目 次

第 1 章　差分解法 ･数値流束 **3**
1.1　基礎方程式 . . . 3
1.2　特性方程式 . . . 4
1.3　差分法 . . . 6
1.3.1　差分 . . . 6
1.3.2　陽解法と陰解法 . . . 7
1.4　数値流束 . . . 7
1.5　精度 . . . 8
1.5.1　FTCS スキーム . . . 8
1.5.2　Lax スキーム . . . 10
1.5.3　Lax-Wendroff 法 . . . 10
1.5.4　空間 1 次精度のスキーム . . . 11
1.6　安定性 . . . 13
1.7　数値流束に関するまとめ . . . 15
1.7.1　FTCS . . . 16
1.7.2　Lax-Wendroff スキーム . . . 16
1.7.3　Lax スキーム . . . 17
1.7.4　空間 1 次精度のスキーム . . . 17

第 2 章　ポリトロピック ･ガスの流体力学数値解法 **19**
2.1　流束ヤコビアン A . . . 19
2.1.1　基本量に対する流束ヤコビアン M . . . 20
2.1.2　対角化 . . . 20
2.2　FDS (Flux Difference Splitting) 法 . . . 21
2.2.1　FDS 法の場合の結果 . . . 23
2.3　MUSCL による空間 2 次精度化 . . . 24
2.3.1　MUSCL 内挿 . . . 24
2.4　FDS 法の空間 2 次精度化 . . . 26
2.5　流束制限関数 . . . 27
2.6　時間 2 次精度化 . . . 28
2.7　多次元問題 . . . 28
2.8　FVS (Flux Vector Splitting) . . . 31

第 3 章　流体力学の風上差分法 **33**
3.1　断熱気体の流体力学の差分解法 33
3.1.1　オイラー方程式 33
3.1.2　特性速度 34
3.2　FDS 法 37
3.3　FVS 法 41

付 録 A 衝撃波管の解析解 **45**
A.1　等温衝撃波 45
A.2　等温の場合の Riemann 不変量 45
A.3　等温の場合の衝撃波管の解析解 46

付 録 B 計算のこと **49**
B.1　Makefile 49
B.1.1　基本的な Makefile を書く方法 49
B.2　Gnuplot 51
B.2.1　データの作成法 51
B.2.2　プロット法 51

第１章　差分解法 ・数値流束

1.1　基礎方程式

まず最初の基礎方程式は、ある体積の中に含まれる流体の質量が単位時間に流れ込む質量流速によって増減するという連続の式

$$\frac{\partial \int_V \rho dV}{\partial t} = -\int_S \rho \mathbf{v} d\mathbf{S} \tag{1.1}$$

から得られる。右辺を体積積分に変換し、V として微小体積を考えれば、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{1.2}$$

が得られる。

つぎに、ある体積の中に含まれる流体の運動量は、質量と同じように、単位時間に流れ込む運動量流速によって増減するが、それに加えて運動量の場合は、この流体の体積に加わっている 「力」によっても増減する。流体の中でかならず考慮しなければならない圧力による力は、圧力勾配に比例するので、

$$\frac{\partial \int_V \rho \mathbf{v} dV}{\partial t} = -\int_S \rho \mathbf{v}\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} - \int_V \mathrm{grad} p dV \tag{1.3}$$

となる。ここで、右辺を体積積分に変換し、V として微小体積を考えれば、

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \mathrm{div} \rho \mathbf{v}\mathbf{v} = -\mathrm{grad} p \tag{1.4}$$

が得られる。この式は添字をつけて書くと、

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{1.5}$$

と書ける。もちろん、$x_1 = x$、$x_2 = y$、$x_3 = z$ を表している。

さて、断熱の場合のエネルギーに関する方程式は、

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}(e + p)\mathbf{v} = 0 \tag{1.6}$$

ここで e は単位体積あたりの全エネルギーで

$$e = \rho |\mathbf{v}|^2/2 + \epsilon \tag{1.7}$$

第 1 項は単位体積当たりの運動エネルギー、第 2 項はおなじく熱エネルギーを表す。理想気体の場合は $\epsilon = p/(\gamma - 1)$ である。

質量と同じように、全エネルギーの増減はエネルギー流速によるだけなら、$\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}(e\mathbf{v}) = 0$ となるはずであるが、そうではない。熱力学の第 1 法則で断熱の場合を考えると、内部エネルギー U と体積 V は

$$\frac{dU}{dt} + p\frac{dV}{dt} = 0 \tag{1.8}$$

という関係で変化する。これから、単位体積あたりの熱エネルギー ϵ は

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \mathrm{div}(\epsilon\mathbf{v}) = -p\mathrm{div}\mathbf{v} \tag{1.9}$$

という関係にしたがって変化することが簡単な計算でわかる。これと式 (1.4) から得られる運動エネルギーの変化を表す (この式の右辺が単位体積 ・単位時間に流体素片になされた仕事を表すことに注意)

$$\frac{\partial \rho|\mathbf{v}|^2/2}{\partial t} + \mathrm{div}(\frac{\rho|\mathbf{v}|^2}{2}\mathbf{v}) = -\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}p \tag{1.10}$$

の和をとれば全エネルギーに関する方程式 (1.6) が得られる。

流体力学の基礎方程式は、式 (1.2)、(1.4)、(1.6) ということになる。 1 次元の流体の基礎方程式は、３つの式をベクトルのように並べて書いて、

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \tag{1.11}$$

と書けるただし、Q と E は物理量をならべたベクトルで、

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ (e+p)u \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

である。

1.2　特性方程式

ガスが断熱であると仮定すると、

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \delta\rho = a^2\delta\rho \tag{1.13}$$

であるから、基礎方程式は、オイラーの運動方程式が

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -a^2\frac{\partial \rho}{\partial x} \tag{1.14}$$

のように書き直せる。

$$a^2 = \gamma\frac{p}{\rho} = \gamma K\rho^{\gamma-1} \tag{1.15}$$

であるから、

$$\frac{2}{\gamma-1}\frac{da}{a} = \frac{d\rho}{\rho} \tag{1.16}$$

と従属変数 ρ を a に書き直すことができる。式 (1.14) は

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2a}{\gamma-1}\frac{\partial a}{\partial x} = 0, \tag{1.17}$$

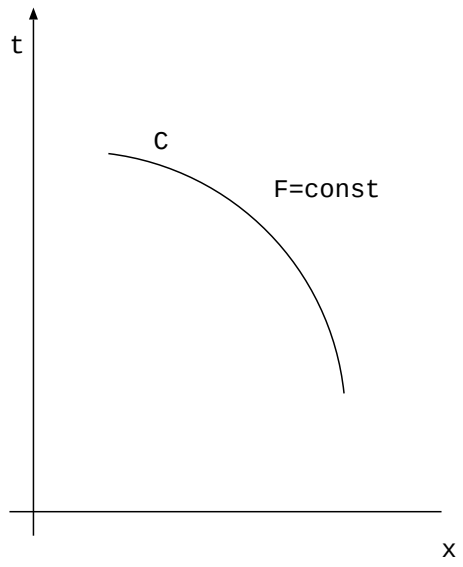

図 1.1: 特性線とリーマンの不変量

のように書き直せる。同じように従属変数 ρ を a に書き直すと、連続の式、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0, \tag{1.18}$$

は、ρ で割って a を掛けることによって、

$$\frac{2}{\gamma - 1}\frac{\partial a}{\partial t} + a\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2v}{\gamma - 1}\frac{\partial a}{\partial x} = 0, \tag{1.19}$$

となる。

式 (1.17) と式 (1.19) を加え合わせると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(x + \frac{2}{\gamma - 1}a\right) + (v + a)\frac{\partial}{\partial x}\left(x + \frac{2}{\gamma - 1}a\right) = 0, \tag{1.20}$$

が、式 (1.17) から式 (1.19) を引くと、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(v - \frac{2}{\gamma - 1}a\right) + (v - a)\frac{\partial}{\partial x}\left(x - \frac{2}{\gamma - 1}a\right) = 0, \tag{1.21}$$

(x, t) 上の曲線 C に沿って、x と t の関数 $F(x, t)$ が一定値をとるという条件は、

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}dx, \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{dx}{dt}\frac{\partial F}{\partial x}\right)dt = 0 \end{aligned} \tag{1.22}$$

すなわち、

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{1.23}$$

が成り立つことであることがわかる。ここで曲線 C の勾配が $\frac{dx}{dt}$ である。したがって、式 (1.20) と式 (1.21) は

$$\frac{dx}{dt} = v \pm a, \tag{1.24}$$

という (x,t) 上の曲線に沿って、

$$J_{\pm} = v \pm \frac{2}{\gamma - 1}a, \tag{1.25}$$

が一定であることを示している。この $J_{\pm}$ をリーマン不変量と呼ぶ。流体力学の基礎方程式が式 (1.20) と式 (1.21) のように波動の伝搬を表す式に書き直せることは重要である。現在の流体力学の数値計算法はこのことに基礎をおいて作られているといっても過言ではない。

1.3　差分法

微分の定義式

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1.26}$$

で、Δx を小さくとって、近似した式

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \simeq \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1.27}$$

のことを差分と呼ぶ。差分法とは、微分方程式をこのような形に差分化し、その解を求める方法をいう。

1.3.1　差分

空間微分の差分化を考える。空間を格子に分割しその格子点上の物理量 Q_j を計算する。ここで j は格子点につけた番号を表す。

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_j = \frac{Q_{j+1} - Q_j}{\Delta x}, \tag{1.28}$$

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_j = \frac{Q_j - Q_{j-1}}{\Delta x}, \tag{1.29}$$

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_j = \frac{Q_{j+1} - Q_{j-1}}{2\Delta x}. \tag{1.30}$$

この 3 つの表現は Δx が小さい極限ではおなじ $\frac{dQ}{dx}$ を与えるが、Δx^2 のオーダで違う量を与える（詳しくは後に述べる）。式 (1.28) のようにとるのを前進差分、式 (1.29) のようにとるのを後退差分、式 (1.30) のようにとるのを中心差分と呼ぶ。前進差分 (1.28) と後退差分 (1.29) を使って、2 階微分は

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{Q_{j+1} - 2Q_j + Q_{j-1}}{\Delta x^2} \tag{1.31}$$

のような 3 点差分を使うことが多い。

どのような差分をとるかということは、計算方法の安定性、収束性などに影響を与える。これはこの授業の主要な内容にあたる。

1.3.2 陽解法と陰解法

式 (1.12)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0, \tag{1.32}$$

を時間について差分化する方法も、前進、後退、中心差分を考えることができる。時間に関する添字を n とし、n ステップめの物理量から $n+1$ ステップめのそれを求める (時間進化を求める) ことを考える。これが流体力学の非定常問題の解を求めることに相当している。

時間に関しては前進差分、中心差分そして後退差分を適用すると、それぞれ

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \Delta t \frac{\partial E^n}{\partial x}, \tag{1.33}$$

$$Q_j^{n+1} = Q_j^{n-1} - 2\Delta t \frac{\partial E^n}{\partial x}, \tag{1.34}$$

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \Delta t \frac{\partial E^{n+1}}{\partial x}, \tag{1.35}$$

のようになる。ここで、前の 2 つは Q_j^{n+1} を求めるのに、過去の情報 $E^n = E(Q^n)$ や Q^{n-1} のみを使っている。したがって既に知れている情報で求める 1 つ時間ステップ進んだ後の物理量の値を決めることができる。このようにな方法を陽解法と呼ぶ。それに対して、式 (1.35) では、$E^{n+1} = E(Q^{n+1})$ だから、1 つ時間ステップ進んだ後の物理量の値を決めるのに、それを右辺に含んでいる。このような解法は陰解法とよばれ、1 つ時間ステップ進んだ後の物理量の値を決めるのに、それら自身の間にある関係を使わなければならないことになっている。具体的には、陰解法では、空間の格子点数 $\times$ 従属変数の種類だけの変数に関する連立方程式を 1 ステップごとに解く必要がある。

1.4 数値流束

前節の式 (1.33)、(1.34)、(1.35) では、流束の空間微分に関する部分をどうとるかということには触れなかった。流体力学の数値解法は、つまるところ、空間微分に関する差分と時間微分に関する差分をどのようにとるか、ということに集約できる。

式 (1.12) を

$$\frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} + \frac{\tilde{E}_{j+1/2}^n - \tilde{E}_{j-1/2}^n}{\Delta x} = 0 \tag{1.36}$$

このような差分に書き直した時、グリッドの中心での値である Q_j に対して、$\tilde{E}_{j+1/2}$ や $\tilde{E}_{j-1/2}$ はグリッドの境界での値であるべきである。

このときどのようにして $\tilde{E}_{j+1/2}$ などの量を決めれば良いのだろうか。

ここで、$\tilde{E}_{j+1/2}$ を $E_j = E(Q_j)$、$\tilde{E}_{j-1/2}$ を $E_{j-1} = E(Q_{j-1})$ とすれば、空間後退差分 ･時間前進差分のスキームが $\tilde{E}_{j+1/2}$ を $E_{j+1} = E(Q_{j+1})$、$\tilde{E}_{j-1/2}$ を $E_j = E(Q_j)$ とすれば、空間前進差分 ･時間前進差分のスキームができる。空間中心差分のスキームには、$\tilde{E}_{j+1/2}$ を $(E(Q_j) + E(Q_{j+1}))/2$、$\tilde{E}_{j-1/2}$ を $(E(Q_j) + E(Q_{j-1}))/2$ のようにすれば良いことは容易にわかるだろう。

数値流体力学の計算方法とは、この $\tilde{E}_{j+1/2}$ などの流束の値を、どのよう決めればよいかという問題に帰着する。このような立場に立ってスキームに現れる $\tilde{E}_{j+1/2}$ などの流束のことを数値流束と呼ぶ。数値流速の決め方こそ数値流体力学の計算方法のポイントといえる。数値計算スキームによってこの数値流束のとりかたは異なるが、いくつかの例について後に見ることになる。

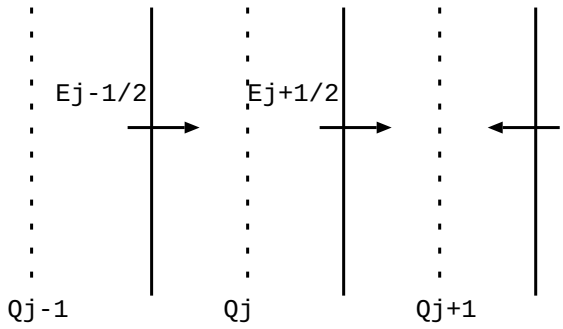

図 1.2: 物理量と流束の関係

1.5　精度

1.2 節で見たように、流体力学の方程式系はある変換によって波動方程式に書き換えることができ、これが、後に風上差分法 (この意味は後述) を作る上での基礎となっている。そこで、式 (1.20) や式 (1.21) 型の方程式のプロトタイプ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0, \tag{1.37}$$

で、$v = c$ =const とした

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{1.38}$$

の型の方程式の数値解法を考えよう。

1.5.1　FTCS スキーム

時間前進差分 ・空間中心差分の FTCS(Forward in Time and Central Difference in Space) スキームは、式 (1.38) を

$$\frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} + c\frac{\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \tag{1.39}$$

のように差分化して

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - c\frac{\Delta t}{2\Delta x}(\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n), \tag{1.40}$$

として解く方法である。Pascal のプログラムでは

```
1
2 for j:=0 to jm do
3   w[j]:=u[j];
4 for j:=1 to jm-1 do
5   u[j]:=w[j]-nu/2*(w[j+1]-w[j-1]);
```

のよう書けば良い。ν(プログラム中でnu と書かれている量) はクーラン数と呼ばれ、$\nu = c\Delta t/\Delta x$ で定義される量である。1 ステップで進む時間の長さと、2 つの格子点の間の距離の間の関係をつけている量であるといえる。

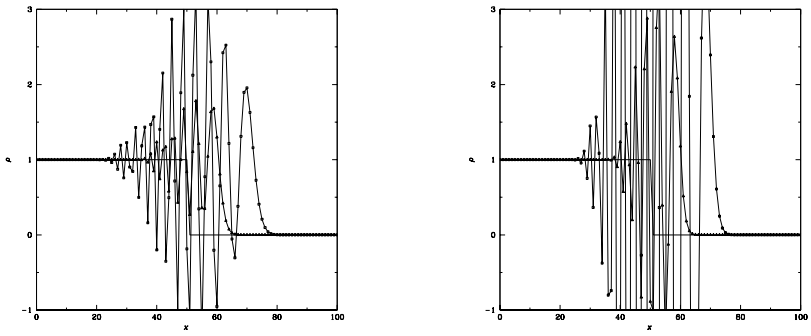

図 1.3: FTCS スキームで、初期値として、$j = 1, \ldots, 50$ に対して $\rho = 1$、$j = 51, \ldots, 100$ に対して $\rho = 0$ としクーラン数 $\nu \equiv c\Delta t/\Delta x = 0.25$ で 50 ステップ、100 ステップ計算した時の ρ をプロットした (左)。同じ初期条件で、クーラン数 $\nu = 0.5$ で 25 ステップ、50 ステップ計算したものが右図である。

このスキームで、初期値として、

$$\rho = \begin{cases} 1, \ldots \text{for j} = 1, \ldots, 50 \\ 0, \ldots \text{for j} = 51, \ldots, 100 \end{cases} \tag{1.41}$$

をとり、クーラン数 $\nu = c\Delta t/\Delta x$ を 0.25 と 0.5 の場合について $\nu \times N_{\text{step}} = 25$ まで計算した結果が図 1.3 に示してある。この初期条件に合致する厳密解は、密度が 1 から 0 へ飛ぶ位置が、1 ステップごとに右に ν だけ移動してゆくものにならなければならないことは容易にわかるだろう。しかし、図 1.3 に示したように、この FTCS スキームを用いて計算すると、厳密解の回りに余分の振動が発生してしまうことがわかる。

この差分化にどれくらいの誤差が混入しているかを考える。時間方向にテイラー展開して、

$$\rho^{n+1} = \rho^n + \left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|^n \Delta t + \left.\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}\right|^n \frac{\Delta t^2}{2} + \mathcal{O}(\Delta t^3), \tag{1.42}$$

また空間方向にテイラー展開して、

$$\rho_{j+1} = \rho_j + \left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_j \Delta x + \left.\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right|_j \frac{\Delta x^2}{2} + \left.\frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3}\right|_j \frac{\Delta x^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta x^4), \tag{1.43}$$

$$\rho_{j-1} = \rho_j - \left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_j \Delta x + \left.\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right|_j \frac{\Delta x^2}{2} - \left.\frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3}\right|_j \frac{\Delta x^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta x^4), \tag{1.44}$$

となる。$\mathcal{O}\Delta t^3$ は、Δt^3 に比例する項もしくはそれよりも高次の項 (Δt^3 より小さい) が省略されていることを示す。これを (1.39) に代入すると、(1.37) と完全に同じになるわけではなく、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c\frac{\partial \rho}{\partial x} + c \left.\frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3}\right|_j \frac{\Delta x^2}{6} + \left.\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}\right|^n \frac{\Delta t}{2} = 0, \tag{1.45}$$

となる。このように、空間方向に Δx^2、時間方向に Δt の誤差を含むスキームを、空間 2 次精度、時間 1 次精度のスキームと呼ぶ。

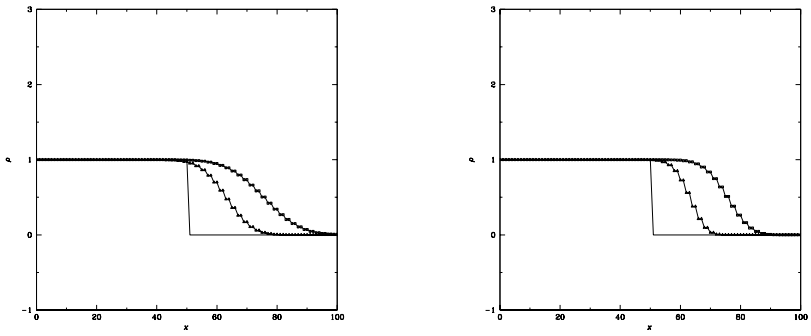

図 1.4: 図 1.3 とおなじ。ただし採用した計算スキームは Lax 法で、左はクーラン数 $\nu = 0.25$、右はクーラン数 $\nu = 0.5$ のもの。FTCS スキームに比べて、振動はおさえられているが、密度の飛びは鈍っている。

1.5.2　Lax スキーム

このFTCS スキームは図 1.3 に見えるように、正しい解の回りで振動を生じており、実際に使うことはできない。そこで、式 (1.39) の右辺第 1 項 ρ_j を $(\rho_{j-1} + \rho_{j+1})/2$ で置き換えた式

$$\rho_j^{n+1} = \frac{\rho_{j-1}^n + \rho_{j+1}^n}{2} - c\frac{\Delta t}{2\Delta x}(\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n), \tag{1.46}$$

を解く方法が Lax 法　(図 1.4) である。この方法のプログラムは

```
1
2 for j:=0 to jm do
3   w[j]:=u[j];
4 for j:=1 to jm-1 do
5   u[j]:=(w[j-1]+w[j+1])/2-nu/2*(w[j+1]-w[j-1]);
```

のように書けば良い。FTCS スキームの数値的振動は押えられているが、密度の飛びは著しく鈍ってしまっている。

1.5.3　Lax-Wendroff 法

時間 2 次精度のスキームとするためには、

$$\rho^{n+1} = \rho^n + \left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|^n \Delta t + \left.\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}\right|^n \frac{\Delta t^2}{2} + \left.\frac{\partial^3 \rho}{\partial t^3}\right|^n \frac{\Delta t^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta t^4), \tag{1.47}$$

で、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -c\frac{\partial \rho}{\partial x}, \tag{1.48}$$

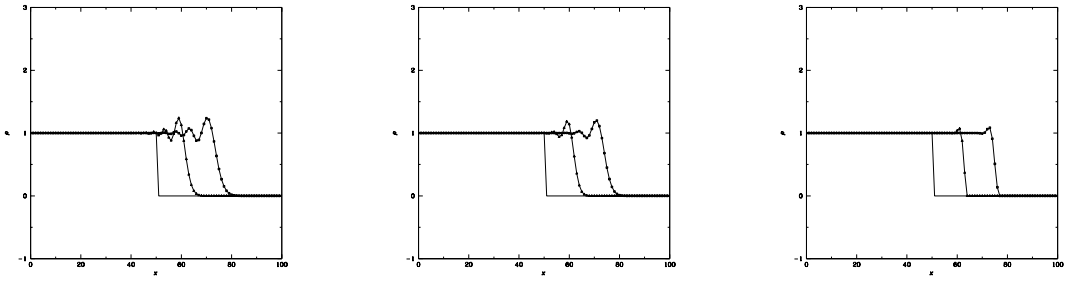

図 1.5: 図 1.3 とおなじ。ただし採用した計算スキームはオリジナルの Lax-Wendroff 法で、左はクーラン数 $\nu = 0.25$ で 50 ステップ、100 ステップ後、中央はクーラン数 $\nu = 0.5$ で 25 ステップ、50 ステップ後、右はクーラン数 $\nu = 0.95$ で 13 ステップ、26 ステップ計算したもの。

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = +c^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \tag{1.49}$$

であることに注すると、

$$\rho^{n+1} = \rho^n - c \left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_j \Delta t + \frac{c^2}{2} \left.\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right|_j \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3), \tag{1.50}$$

となる。この式を差分化するとオリジナルの Lax-Wendroff スキームが得られる。

$$\rho^{n+1} = \rho^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(\rho^n_{j+1} - \rho^n_{j-1}) + \frac{c^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2}(\rho^n_{j+1} - 2\rho^n_j + \rho^n_{j-1}), \tag{1.51}$$

これは FTCS スキームに第 3 項の拡散項を加えたものとなっている。拡散項は、FTCS スキームで生じる振動を拡散によって鎮める効果を持つのでこのスキームはより安定化されることになる。プログラムは

```
1
2 for j:=0 to jm do
3   w[j]:=u[j];
4 for j:=1 to jm-1 do
5   u[j]:=w[j]-nu/2*(w[j+1]-w[j-1])+nu*nu/2*(w[j+1]-2*w[j]+w[j-1]);
```

とすれば良い。

1.5.4 空間 1 次精度のスキーム

$$\rho^{n+1}_j = \rho^n_j - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(\rho^n_j - \rho^n_{j-1}), \tag{1.52}$$

とすれば、時間については 1 次精度前進差分、空間については 1 次精度後退差分をとったスキームができる。プログラムは

```
1
2 for j:=0 to jm do
3   w[j]:=u[j];
4 for j:=1 to jm do
5   u[j]:=w[j]-nu*(w[j]-w[j-1]);
```

のようにすれば良い。

この問題では、現象は左から右へ伝わってゆくので、それをとらえられるように、空間については後退差分をとった。図 1.6 から、空間 1 次精度のスキームは、密度の飛びの部分で余分な振動を起こさないことがわかる。しかし同時に、密度の飛びの部分が時間が進むにつれて、ぼやけてゆくこともわかる。このように、空間 1 次精度のスキームは余分な振動を起こさない良い性質をもっているが、飛びの部分がぼやけてゆくという悪い性質を持っていることがわかる。テイラー展開を用いてこのスキームにどの程度の誤差が含まれているかを見てみると、式 (1.52) は元の微分方程式 (1.38) に 2 つ余分な項を含んでおり

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -c\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right) \tag{1.53}$$

と等しくなることがわかる。ここで、$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -c\frac{\partial \rho}{\partial x}$ に気をつけて変形すると、これは

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{c}{2}(\Delta x - c\Delta t)\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \tag{1.54}$$

となる。この式で

$$\Delta t < \Delta x / c \tag{1.55}$$

のようにとると、右辺は正の拡散係数を持つ拡散項であることがわかる。つまりこのようにして作った空間 1 次精度のスキームは正の拡散係数を持つ拡散項を差分化にともなう誤差として含むために余分の振動を生じなくなっていることがわかる。

ここで式 (1.55) は早さ c で伝わる現象について時間進化を計算する場合に、情報が格子 1 つ分以上伝搬する時間以上に時間ステップをとってはならないという条件に相当しており、数値流体力学で非定常問題を解く場合の時間ステップに関する条件を与えるものである。これは、Courant, Friedrich, Lewy(1928) 条件　(CFL 条件) と呼ばれる。

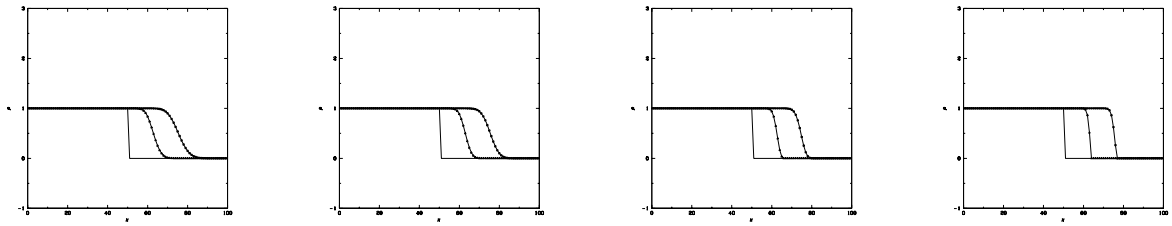

図 1.6: 図 1.3 とおなじ。ただし採用した計算スキームは空間 1 次精度後退差分をとったスキームで、クーラン数は左から $\nu = 0.25$、$\nu = 0.5$、$\nu = 0.8$、$\nu = 0.95$ をとっている。

1.6 安定性

この節の内容は今後の議論に不可欠というわけではないので、最初にこの資料を勉強する場合には飛ばして先に進んでも良い。

前節で見たように、空間 2 次精度のスキームでは、余分な振動が発生した。空間 1 次精度のスキームは余分な振動は発生しなかったが、密度の飛びは時間がすすむとともに鈍ってゆくことがわかった。これらの差はどこからくるのだろうか。差分方程式に含まれる元の微分方程式からのずれ (誤差) に起因することは前に述べた。

ここでは、von Neumann の安定性解析を使って余分な振動や解の鈍りと差分スキームの間の関係を定量的に見てゆく。解をフーリエ分解して、

$$\rho_j^n = \sum_\theta g^n \exp(ij\theta) \tag{1.56}$$

と書く。ここで j は格子点の番号で、θ は格子間隔 Δx を単位とした波数つまり $\theta = 2\pi k \Delta x$ で $(0 \le \theta \le \pi)$ を表す。 (これは Δx だけ進んだ時の位相の変化を与える)

この式をスキームに代入し $\exp(ij\theta)$ に比例する項を取り出す。FTCS スキーム

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{\nu}{2}(\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n), \tag{1.57}$$

に対しては、

$$g^{n+1} = g^n - \frac{\nu}{2} g^n (\exp(i\theta) - \exp(-i\theta)), \tag{1.58}$$

となる。これから複素振幅 g が

$$g = 1 - i\nu \sin\theta, \tag{1.59}$$

となっていることがわかる。

この問題では厳密解は、$\rho_j^{n+1} = \rho_{j-\nu}^n$ を満足していなければならないので、

$$\rho_j^{n+1} = g^{n+1} \exp(ij\theta) = \rho_{j-\nu}^n = g^n \exp(i(j-\nu)\theta), \tag{1.60}$$

が成り立たねばならず、これから厳密解に対する複素振幅 g は

$$g_{\text{exact}} = \exp(-i\nu\theta), \tag{1.61}$$

で与えられる。これは当然 $|g_{\text{exact}}| = 1$ で、厳密解では位相だけが動いてゆくことになる。この g_{exact} からどれだけ異なっているかを調べれば、差分化にともなって、微分方程式の厳密解からずれた部分がわかることになる。

複素振幅 g の絶対値はある波の 1 ステップ後との振幅の比を与えるが、式 (1.59) に対しては

$$|g|^2 = 1 + \nu^2 \sin^2\theta, \tag{1.62}$$

で与えられる。$\nu > 0$ に対しては波数 $\theta > 0$ の波は増幅されることがわかる。

つぎに複素振幅 g の位相 ϕ は、

$$\phi = \arcsin \frac{Im(g)}{|g|} \tag{1.63}$$

で、厳密解の位相に対する比は

$$\frac{\phi}{\phi_{\rm exact}} = \frac{\arcsin \frac{\nu \sin\theta}{\sqrt{1+\nu^2 \sin^2\theta}}}{\nu\theta} \tag{1.64}$$

のように計算できる。これを図に書くと図 1.7 のようになる。$|g|$ と $\phi/\phi_{\rm exact}$ を図示する Mathematica のプログラムは

```
1
2 G[nu_,theta_]=Sqrt[1+nu^2 Sin[theta]^2]
3 Plot[G[0.5,theta],{theta,0,Pi},Frame -> True]
```

および

```
1
2 Phi[nu_,theta_]=ArcSin[nu Sin[theta]/Sqrt[1+nu^2 Sin[theta]^2]]/(nu theta)
3 Plot[Phi[0.5,theta],{theta,0.0001,Pi},Frame->True]
```

である。

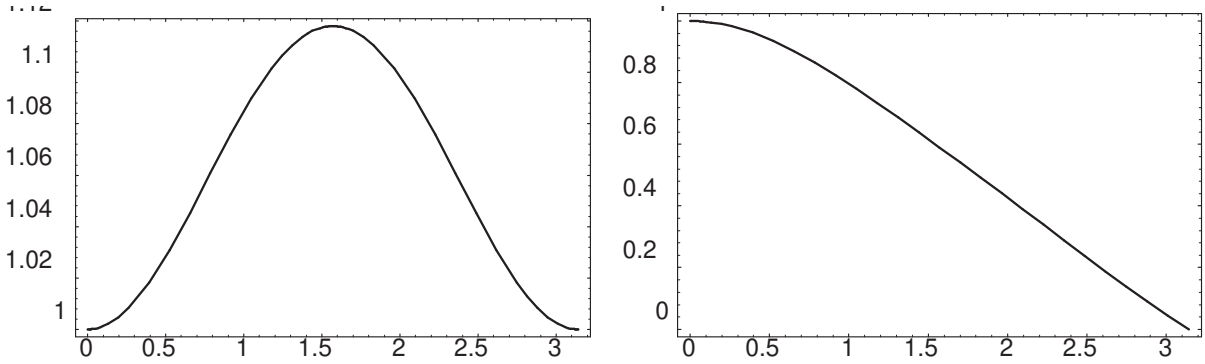

図 1.7: FTCS スキームで、クーラン数 $\nu = 0.5$ でにする複素振幅 g の絶対値 (左) と複素振幅 g の位相 ϕ と厳密解の位相に対する比 (右)。この図で、それぞれ 1 に近いほど厳密解に近いことになる。

ここで、複素振幅 g の絶対値が $0 < \theta < \pi$ (0 と π 以外) に対して 1 を越えているので、初期値に含む周期的な波はかならず増幅されることになることがわかる。また、θ の大きな (短波長の) 波の方で厳密解に比べて、位相が遅れることもわかる。図 1.3 で短波長の波が後方に取り残されているように見えることもこのように説明される。

同じようにして、Lax のスキームでは、

$$g = \cos\theta - i\nu \sin\theta, \tag{1.65}$$

となり、絶対値と位相の比は、

$$|g|^2 = \cos^2\theta + \nu^2 \sin^2\theta, \tag{1.66}$$

$$\frac{\phi}{\phi_{\rm exact}} = \frac{\arcsin \frac{\nu \sin\theta}{(\cos^2\theta+\nu^2 \sin^2\theta)^{1/2}}}{(\nu\theta)} \tag{1.67}$$

で与えられる。これを図示する Mathematica のプログラムは

```
1
2 G[nu_,theta_]=Sqrt[Cos[theta]^2+nu^2 Sin[theta]^2]
3 Plot[G[0.5,theta],{theta,0,Pi},Frame -> True]
4
5 Phi[nu_,theta_]=ArcCos[Cos[theta]/G[nu,theta]]/(nu theta)
6 Plot[Phi[0.5,theta],{theta,0.0001,Pi},Frame->True]
```

のようになる。

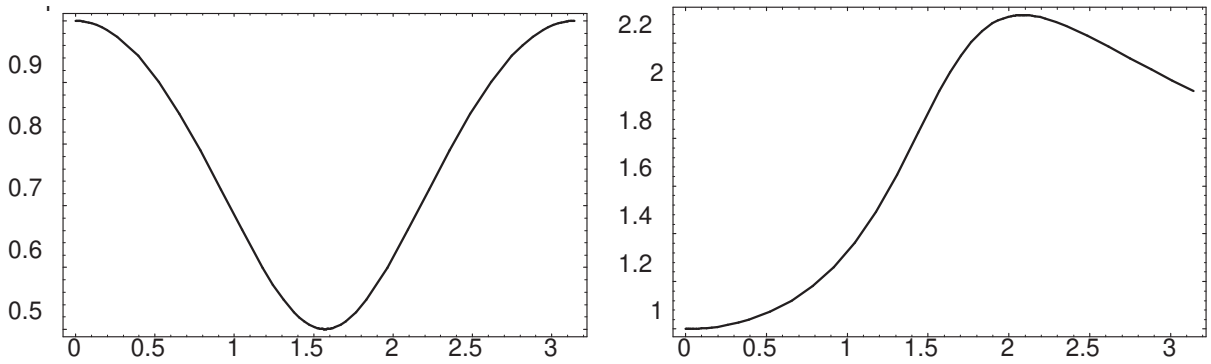

図 1.8: Lax スキームで、クーラン数 $\nu = 0.5$ に対する複素振幅 g の絶対値 (左) と複素振幅 g の位相 ϕ の厳密解の位相に対する比 (右)。

図 1.8 (左) を見ると、すべての θ で $|g| < 1$ であり、周期的な振動はその振幅が減少してゆくことがわかる。特に、$\theta = \pi/2$ つまり 4 グリッドで 1 波長となる波が大きく減衰することがわかる。図 1.8 (右) からは、θ の大きい波に対して、正の位相誤差とを生じており、Lax スキームで飛びが鈍ってゆくにつれて前方に崩れてゆく構造がこれが原因となっていると見ることができる。

また、1 次のスキームに対しても同様の解析は可能で、

$$g = 1 - \nu(1 - \cos\theta) - i\nu\sin\theta, \tag{1.68}$$

$$|g|^2 = (1 - \nu(1 - \cos\theta))^2 + \nu^2\sin^2\theta, \tag{1.69}$$

$$\frac{\phi}{\phi_{\rm exact}} = \frac{\arcsin\frac{\nu\sin\theta}{|g|}}{\nu\theta}, \tag{1.70}$$

で、図 1.9 で複素振幅 g の絶対値は、大きい波数に対して減少しており、短波長の波ほど減衰しやすいことがわかる。$\nu = 0.5$ の場合は $\nu = 1$ の場合とともに複素振幅 g の位相誤差は 0 になるが (図 1.9 右)、$0.5 < \nu < 1$ では $\phi/\phi_{\rm exact} > 1$ で前進位相誤差を、$0 < \nu < 0.5$ では $\phi/\phi_{\rm exact} < 1$ で遅延位相誤差を持つ。

1.7 数値流束に関するまとめ

ここまで、いくつかのスキーム (差分法) について見てきた。これを 1.4 節で導入した数値流束という面からまとめておく。以降では差分式に出てくる従属変数 ρ ではなく u と書く。

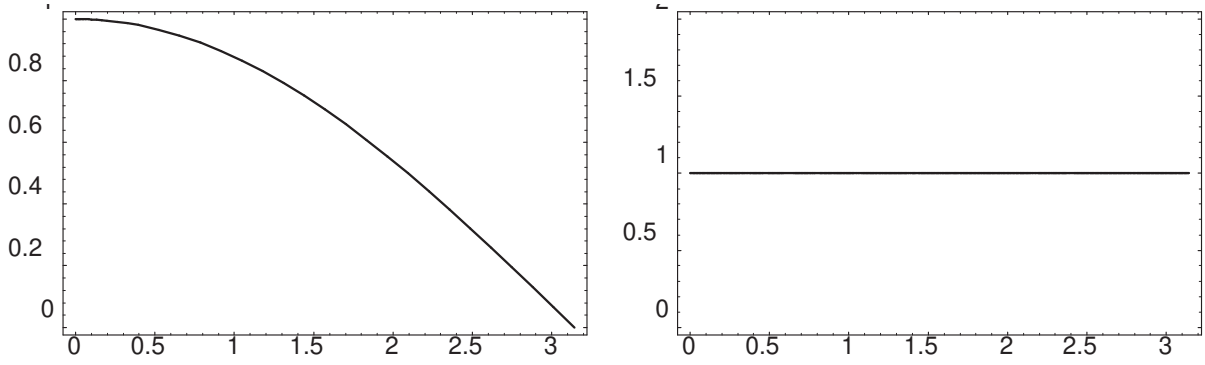

図 1.9: 図 1.7 と同じ、ただし、１次精度空間後退差分スキームで、クーラン数 $\nu = 0.5$ でにする複素振幅 g の絶対値 (左) と複素振幅 g の位相 ϕ の厳密解の位相に対する比　(右)。

1.7.1　FTCS

空間 2 次精度の FTCS スキームは、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\nu}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right), \tag{1.71}$$

であり、これを

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{j+1/2} - F_{j-1/2}\right), \tag{1.72}$$

の形に書き直すと、

$$F_{j+1/2} = c\frac{u_j + u_{j+1}}{2}, F_{j-1/2} = c\frac{u_j + u_{j+1}}{2}, \tag{1.73}$$

であるとわかる。つまり、この方法では、セルの境界である $j \pm 1/2$ での数値流速として、セルの中心での値の算術平均を取っていることがわかる。

1.7.2　Lax-Wendroff スキーム

Lax-Wendroff スキームでは

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\nu}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\nu^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \tag{1.74}$$

であるから、数値流速は

$$F_{j+1/2} = c\left(\frac{1-\nu}{2}u_{j+1} + \frac{1+\nu}{2}u_j\right), F_{j-1/2} = c\left(\frac{1-\nu}{2}u_j + \frac{1+\nu}{2}u_{j-1}\right), \tag{1.75}$$

となる。セルの境界での数値流速として、セルの中心での値に $(1-\nu)/2$ と $(1+\nu)/2$ の重みをつけて平均を取っていることがわかる。

1.7.3 Lax スキーム

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j-1}^n + u_{j+1}^n}{2} - \frac{\nu}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right), \tag{1.76}$$

であり、

$$F_{j+1/2} = c\left(\frac{1-1/\nu}{2}u_{j+1} + \frac{1+1/\nu}{2}u_j\right), F_{j-1/2} = c\left(\frac{1-1/\nu}{2}u_j + \frac{1+1/\nu}{2}u_{j-1}\right), \tag{1.77}$$

となる。セルの境界での数値流束として、セルの中心での値に $(1-1/\nu)/2$ と $(1+1/\nu)/2$ の重みをつけて平均を取っていることがわかる。

1.7.4 空間 1 次精度のスキーム

空間 1 次精度のスキームでは風上側を含んだ差分を取る必要がある。すなわち、$c > 0(\nu > 0)$ に対しては後退差分、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \nu\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right), \tag{1.78}$$

を $c < 0(\nu < 0)$ に対しては前進差分、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \nu\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right), \tag{1.79}$$

を取る必要がある。このようにとるスキームを 1 次精度風上差分とよぶ。これは、1 つの式で書くこともできて、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\nu+|\nu|}{2}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) - \frac{\nu-|\nu|}{2}\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right), \tag{1.80}$$

$\frac{\nu+|\nu|}{2}$ が、$\nu > 0$ の時は ν と等しく、$\nu < 0$ の時は 0 となることは容易にわかるだろう。$\frac{\nu-|\nu|}{2}$ は、$\nu < 0$ の時は ν と等しく、$\nu > 0$ の時は 0 となる。数値流束は

$$F_{j+1/2} = \frac{c-|c|}{2}u_{j+1} + \frac{c+|c|}{2}u_j, F_{j-1/2} = \frac{c-|c|}{2}u_j + \frac{c+|c|}{2}u_{j-1}, \tag{1.81}$$

となるが、この式は

$$F_{j+1/2} = \frac{F_{j+1}+F_j}{2} - \frac{|c|}{2}(u_{j+1}-u_j), F_{j-1/2} = \frac{F_j+F_{j-1}}{2} - \frac{|c|}{2}(u_j-u_{j-1}), \tag{1.82}$$

のようにも書き直せる。

第2章　ポリトロピック ・ガスの流体力学数値解法

まず、等温を代表とするポリトロピックガスに関する流体力学を解く解法について見てみる。これはただちに一般の気体に関する解法に応用できる。

圧力 p が密度 ρ だけで決まっているような場合、すなわち $p = p(\rho)$ のようになっている性質をバロトロピーと呼ぶが、その特別の場合で圧力が $p = K\rho^{\gamma}$ のように密度 ρ のベキに比例する場合をポリトロピックと呼ぶ。$\gamma = 1$ は等温の場合に当たり密度の高い $(10^2\mathrm{cm}^{-3} \lesssim n \lesssim 10^{10}\mathrm{cm}^{-3})$ 星間気体の中では良い近似であることが知られている。

2.1　流束ヤコビアン A

以下では特に述べない限り等温の場合に限って議論を進める。等温音速を

$$a = (p/\rho)^{1/2}, \tag{2.1}$$

と表すと、流体力学の基礎方程式 (式 1.12) は等温の場合は、

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \tag{2.2}$$

と書ける。ただし、Q と E は物理量を並べたベクトルで、

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho(a^2 + u^2) \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

である。ここで、$\rho u = m$ と書いて従属変数を

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

に書き直すと、E の方はこれを使って

$$E = \begin{pmatrix} m \\ a^2\rho + \frac{m^2}{\rho} \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

のように書ける。質量密度、運動量密度、エネルギー密度は (大きな体積で積分すれば保存する量なので) 保存量と呼ばれる。

式 (2.1) を

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + A\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{2.6}$$

のように書き直すことを考える。

$$\frac{\partial E_k}{\partial x} = \sum_l \frac{\partial E_k}{\partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial x} = A_{k,l}\frac{\partial Q_l}{\partial x} \tag{2.7}$$

のように書きなおせて、ここに出てくる

$$A_{k,l} = \frac{\partial E_k}{\partial Q_l} \tag{2.8}$$

を保存量 Q に対する流束ヤコビアンと呼ぶ。具体的に書き下すと、

$$A_{k,l} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - \frac{m^2}{\rho^2} & \frac{2m}{\rho} \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - \frac{m^2}{\rho^2} & \frac{2m}{\rho} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix} = 0, \tag{2.10}$$

これが、保存量で書いた $\frac{\partial Q}{\partial t} + A\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ 型の方程式である。

2.1.1　基本量に対する流束ヤコビアン M

質量密度、速度という基本量 q で方程式を書くこともできて、このときの基礎方程式は、シンボリックに

$$\frac{\partial q}{\partial t} + M\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \tag{2.11}$$

と書く。M は基本量に関する流束ヤコビアンである。具体的な形では、

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \rho \\ \frac{a^2}{\rho} & u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} = 0, \tag{2.12}$$

これが、基本量で書いた $\frac{\partial q}{\partial t} + M\frac{\partial q}{\partial x} = 0$ 型の方程式である。

2.1.2　対角化

式 (2.10) や式 (2.12) を流束ヤコビアンが対角成分のみを持つ形に変形することを考える。

そのためには、流束ヤコビアンの固有値と固有ベクトルを求める。簡単な計算 (つまり $det(A-\lambda I) = 0$ を満たす λ を計算する。) から、A、M のこの固有値は

$$\lambda_1 = u - a, \tag{2.13}$$

$$\lambda_2 = u + a, \tag{2.14}$$

であることがわかる。それぞれの固有値に属する固有ベクトルは、A では

$$\mathbf{x}_{A1} = \begin{pmatrix} 1 \\ u-a \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{A2} = \begin{pmatrix} 1 \\ u+a \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

また、M では、

$$\mathbf{x}_{M1} = \begin{pmatrix} \rho \\ -a \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{M2} = \begin{pmatrix} \rho \\ +a \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

となる。これから、固有ベクトルを並べた行列 (右固有行列 R) およびその逆行列 R^{-1} は、それぞれ、A では

$$R_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u-a & u+a \end{pmatrix}, {R_A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{u+a}{2a} & -\frac{1}{2a} \\ -\frac{u-a}{2a} & \frac{1}{2a} \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

また M では、

$$R_M = \begin{pmatrix} \rho & \rho \\ -a & a \end{pmatrix}, {R_M}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\rho} & -\frac{1}{2a} \\ -\frac{1}{2\rho} & \frac{1}{2a} \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

となる。

右固有行列 R およびその逆行列 R^{-1} を用いると、流束ヤコビアンは

$${R_A}^{-1} A R_A = \Lambda, \tag{2.19}$$

や

$${R_M}^{-1} M R_M = \Lambda, \tag{2.20}$$

と対角化される。ここで

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

である。もちろん、逆変換

$$A = R_A \Lambda {R_A}^{-1}, \tag{2.22}$$

や

$$M = R_M \Lambda {R_M}^{-1}, \tag{2.23}$$

が成り立つ。

2.2 FDS (Flux Difference Splitting) 法

波動方程式に関する差分化で、式 (1.82) つまり

$$F_{j+1/2} = \frac{F_{j+1} + F_j}{2} - \frac{|c|}{2}(u_{j+1} - u_j), F_{j-1/2} = \frac{F_j + F_{j-1}}{2} - \frac{|c|}{2}(u_j - u_{j-1}), \tag{2.24}$$

を手本として、流体力学の式を風上差分化することを考える。つまり、

$$E_{j+1/2} = \frac{E_{j+1} + E_j}{2} - \frac{R_A|\Lambda|R_A^{-1}}{2}(Q_{j+1} - Q_j), E_{j-1/2} = \frac{E_j + E_{j-1}}{2} - \frac{R_A|\Lambda|R_A^{-1}}{2}(Q_j - Q_{j-1}), \tag{2.25}$$

である。Flux Difference Splitting 法では $R_A|\Lambda|R_A^{-1}$ の部分は、$E_{j+1/2}$ については、$j+1/2$ で、$E_{j-1/2}$ については、$j-1/2$ での値で評価する。

この方法では、$j \pm 1/2$ での物理量は、その左側の格子点での値を添字 L をつけて、また、右側の格子点での値を添字 R をつけて表すと、

$$\begin{aligned} \rho_{ave} &= \sqrt{\rho_L \rho_R}, \\ u_{ave} &= \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

のように決める。この方法を、Roe の近似リーマン解法と呼び、時間 n ステップの j および $j+1$ のふたつのグリッド内部が格子点上の値に等しい一定の値を持っていた時の時間 $n+1$ ステップの時に $j+1/2$ でとるであろう値を衝撃波管 (リーマン) 問題として解き、それを数値流束を計算する時に必要な中間

値とする。このときに厳密に Δt だけ時間を進めるリーマン問題を解く代わりに、それを近似する量で置き換えて中間値に用いる方法を近似リーマン解法と呼ぶ。

プログラムを見てみよう。これは n ステップの密度 rho(:)、速度 u(:) の値から、Δt だけ時間の進んだ $n+1$ ステップの値を求めるサブルーティンである。p のついた量は Roe 平均をあらわし、他の Lambda(:)、R(:,:)、L(:,:) は、固有値、右固有行列、およびその逆行列をあらわす。また、ρ に対する、数値流束が E1(:) に、運動量 m に対する、数値流束が E2(:) に求められて時間推進に使われる。cs は等温音速をあらわす。

```
1
2       subroutine FDS()
3  #include "param.h"
4  #include "dim.h"
5  #include "var.h"
6  ! Local Variable
7       real*8 rhop(0:Nx), up(0:Nx), E1(0:Nx), E2(0:Nx)
8       integer j,n1,n2,k
9  ! Matrix
10      real*8 Lambda(2),R(2,2),L(2,2),w(2,2)
11
12 ! Roe Average
13
14      do j=0, jm-1
15        rhop(j)=Sqrt(rho(j)*rho(j+1))
16        up(j)=(Sqrt(rho(j))*u(j)+Sqrt(rho(j+1))*u(j+1))
17     *       /(Sqrt(rho(j))+Sqrt(rho(j+1)))
18      end do
19      rhop(jm)=rhop(jm-1)
20      up(jm)=up(jm-1)
21
22      do j=0, jm-1
23        Lambda(1)=Abs(up(j)-cs)
24        Lambda(2)=Abs(up(j)+cs)
25
26        R(1,1)= 1d0
27        R(1,2)= 1d0
28        R(2,1)= up(j)-cs
29        R(2,2)= up(j)+cs
30
31        L(1,1)= 0.5d0*(up(j)/cs+1d0)
32        L(1,2)= -0.5/cs
33        L(2,1)= -0.5d0*(up(j)/cs-1d0)
34        L(2,2)=  0.5/cs
```

```
35
36          do n1=1, 2
37            do n2=1, 2
38              w(n1,n2)=0.0
39              do k=1, 2
40                w(n1,n2)=w(n1,n2)+R(n1,k)*Lambda(k)*L(k,n2)
41              end do
42            end do
43          end do
44          E1(j)=0.5*(m(j+1)+m(j)
45       *                      -w(1,1)*(rho(j+1)-rho(j))
46       *                      -w(1,2)*(m(j+1)-m(j)))
47          E2(j)=0.5*(m(j+1)**2/rho(j+1)+m(j)**2/rho(j)
48       *             +cs2*(rho(j+1)+rho(j))
49       *                      -w(2,1)*(rho(j+1)-rho(j))
50       *                      -w(2,2)*(m(j+1)-m(j)))
51        end do
52
53        do j=1, jm-1
54          rho(j)=rho(j)-dtdx*(E1(j)-E1(j-1))
55          m(j)=m(j)-dtdx*(E2(j)-E2(j-1))
56        end do
57        rho(0)=rho(1)
58        m(0)=m(1)
59        rho(jm)=rho(jm-1)
60        m(jm)=m(jm-1)
61        do j=0, jm
62          u(j)=m(j)/rho(j)
63        end do
64
65        end
```

ここで 2×2 の配列要素 w(n1,n2) には、$R|\Lambda|R^{-1}$ を格納する。通常は $2 \times 2 \times 2$ の do ループを書かないで、do ループで行なわれていることを展開してプログラムするが、ここでは定式化と同じになるようにプログラミングしてある。

2.2.1 FDS 法の場合の結果

次に数値計算結果を見る。

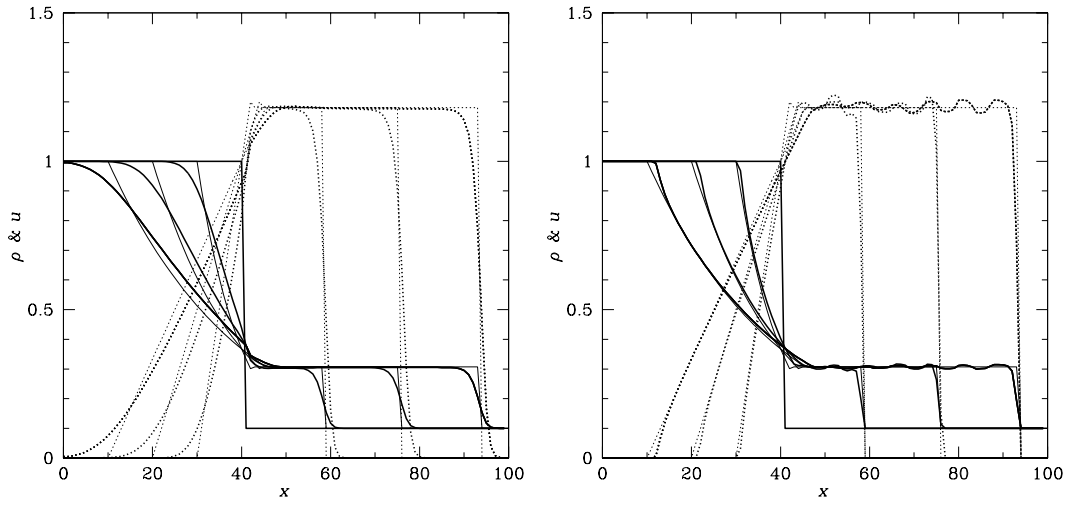

図 2.1: Roe の Flux Difference Splitting 法による衝撃波管問題の解。初期条件は同じ。左は空間 1 次精度、右は空間 2 次精度 (ただし MUSCL の $\kappa = -1$ の場合である)。太い線は計算値、細い線は解析解の値である。

これは初期状態

$$\rho_j = \begin{cases} 1, & j = 1, 40 \\ 0.1, & j = 41, 100 \end{cases} \tag{2.27}$$

$$u_j = 0, \quad j = 1, 100 \tag{2.28}$$

とし、$\Delta t = 0.25$、ステップ数 $n = 0, 40, 80, 120$ すなわち、$t = 0, 10, 20, 30$ の状態をプロットしたものである。$\Delta x = 1$ なので $a\Delta t/\Delta x = 0.25$ である。

この場合の解析解については、補章を参照せよ。

2.3 MUSCL による空間 2 次精度化

2.3.1 MUSCL 内挿

セルの境界での物理量をセルの中央でのそれから内挿する方法を考える。図 2.2 に示したように、$x_{j-1/2} \le x \le x_{j+1/2}$ に対して、物理量 u を内挿する。

$$u(x) = u_j + \frac{1}{\Delta x}(x - x_j)\delta_j u + \frac{3\kappa}{2\Delta x^2}\left[(x - x_j)^2 - \frac{\Delta x^2}{12}\right]\delta_j^2 u, \tag{2.29}$$

ただし、

$$\delta_j u = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2}, \tag{2.30}$$

$$\delta_j^2 u = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}, \tag{2.31}$$

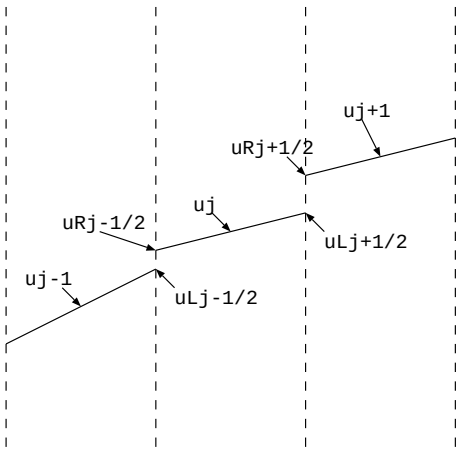

図 2.2: MUSCL 内挿法。

である。右辺第 3 項で $\Delta x^2/12$ という項がつくのは、

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (x - x_j)^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} = \frac{\Delta x^2}{12} \tag{2.32}$$

であるから、この区間について、$u(x)$ を積分して得た平均値と、u_j を等しくするためである。このように区分多項式で近似したときの、$j + 1/2$ での値は、左つまり j 側から補間すると、

$$\begin{aligned} (u_L)_{j+1/2} &= u_j + \frac{1}{2}\delta_j u + \frac{\kappa}{4}\delta_j^2 u, \\ &= u_j + \frac{1}{4}(1-\kappa)(u_j - u_{j-1}) + \frac{1}{4}(1+\kappa)(u_{j+1} - u_j), \end{aligned} \tag{2.33}$$

右つまり $j + 1$ 側から補間すると、

$$\begin{aligned} (u_R)_{j+1/2} &= u_{j+1} - \frac{1}{2}\delta_{j+1} u + \frac{\kappa}{4}\delta_{j+1}^2 u, \\ &= u_{j+1} - \frac{1}{4}(1+\kappa)(u_{j+1} - u_j) - \frac{1}{4}(1-\kappa)(u_{j+2} - u_{j+1}), \end{aligned} \tag{2.34}$$

この表式は κ の値によって、異なった精度の内挿公式となっている。$\kappa = -1$ とすると、

$$(u_L)_{j+1/2} = u_j + \frac{1}{2}(u_j - u_{j-1}), \tag{2.35}$$

$$(u_L)_{j-1/2} = u_{j-1} + \frac{1}{2}(u_{j-1} - u_{j-2}), \tag{2.36}$$

であるが、これから

$$\begin{aligned} (u_L)_{j+1/2} - (u_L)_{j-1/2} &= u_j - u_{j-1} + \frac{1}{2}(u_j - 2u_{j-1} + u_{j-2}), \\ &\simeq \Delta x \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j + \frac{1}{2}\Delta x \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{j-1} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j \right\} \right], \\ &= \Delta x \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j - \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_j \right], \end{aligned} \tag{2.37}$$

であるから、この表式は空間 2 次精度になっていることがわかる。従って、左から u_L を外挿して得るのに適した風上の 3 点 ($j-2$、$j-1$、j) を使ってできる 2 次の完全風上差分 (2nd-order fully upwind) となっていることがわかる。

また、$\kappa = 0$ とすると、

$$\begin{aligned}
(u_L)_{j+1/2} - (u_L)_{j-1/2} &= u_j - u_{j-1} + \frac{u_{j+1} - u_j}{4} - \frac{u_{j-1} - u_{j-2}}{4}, \qquad (2.38)\\
&= u_j - u_{j-1} + \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{4} + \frac{u_j - 2u_{j-1} + u_{j-2}}{4},\\
&= \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j - \frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j + \frac{\Delta x^2}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{j-1} + \frac{\Delta x^2}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j,\\
&= \Delta x \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j - \frac{\Delta x^2}{4}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{j-1/2}\right], \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

となる。これが空間 2 次精度になっていることは誤差が Δx^2 となっていることからわかり、式 (2.38) が左側から内挿したときに、風上側 3 点 $j-2$、$j-1$、j と風下側 1 点 $j+1$ をつかって表した 2 次精度の風上重点差分 (2nd-order upwind biased) であることがわかる。

$\kappa = 1$ とすると、式 (2.33) は

$$(u_L)_{j+1/2} = \frac{u_j + u_{j+1}}{2}, \qquad (2.40)$$

のように境界での値はその中央での値の算術平均に一致する。

2.4　FDS 法の空間 2 次精度化

前 2.2 節で見た FDS 法は、空間 1 次精度である。これを 2 次精度にするには 2.3 節で取り上げた MUSCL 法を用いれば良い。

FDS 法に MUSCL 法を適用するには、次のようにすればよい。

(1)$j+1/2$ の物理量を評価する Roe 平均にとられる Q_R と Q_L を MUSCL で内挿されたグリッド境界の値をとる (式 (??)、(??))。$j+1/2$ の物理量を、左側から内挿して求める場合は、

$$(Q_L)_{j+1/2} = Q_j + \frac{1}{4}\left[(1-\kappa)\Delta_j^- + (1+\kappa)\Delta_j^+\right], \qquad (2.41)$$

であり、右側から内挿して求める場合は、

$$(Q_R)_{j+1/2} = Q_{j+1} - \frac{1}{4}\left[(1-\kappa)\Delta_{j+1}^+ + (1+\kappa)\Delta_{j+1}^-\right], \qquad (2.42)$$

ここで、$\Delta^+ = Q_{j+1} - Q_j$ であり、$\Delta^- = Q_j - Q_{j-1}$ である。ただし、実際には $\Delta^\pm$ をそのまま使うのではなく、後述する流束制限関数を用いて　鈍らせた」ものを $\Delta^\pm$ のかわりに計算に用いる。

MUSCL 内挿をどの物理量に対して行なうかは任意性がある。経験的には、基本量　(密度、速度、圧力) を内挿して、それから他の量を求める方がうまく行くといわれている。

プログラムで変更する部分は、まず、Muscle 内挿を行なう部分で

```
1
2 ! Muscle
3
```

```
      call Muscle(rho,rhoL,rhoR)
      call Muscle(u,uL,uR)
      do j=0,jm
        mR(j)=rhoR(j)*uR(j)
        mL(j)=rhoL(j)*uL(j)
      end do
```

となる。ここで Muscle(w,wL,wR) は、配列 w(:) に格納された物理量の Muscle 内挿し、$(Q_L)_{j+1/2}$ の値を配列 wL(:) に、$(Q_R)_{j+1/2}$ の値を配列 wR(:) に格納するサブルーティン副プログラムである。

(2) 次に数値流束を

$$\tilde{E}_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(E_{j+1} + E_j - R|\Lambda|R^{-1}(Q_{j+1} - Q_j)\right) \tag{2.43}$$

から

$$\tilde{E}_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(E(Q_R) + E(Q_L) - R|\Lambda|R^{-1}(Q_R - Q_L)\right) \tag{2.44}$$

に高精度化する。この部分は次のようにプログラムに書けて、

```

      E1(j)=0.5*(mR(j)+mL(j)
     *                    -w(1,1)*(rhoR(j)-rhoL(j))
     *                    -w(1,2)*(mR(j)-mL(j)))
      E2(j)=0.5*(mR(j)**2/rhoR(j)+mL(j)**2/rhoL(j)
     *           +cs2*(rhoR(j)+rhoL(j))
     *                    -w(2,1)*(rhoR(j)-rhoL(j))
     *                    -w(2,2)*(mR(j)-mL(j)))
```

となる。図 2.1 にこの方法で求めたテスト問題の解を掲げる。空間 1 次精度の図 2.1 左に比べて改善されていることがわかる。

2.5 流束制限関数

式 (2.41) や式 (2.42) で、右辺が 1 項目だけであれば、 1 次精度の差分を与える。第 2 項目が高次の精度に寄与しているわけだが、第 1 章でも見たように、高次精度の差分解法は振動を起こす。これは、衝撃波面のようなするどい飛びを持つ部分で起こるので、このようなするどい飛びを持つ部分では、自動的に 1 次精度に落ち、スムーズな領域では高次精度を保つようにする工夫を考える。これが流束制限関数と呼ばれる概念である。MUSCL 内挿にこれを適用する場合には、するどい飛びを持つ部分、あるいは、振動を起こしている部分で $\Delta^{\pm}$ が 0 になり、スムーズな領域ではそのままの値をとるように

$$\bar{\Delta}^{\pm} = B(\Delta^{\pm}) \tag{2.45}$$

のようにフィルターを掛けることを考える。

振動を起こしている部分では Δ^+ と Δ^- とが異符合であるから、そのような部分では $B = 0$ とする。また Δ^+ と Δ^- とが同符合である場合は、それになるように選択する。

minmod 関数を制限関数に使う場合は、式 (2.41)、(2.42) の Δ^+ および Δ^- を

$$\bar{\Delta}^{+}_j = \mathrm{minmod}(\Delta^{+}_j, b\Delta^{-}_j), \tag{2.46}$$

$$\bar{\Delta}_j^- = \mathrm{minmod}(\Delta_j^-, b\Delta_j^+), \tag{2.47}$$

で置き換えればよい。ただしここで、$b = \frac{3-\kappa}{1-\kappa}$ であり、minmod 関数は

$$\mathrm{minmod}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \cdot y < 0 \\ x, & x \cdot y > 0 \text{ かつ } |x| > |y| \\ y & x \cdot y > 0 \text{ かつ } |x| < |y| \end{cases} \tag{2.48}$$

のように定義されている。

2.6　時間 2 次精度化

いままでの計算法は、空間方向の差分の精度では 1 次と 2 次のものを見てきたが、時間方向の差分の精度については 1 次精度であった。

空間方向と時間方向の差分の精度は独立に議論してはいけないのだが、常微分方程式の修正オイラー法つまり、$dy/dx = f(x,y)$ を

$$y^{n+1} = y^n + f(x^n, y^n)\Delta x \tag{2.49}$$

$$x^{n+1} = x^n + \Delta x \tag{2.50}$$

として解くオイラー法に対して、

$$y^{n+1} = y^n + f\left(x^n + \frac{\Delta x}{2}, y^n + f(x^n, y^n)\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x \tag{2.51}$$

$$x^{n+1} = x^n + \Delta x \tag{2.52}$$

とする修正オイラー法風の方法で 2 次化する。

Q^n から Q^{n+1} に写す時間 1 次精度の演算を

$$Q^{n+1} = Q^n + L(Q^n)\Delta t, \tag{2.53}$$

とし、時間 2 次精度の演算を

$$\begin{aligned} Q^{n+1/2} &= Q^n + L(Q^n)\frac{\Delta t}{2}, \\ Q^{n+1} &= Q^n + L(Q^{n+1/2})\Delta t, \end{aligned} \tag{2.54}$$

で実現する。

2.7　多次元問題

ここではポリトロピック ・ガスに関する流体力学の多次元問題 (2 次元以上) をオペレータ分割法を用いて取り扱う方法をのべる。 2 次元のポリトロピック ・ガスの流体力学の方程式は、$\mathbf{v} = (u,v)$ に対して、

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{2.55}$$

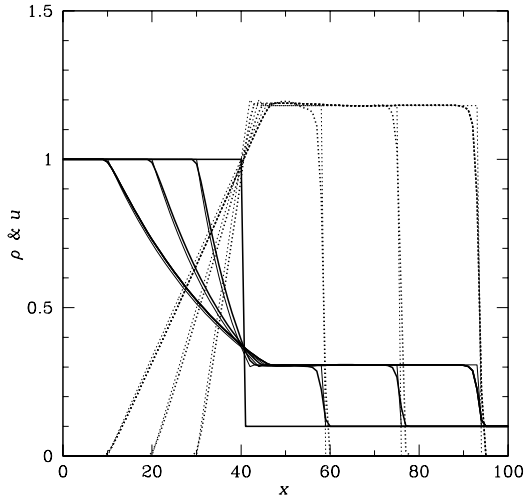

図 2.3: Roe の Flux Difference Splitting 法による衝撃波管問題の解。初期条件は前と同じ、空間、時間とも 2 次精度 (ただし MUSCL の $\kappa = 0$) の場合。太い線は計算値、細い線は解析解の値である。

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} \rho u \\ a^2\rho + \rho u^2 \\ \rho uv \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ a^2\rho + \rho v^2 \end{pmatrix}, \tag{2.56}$$

である。例えば Lax-Wendroff 法について考えれば、$\mathcal{O}(\Delta t^3)$ を無視すると、

$$Q^{n+1} = Q^n + \Delta t \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right) + \frac{\Delta t^2}{2}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right) \tag{2.57}$$

で 1 次元と同じように流束ヤコビアン A と B を使って、

$$Q_t = -AQ_x - BQ_y, \tag{2.58}$$

また

$$Q_{tt} = A(AQ_x)_x + A(BQ_y)_x + B(AQ_x)_y + B(BQ_y)_y, \tag{2.59}$$

であることに注意すると、

$$Q^{n+1} = Q^n - \Delta t(AQ_x + BQ_y) + \frac{\Delta t^2}{2}\left[A(AQ_x)_x + A(BQ_y)_x + B(AQ_x)_y + B(BQ_y)_y\right], \tag{2.60}$$

となることがわかる。

ここで、時間分割法は、これを

$$Q^{n+1/2} = Q^n - \Delta t E_x^n \tag{2.61}$$

と

$$Q^{n+1} = Q^{n+1/2} - \Delta t F_y^{n+1/2} \tag{2.62}$$

との連続した 2 つの 1 次元の方程式の解法に分解するものである。ただし、このままで式 (2.61) を (2.62) に代入すると、

$$Q^{n+1} = Q^n - \Delta t(AQ_x + BQ_y) + \frac{\Delta t^2}{2}\left[A(AQ_x)_x + 2B(AQ_x)_y + B(BQ_y)_y\right] + \mathcal{O}(\Delta t^3), \tag{2.63}$$

式 (2.60) と同じにはならない。これは流束ヤコビアン （行列 ）A と B が可換ではない

$$AB \neq BA \tag{2.64}$$

正確にいえば、

$$A(BQ_y)_x \neq B(AQ_x)_y \tag{2.65}$$

であるために発生する現象である。これを避けるには、分ステップを 4 分割して、その順序を回転させれば良い。すなわち、

$$Q^{n+1/4} = Q^n - \frac{\Delta t}{2}E_x^n \tag{2.66}$$

$$Q^{n+1/2} = Q^{n+1/4} - \frac{\Delta t}{2}F_y^{n+1/4} \tag{2.67}$$

$$Q^{n+3/4} = Q^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2}F_y^{n+1/2} \tag{2.68}$$

$$Q^{n+1} = Q^{n+3/4} - \frac{\Delta t}{2}E_x^{n+3/4} \tag{2.69}$$

とすればよい。ここで、式 (2.67) と (2.68) は 1 つの

$$Q^{n+3/4} = Q^{n+1/4} - \Delta t F_y^{n+1/4} \tag{2.70}$$

とすれば良いことは明らかであろう。

分ステップのオペレータを L_x のように書くと、

$$Q^{n+1} = {L_x}^{1/2} L_y {L_x}^{1/2} Q^n, \tag{2.71}$$

のように書ける。このように書くと、 1 ステップ進むのに、 3 分ステップの計算が必要なように見えるが、もし Q^{n+1} の値が必要でないなら、直前の ${L_x}^{1/2}$ は Q^{n+1} の直後に出てくる $L_x^{1/2}$ と一緒に計算して

$$\cdots L_x L_y L_x L_y L_x^{1/2} Q^n, \tag{2.72}$$

のように計算すれば良い。これは 3 次元にすると、

$$Q^{n+1} = {L_x}^{1/6}{L_y}^{1/6}{L_z}^{1/3}{L_y}^{1/6}{L_x}^{1/3}{L_z}^{1/6}{L_y}^{1/3}{L_x}^{1/6}{L_z}^{1/3}{L_x}^{1/6}{L_y}^{1/3}{L_z}^{1/6}{L_x}^{1/6} Q^n, \tag{2.73}$$

のようにすれば良いことになる。

2.8 FVS (Flux Vector Splitting)

流体力学の風上差分解法を作るもう一つの有力な方法がFlux Vector Splittingである。これは、数値流束を、式(1.81)すなわち

$$F_{j+1/2} = \frac{c-|c|}{2}u_{j+1} + \frac{c+|c|}{2}u_j, F_{j-1/2} = \frac{c-|c|}{2}u_j + \frac{c+|c|}{2}u_{j-1}, \tag{2.74}$$

これを書き換えると、

$$F_{j+1/2} = \begin{cases} cu_j, & \text{for} \quad c>0 \\ cu_{j+1}, & \text{for} \quad c<0 \end{cases} \quad F_{j-1/2} = \begin{cases} cu_{j-1}, & \text{for} \quad c>0 \\ cu_j, & \text{for} \quad c<0 \end{cases} \tag{2.75}$$

を手本に書き直す。つまり、固有値

$$\Lambda^{\pm} = \frac{\Lambda \pm |\Lambda|}{2} \tag{2.76}$$

を考える。Λ^+ は Λ のうち正の固有値のみを持つ行列、Λ^- は負の固有値のみを持つ行列である。この速度でやりとりされる流束の方も、Λ^+ によって移動する E^+ と Λ^- によって移動する E^- とに分離することを考える。そこで、E^+ については後退差分を、E^- については前進差分をとれば自然と風上差分が実現する。この方法を、Flux Vector Splitting(FVS:流速分離)法という。空間微分の項は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_j &= \frac{\tilde{E}_{j+1/2} - \tilde{E}_{j-1/2}}{\Delta x} \\ &= \frac{(E^+_j + E^-_{j+1}) - (E^+_{j-1} + E^-_j)}{\Delta x} \end{aligned} \tag{2.77}$$

のように書ける。ここで、流束は

$$E^+ = R\Lambda^+ R^{-1} Q, \tag{2.78}$$

$$E^- = R\Lambda^- R^{-1} Q, \tag{2.79}$$

のように計算される。

FDS法にしてもFVS法にしても、1次精度風上差分の自然な拡張になっていることがわかる。

第3章　流体力学の風上差分法

3.1　断熱気体の流体力学の差分解法

これまでの基礎の上に立って、この章では、流体力学の方程式を差分法によって解くことを学ぶ。

3.1.1　オイラー方程式

1次元の流体の基礎方程式は、3つの式をベクトルのように並べて書いて、

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}=0 \tag{3.1}$$

と書けるただし、Q と E は物理量を並べたベクトルで、

$$Q=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ e\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}\rho u\\ p+\rho u^2\\ (e+p)u\end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

である。ここで、$\rho u=m$ と書いて従属変数を

$$Q=\begin{pmatrix}\rho\\ m\\ e\end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

に書き直すと、E の方はこれを使って

$$E=\begin{pmatrix}m\\ (\gamma-1)e+\frac{3-\gamma}{2}\frac{m^2}{\rho}\\ \frac{1-\gamma}{2}\frac{m^3}{\rho^2}+\gamma\frac{em}{\rho}\end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

のように書ける。質量密度、運動量密度、エネルギー密度は（大きな体積で積分すれば保存する量なので）保存量と呼ばれる。

式 (3.1) を $\frac{\partial Q}{\partial t}+A\frac{\partial Q}{\partial x}=0$ のように書き直すことを考える

$$\frac{\partial E_k}{\partial x}=\sum_l\frac{\partial E_k}{\partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial x}=A_{k,l}\frac{\partial Q_l}{\partial x} \tag{3.5}$$

のように書きなおせて、ここに出てくる

$$A_{k,l}=\frac{\partial E_k}{\partial Q_l} \tag{3.6}$$

を流束ヤコビアンと呼ぶ。具体的に書き下すと、

$$
\begin{aligned}
A_{k,l} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial m}{\partial \rho} & \frac{\partial m}{\partial m} & \frac{\partial m}{\partial e} \\ \frac{\partial (\gamma-1)e+(3-\gamma)m^2/2\rho}{\partial \rho} & \frac{\partial (\gamma-1)e+(3-\gamma)m^2/2\rho}{\partial m} & \frac{\partial (\gamma-1)e+(3-\gamma)m^2/2\rho}{\partial e} \\ \frac{\partial (1-\gamma)m^3/2\rho^2}{\partial \rho} & \frac{\partial (1-\gamma)m^3/2\rho^2}{\partial m} & \frac{\partial (1-\gamma)m^3/2\rho^2}{\partial e} \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3-\gamma}{2}\frac{m^2}{\rho^2} & (3-\gamma)\frac{m}{\rho} & \gamma-1 \\ (\gamma-1)\frac{m^3}{\rho^3} - \gamma\frac{em}{\rho^2} & \frac{3(1-\gamma)}{2}\frac{m^2}{\rho^2} + \gamma\frac{e}{\rho} & \gamma\frac{m}{\rho} \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3-\gamma}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ (\frac{\gamma}{2}-1)u^3 - \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}u & \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \frac{3-2\gamma}{2}u^2 & \gamma u \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

保存量 Q (質量密度、運動量密度、エネルギー密度) を使って書いた式の代わりに、基本量 $q = (\rho, u, p)$ (密度、速度、圧力) を用いて非保存形の式を書くこともできて、

$$
\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix} = 0, \tag{3.8}
$$

のように書くこともできる。シンボリックな書き方をすれば

$$
\frac{\partial q}{\partial t} + M\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \tag{3.9}
$$

となる。M は基本量 q に関する流束ヤコビアンである。

3.1.2　特性速度

式 (3.2) や (3.8) を第 1 章で見た advection の形に書き直すことを考える。すなわち、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Q_1'}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial Q_1'}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial Q_2'}{\partial t} + \lambda_2\frac{\partial Q_2'}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial Q_3'}{\partial t} + \lambda_3\frac{\partial Q_3'}{\partial x} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

の形に変形するのである。これができれば、それぞれの式に第 2 章でみた高精度風上差分の方法を適応することによって流体力学の方程式も解くことができる。

式 (3.8) を上の形に書き直すのは行列 M を対角化するということに相当する。行列 M を対角化するとは、

$$
M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \tag{3.11}
$$

となる固有ベクトル $\mathbf{x}$ と固有値 λ をもとめることに帰着する。これは、

$$
\det(M - \lambda I) = 0 \tag{3.12}
$$

$$\det \begin{pmatrix} u-\lambda & \rho & 0 \\ 0 & u-\lambda & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u-\lambda \end{pmatrix} = 0 \tag{3.13}$$

の特性方程式の解を求めると、

$$\begin{aligned} (u-\lambda)^3 - (u-\lambda)(\gamma p/\rho) &= 0, \\ [\lambda-(u-c)]\,[\lambda-u]\,[\lambda-(u+c)] &= 0, \end{aligned} \tag{3.14}$$

であるから、固有値は音速 $c=(\gamma p/\rho)^{1/2}$ を使って、

$$\lambda_1 = u-c, \tag{3.15}$$

$$\lambda_2 = u, \tag{3.16}$$

$$\lambda_3 = u+c, \tag{3.17}$$

$$\tag{3.18}$$

であることがわかる。

```
d={{u,rho,0},{0,u,1/rho},{0,g p,u}}

Simplify[Eigenvalues[d]]/.Sqrt[g]Sqrt[p]/Sqrt[rho]-> cs

{u, -cs + u, cs + u}
```

この速度は、それぞれ、物体の流れる速度 (λ_2)、物体に対して左方向に伝わる音波の速度 (λ_1)、おなじく右方向に伝わる音波の速度 (λ_3) である。さらに、固有ベクトルは

$$M\mathbf{x_1} = \lambda_1 \mathbf{x_1}, \tag{3.19}$$

を解いて、

$$\begin{cases} cx_1 + \rho x_2 = 0, \\ cx_2 + \frac{1}{\rho} x_3 = 0, \\ \gamma p x_2 + c x_3 = 0, \end{cases} \tag{3.20}$$

から

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} \rho \\ -c \\ \rho c^2 \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

となる。同じようにして、

$$\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x_3} = \begin{pmatrix} \rho \\ c \\ \rho c^2 \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

となることがわかる。この固有ベクトルを横に並べた行列 (右固有行列)

$$R = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}) = \begin{pmatrix} \rho & \rho & \rho \\ -c & 0 & c \\ \rho c^2 & 0 & \rho c^2 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

および、その逆行列 R^{-1} を考え、M に左から R^{-1} を、右から R を掛けると、

$$R^{-1}M\ R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \equiv \Lambda \tag{3.24}$$

となる。

R の逆行列は

```
R={{rho,rho,rho},{-c,0,c},{rho c^2,0,rho c^2}}
                                    2           2
{{rho, rho, rho}, {-c, 0, c}, {c  rho, 0, c  rho}}
Inverse[R]//MatrixForm//TeXForm
```

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2c} & \frac{1}{2c^2\rho} \\ \frac{1}{\rho} & 0 & -\frac{1}{c^2\rho} \\ 0 & \frac{1}{2c} & \frac{1}{2c^2\rho} \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

のようにして求められる。

式 (3.9) に左から R^{-1} を掛けると、

$$R^{-1}\frac{\partial q}{\partial t} + R^{-1}MRR^{-1}\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \tag{3.26}$$

となるが、R^{-1} が空間、時間の微小部分ついては一定と考えられるならば、

$$\frac{\partial R^{-1}q}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial R^{-1}q}{\partial x} = 0 \tag{3.27}$$

であり、3 つの独立したスカラー方程式に分離できたことになる。もうすこし正確にいうと、

$$R^{-1}\frac{\partial q}{\partial t} + \Lambda R^{-1}\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \tag{3.28}$$

とは、$\Delta x/\Delta t = \Lambda_i$ に沿って、$R_i^{-1}\Delta q$ (R_i^{-1} は R^{-1} の第 i 行のみでできた行ベクトル) が一定であることをいっている。たとえば、$R_1^{-1} = (0, -\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c^2\rho}) = \frac{1}{2\rho c^2}(0, -\rho c, 1)$ で $R_1^{-1}\Delta q = \frac{1}{2\rho c^2}(0\cdot\Delta\rho, \rho c\Delta u, 1\cdot\Delta p)$ $= \frac{1}{\rho c^2}(\Delta p - \rho c\Delta u)$ が $dx/dt = u - c$ に沿って 0 になることを意味している。

この独立したスカラー方程式それぞれは $R^{-1}q$ の 3 つの成分それぞれに対する advection の方程式に合致している。ただし、その速度が $\lambda_1 = u - c$、$\lambda_2 = u$、$\lambda_3 = u + c$ と異なっていることが違っている。それぞれの変数に対して風上差分を考えることは第 2 章と同じようにできる。これが流体力学に関する高解像度風上差分の基本である。

なお流束ヤコビアン A から保存量に対する固有行列を求めておくと

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u - c & u & u + c \\ H - uc & \frac{1}{2}u^2 & H + uc \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(b_1 + \frac{u}{c}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} + b_2 u\right) & \frac{1}{2}b_2 \\ 1 - b_1 & b_2 u & -b_2 \\ \frac{1}{2}\left(b_1 - \frac{u}{c}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} - b_2\right) & \frac{1}{2}b_2 \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

である。ただしここで

$$b_1 = \frac{\gamma - 1}{2}\frac{u^2}{c^2} \tag{3.31}$$

$$b_2 = \frac{\gamma - 1}{c^2} \tag{3.32}$$

を表す。

3.2 FDS 法

$$Q_t + AQ_x = 0, \tag{3.33}$$

に左固有行列 (右固有行列の逆行列) R^{-1} を左から掛けると、

$$R^{-1}Q_t + R^{-1}ARR^{-1}Q_x = 0, \tag{3.34}$$

よって、R が微小な Δt、Δx に関して一定とみなせるなら、

$$\frac{\partial R^{-1}Q}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial R^{-1}Q}{\partial x} = 0 \tag{3.35}$$

のように書ける。ここで、風上差分の数値流束を

$$(\Lambda R^{-1}Q)_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(\Lambda(R^{-1}Q)_{j+1} + \Lambda(R^{-1}Q)_j - |\Lambda|R^{-1}(Q_{j+1} - Q_j)\right) \tag{3.36}$$

左から R を掛けると

$$R\Lambda R^{-1}Q_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(R\Lambda R^{-1}Q_{j+1} + R\Lambda R^{-1}Q_j - R|\Lambda|R^{-1}(Q_{j+1} - Q_j)\right) \tag{3.37}$$

となるが、この式は

$$E_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(E_{j+1} + E_j - R|\Lambda|R^{-1}(Q_{j+1} - Q_j)\right) \tag{3.38}$$

と書き直すことができて、FDS (Flux Difference Spilitting) スキームの数値流速を与える。

ここで $R|\Lambda|R^{-1}$ の項は $j + 1/2$ についての量なのであるが、FDS スキームでは、Roe の近似リーマン解法を用いてこの中間値を評価する。

1 次元の単純な衝撃波管問題 (リーマン問題) の解は解析的に得られる。j および $j + 1$ のグリッドの時間 t での物理量がわかっていれば、その後の解を正確にとくことができてこれを $j + 1/2$ の物理量の評価に用いることができる。これを正確に解くのではなく、近似的に解いて (近似リーマン解法) それを $j + 1/2$ の物理量の評価に用いる。Roe の近似リーマン解法と呼ばれるものは、境界の左側の物理量 Q_L と右側の物理量 Q_R を用いて、平均の値 Q_{ave} を

$$\rho_{ave} = \sqrt{\rho_L\rho_R}, \tag{3.39}$$

$$u_{ave} = \frac{\sqrt{\rho_L}u_L + \sqrt{\rho_R}u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \tag{3.40}$$

$$H_{ave} = \frac{\sqrt{\rho_L}H_L + \sqrt{\rho_R}H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \tag{3.41}$$

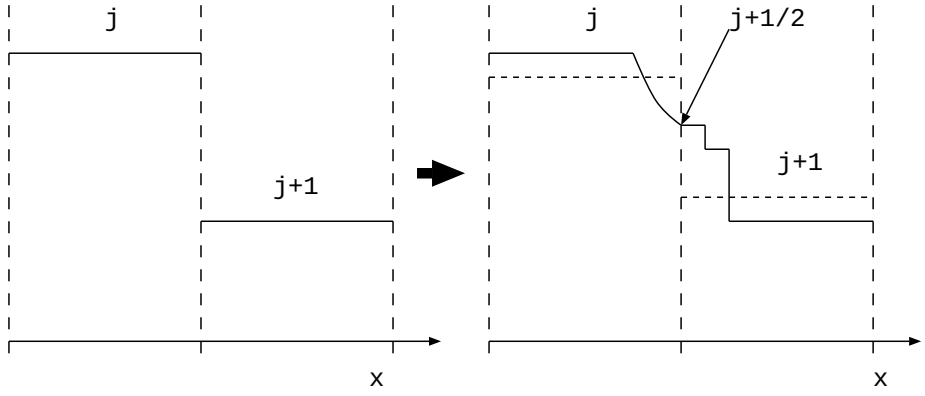

図 3.1: 近似リーマン解法の概念図。物理量がグリッドの内部で空間的に一定だったとして (左の図)、その Δt 後の物理量の分布 (リーマン問題) を解く。たとえばそれが右の図のようなものであったとして、ここで得られた $j+1/2$ の物理量を用いて流束を計算する方法を (1 次精度の) Gonunov 法という。このようにして得た $j+1/2$ の物理量を風上差分の数値流束の評価に用いる方法を近似リーマン解法を用いた差分法と呼ぶ。

$$c_{ave}^2 = (\gamma - 1)(H_{ave} - \frac{1}{2}u_{ave}^2), \tag{3.42}$$

(H は単位質量あたりの全エンタルピーで $H = (e+p)/\rho = u^2/2 + \gamma/(\gamma-1)\cdot p/\rho$ である) のように平均量 (Roe 平均) を得るものである。

この評価式は、

(1) 流束ヤコビアンに関する $\partial E/\partial x = A\partial Q/\partial x$ が差分式についてもなり立つこと :
$E(Q_R) - E(Q_L) = A(Q_R, Q_L)(A_R - Q_L) = A_{ave}(Q_R - Q_L)$。

(2) $A(Q_R, Q_L)$ は A と同じように、実固有値と線形独立な固有ベクトルを持つこと。

(3) $A(Q, Q) = A(Q)$ という対称性を持つこと。

これら (Property U) を満たすものとして Roe により提案されたものである。

プログラムは、第 1 に

```
1
2   for j:=0 to jm-1 do  // Roe Average
3   begin
4     rhop[j]:=Sqrt(rho[j]*rho[j+1]);
5     up[j]:=(Sqrt(rho[j])*u[j]+Sqrt(rho[j+1])*u[j+1])/(Sqrt(rho[j])+Sqrt(rho[j+1]));
6     Hp[j]:=(Sqrt(rho[j])*H[j]+Sqrt(rho[j+1])*H[j+1])/(Sqrt(rho[j])+Sqrt(rho[j+1]));
7     cp[j]:=Sqrt(gam1*(Hp[j]-up[j]*up[j]/2))
8   end;
```

で rhop[j] などに Roe 平均 $j+1/2$ の評価値を求める。次に、右固有行列 R を R[1,m] に、その逆行列 R^{-1} を L[1,m] に求める。w[n1,n2] は $R|\Lambda|R^{-1}$ が格納される。最後に数値流束を E[j] に求めている。

```
1
2   for j:=0 to jm-1 do
```

```
3   begin
4     Lambda[1]:=Abs(up[j]-cp[j]);
5     Lambda[2]:=Abs(up[j]);
6     Lambda[3]:=Abs(up[j]+cp[j]);
7
8     R[1,1]:= 1;
9     R[1,2]:= 1;
10    R[1,3]:= 1;
11    R[2,1]:= up[j]-cp[j];
12    R[2,2]:= up[j];
13    R[2,3]:= up[j]+cp[j];
14    R[3,1]:= Hp[j]-up[j]*cp[j];
15    R[3,2]:= Sqr(up[j])/2;
16    R[3,3]:= Hp[j]+up[j]*cp[j];
17
18    b1:=gam1/2*Sqr(up[j]/cp[j]);
19    b2:=gam1/Sqr(cp[j]);
20
21    L[1,1]:= 0.5*(b1+up[j]/cp[j]);
22    L[1,2]:= -0.5*(1/cp[j]+b2*up[j]);
23    L[1,3]:= 0.5*b2;
24    L[2,1]:= 1-b1;
25    L[2,2]:= b2*up[j];
26    L[2,3]:= -b2;
27    L[3,1]:= 0.5*(b1-up[j]/cp[j]);
28    L[3,2]:= 0.5*(1/cp[j]-b2*up[j]);
29    L[3,3]:= 0.5*b2;
30
31    for n1:=1 to 3 do
32    begin
33      for n2:=1 to 3 do
34      begin
35        w[n1,n2]:=0.0;
36        for k:=1 to 3 do
37        begin
38          w[n1,n2]:=w[n1,n2]+R[n1,k]*Lambda[k]*L[k,n2];
39        end;
40      end;
41    end;
42    E1[j]:=0.5*(m[j+1]+m[j]
43                            -w[1,1]*(rho[j+1]-rho[j])
```

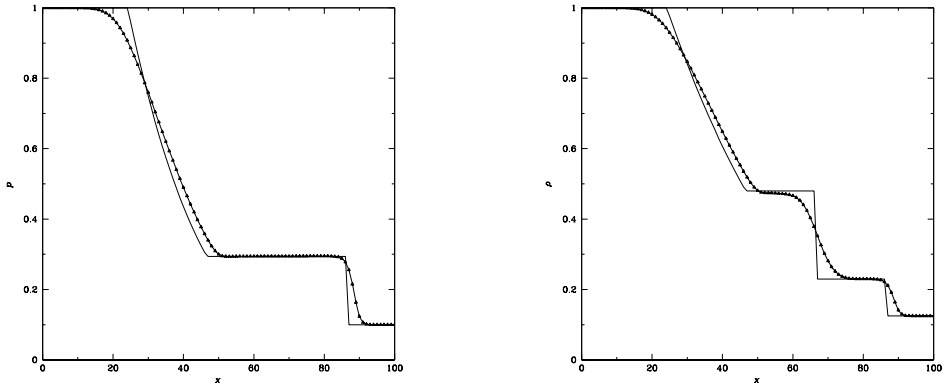

図 3.2: Roe の Flux Difference Splitting 法による衝撃波管問題の解。初期条件は同じ。

```
                          -w[1,2]*(m[j+1]-m[j])
                          -w[1,3]*(e[j+1]-e[j]));
  E2[j]:=0.5*(gam1*(e[j+1]+e[j])+gam3/2*(Sqr(m[j+1])/rho[j+1]+Sqr(m[j])/rho[j])
                          -w[2,1]*(rho[j+1]-rho[j])
                          -w[2,2]*(m[j+1]-m[j])
                          -w[2,3]*(e[j+1]-e[j]));
  E3[j]:=0.5*(gamma*(e[j+1]*m[j+1]/rho[j+1]+e[j]*m[j]/rho[j])
        -gam1/2*(Sqr(m[j+1]/rho[j+1])*m[j+1]+Sqr(m[j]/rho[j])*m[j])
                          -w[3,1]*(rho[j+1]-rho[j])
                          -w[3,2]*(m[j+1]-m[j])
                          -w[3,3]*(e[j+1]-e[j]));
end;
```

この数値流束を用いて時間進化を計算すれば良い。これを使って得られた解を図 3.2 に掲げた。

```
for j:=1 to jm-1 do
begin
  rho[j]:=rho[j]-nu*(E1[j]-E1[j-1]);
  m[j]:=m[j]-nu*(E2[j]-E2[j-1]);
  e[j]:=e[j]-nu*(E3[j]-E3[j-1]);
end;
```

3.3 FVS法

固有値

$$\Lambda^{\pm} = \frac{\Lambda \pm |\Lambda|}{2} \tag{3.43}$$

を考える。Λ^+ は Λ のうち正の固有値のみを持つ行列、Λ^- は負の固有値のみを持つ行列である。この速度でやりとりされる流束の方も、Λ^+ によって移動する E^+ と Λ^- によって移動する E^- とに分離することを考える。そこで、E^+ については後退差分を、E^- については前進差分をとれば自然と風上差分が実現する。この方法を、Flux Vector Splitting(FVS:流速分離) 法という。

空間微分の項は

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_j &= \frac{\tilde{E}_{j+1/2} - \tilde{E}_{j-1/2}}{\Delta x} \\ &= \frac{(E^+_j + E^-_{j+1}) - (E^+_{j-1} + E^-_j)}{\Delta x}\end{aligned} \tag{3.44}$$

のように書ける。ここで、流束は

$$E^+ = R\Lambda^+ R^{-1} Q, \tag{3.45}$$

$$E^- = R\Lambda^- R^{-1} Q, \tag{3.46}$$

のように計算される。

プログラムを見てみよう。右固有行列 R をR[1,m] に、その逆行列 R^{-1} をL[1,m] に求めるところは FDS と同じである。w[n1,n2] は $R\Lambda^+ R^{-1}$ が格納される。最後にこれに伴う数値流束 $R\Lambda^+ R^{-1}Q$ をEp[j] に求めている。

```
1
2     for n1:=1 to 3 do
3     begin
4       for n2:=1 to 3 do
5       begin
6         w[n1,n2]:=0.0;
7         for k:=1 to 3 do
8         begin
9           w[n1,n2]:=w[n1,n2]
10            +R[n1,k]*max(0.0,Lambda[k])*L[k,n2];
11        end;
12      end;
13    end;
14    E1p[j]:=w[1,1]*rho[j]+w[1,2]*m[j]+w[1,3]*e[j];
15    E2p[j]:=w[2,1]*rho[j]+w[2,2]*m[j]+w[2,3]*e[j];
16    E3p[j]:=w[3,1]*rho[j]+w[3,2]*m[j]+w[3,3]*e[j];
```

つぎに、w[n1,n2] は $R\Lambda^- R^{-1}$ が格納される。最後にこれに伴う数値流束 $R\Lambda^- R^{-1}Q$ をEm[j] に求めている。

```
1
2     for n1:=1 to 3 do
```

```
    begin
      for n2:=1 to 3 do
      begin
        w[n1,n2]:=0.0;
        for k:=1 to 3 do
        begin
          w[n1,n2]:=w[n1,n2]
            +R[n1,k]*min(0.0,Lambda[k])*L[k,n2];
        end;
      end;
    end;
    E1m[j]:=w[1,1]*rho[j]+w[1,2]*m[j]+w[1,3]*e[j];
    E2m[j]:=w[2,1]*rho[j]+w[2,2]*m[j]+w[2,3]*e[j];
    E3m[j]:=w[3,1]*rho[j]+w[3,2]*m[j]+w[3,3]*e[j];
  end;
```

ここで得られた数値流束は E^{+}(Ep[j]) については後退差分、E^{-}(Em[j]) については前進差分をとって、時間進化を計算することによって、Δt だけ進んだ状態を計算することができる。

```
  for j:=1 to jm-1 do
  begin
    rho[j]:=rho[j]-nu*(E1p[j]+E1m[j+1]-E1p[j-1]-E1m[j]);
    m[j]  :=m[j]  -nu*(E2p[j]+E2m[j+1]-E2p[j-1]-E2m[j]);
    e[j]  :=e[j]  -nu*(E3p[j]+E3m[j+1]-E3p[j-1]-E3m[j]);
  end;
```

この数値流束を用いて時間進化を計算すれば良い。これを使って得られた解を図 3.3 に掲げた。

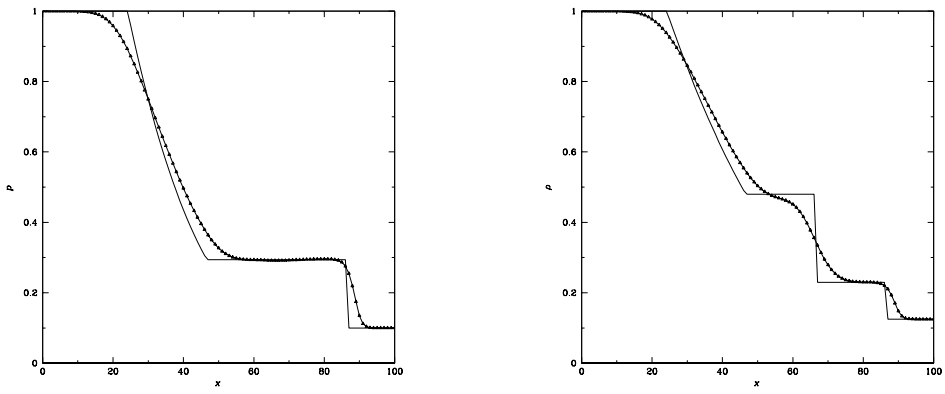

図 3.3: Steger Warming の Flux Vector Splitting 法による衝撃波管問題の解。初期条件は同じ。

付 録A　衝撃波管の解析解

A.1　等温衝撃波

衝撃波に止まった系で、衝撃波前面の速度を u_1、衝撃波後面の速度を u_2、それぞれの密度を、ρ_1、ρ_2、とおくと、ランキン ・ユゴニオ関係から、

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \tag{A.1}$$

$$\rho_1(u_1^2 + a^2) = \rho_2(u_2^2 + a^2), \tag{A.2}$$

ここで、式 (A.1) から

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = x, \tag{A.3}$$

と置くと、式 (A.2) は

$$x^2 - (M_1^2 + 1)x + M_1^2 = 0, \tag{A.4}$$

となり、これから、

$$x = M_1^2 = \left(\frac{u_1}{a}\right)^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \tag{A.5}$$

よって、

$$u_1 u_2 = a^2 \tag{A.6}$$

となる。衝撃波の前方は静止していたとき、静止系から見た時の衝撃波後面の速度 U_2 は、衝撃波面の進む速度を $V_s = u_1$ として

$$U_2 = V_s - u_2 = V_s - \frac{a^2}{V_s}, \tag{A.7}$$

であり、衝撃波後面の密度は

$$\rho_2 = \rho_1 \left(\frac{V_s}{a}\right)^2 \tag{A.8}$$

となる。

A.2　等温の場合の Riemann 不変量

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{A.9}$$

を ρ で割ったもの

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} = 0, \tag{A.10}$$

と、運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{A.11}$$

を等温音速 a で割ったもの、

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} + a\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} = 0, \tag{A.12}$$

から、式 (A.10) と式 (A.12) を加えると、

$$\frac{\partial \ln \rho + \mathcal{M}}{\partial t} + (u+a)\frac{\partial \ln \rho + \mathcal{M}}{\partial x} = 0, \tag{A.13}$$

また、式 (A.10) から式 (A.12) を引くと、

$$\frac{\partial \ln \rho - \mathcal{M}}{\partial t} + (u-a)\frac{\partial \ln \rho - \mathcal{M}}{\partial x} = 0, \tag{A.14}$$

が得られる。すなわち、C_+ カーブ $dx/dt = u+a$ では、$J_+ = \ln\rho + \mathcal{M}$ が一定で、C_- カーブ $dx/dt = u-a$ では、$J_- = \ln\rho - \mathcal{M}$ が一定となる。この $J_\pm$ が等温の場合の Rieman 不変量である。

A.3 等温の場合の衝撃波管の解析解

マイナス方向に希薄波が伝搬する。その上では右向きに伝わる C_+ に沿って、J_+ が一定である。C_+ は、もっとも左側の静止している部分につながっていることに注意すると、

$$J_+ = \ln\rho + \mathcal{M} = \ln\rho_H, \tag{A.15}$$

ここで ρ_H はもっとも左側の静止している部分の密度である。これから、

$$\frac{\rho}{\rho_H} = \exp(-\mathcal{M}), \tag{A.16}$$

が成り立つ。希薄波のもっとも右側の密度と、速度が衝撃波後面のそれ（U_2、ρ_2）に等しいことを用いると、

$$\frac{\rho_2}{\rho_H} = \exp\left(-\frac{U_2}{a}\right), \tag{A.17}$$

等温衝撃波の条件式 (A.7、A.8) から、もっとも右側の静止している衝撃波前面の密度 ρ_L と、もっとも左側の静止している希薄の先の密度 ρ_H と、衝撃波の速度の関係が以下のように得られる。

$$\frac{\rho_L\left(\frac{V_s}{a}\right)^2}{\rho_H} = \exp\left[-\left(\frac{V_s}{a} - \frac{a}{V_s}\right)\right], \tag{A.18}$$

これは $V_s/a = \xi$ とおくと、

$$\xi^2 \exp\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) = \frac{\rho_H}{\rho_L}, \tag{A.19}$$

となる。この解は数値的に求めると、$\frac{\rho_H}{\rho_L} = 10$ のときに、$\xi = 1.75194...$ で $\xi - \frac{1}{x} = 1.1811...$ のように求められる。

すなわち、初期の密度の不連続の位置を原点にとり、$a = 1$ とすると、

$$\rho = \begin{cases} \rho_L & x > \xi t \\ \rho_L \xi^2 & (\xi - \frac{1}{\xi} - 1)t < x < \xi t \\ \rho_H \exp(-\mathcal{M}) & -t < x < (\xi - \frac{1}{\xi} - 1)t \\ \rho_H & x < -t \end{cases} \tag{A.20}$$

$$U = \begin{cases} 0 & x > \xi t \\ \xi - \frac{1}{\xi} & (\xi - \frac{1}{\xi} - 1)t < x < \xi t \\ \frac{x+t}{t} & -t < x < (\xi - \frac{1}{\xi} - 1)t \\ 0 & x < -t \end{cases} \tag{A.21}$$

となる。これを数値計算の結果と比較する。

付 録B　計算のこと

B.1　Makefile

一連のプログラムの翻訳（コンパイル）、結合、実行などの手続きはMakefileというファイルに記述しておく。そして

```
1
2 make ターゲット
```

というmakeコマンドでターゲットを実現する（ファイルを作ったり、なにかを実行したりする）。これによって、サブルーティンごと（この例では、プログラムはサブルーティンごとmain.F、initia.F、FDS.F、FDS2.F、Muscle.Fに格納されている）の分割コンパイル時に必要なもののみが再翻訳される。

B.1.1　基本的なMakefileを書く方法

基本は、

```
1
2 ターゲット: 元になるもの1 元になるもの2　元になるもの3
3 <-- タブ -->元になるものからターゲットを作成する方法
```

という形であり、以下の例では、

```
1
2 main.o: main.F var.h
```

の部分で、main.Fをコンパイルする時に（普通のFortranコンパイラーにとって、拡張子.Fをもつファイルに格納されたソースプログラムはまずCのプリプロセッサー(CPP)に通されてからFortranコンパイラーに掛けられる。#includeのようなCPPの制御文が書かれていることを拡張子.Fは示している。）、var.hが必要であること（依存関係がありvar.hが変更された場合は、main.Fの再コンパイルが必要なこと）が示されている。

```
1
2 <-- タブ -->$(F77) $(CFLAGS) -c -o main.o main.F
```

の部分で、main.oを作成する（翻訳する）コマンドが記述されている。$(F77)と$(CFLAGS)は変数を引用しており、上の方で定義されている。

ここでは、主プログラム以外のサブルーティンは翻訳した後libFDS.aというファイルにライブラリとしてアーカイブしている。

実行ファイルを作成する時には

```
1
2 FDS: main.o  libFDS.a
```

```
<-- タブ -->$(F77) $(LFLAGS) -o FDS main.o -L. -lFDS
```

で main.o を入力し、FDS という実行ファイルを作成する。そのとき、-lFDS 引数で libFDS.a から検索して結合することを指定している。

Makefile の例

```
#!/bin/sh
#
F77 = f77
CFLAGS = -u
LFLAGS =
#
all: FDS
./FDS

main.o: main.F var.h
$(F77) $(CFLAGS) -c -o main.o main.F
#
initia.o: initia.F param.h dim.h var.h
$(F77) $(CFLAGS) -c -o initia.o initia.F
#
FDS.o: FDS.F param.h dim.h var.h
$(F77) $(CFLAGS) -c -o FDS.o FDS.F
#
FDS2.o: FDS2.F param.h dim.h var.h
$(F77) $(CFLAGS) -c -o FDS2.o FDS2.F
#
Muscle.o: Muscle.F param.h
$(F77) $(CFLAGS) -c -o Muscle.o Muscle.F
#
output.o: output.F param.h dim.h var.h
$(F77) $(CFLAGS) -c -o output.o output.F
#
libFDS.a: initia.o output.o FDS.o FDS2.o Muscle.o
ar ru libFDS.a  initia.o output.o FDS.o FDS2.o Muscle.o
#
FDS: main.o  libFDS.a
$(F77) $(LFLAGS) -o FDS main.o -L. -lFDS
```

B.2 Gnuplot

１次元の計算結果を簡単にグラフにする方法のひとつとして Gnuplot をあげておく。

B.2.1 データの作成法

データは

```
      do j=0,Nx
        write(*,'(2(3x,f10.3))') j,rho(j),u(j)
      end do
      write(*,*)
```

のようなプログラムで、１行に配列要素番号、そこの密度、そこの速度がこの順に並び、次の点のデータが次の行に並ぶように作成する。一連のデータが書き終ったら、空の行を１行つけておく。

さらに時間が経った後のデータもこの後に同じようにつけておく。これをファイルに保存しておく。

B.2.2 プロット法

まず、プロンプトから gnuplot コマンドを実行するそうすると、

```
        G N U P L O T
        Unix version 3.7
        patchlevel 1 (+1.1.9 1999/11/08)
        last modified Fri Oct 22 18:00:00 BST 1999
        途中省略
Terminal type set to 'x11'
gnuplot>
```

となり、gnuplo> のプロンプトが出る。データが upwind.d に格納されている場合、

```
gnuplot> plot "upwind.d" with linespoints
```

とすると、別のウインドウが開き線画が画面に得られる。さらに、印刷するには、

```
gnuplot> set terminal postscript
Terminal type set to 'postscript'
Options are 'landscape noenhanced monochrome dashed defaultplex "Helvetica-Ryumin" 14'
gnuplot> set output "upwind.ps"
gnuplot> replot
```

のようにすれば、upwind.ps にポストスクリプト形式で図が書き込まれる。

```
gnuplot> !lpr -Plpn1 upwind.ps
```

もしくは

```
% lpr -Plpn1 upwind.ps
```

のようにすれば、プリンターに出力することができる。

参考資料

数値流体力学に関する教科書

流体力学の数値計算法★★★ (1994) 東京大学出版会、藤井孝蔵著
はじめての CFD — 移流拡散方程式 — ★★ (1996) コロナ社、棚橋隆彦
数値流体力学 基礎と応用★★ (1992) 東京大学出版会、保原 充、大久保久明編
圧縮性流体解析★★ (1995) 東京大学出版会、数値流体力学編集委員会編
発展方程式の数値解析★★ (1977) 岩波応用数学叢書、矢嶋信男, 野木達夫著
数値流体工学★ (1994) 東京大学出版会、荒川忠一著

重要な論文

Roe, P. L.: Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes, (1985) JCP, 43, 357.
Roe, P. L.: A Survey of Upwind Differencing Techniques (1989) Lecture Notes in Physics, 323, 69.
van Leer, B.: Flux-Vector Splitting for Euler Equations (1982) Lecture Notes in Physics, 170, 507.

流体力学 (圧縮性流体) に関する教科書

流体力学★★★ (1972) 培風館、巽友正著
流体力学★★ (1970) 東京図書、エリ ・ランダウ、イェ ・リフシッツ著 ; 竹内均訳 (ランダウ=リフシッツ理論物理学教程)
宇宙流体力学★★ (1997) 培風館、坂下志郎、池内 了著

数値流体力学に関するホームページ

http://nova.earth.s.kobe-u.ac.jp/shocktube/index-j.html: Java による 1 次元シ ョックチ ューブ問題のアニメーシ ョン: 藤原秀和 (神戸大)
http://grape.c.u-tokyo.ac.jp/~hachisu/java.shtml: 1-D Numerical simulation by Java: 蜂巣 泉 (東大教養学部)
http://www.camk.edu.pl/~tomek/htmls/num_meth.html: Numerical methods for Fortran Programmers: Tomasz Plewa (Nicolaus Copernicus Astronomical Center, Polish Academy of Sciences)

http://grape.c.u-tokyo.ac.jp/~hachisu/lecture/hydro/hydro.shtml: 数値流体力学の基礎と宇宙気体力学 (大学院講義ノート): 蜂巣 泉 (東大教養学部)