線形の問題では $E_j = cQ_j$ であることに注意すると、第 1 段階は

$$Q_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{Q_j^n + Q_{j+1}^n}{2} - \frac{\nu}{2}(Q_{j+1}^n - Q_j^n) \tag{3.43}$$

で、これを第 2 段階の式に代入すると、

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \nu(Q_{j+1}^n - Q_{j-1}^n) + \frac{\nu^2}{2}(Q_{j+1}^n - 2Q_j^n + Q_{j-1}), \tag{3.44}$$

となり、オリジナルの Lax-Wendroff 法に一致する。ただし、非線形の問題では Leading order の誤差の分だけ異なる。プログラムは簡単になって、

```
for j:=0 to jm-1 do
begin
  rhon[j]:=(rho[j]+rho[j+1])/2-nu/2*(m[j+1]-m[j]);
  mn[j]:=(m[j]+m[j+1])/2-nu/2*(gam1*(e[j+1]-e[j])
                              +gam3/2*(Sqr(m[j+1])/rho[j+1]-Sqr(m[j])/rho[j]));
  en[j]:= (e[j]+e[j+1])/2-nu/2*(gamma*(e[j+1]*m[j+1]/rho[j+1]
                                       -e[j]*m[j]/rho[j])
                               -gam1/2*(sqr(m[j+1]/rho[j+1])*m[j+1]
                                       -sqr(m[j]/rho[j])*m[j]))
end;
rhon[jm]:=rhon[jm-1];mn[jm]:=mn[jm-1];en[jm]:=en[jm-1];

for j:=1 to jm do
begin
  rho[j]:=rho[j]-nu*(mn[j]-mn[j-1]);
  m[j]:=m[j]-nu*(gam1*(en[j]-en[j-1])
                 +gam3/2*(Sqr(mn[j])/rhon[j]-Sqr(mn[j-1])/rhon[j-1]));
  e[j]:=e[j]-nu*(gamma*(en[j]*mn[j]/rhon[j]-en[j-1]*mn[j-1]/rhon[j-1])
                               -gam1/2*(sqr(mn[j]/rhon[j])*mn[j]
                                       -sqr(mn[j]/rhon[j-1])*mn[j-1]))
end;
rho[0]:=rho[1];m[0]:=m[1];e[0]:=e[1];
```

のようになる。

図 3.2 と 3.3 は同じ問題をオリジナルの Lax-Wendroff 法を 2 段階の Lax-Wendroff 法で解いた結果である。衝撃波面の後ろと、接触不連続面の位置に数値的な振動が見られるが、衝撃波面や接触不連続面の飛びが時間的に鈍ってゆくことは押えられている。

3.3.4 人工粘性項

Lax-Wendroff 法では、数値的な振動を押える効果を持つ拡散項は、打ち切り誤差のリーディングオーダである $(\partial^3 u/\partial x^3)\Delta x^3$ ではなく (この項は分散性は持つが拡散性は持たない)、次のオーダの量である $(\partial^4 u/\partial x^4)\Delta x^4$ の項である。このため、差分に伴ってスキームに含まれる打ち切り誤差としての拡散項だけでは安定化に不十分な場合は、陽にこの項を方程式に付け加えて安定化をはかる必要がある場合がある。これを陽的人工粘性項という。3 次オーダーの 4 階微分項 $(\partial^4 u/\partial x^4)\Delta x^3$ を付け加える場合、2 段階の Lax-Wendroff 法では式 (3.41) は

$$Q_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{Q_j^n + Q_{j+1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(E_{j+1}^n - E_j^n - q_{j+1}^n + q_j^n) \tag{3.45}$$

式 (3.42) は

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(E_{j+1/2}^{n+1/2} - E_{j-1/2}^{n+1/2} - q_{j+1/2}^{n+1/2} + q_{j-1/2}^{n+1/2}) \tag{3.46}$$

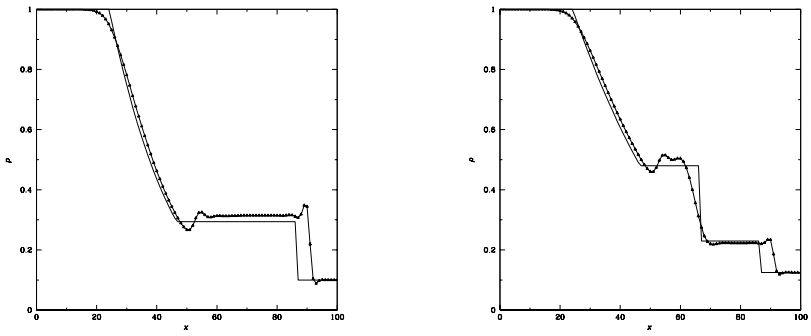

図 3.4: 人工粘性項を付加した 2 段階 Lax-Wendroff 法による計算例。左 :圧力、右 :密度分布

となる。ただし、

$$q_j = \frac{k}{8}(Q^n_{j+1} - 2Q^n_j + Q^n_{j-1}) \tag{3.47}$$

で、k は 0–1 の数係数である。この結果を図 3.4 に掲げる。図 3.3 と比べると、衝撃波面後方および接触不連続面近傍での振動が押えられていることがわかる。

3.4　流体力学方程式の風上差分法 （1 ）—Flux Difference Splitting 法

$$Q_t + AQ_x = 0, \tag{3.48}$$

に左固有行列 (右固有行列の逆行列) R^{-1} を左から掛けると、

$$R^{-1}Q_t + R^{-1}ARR^{-1}Q_x = 0, \tag{3.49}$$

よって、R が微小な Δt、Δx に関して一定とみなせるなら、

$$\frac{\partial R^{-1}Q}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial R^{-1}Q}{\partial x} = 0 \tag{3.50}$$

のように書ける。ここで、風上差分の数値流束を

$$(\Lambda R^{-1}Q)_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(\Lambda(R^{-1}Q)_{j+1} + \Lambda(R^{-1}Q)_j - |\Lambda|R^{-1}(Q_{j+1} - Q_j)\right) \tag{3.51}$$

左から R を掛けると

$$R\Lambda R^{-1}Q_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(R\Lambda R^{-1}Q_{j+1} + R\Lambda R^{-1}Q_j - R|\Lambda|R^{-1}(Q_{j+1} - Q_j)\right) \tag{3.52}$$

となるが、この式は

$$E_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(E_{j+1} + E_j - R|\Lambda|R^{-1}(Q_{j+1} - Q_j)\right) \tag{3.53}$$

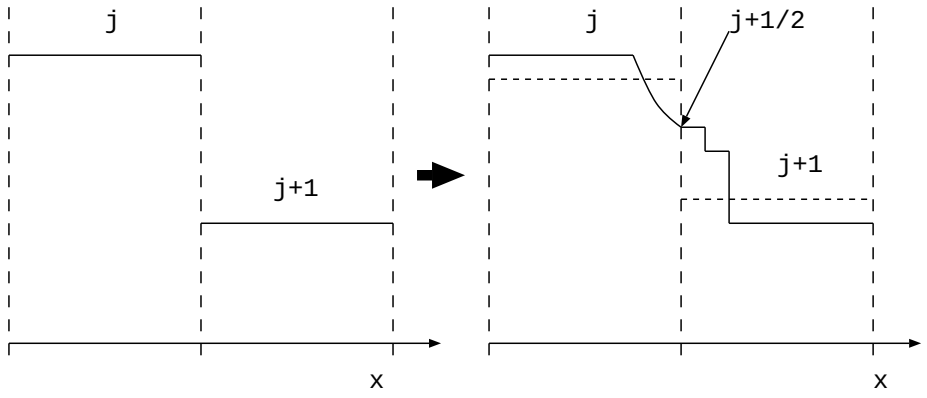

図 3.5: 近似リーマン解法の概念図。物理量がグリッドの内部で空間的に一定だったとして (左の図)、その Δt 後の物理量の分布 (リーマン問題) を解く。たとえばそれが右の図のようなものであったとして、ここで得られた $j+1/2$ の物理量を用いて流束を計算する方法を (1 次精度の) Gonunov 法という。このようにして得た $j+1/2$ の物理量を風上差分の数値流束の評価に用いる方法を近似リーマン解法を用いた差分法と呼ぶ。

と書き直すことができて、FDS (Flux Difference Spilitting) スキームの数値流速を与える。

ここで $R|\Lambda|R^{-1}$ の項は $j+1/2$ についての量なのであるが、FDS スキームでは、Roe の近似リーマン解法を用いてこの中間値を評価する。

1 次元の単純な衝撃波管問題 (リーマン問題) の解は解析的に得られる。j および $j+1$ のグリッドの時間 t での物理量がわかっていれば、その後の解を正確にとくことができてこれを $j+1/2$ の物理量の評価に用いることができる。これを正確に解くのではなく、近似的に解いて (近似リーマン解法) それを $j+1/2$ の物理量の評価に用いる。Roe の近似リーマン解法と呼ばれるものは、境界の左側の物理量 Q_L と右側の物理量 Q_R を用いて、平均の値 Q_{ave} を

$$\rho_{ave} = \sqrt{\rho_L \rho_R}, \tag{3.54}$$

$$u_{ave} = \frac{\sqrt{\rho_L}u_L + \sqrt{\rho_R}u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \tag{3.55}$$

$$H_{ave} = \frac{\sqrt{\rho_L}H_L + \sqrt{\rho_R}H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \tag{3.56}$$

$$c^2_{ave} = (\gamma-1)(H_{ave} - \frac{1}{2}u^2_{ave}), \tag{3.57}$$

(H は単位質量あたりの全エンタルピーで $H = (e+p)/\rho = u^2/2 + \gamma/(\gamma-1)\cdot p/\rho$ である) のように平均量 (Roe 平均) を得るものである。

この評価式は、

(1) 流束ヤコビアンに関する $\partial E/\partial x = A\partial Q/\partial x$ が差分式についてもなり立つこと :
$E(Q_R) - E(Q_L) = A(Q_R, Q_L)(A_R - Q_L) = A_{ave}(Q_R - Q_L)$。

(2) $A(Q_R, Q_L)$ は A と同じように、実固有値と線形独立な固有ベクトルを持つこと。

(3)$A(Q,Q)=A(Q)$ という対称性を持つこと。
これら (Property U) を満たすものとして Roe により提案されたものである。
　プログラムは、第 1 に

```
for j:=0 to jm-1 do  // Roe Average
begin
  rhop[j]:=Sqrt(rho[j]*rho[j+1]);
  up[j]:=(Sqrt(rho[j])*u[j]+Sqrt(rho[j+1])*u[j+1])/(Sqrt(rho[j])+Sqrt(rho[j+1]));
  Hp[j]:=(Sqrt(rho[j])*H[j]+Sqrt(rho[j+1])*H[j+1])/(Sqrt(rho[j])+Sqrt(rho[j+1]));
  cp[j]:=Sqrt(gam1*(Hp[j]-up[j]*up[j]/2))
end;
```

でrhop[j] などに Roe 平均 $j+1/2$ の評価値を求める。次に、右固有行列 R をR[l,m] に、その逆行列 R^{-1} をL[l,m] に求める。w[n1,n2] は $R|\Lambda|R^{-1}$ が格納される。最後に数値流束をE[j] に求めている。

```
for j:=0 to jm-1 do
begin
  Lambda[1]:=Abs(up[j]-cp[j]);
  Lambda[2]:=Abs(up[j]);
  Lambda[3]:=Abs(up[j]+cp[j]);

  R[1,1]:= 1;
  R[1,2]:= 1;
  R[1,3]:= 1;
  R[2,1]:= up[j]-cp[j];
  R[2,2]:= up[j];
  R[2,3]:= up[j]+cp[j];
  R[3,1]:= Hp[j]-up[j]*cp[j];
  R[3,2]:= Sqr(up[j])/2;
  R[3,3]:= Hp[j]+up[j]*cp[j];

  b1:=gam1/2*Sqr(up[j]/cp[j]);
  b2:=gam1/Sqr(cp[j]);

  L[1,1]:= 0.5*(b1+up[j]/cp[j]);
  L[1,2]:= -0.5*(1/cp[j]+b2*up[j]);
  L[1,3]:= 0.5*b2;
  L[2,1]:= 1-b1;
  L[2,2]:= b2*up[j];
  L[2,3]:= -b2;
  L[3,1]:= 0.5*(b1-up[j]/cp[j]);
  L[3,2]:= 0.5*(1/cp[j]-b2*up[j]);
  L[3,3]:= 0.5*b2;
```

```
    for n1:=1 to 3 do
    begin
      for n2:=1 to 3 do
      begin
        w[n1,n2]:=0.0;
        for k:=1 to 3 do
        begin
          w[n1,n2]:=w[n1,n2]+R[n1,k]*Lambda[k]*L[k,n2];
        end;
      end;
    end;
    E1[j]:=0.5*(m[j+1]+m[j]
                           -w[1,1]*(rho[j+1]-rho[j])
                           -w[1,2]*(m[j+1]-m[j])
                           -w[1,3]*(e[j+1]-e[j]));
    E2[j]:=0.5*(gam1*(e[j+1]+e[j])+gam3/2*(Sqr(m[j+1])/rho[j+1]+Sqr(m[j])/rho[j])
                           -w[2,1]*(rho[j+1]-rho[j])
                           -w[2,2]*(m[j+1]-m[j])
                           -w[2,3]*(e[j+1]-e[j]));
    E3[j]:=0.5*(gamma*(e[j+1]*m[j+1]/rho[j+1]+e[j]*m[j]/rho[j])
          -gam1/2*(Sqr(m[j+1]/rho[j+1])*m[j+1]+Sqr(m[j]/rho[j])*m[j])
                           -w[3,1]*(rho[j+1]-rho[j])
                           -w[3,2]*(m[j+1]-m[j])
                           -w[3,3]*(e[j+1]-e[j]));
  end;
```

この数値流束を用いて時間進化を計算すれば良い。これを使って得られた解を図 3.6 に掲げた。

```
  for j:=1 to jm-1 do
  begin
    rho[j]:=rho[j]-nu*(E1[j]-E1[j-1]);
    m[j]:=m[j]-nu*(E2[j]-E2[j-1]);
    e[j]:=e[j]-nu*(E3[j]-E3[j-1]);
  end;
```

3.5 流体力学方程式の風上差分法 (2) —Flux Vector Splitting 法

固有値

$$\Lambda^{\pm} = \frac{\Lambda \pm |\Lambda|}{2} \tag{3.58}$$

を考える。Λ^+ は Λ のうち正の固有値のみを持つ行列、Λ^- は負の固有値のみを持つ行列である。この速度でやりとりされる流束の方も、Λ^+ によって移動する E^+ と Λ^- によって移動する E^- とに分離す

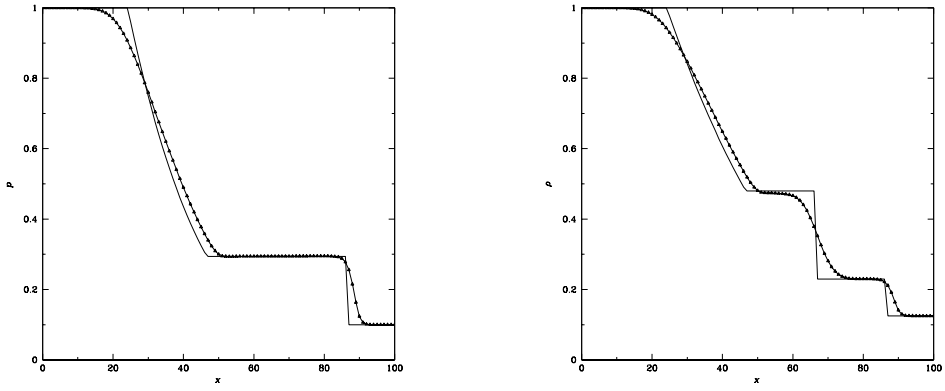

図 3.6: Roe の Flux Difference Splitting 法による衝撃波管問題の解。初期条件は同じ。

ることを考える。そこで、E^+ については後退差分を、E^- については前進差分をとれば自然と風上差分が実現する。この方法を、Flux Vector Splitting(FVS:流速分離) 法という。

空間微分の項は

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_j = \frac{\tilde{E}_{j+1/2} - \tilde{E}_{j-1/2}}{\Delta x} = \frac{(E^+_j + E^-_{j+1}) - (E^+_{j-1} + E^-_j)}{\Delta x} \tag{3.59}$$

のように書ける。ここで、流束は

$$E^+ = R\Lambda^+ R^{-1} Q, \tag{3.60}$$

$$E^- = R\Lambda^- R^{-1} Q, \tag{3.61}$$

のように計算される。

プログラムを見てみよう。右固有行列 R をR[1,m] に、その逆行列 R^{-1} をL[1,m] に求めるところは FDS と同じである。w[n1,n2] は $R\Lambda^+ R^{-1}$ が格納される。最後にこれに伴う数値流束 $R\Lambda^+ R^{-1}Q$ を Ep[j] に求めている。

```
for n1:=1 to 3 do
begin
  for n2:=1 to 3 do
  begin
    w[n1,n2]:=0.0;
    for k:=1 to 3 do
    begin
      w[n1,n2]:=w[n1,n2]
```

```
            +R[n1,k]*max(0.0,Lambda[k])*L[k,n2];
        end;
      end;
    end;
    E1p[j]:=w[1,1]*rho[j]+w[1,2]*m[j]+w[1,3]*e[j];
    E2p[j]:=w[2,1]*rho[j]+w[2,2]*m[j]+w[2,3]*e[j];
    E3p[j]:=w[3,1]*rho[j]+w[3,2]*m[j]+w[3,3]*e[j];
```

つぎに、w[n1,n2] は $R\Lambda^- R^{-1}$ が格納される。最後にこれに伴う数値流束 $R\Lambda^- R^{-1}Q$ をEm[j] に求めている。

```
    for n1:=1 to 3 do
    begin
      for n2:=1 to 3 do
      begin
        w[n1,n2]:=0.0;
        for k:=1 to 3 do
        begin
          w[n1,n2]:=w[n1,n2]
            +R[n1,k]*min(0.0,Lambda[k])*L[k,n2];
        end;
      end;
    end;
    E1m[j]:=w[1,1]*rho[j]+w[1,2]*m[j]+w[1,3]*e[j];
    E2m[j]:=w[2,1]*rho[j]+w[2,2]*m[j]+w[2,3]*e[j];
    E3m[j]:=w[3,1]*rho[j]+w[3,2]*m[j]+w[3,3]*e[j];
  end;
```

ここで得られた数値流束は E^+(Ep[j]) については後退差分、E^-(Em[j]) については前進差分をとって、時間進化を計算することによって、Δt だけ進んだ状態を計算することができる。

```
  for j:=1 to jm-1 do
  begin
    rho[j]:=rho[j]-nu*(E1p[j]+E1m[j+1]-E1p[j-1]-E1m[j]);
    m[j]  :=m[j]  -nu*(E2p[j]+E2m[j+1]-E2p[j-1]-E2m[j]);
    e[j]  :=e[j]  -nu*(E3p[j]+E3m[j+1]-E3p[j-1]-E3m[j]);
  end;
```

この数値流束を用いて時間進化を計算すれば良い。これを使って得られた解を図 3.7 に掲げた。

3.6 流体力学方程式の高解像度風上差分法

前 3.4 節および 3.5 節で見た FDS 法および FVS 法は、いずれも空間 1 次精度である。これを 2 次精度にするには 2.3 節で取り上げた MUSCL 法を用いれば良い。

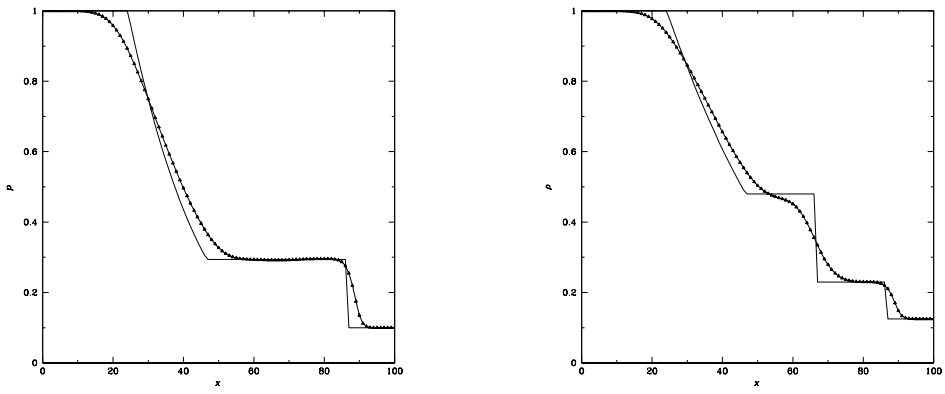

図 3.7: Steger Warming の Flux Vector Splitting 法による衝撃波管問題の解。初期条件は同じ。

3.6.1 FDS 法

FDS 法に MUSCL 法を適用するには、次のようにすればよい。

(1)$j+1/2$ の物理量を評価する Roe 平均にとられる Q_R と Q_L を MUSCL で内挿されたグリッド境界の値をとる (式 (2.31)、(2.32))。

$$(Q_L)_{j+1/2} = Q_j + \frac{1}{4}\left[(1-\kappa)\Delta_j^- + (1+\kappa)\Delta_j^+\right], \tag{3.62}$$

$$(Q_R)_{j+1/2} = Q_{j+1} - \frac{1}{4}\left[(1-\kappa)\Delta_{j+1}^+ + (1+\kappa)\Delta_{j+1}^-\right], \tag{3.63}$$

ここで、$\Delta^+ = Q_{j+1} - Q_j$ であり、$\Delta^- = Q_j - Q_{j-1}$ である。

このとき、制限関数を導入し解の単調性を維持するのは 2.3 節と同様である。
ただし、MUSCL 内挿をどの物理量に対して行なうかは任意性がある。経験的には、基本量 (密度、速度、圧力) を内挿して、それから他の量を求める方がうまく行くといわれている。

(2) 次に数値流束を

$$\tilde{E}_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(E_{j+1} + E_j - R|\Lambda|R^{-1}(Q_{j+1} - Q_j)\right) \tag{3.64}$$

から

$$\tilde{E}_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(E(Q_R) + E(Q_L) - R|\Lambda|R^{-1}(Q_R - Q_L)\right) \tag{3.65}$$

に高精度化する。この部分は次のようにプログラムに書けて、

```
E1[j]:=0.5*(mR[j]+mL[j]
                        -w[1,1]*(rhoR[j]-rhoL[j])
                        -w[1,2]*(mR[j]-mL[j])
                        -w[1,3]*(eR[j]-eL[j]));
E2[j]:=0.5*(gam1*(eR[j]+eL[j])+gam3/2*(Sqr(mR[j])/rhoR[j]+Sqr(mL[j])/rhoL[j])
```

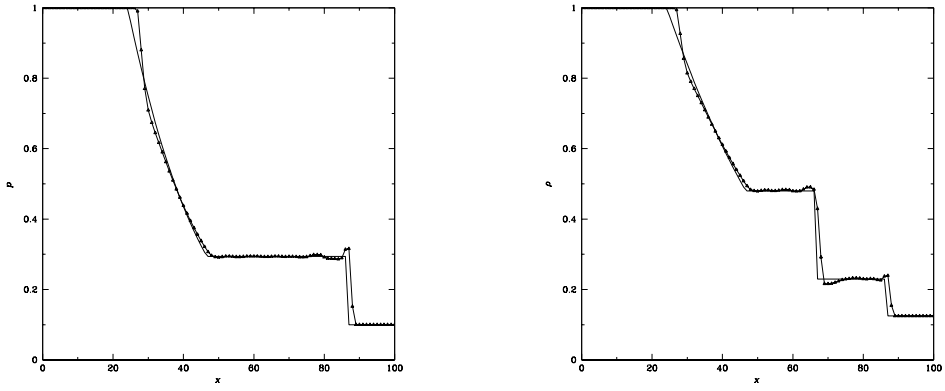

図 3.8: MUSCL で 2 次精度化した Flux Difference Splitting 法による衝撃波管問題の解。初期条件は同じ。

```
                        -w[2,1]*(rhoR[j]-rhoL[j])
                        -w[2,2]*(mR[j]-mL[j])
                        -w[2,3]*(eR[j]-eL[j]));
E3[j]:=0.5*(gamma*(eR[j]*mR[j]/rhoR[j]+eL[j]*mL[j]/rhoL[j])
      -gam1/2*(Sqr(mR[j]/rhoR[j])*mR[j]+Sqr(mL[j]/rhoL[j])*mL[j])
                        -w[3,1]*(rhoR[j]-rhoL[j])
                        -w[3,2]*(mR[j]-mL[j])
                        -w[3,3]*(eR[j]-eL[j]));
```

となる。図 3.8 にこの方法で求めたテスト問題の解を掲げる。衝撃波面の後ろ側の振動もほとんど押えられ、接触不連続面や衝撃波面が時間的に鈍ってゆくことも空間 1 次精度の図 3.6 に比べて改善されていることがわかる。

3.6.2 FVS 法

FVS 法についても、基本量を MUSCL で内挿して、$(Q_R)_{j+1/2}$ と $(Q_L)_{j+1/2}$ を得るところまでは同じである。

数値流束を計算する時 (式 3.59) に

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_j = \frac{\tilde{E}_{j+1/2} - \tilde{E}_{j-1/2}}{\Delta x} = \frac{(E^+_j + E^-_{j+1}) - (E^+_{j-1} + E^-_j)}{\Delta x} \tag{3.66}$$

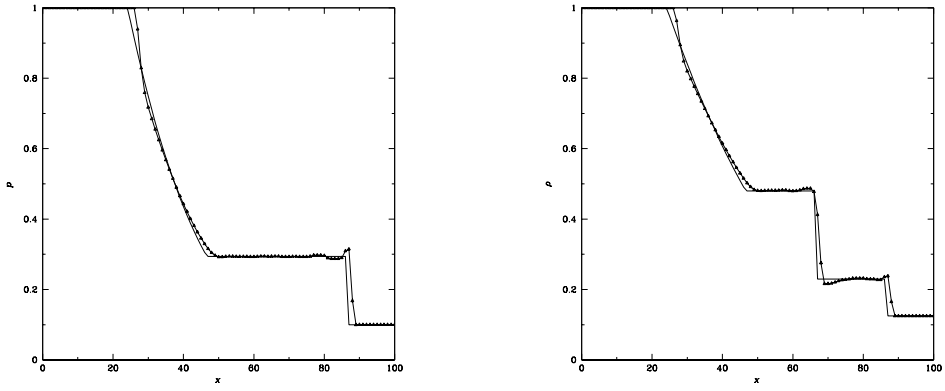

図 3.9: MUSCL で 2 次精度化した Flux Vector Splitting 法による衝撃波管問題の解。初期条件は同じ。

ではなく

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_j = \frac{\tilde{E}_{j+1/2} - \tilde{E}_{j-1/2}}{\Delta x} = \frac{(E^+(Q_L)_{j+1/2} + E^-(Q_R)_{j+1/2}) - (E^+(Q_L)_{j-1/2} + E^-(Q_R)_{j-1/2})}{\Delta x} \tag{3.67}$$

に高精度化する。

プログラムでは

```
E1p[j]:=w[1,1]*rhoL[j]+w[1,2]*mL[j]+w[1,3]*eL[j];
E2p[j]:=w[2,1]*rhoL[j]+w[2,2]*mL[j]+w[2,3]*eL[j];
E3p[j]:=w[3,1]*rhoL[j]+w[3,2]*mL[j]+w[3,3]*eL[j];
....
E1m[j]:=w[1,1]*rhoR[j]+w[1,2]*mR[j]+w[1,3]*eR[j];
E2m[j]:=w[2,1]*rhoR[j]+w[2,2]*mR[j]+w[2,3]*eR[j];
E3m[j]:=w[3,1]*rhoR[j]+w[3,2]*mR[j]+w[3,3]*eR[j];
```

のようになる。

これを用いてテスト問題を計算した結果を図 3.9 に掲げる。MUSCL で 2 次精度化した FDS 法と同様に、衝撃波面の後ろ側の振動もほとんど押えられ、接触不連続面や衝撃波面が時間的に鈍ってゆくことも空間 1 次精度の図 3.7 に比べて著しく改善されていることがわかる。

3.7　多次元問題 (2 次元、3 次元) への適用

ここでは流体力学の多次元問題を時間分割法を用いて取り扱う方法をのべる。2 次元の流体力学の方程式は、

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}=0 \tag{3.68}$$

$$Q=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ e\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}\rho u\\ p+\rho u^2\\ \rho uv\\ (e+p)u\end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ p+\rho v^2\\ (e+p)v\end{pmatrix}, \tag{3.69}$$

である。例えば Lax-Wendroff 法について考えれば、$\mathcal{O}(\Delta t^3)$ を無視すると、

$$Q^{n+1}=Q^n+\Delta t\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)+\frac{\Delta t^2}{2}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right) \tag{3.70}$$

で 1 次元と同じように流束ヤコビアン A と B を使って、

$$Q_t=-AQ_x-BQ_y, \tag{3.71}$$

また

$$Q_{tt}=A(AQ_x)_x+A(BQ_y)_x+B(AQ_x)_y+B(BQ_y)_y, \tag{3.72}$$

であることに注意すると、

$$Q^{n+1}=Q^n-\Delta t(AQ_x+BQ_y)+\frac{\Delta t^2}{2}\left[A(AQ_x)_x+A(BQ_y)_x+B(AQ_x)_y+B(BQ_y)_y\right], \tag{3.73}$$

となることがわかる。

ここで、時間分割法は、これを

$$Q^{n+1/2}=Q^n-\Delta tE_x^n \tag{3.74}$$

と

$$Q^{n+1}=Q^{n+1/2}-\Delta tF_y^{n+1/2} \tag{3.75}$$

との連続した 2 つの 1 次元の方程式の解法に分解するものである。ただし、このままで式 (3.74) を (3.75) に代入すると、

$$Q^{n+1}=Q^n-\Delta t(AQ_x+BQ_y)+\frac{\Delta t^2}{2}\left[A(AQ_x)_x+2B(AQ_x)_y+B(BQ_y)_y\right]+\mathcal{O}(\Delta t^3), \tag{3.76}$$

式 (3.73) と同じにはならない。これは流束ヤコビアン (行列) A と B が可換ではない

$$AB\neq BA \tag{3.77}$$

正確にいえば、

$$A(BQ_y)_x\neq B(AQ_x)_y \tag{3.78}$$

であるために発生する現象である。これを避けるには、分ステップを 4 分割して、その順序を回転させれば良い。すなわち、

$$Q^{n+1/4}=Q^n-\frac{\Delta t}{2}E_x^n \tag{3.79}$$

$$Q^{n+1/2}=Q^{n+1/4}-\frac{\Delta t}{2}F_y^{n+1/4} \tag{3.80}$$

$$Q^{n+3/4} = Q^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2} F_y^{n+1/2} \tag{3.81}$$

$$Q^{n+1} = Q^{n+3/4} - \frac{\Delta t}{2} E_x^{n+3/4} \tag{3.82}$$

とすればよい。ここで、式 (3.80) と (3.81) は 1 つの

$$Q^{n+3/4} = Q^{n+1/4} - \Delta t F_y^{n+1/4} \tag{3.83}$$

とすれば良いことは明らかであろう。

分ステップのオペレータを L_x のように書くと、

$$Q^{n+1} = {L_x}^{1/2} L_y {L_x}^{1/2} Q^n, \tag{3.84}$$

のように書ける。このように書くと、1 ステップ進むのに、3 分ステップの計算が必要なように見えるが、もし Q^{n+1} の値が必要でないなら、直前の ${L_x}^{1/2}$ は Q^{n+1} の直後に出てくる $L_x^{1/2}$ と一緒に計算して

$$\cdots L_x L_y L_x L_y L_x^{1/2} Q^n, \tag{3.85}$$

のように計算すれば良い。これは 3 次元にすると、

$$Q^{n+1} = {L_x}^{1/6} {L_y}^{1/6} {L_z}^{1/3} {L_y}^{1/6} {L_x}^{1/3} {L_z}^{1/6} {L_y}^{1/3} {L_x}^{1/6} {L_z}^{1/3} {L_x}^{1/6} {L_y}^{1/3} {L_z}^{1/6} {L_x}^{1/6} Q^n, \tag{3.86}$$

のようにすれば良いことになる。

参考文献

数値流体力学に関する教科書

流体力学の数値計算法★★★ (1994) 東京大学出版会、藤井孝蔵著
はじめての CFD — 移流拡散方程式 — ★★ (1996) コロナ社、棚橋隆彦
数値流体力学 基礎と応用★★ (1992) 東京大学出版会、保原 充、大久保久明編
圧縮性流体解析★★ (1995) 東京大学出版会、数値流体力学編集委員会編
発展方程式の数値解析★★ (1977) 岩波応用数学叢書、矢嶋信男, 野木達夫著
数値流体工学★ (1994) 東京大学出版会、荒川忠一著

重要な論文

Roe, P. L.: Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes, (1985) JCP, 43, 357.
Roe, P. L.: A Survey of Upwind Differencing Techniques (1989) Lecture Notes in Physics, 323, 69.
van Leer, B.: Flux-Vector Splitting for Euler Equations (1982) Lecture Notes in Physics, 170, 507.

流体力学 (圧縮性流体) に関する教科書

流体力学★★★ (1972) 培風館、巽友正著
流体力学★★ (1970) 東京図書、エリ ・ランダウ、イェ ・リフシッツ著 ; 竹内均訳 (ランダウ=リフシッツ理論物理学教程)
宇宙流体力学★★ (1997) 培風館、坂下志郎、池内 了著

数値流体力学に関するホームページ

http://nova.earth.s.kobe-u.ac.jp/shocktube/index-j.html: Java による 1 次元シ ョックチ ューブ問題のアニメーシ ョン: 藤原秀和 (神戸大)
http://grape.c.u-tokyo.ac.jp/~hachisu/java.shtml: 1-D Numerical simulation by Java: 蜂巣 泉 (東大教養学部)
http://www.camk.edu.pl/~tomek/htmls/num_meth.html: Numerical methods for Fortran Programmers: Tomasz Plewa (Nicolaus Copernicus Astronomical Center, Polish Academy of Sciences)
http://grape.c.u-tokyo.ac.jp/~hachisu/lecture/hydro/hydro.shtml: 数値流体力学の基礎と宇宙気体力学 (大学院講義ノート): 蜂巣 泉 (東大教養学部)