シミュレーション天文学

富阪幸治（国立天文台）

天文シミュレーション

- 物理現象：（常、偏）微分方程式によって表現される。
  - 一般的には複雑で解析的手段では解けない。
- 微分方程式を計算機の中で解き、物理法則に従って、実現される宇宙を計算機の中に作る。
  - 微分方程式の数値解法
- 計算機の中に実現された宇宙を観測する。
  - データを処理し物理法則を見つけ出す。
  - 天文観測したとすればどのように観測されるかを知る。観測と比較することにより、天体現象の実相を知る。

基礎編

偏微分方程式の数値解法

熱伝導の方程式

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}\left(\sigma \mathrm{grad} T\right)$$

1次元

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\sigma \frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

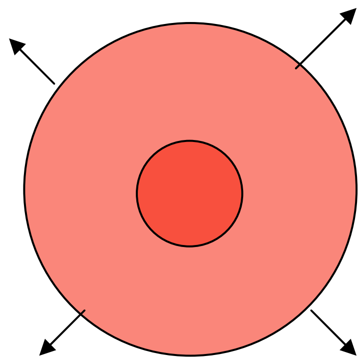
σ一定なら

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 T}{\partial \mathrm{x}^2}$$

規格化

$$\boxed{\frac{\partial T'}{\partial t'} = \frac{\partial^2 T'}{\partial \mathrm{x}'^2} \qquad \text{放物型方程式}}$$

単位時間、単位面積を通って
流れる熱エネルギーq



熱伝導率

$$\mathbf{q} = -\sigma \mathrm{grad}\ T$$

$$\int_V C\frac{\partial T}{\partial t} dV = -\int_S \mathbf{q}\cdot d\mathbf{S} = -\int_V \mathrm{div}\ \mathbf{q}\ dV$$

$$\therefore C\frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}\left(\sigma \mathrm{grad} T\right)$$

逆二乗力が働く場合のポテンシャル

電場　電荷分布→電場、ポテンシャル

電場 $\mathbf{E}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

ガウスの定理 $\mathrm{div}\ \mathbf{E}=\dfrac{\rho_e}{\varepsilon_0}$

ポテンシャル $\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\phi$

$\Rightarrow$ $\mathrm{div\ grad}\ \phi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

重力　質量分布→重力加速度、ポテンシャル

重力加速度 $\mathbf{g}=-\dfrac{GM}{r^2}$

ガウスの定理 $\mathrm{div}\ \mathbf{g}=-4\pi G\rho_m$

ポテンシャル $\mathbf{g}=-\mathrm{grad}\phi$

$\Rightarrow$ $\mathrm{div\ grad}\ \phi=4\pi G\rho_\mathrm{m}$

ポアッソン方程式

1次元

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=4\pi G\rho$$

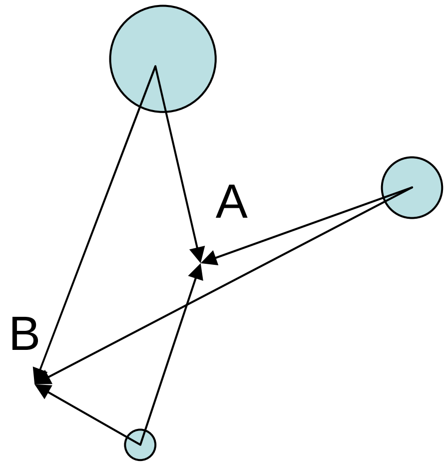
規格化

$$\boxed{\frac{\partial^2\phi'}{\partial x'^2}=\rho' \qquad \text{楕円型方程式}}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

直接解法とポテンシャル解法

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$




```
Do k2=1,N
  Do j2=1,N
    Do i2=1,N
      Do k1=1,N
        Do j1=1,N
         Do i1=1,N
           E=E+Q(i1,j1,k1)/((x(i1)-x(i2))**2+y(j1)-y(j2))**2
              +z(k1)-z(k2))**2)
         end do
       end do
     end do
   end do
  end do
end do
```

空間がN個に分割されているとすると、

直接解法

（１）N個の点での電場を求めるには、E=..の計算をN^2回行う必要がある。

空間の各次元が100個の格子に分割されている場合、$N=10^6$であり、
力の計算にはN2＝10^{12}回の力の計算が必要。

ポテンシャル解法

（２）N個の点でのポテンシャルを求めるのに必要な計算回数は、N^2回より少なくできる。

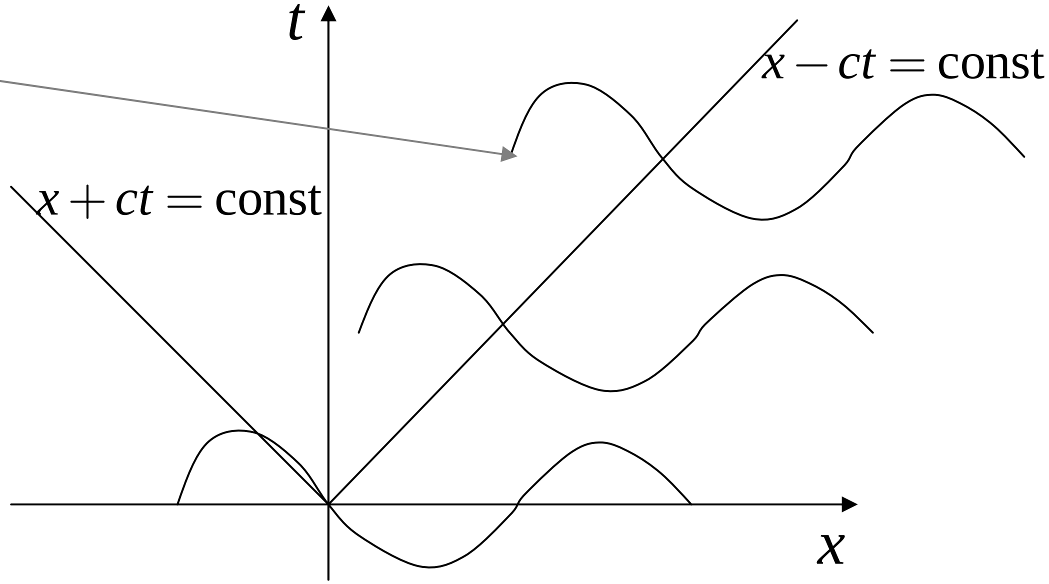
波動方程式

$$\frac{\partial F}{\partial t} + c\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

解　$F(x - ct) = \mathrm{const}$

$$\frac{\partial F}{\partial t} - c\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

解　$F(x + ct) = \mathrm{const}$



もしくは

解　$AF(x - ct) + BF(x + ct) = \mathrm{const}$

$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \quad \text{双曲型方程式}}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

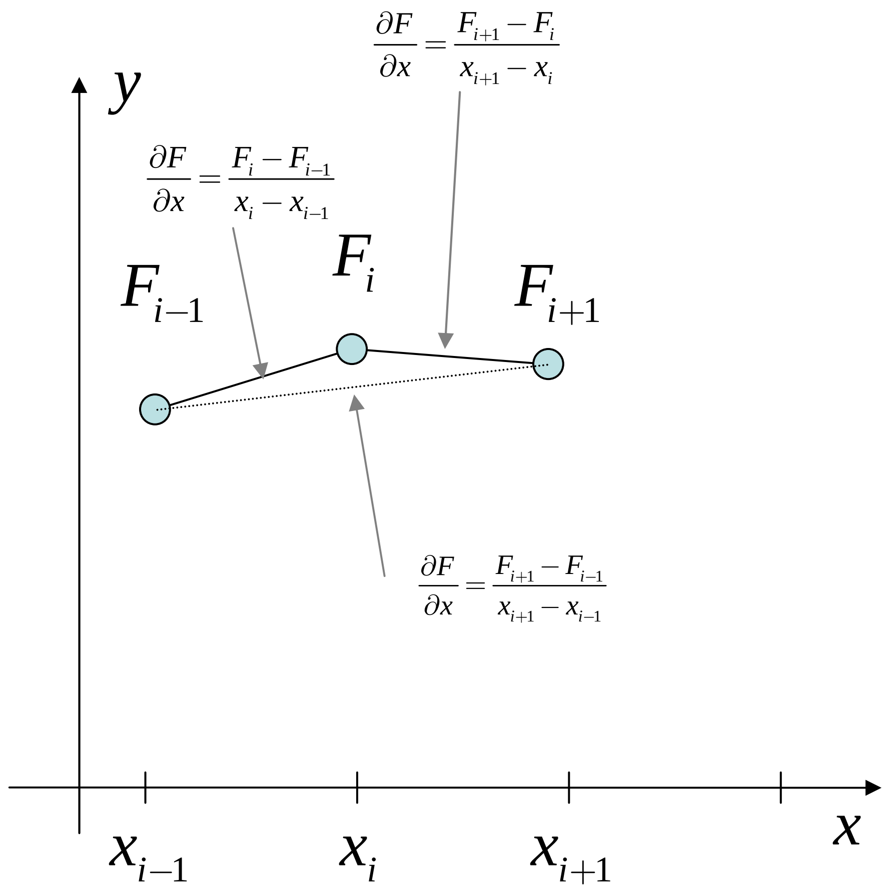
微分から差分へ

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_{i+1} - F_i}{x_{i+1} - x_i}$$ 前進差分

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_i - F_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$ 後退差分

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$ 中心差分



波動方程式

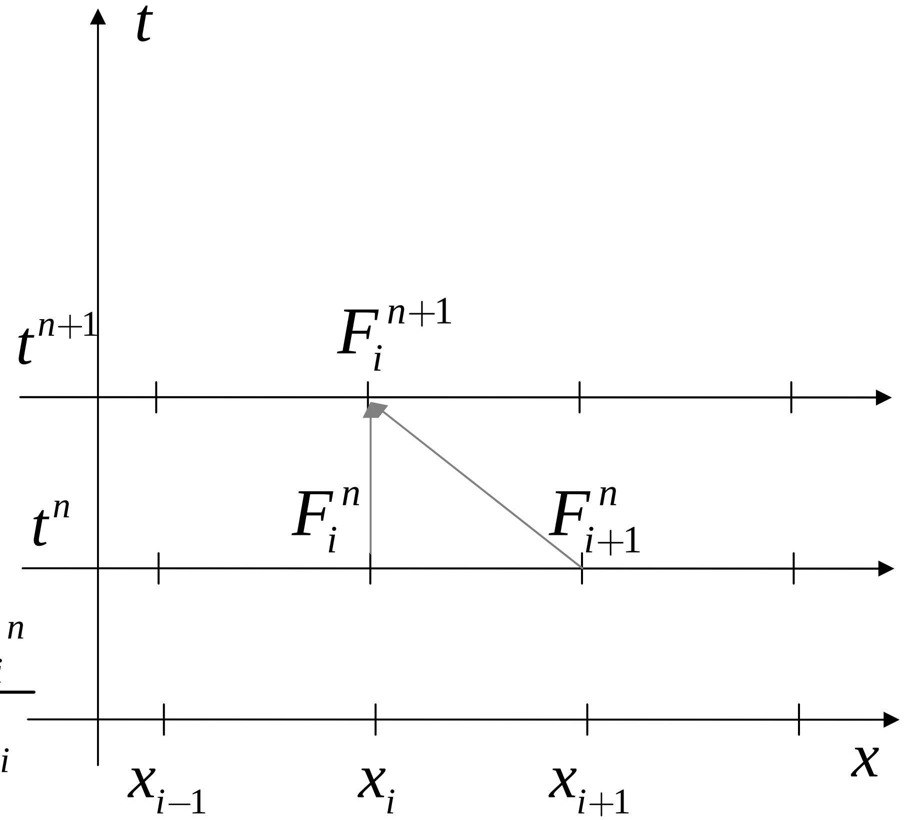
$$\frac{\partial F}{\partial t} + c\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_{i+1} - F_i}{x_{i+1} - x_i}$$ 前進差分

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{F_i^{n+1} - F_i^n}{t^{n+1} - t^n}$$ 前進差分

$$\frac{F_i^{n+1} - F_i^n}{t^{n+1} - t^n} + c\frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{x_{i+1} - x_i} = 0$$

$$F_i^{n+1} = F_i^n - (t^{n+1} - t^n)c\frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{x_{i+1} - x_i}$$



$$\frac{\partial F}{\partial t} + c\frac{\partial F}{\partial x} = 0;\ c=1$$

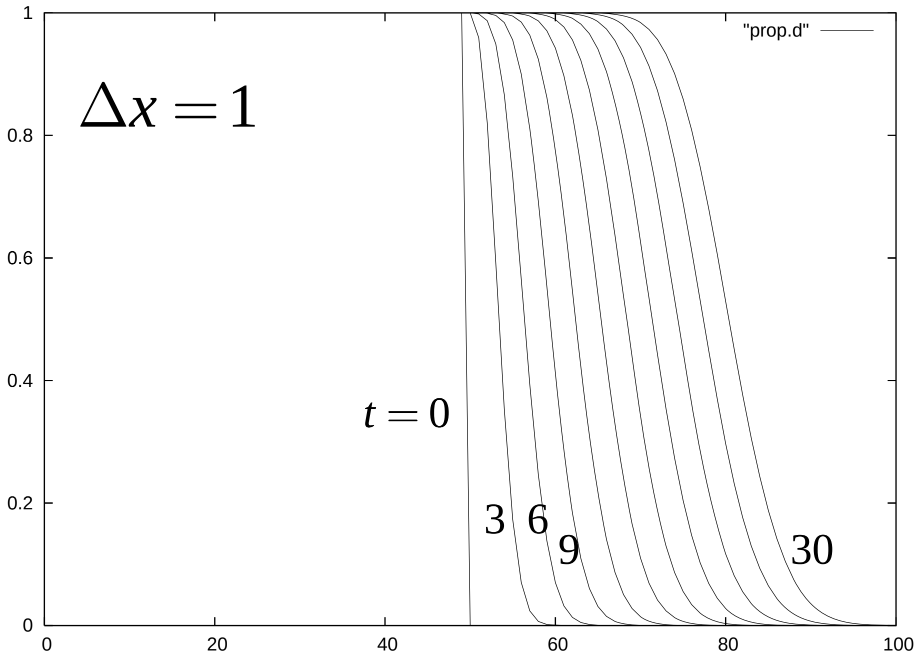
時間前進差分、空間後退差分

$$F_i^{n+1} = F_i^n - (t^{n+1} - t^n)c\frac{F_i^n - F_{i-1}^n}{x_i - x_{i-1}}$$

初期条件 $\begin{cases} x \le 50 : F = 1 \\ x > 50 : F = 0 \end{cases}$

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} = 0.125$$

24ステップおきのプロット



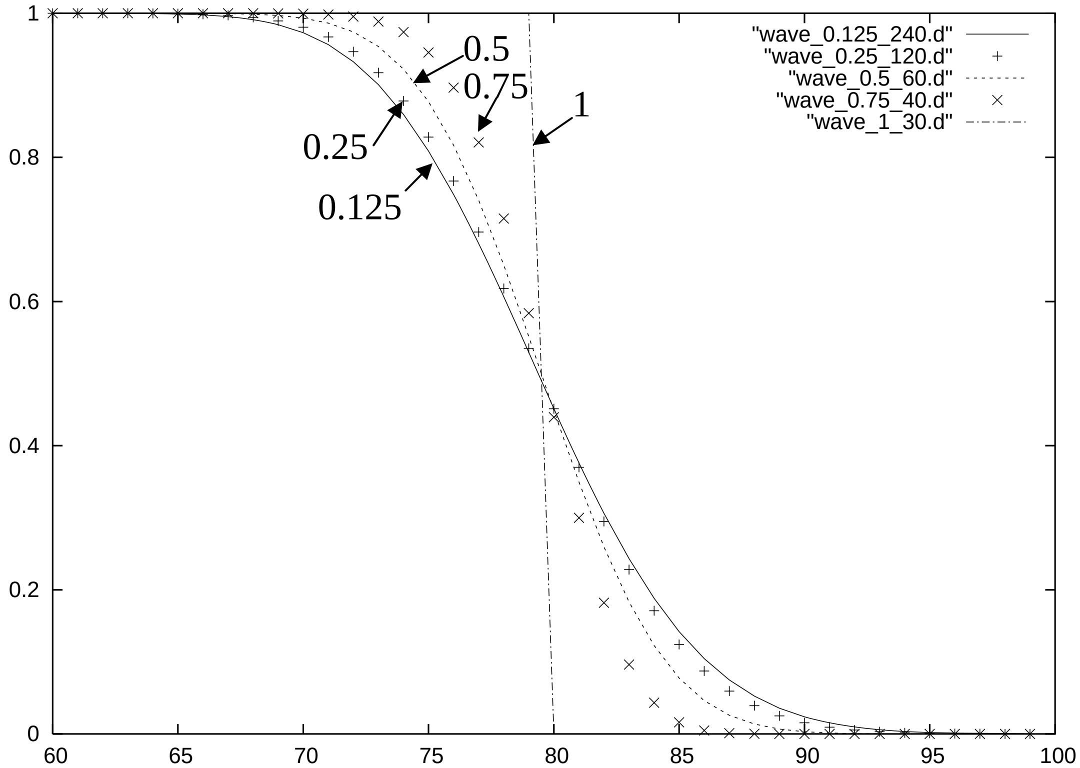
$$\frac{\partial F}{\partial t}+c\frac{\partial F}{\partial x}=0;\ c=1$$

時間前進差分、空間後退差分

$$F_i^{n+1}=F_i^n-(t^{n+1}-t^n)c\frac{F_i^n-F_{i-1}^n}{x_i-x_{i-1}}$$

初期条件 $\begin{cases} x\le 50: F=1 \\ x>50: F=0 \end{cases}$ 時間 $t=30$ $\begin{cases} x\le 80: F=1 \\ x>80: F=0 \end{cases}$

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x}=0.125,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1 \qquad \Delta x=1$$



なぜ解がなまるか？

$$F_i^{n+1} = F_i^n - \nu\left(F_i^n - F_{i-1}^n\right) \qquad \nu = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

テイラー展開

$$F_{i-1}^n = F_i^n - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i \Delta x + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_i \frac{\Delta x^2}{2}$$

$$F_i^{n+1} = F_i^n + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\Delta t + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right)\frac{\Delta t^2}{2}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\Delta t + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right)\frac{\Delta t^2}{2} = -\nu\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\Delta x - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\frac{\Delta x^2}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) + c\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right)\frac{\Delta t}{2} + c\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-c\frac{\partial F}{\partial x}\right) = -c\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) + c\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \left(-\frac{c^2\Delta t}{2} + c\frac{\Delta x}{2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \therefore \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) + c\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{c}{2}\left(-c\Delta t + \Delta x\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)$$

差分方程式は元の方程式と異なる！

元の方程式

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)+c\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=0$$

Δt、Δxに比例する誤差
時間1次精度、空間1次精度スキーム

時間前進差分、
空間後退差分

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)+c\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\frac{c}{2}(-c\Delta t+\Delta x)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)$$

$c>0$ なら $c\Delta t<\Delta x$ の時、正の拡散係数を持つ拡散

$c\Delta t>\Delta x$ 負の拡散係数を持つ拡散

時間刻みは空間刻みを波動の位相速度でわたる時間より短くなければならない。（クーラン条件）

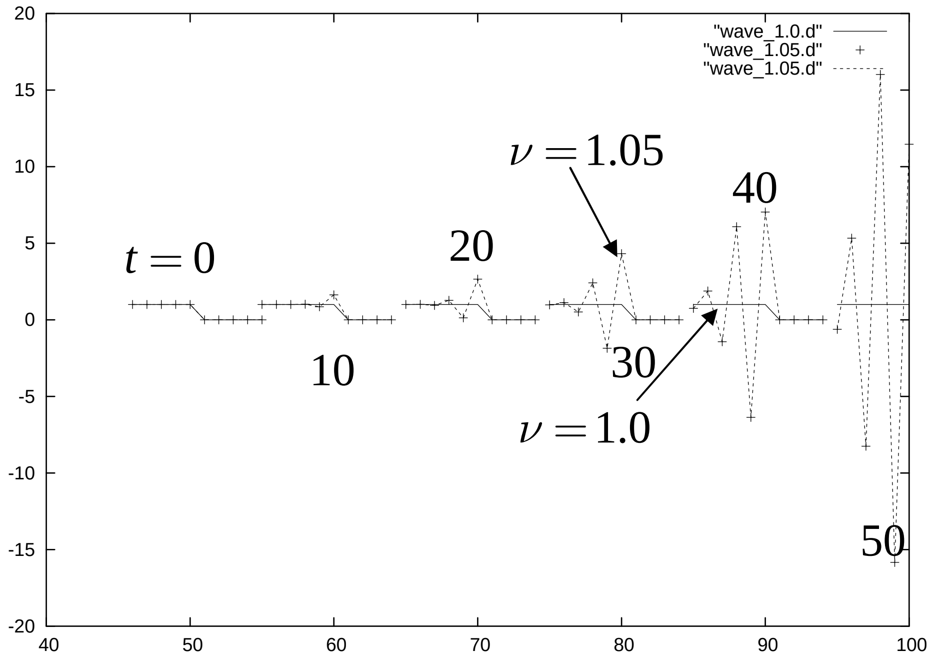
Δt を減らすと拡散係数が増大する。が一定の値以上にはならない。$c\Delta x/2$

$\Delta t<\alpha\Delta x/c$ クーラン条件の α は差分による。

ν ＞1とするとどうなるか？

$$F_i^{n+1} = F_i^n - \nu\left(F_i^n - F_{i-1}^n\right) \qquad \nu = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

初期条件 $\begin{cases} x \le 50 : F = 1 \\ x > 50 : F = 0 \end{cases}$ $\nu = 1.05$



数値的振動の発生

放物型方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \mathrm{x}^2}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i+1/2} = \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{x_{i+1} - x_i}$$

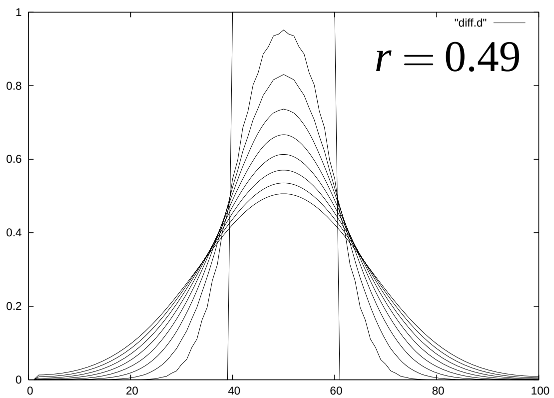
$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i-1/2} = \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{x_i - x_{i-1}}$$

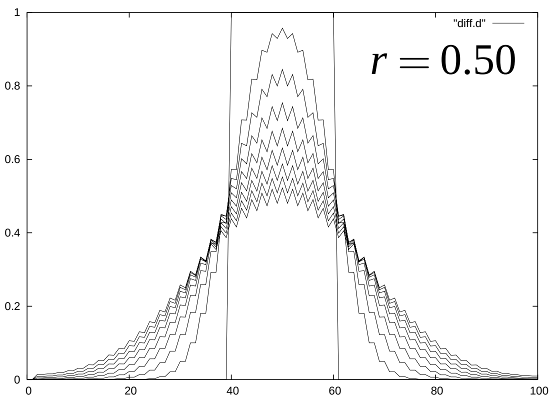
$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i = \frac{\left(\partial T / \partial x\right)_{i+1/2} - \left(\partial T / \partial x\right)_{i-1/2}}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}}$$

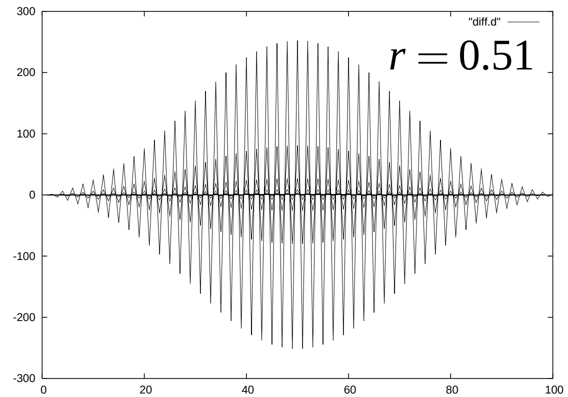
$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{t^{n+1} - t^n} = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\left(x_{i+1/2} - x_{i-1/2}\right)^2}$$

時間前進差分:陽解法

$$T_i^{n+1} = T_i^n + r\left(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n\right) \qquad r = \frac{t^{n+1} - t^n}{\left(x_{i+1/2} - x_{i-1/2}\right)^2}$$







数値的不安定の発生

時間後退差分:陰解法

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial \mathrm{x}^2}$$

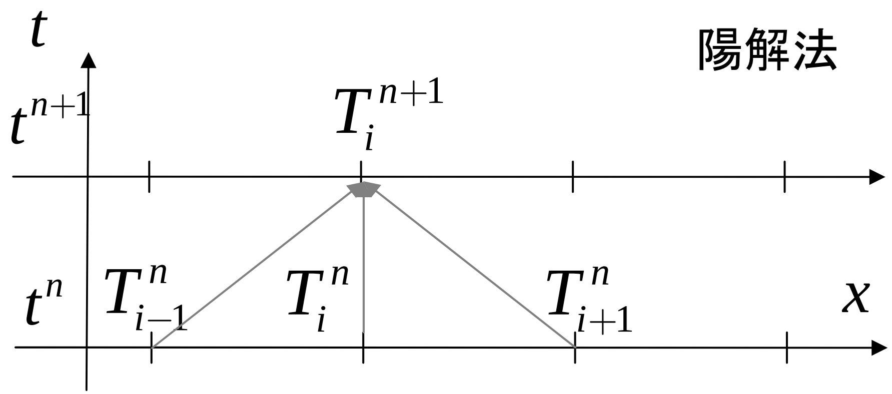
$$\frac{T_i^n-T_i^{n-1}}{t^n-t^{n-1}}=\frac{T_{i+1}^n-2T_i^n+T_{i-1}^n}{\left(x_{i+1/2}-x_{i-1/2}\right)^2}$$

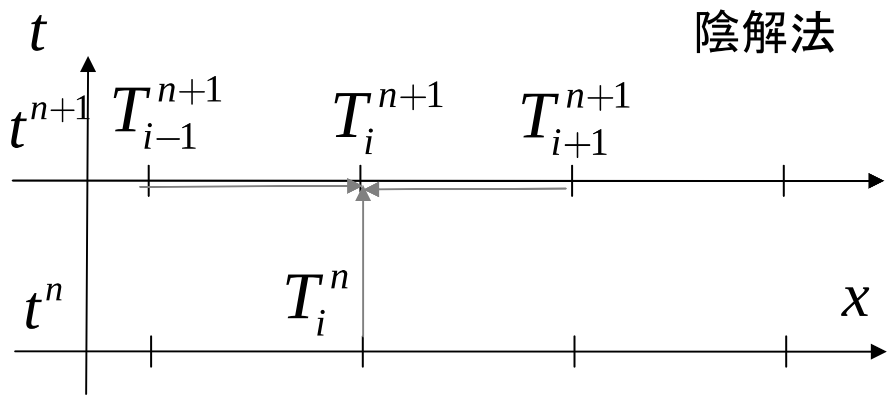
書き直すと

$$\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{t^{n+1}-t^n}=\frac{T_{i+1}^{n+1}-2T_i^{n+1}+T_{i-1}^{n+1}}{\left(x_{i+1/2}-x_{i-1/2}\right)^2}$$

T_i^{n+1} が T^n のみで決まらず、

T^{n+1} どうしで関係がある。➔連立方程式を解く必要あり。





$$T_{i-1}^{n+1} - (2 - 1/r)T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1} = -(1/r)T_i^n$$

$$\begin{bmatrix} -2+1/r & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2+1/r & 1 & & \vdots \\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & -2+1/r & 1 \\ & 0 & \cdots & 1 & -2+1/r \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ \vdots \\ T_{N-1}^{n+1} \\ T_N^{n+1} \end{pmatrix} = -(1/r) \begin{pmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ \vdots \\ T_{N-1}^n \\ T_N^n \end{pmatrix}$$

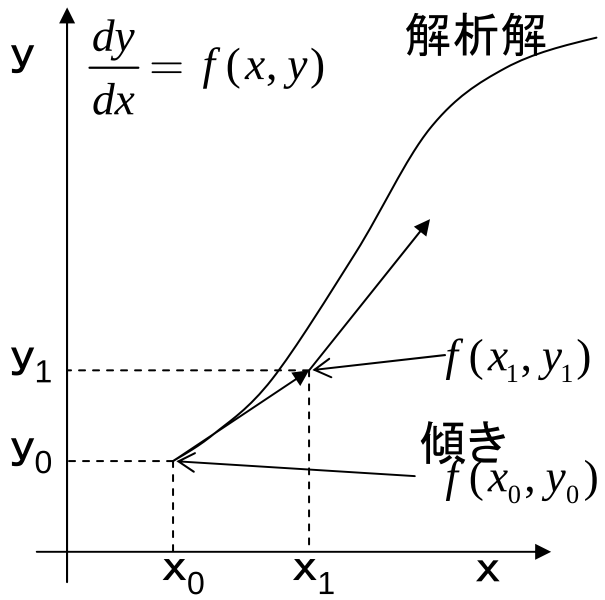
これを解いて T_i^{n+1} を求める。

陰解法➔連立方程式を解く必要あり。
➔計算量の増大。

陰解法➔安定に解けるrに対する制限ない。

参考：常微分方程式

オイラー法




```
Do i=1,N
 y=y+dx*f(x,y)
 x=x+dx
End do
```

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{dy}{dx}\right)_i \Delta x$$

テイラー展開

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{dy}{dx}\right)_i \Delta x + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_i \frac{\Delta x^2}{2}$$

$i \to i+1$ で $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_i \frac{\Delta x^2}{2}$ の誤差。

ある区間積分するために必要な回数はΔxに反比例するので、
ある区間積分した後での誤差はΔxに比例する。1次精度スキーム。

流体力学基礎方程式

質量保存

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\mathbf{v} = \dot{\rho},$$

運動方程式

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot \mathrm{grad}\ \mathbf{v}\right) = -\mathrm{grad}\ p + \rho\mathbf{g},$$

エネルギー方程式

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + div\left(\varepsilon\mathbf{v}\right) = -p\mathrm{div}\ \mathbf{v} + G - L$$

ここで ε は単位体積あたりの内部エネルギーで

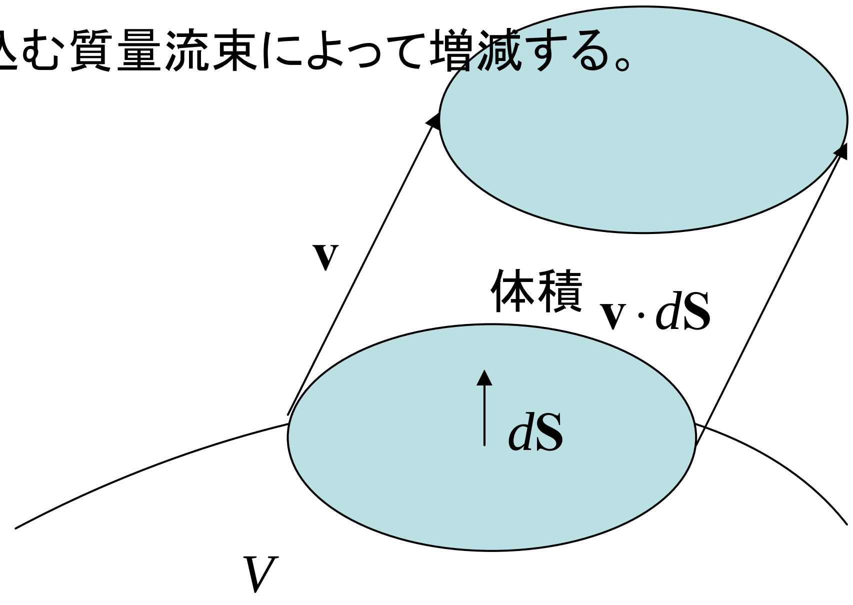
$$\varepsilon = \frac{p}{\gamma - 1}$$

ある体積内の質量は、単位時間に流れ込む質量流束によって増減する。

$$\frac{\partial \int_V \rho dV}{\partial t} = -\int_S \rho \mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}$$

ガウスの定理

$$\int_S \rho \mathbf{v}\cdot d\mathbf{S} = \int_V \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) dV$$



質量保存

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\mathbf{v} = 0$$

ある体積内の運動量は、単位時間に流れ込む運動量流束によって増減する。

$$\frac{\partial \int_V \rho v_x dV}{\partial t} = -\int_S \rho v_x \mathbf{v}\cdot d\mathbf{S} \quad ??$$

ある体積内の運動量は、なした仕事によって増減する。

$$\frac{\partial \int_V \rho v_x dV}{\partial t} = -\int_S \rho v_x \mathbf{v}\cdot d\mathbf{S} - \left[\int_S p d\mathbf{S}\right]_x$$

$$\int_S p d\mathbf{S} = \int_V \mathrm{grad}(p) dV$$

運動量

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \mathrm{div}\ \rho v_x \mathbf{v} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

ある体積内の熱エネルギーは、単位時間に流れ込む流束によって増減する。

$$\frac{\partial \int_V \varepsilon dV}{\partial t} = -\int_S \varepsilon \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \ \ ??$$

$$\varepsilon = \frac{p}{\gamma - 1}$$

熱力学第1法則　$dQ = dU + pdV$

断熱　$$\frac{dU}{dt} + p\frac{dV}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial \int_V \varepsilon dV}{\partial t} = -\int_S \varepsilon \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \ - p\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

内部エネルギー

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mathrm{div}\ \varepsilon \mathbf{v} = -p\ \mathrm{div}\ \mathbf{v}$$

問題：全エネルギー　$e = \varepsilon + \frac{\rho}{2}|\mathbf{v}|^2$

に対する方程式が、

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\varepsilon + p)\mathbf{v} = 0$$

で与えられることを示せ。

ヒント：運動エネルギーに関する式が

$$\frac{\partial \rho |\mathbf{v}|^2 / 2}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\rho |\mathbf{v}|^2 / 2)\mathbf{v} = -\mathbf{v} \cdot \mathrm{grad}\ p$$

千葉大学
シミュレーション天文学

星間ガスの構造

富阪幸治（国立天文台）

超新星残骸の進化

- 星の最終爆発　　$E_0 = 10^{51}\mathrm{erg}$
  - Ⅰa型超新星
    - 白色矮星連星（$M<1.4M_{\odot}$）への質量降着→$M>M_{ch}$）
    - すべての銀河、銀河内広く分布。
  - Ⅱ型超新星（大質量星起源）
    - 鉄コアの光分解（$M>8M_{\odot}$）
    - 円盤銀河、渦状腕にそって分布。

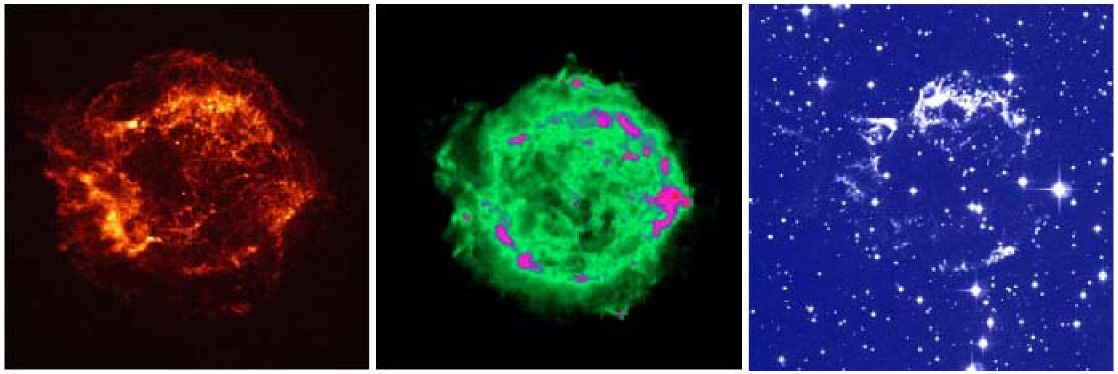


図 1.1: Cas A 超新星残骸の X 線 (左)、非熱的電波 (中)、可視光 (右) による画像。

超新星出現率

$$R_{\mathrm{SN}} \sim 0.01\mathrm{yr}^{-1}$$

銀河円盤

$$V_{disk} \sim \pi(10\mathrm{kpc})^2 \times 100\mathrm{pc} \sim 3\times10^{10}\,\mathrm{pc}^3$$

単位体積あたり超新星出現率

$$r_{\mathrm{SN}} \sim 10^{-13}\mathrm{yr}^{-1}\mathrm{pc}^{-3}$$

超新星残骸の寿命

$$\tau_{\mathrm{SNR}} \sim 3\times10^6\,\mathrm{yr}$$

超新星残骸の体積

$$V_{\mathrm{SNR}} \sim (4\pi/3)(30)^3\,\mathrm{pc}^3 \sim 3\times10^5\,\mathrm{pc}^3$$

超新星残骸の銀河全体での体積／銀河円盤体積

$$V_{\mathrm{SNR}}\tau_{\mathrm{SNR}}r_{SN} \sim 10^{-1}$$

銀河円盤の重要な割合が高温ガス

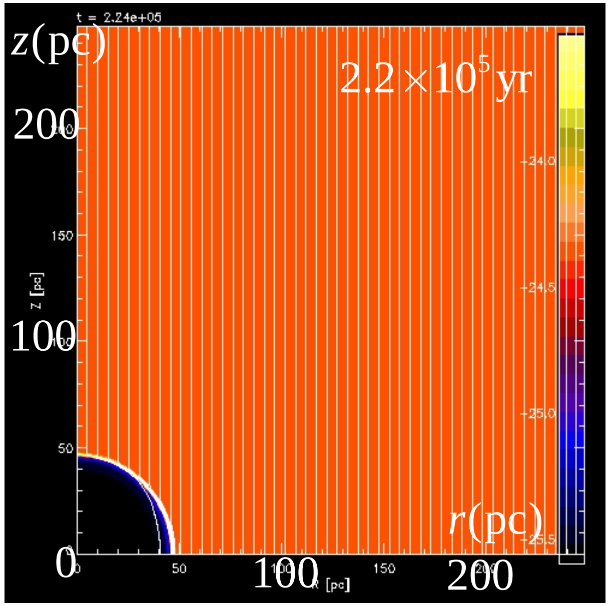
Weak B

$E_0 = 0.5\times10^{51}\,\mathrm{erg}$

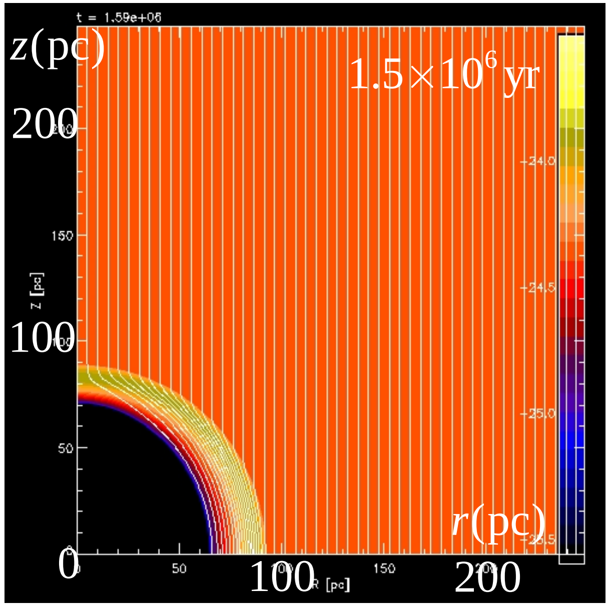
$n_0 = 0.2\,\mathrm{cm}^{-3}$

$B_0 = 1\mu\mathrm{G}$

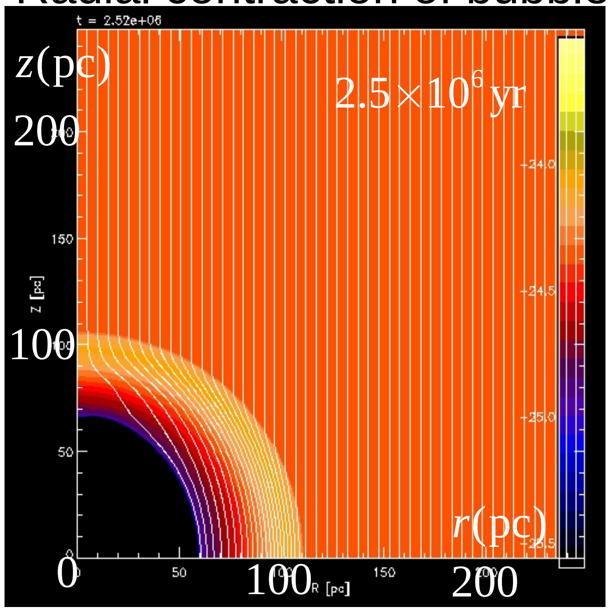
Thin shell

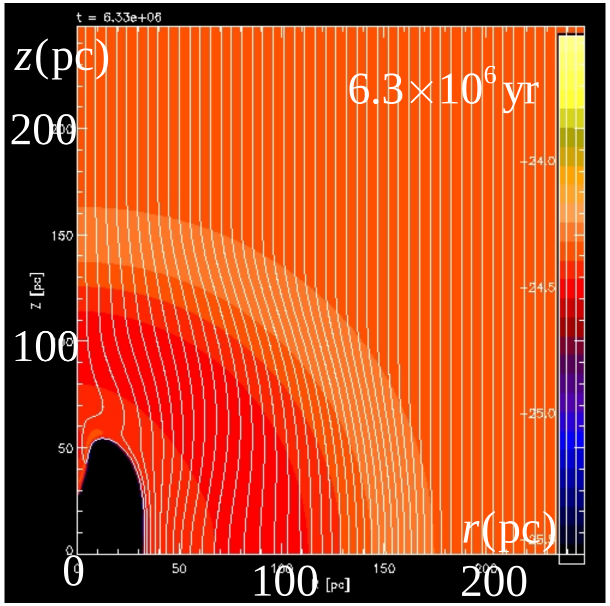


Max radial expansion



Radial contraction of bubble





animation

断熱期の進化

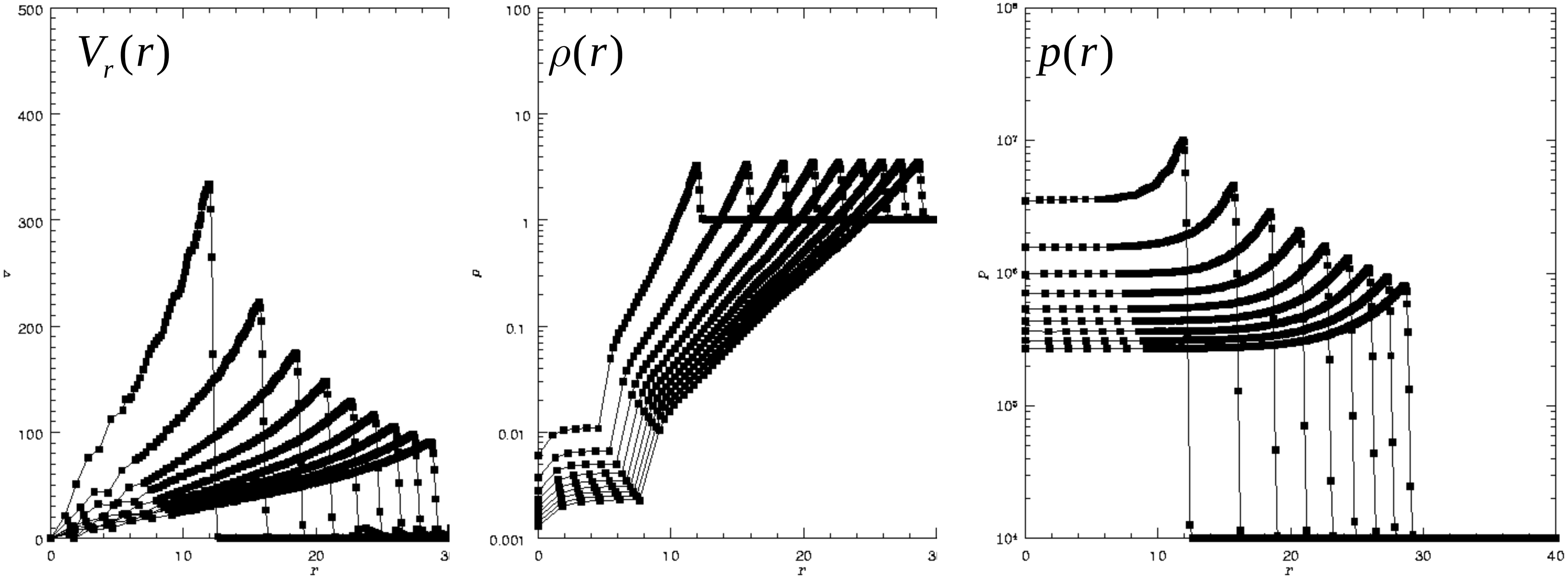


図 2.2: 断熱のもとに数値シミュレーションによって得た超新星残骸の構造。一様密度 $n_0 = 1\mathrm{cm}^{-3}$、一様温度 $T_0 = 10^4\mathrm{K}$ の星間物質中で、$0.4 \times 10^{51}\mathrm{erg}$ の爆発が生じた例。横軸は pc 単位の中心からの距離。また、それぞれのカーブは、$t = 10^4$ 年、$t = 2 \times 10^4$ 年、、、$t = 9 \times 10^4$ 年の構造をあらわす。

相似的進化：異なる時間の解は、ある時間の解を半径方向に拡大、縦に拡大縮小して得られる。

膨張則

- 自由膨張期（～500年）
  - 超新星爆発によって放出された恒星起源のガスが星間空間を広がる時期。 $R \sim \left(\frac{3M_{ej}}{4\pi\rho_0}\right)^{1/3}$
- 断熱膨張期（～数万年）
  - かき集めた質量が放出された質量を超えると、強い衝撃波が星間物質中を伝わる状況に移行。
- 等温膨張期（～100万年）
  - 衝撃波の速度は減少、衝撃波後面で輻射による冷却が重要になると、ガスは冷却され冷たいシェルが形成される。

問題：衝撃波の後ろに[illegible]冷却された[illegible]集まる[illegible]。球殻が運動量を保存して膨張する時には

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3 \dot{R}\right) = 0$$

が成り立ち、これが $R^4 - R_0^4 = 4R_0^3\dot{R}_0\left(t - t_0\right)$ という解を持つことを示せ。なお、t_0とR_0は等温膨張期の開始時点の年齢とその時の半径を表す。

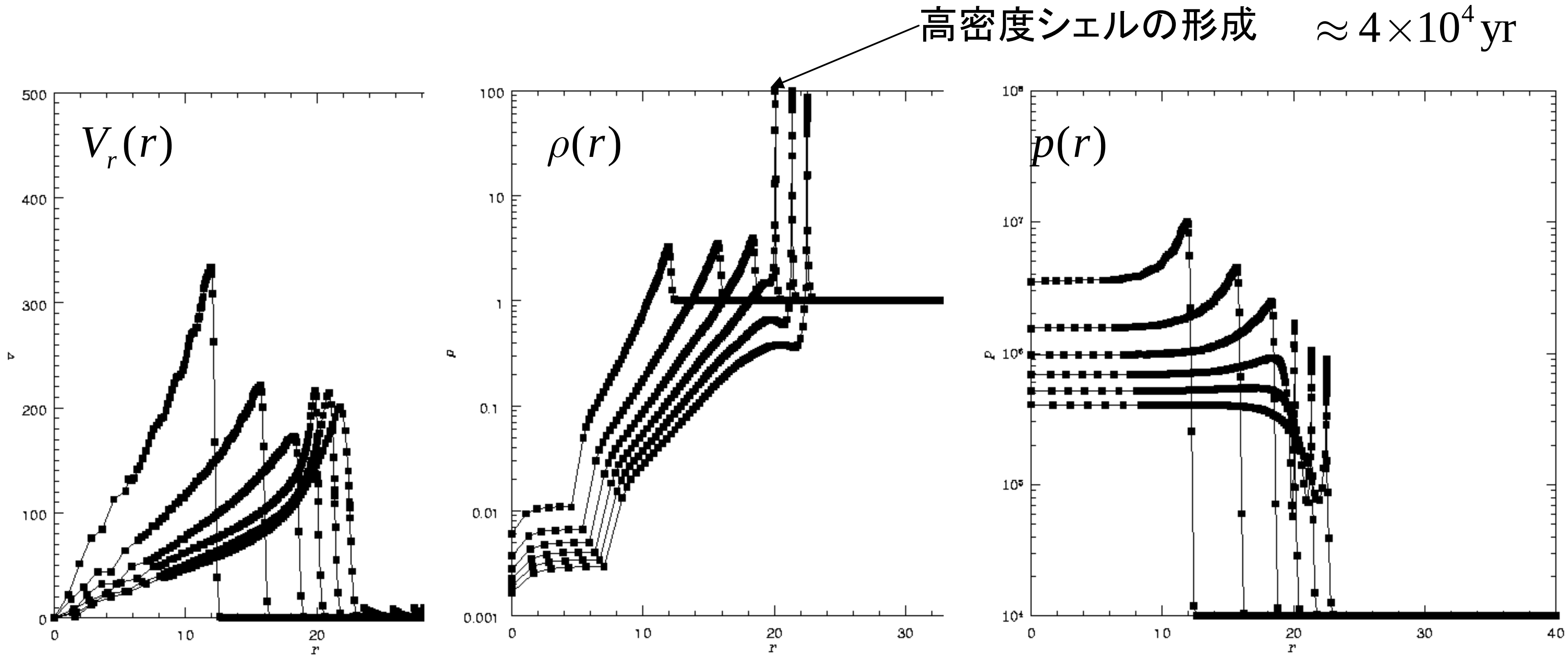


図 2.3: 放射による冷却を考慮した数値シミュレーションによって得た超新星残骸の構造。一様密度 $n_0 = 1\mathrm{cm}^{-3}$、一様温度 $T_0 = 10^4\mathrm{K}$ の星間物質中で、$0.4 \times 10^{51}\mathrm{erg}$ の爆発が生じた例。横軸は pc 単位の中心からの距離。また、それぞれのカーブは、$t = 10^4$ 年、$t = 2 \times 10^4$ 年、、、$t = 9 \times 10^4$ 年の構造をあらわす。

自己相似解

超新星の爆発エネルギーE_0

星間物質の密度ρ_0

中心からの距離r_0

爆発後の時間t_0

質量の次元を持たない組み合わせ $[E_0/\rho_0] = L^5/T^2$

4つを使って無次元量

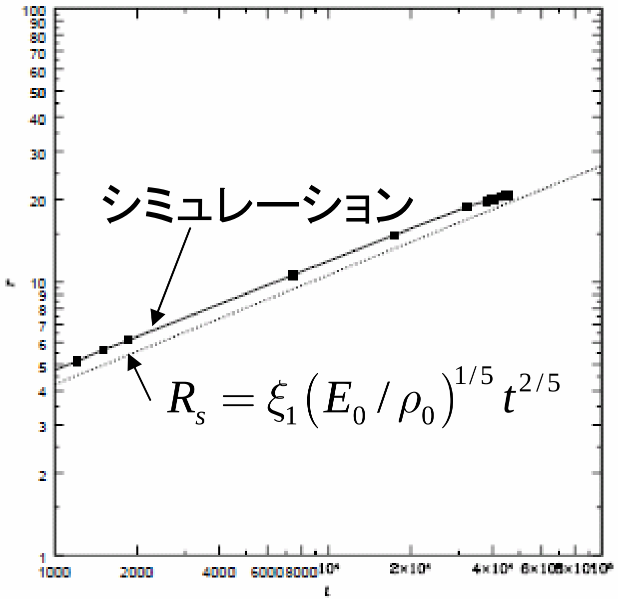
$$\xi = \frac{r}{(E_0/\rho_0)^{1/5} t^{2/5}}$$

超新星残骸の断熱期の解はξのみで記述できる。

$\xi = \xi_1$ は(いつも)衝撃波面。

$$R_s = \xi_1 (E_0/\rho_0)^{1/5} t^{2/5}$$

の様な膨張則が与えられる。

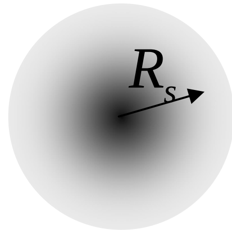


$\rho_0 = Br^{-m}$ の時、 $[B] = ML^{-(3-m)}$

4つを使って無次元量 $\xi = \dfrac{r}{(E_0/B)^{1/(5-m)} t^{2/(5-m)}}$

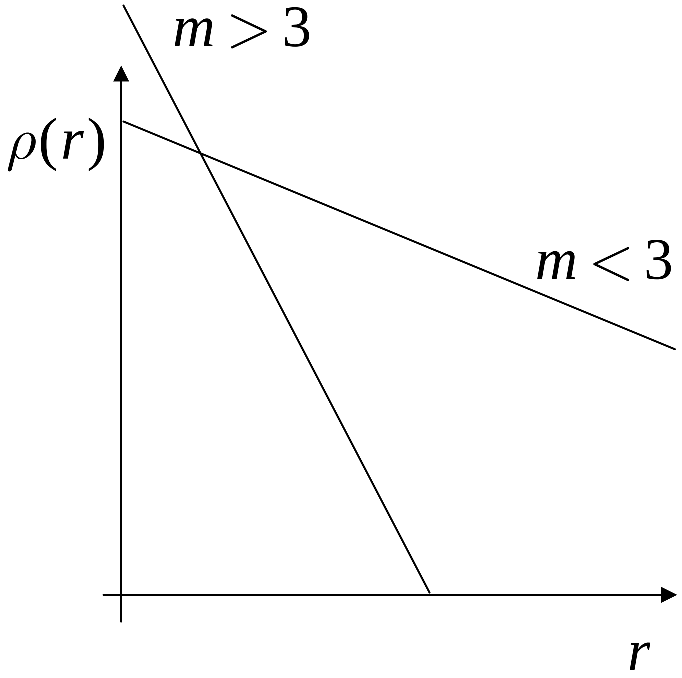
減少する密度分布の中で発生する超新星残骸

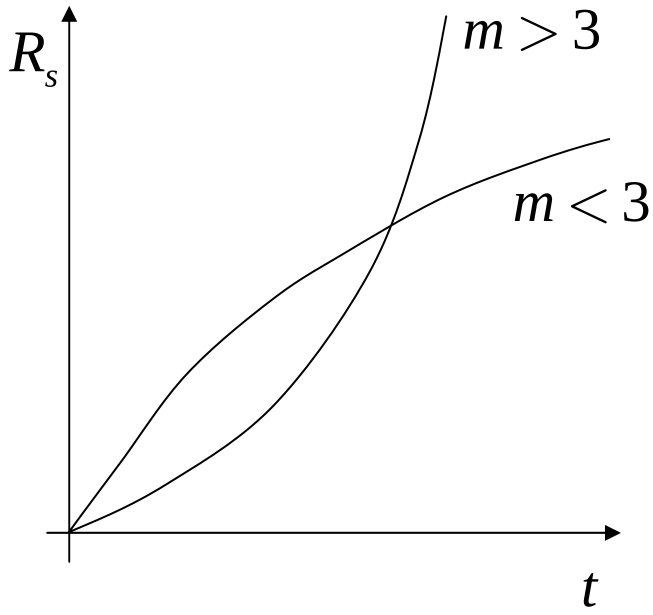
$$R_s = \xi_1 \left(E_0 / B \right)^{1/(5-m)} t^{2/(5-m)}$$



$m > 3$　衝撃波加速

$m < 3$　衝撃波減速





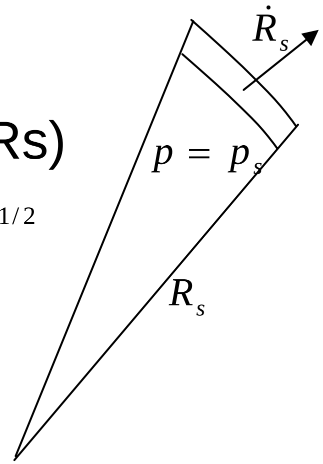
Largest Size of the Superbubble?

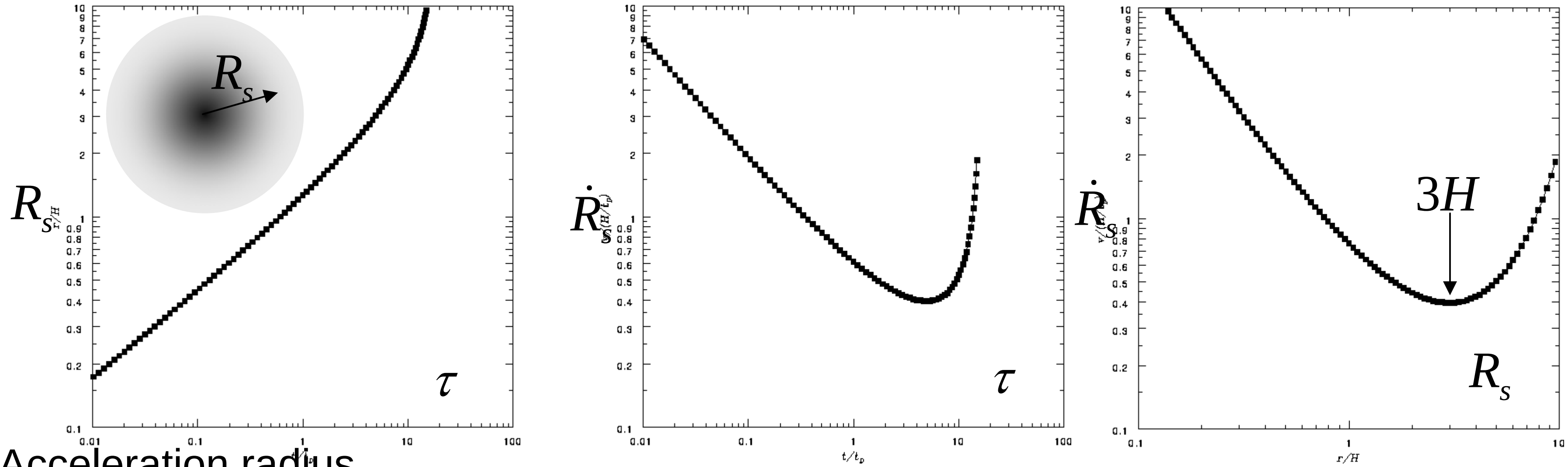
- Kompaneets Approximation
  - Rankine-Hugoniot condition
  - Pressure is uniform inside the shock front (0<r<Rs)

$$p_s = \frac{2\rho \dot{R}_s^2}{\gamma+1} = (\gamma-1)\varsigma\left(\frac{L_{SN}t}{4\pi R_s^3/3}\right)$$

  - which gives an expansion law $\dot{R}_s = \left(\frac{(\gamma^2-1)\varsigma}{2}\frac{L_{SN}t}{\rho V}\right)^{1/2}$
  - in exponential density distribution,

$$\rho(r) = A\exp(-r/H)$$





Acceleration radius

$R_{sc} = 3H$ (for Explosion) $\quad R_{sc} = 1.74H$ (for Wind)

$$m \equiv \frac{\partial \log\rho(r)}{\partial \log r} = -\frac{r}{H}$$

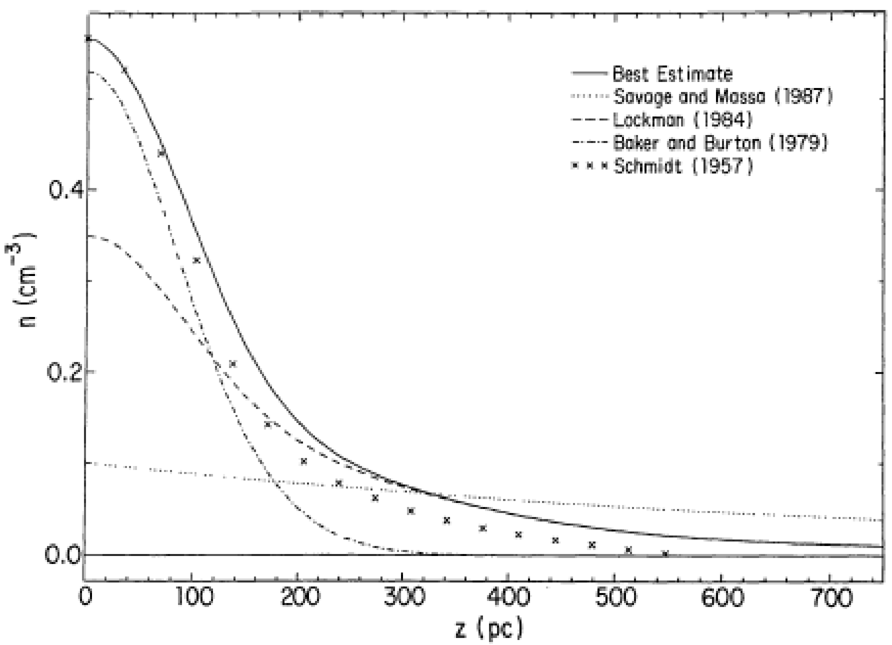
Shock Front is Accelerated.

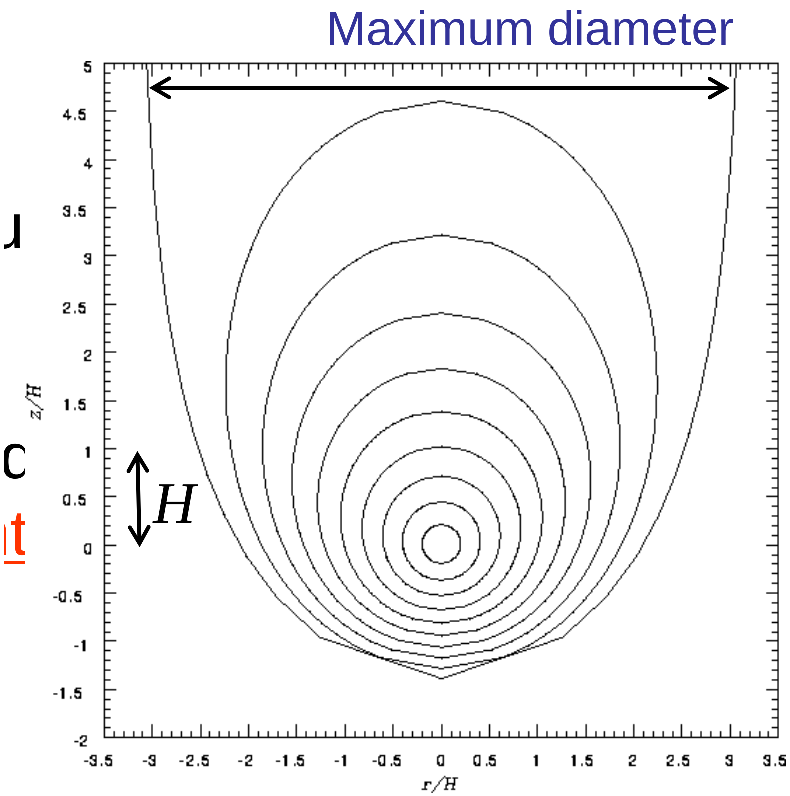
- In an exponential stratified medium (Kompaneets 1960)
  - The shape of the wave front

$$\rho(z) = \rho_0 \exp(-z/H)$$

$$r(z,y) = 2H \arccos\left[\frac{1}{2}\exp(z/2H)\left(1 - \frac{y^2}{4H^2} + \exp(-z/H)\right)\right]$$

$\partial r/\partial z = 0 \rightarrow$





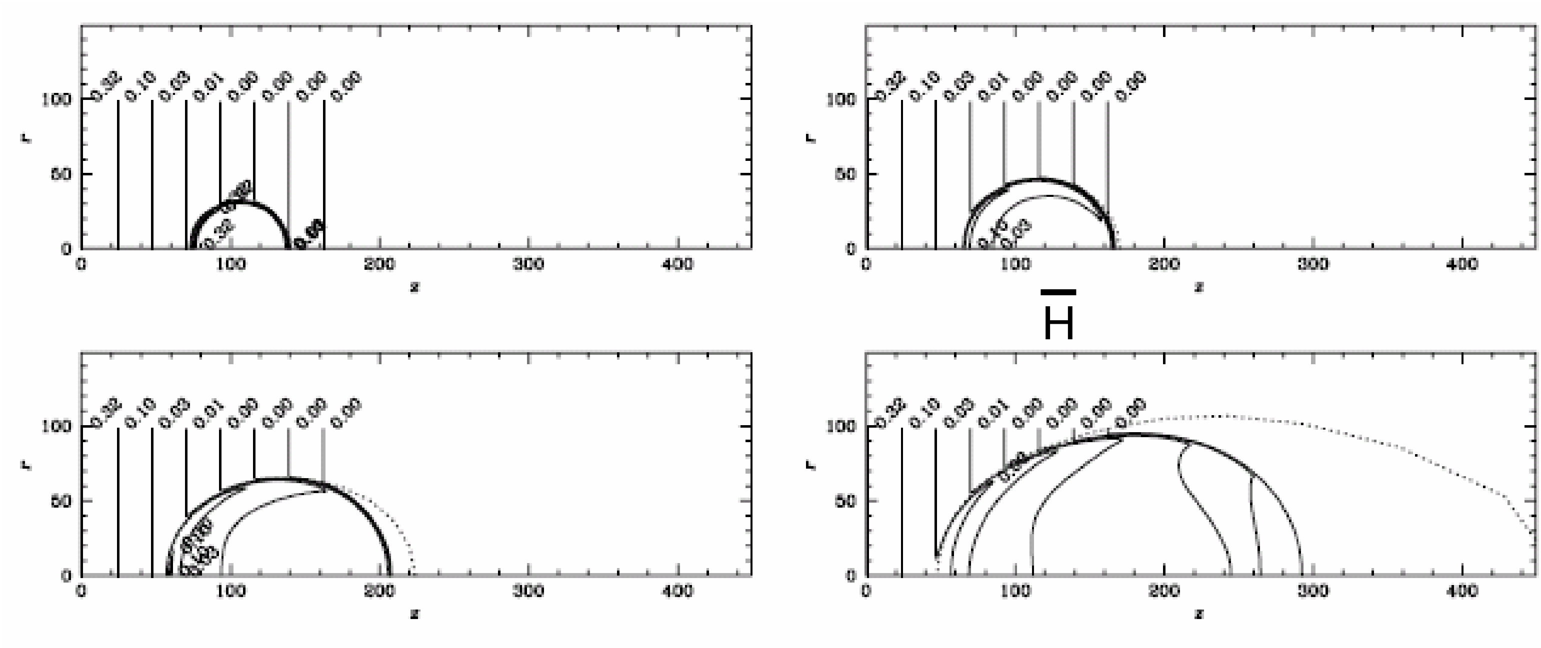


図 2.18: van Leer の monotinic scheme で計算した、$\exp(-z/H)$ の平行大気中の点源爆発の解（実線）と、Hnatyk 近似による、衝撃波面の伝搬（破線）の比較。グラフの単位で $H = 20$ に当たっており、$t = 2t_D$、$5t_D$、$10t_D$、$20t_D$、の時点の衝撃波面の位置をそれぞれ比較している。

ここでt_Dは一様密度の場合、R_s=Hとなる時間で、

$$H = \left(\frac{E_0}{\rho_0}\right)^{1/5} t_D^{2/5} \qquad t_D = H^{5/2}\left(\frac{E_0}{\rho_0}\right)^{-1/2}$$

と定義される。

銀河円盤の密度スケールより大きく広がれば超新星残骸の進化は密度構造の影響を受ける。 Z方向への衝撃波の加速。 円盤の打ち抜き。

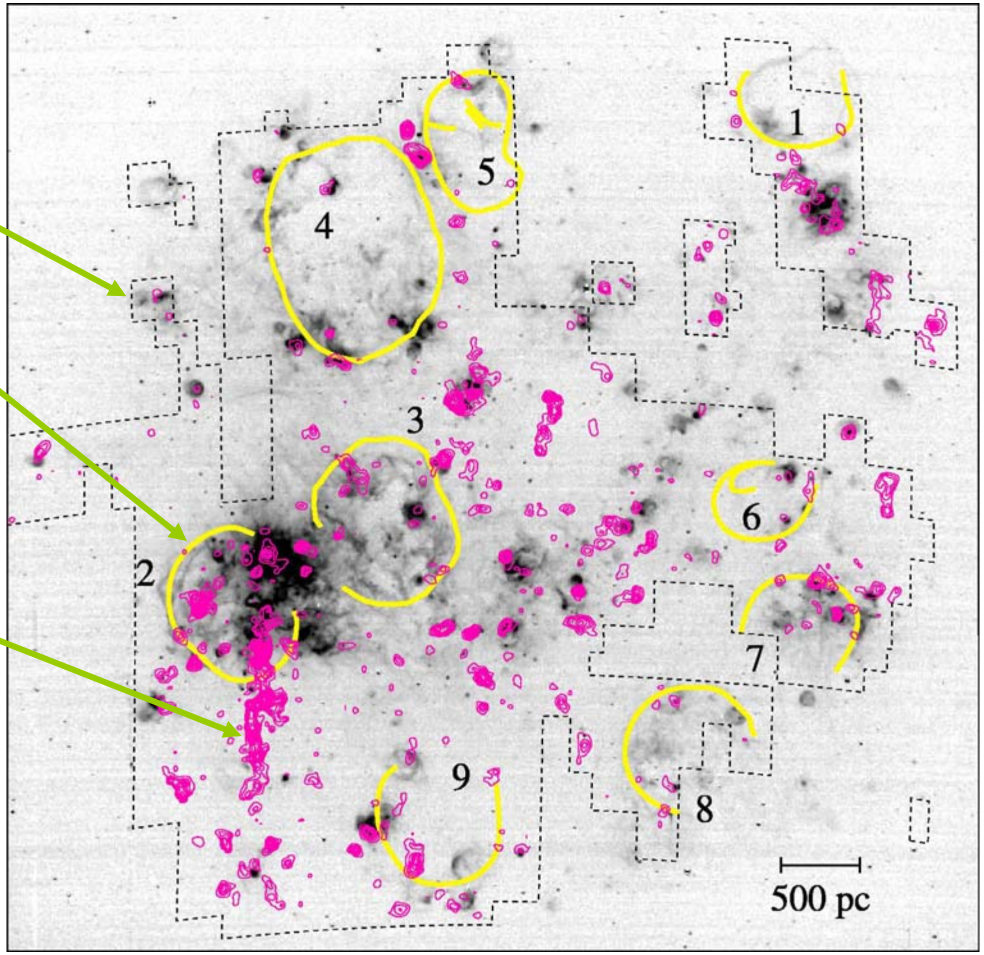
LMCのスーパーシェル

LMC

Hα emission line

supergiant shells

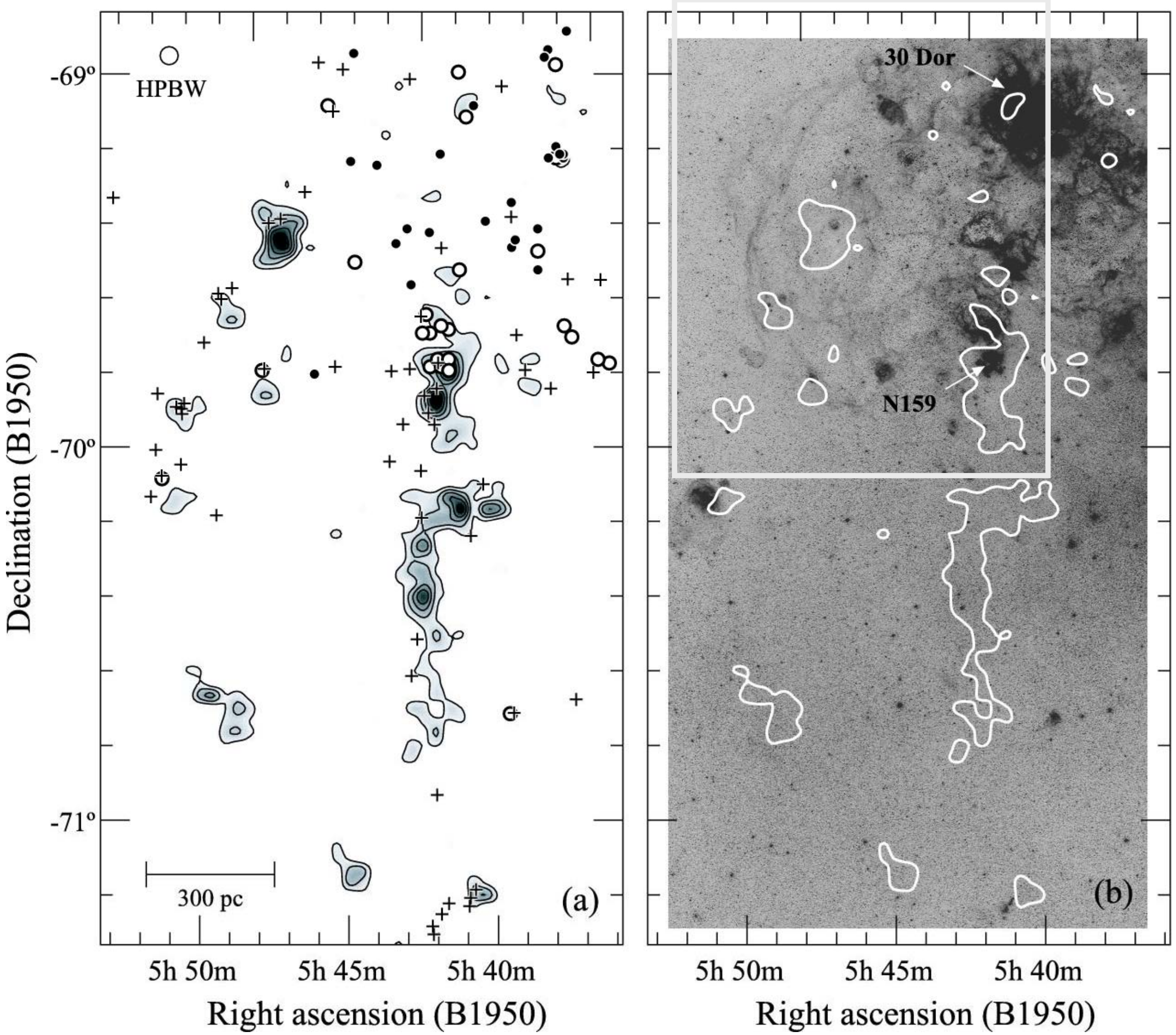
CO clouds

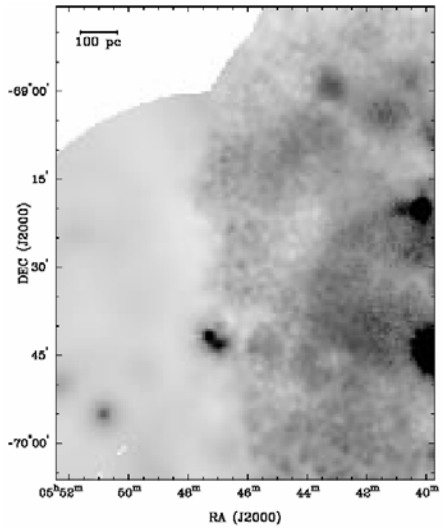


Yamaguchi et al. 2001

CO

Hα





ROSAT HRI map

Points et al. 1999
ApJ, 518,298

ローカルバブル

はくちょう座スーパーバブル

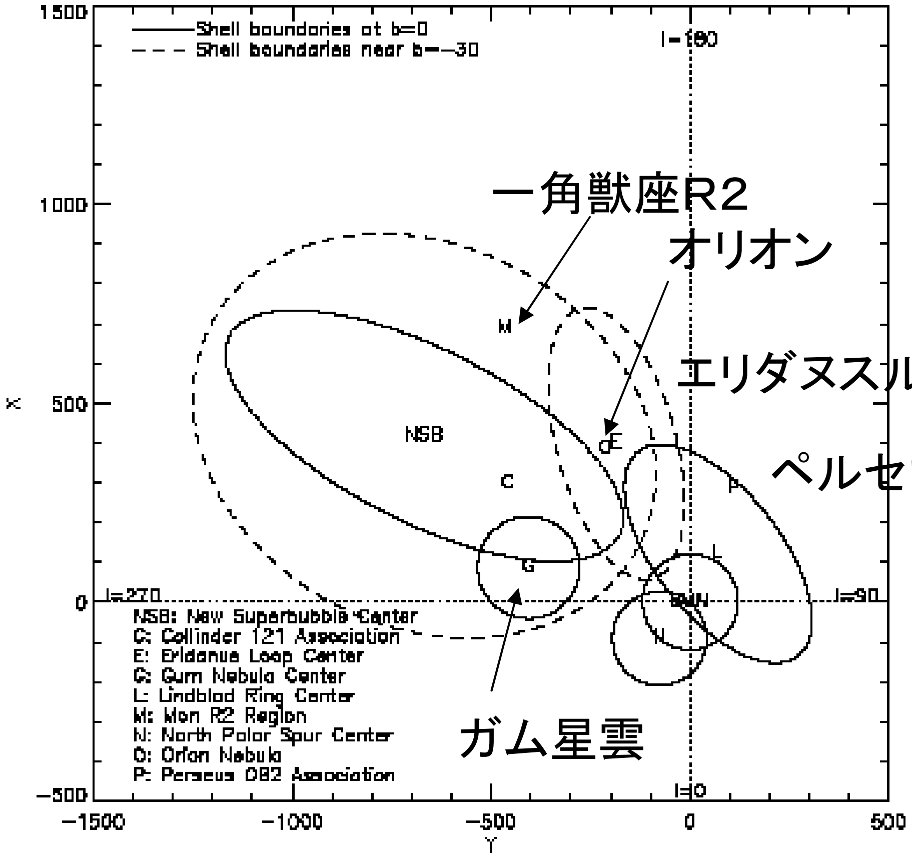


FIG. 8.—Nearby H I shells and bubbles projected onto the Galactic plane, viewed from the north Galactic pole; data are in Table 1. The letters are abbreviations for star clusters or the centers of shells, as listed on the figure. Solid circles or ellipses represent shells near $b = 0°$; dashed circles represent shells near $b \sim -30°$. The new superbubble may not be as highly elongated as pictured; see § 5.8.

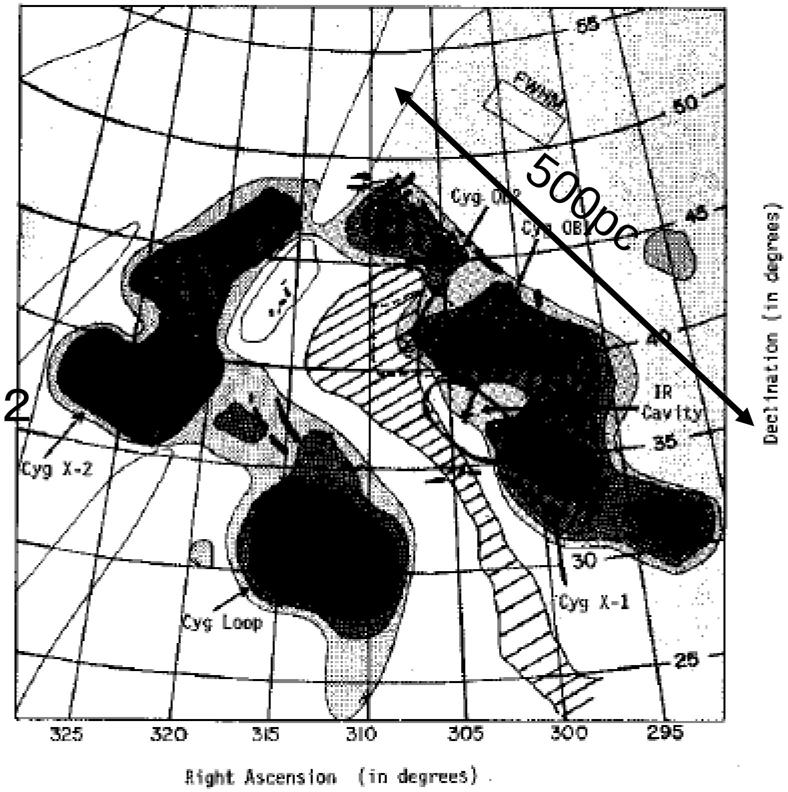


FIG. 4.—The position of the *IRAS* supershell (small oval near center) relative to the large X-ray supershell (Cash et al. 1980) and other features in the Cygnus X region. Shaded contours represent *HEAO 1* X-ray count rate, hatched region is the Cygnus rift, and black features are Hα filaments and several known X-ray sources.

OBアソシエーションと相関。

Gould Belt

(1)A Ring of OB Stars D<1kpc
(2)Inclined approx. 18 deg to the galactic plane
(3)Expanding ring– Lindblad's ring

Local HI feature

Molecular cloud

$$M_{gas} \sim 2 \times 10^6 M_{\odot}$$

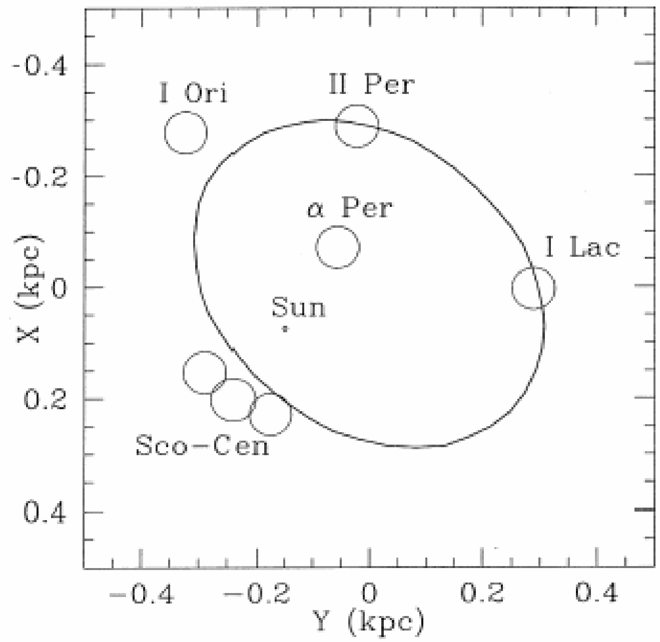


FIG. 5.—Position of the expanding shell at present, for the best-fit model with ambient pressure (see text). The position of the Sun is also shown (see Fig. 3a of Olano 1982).

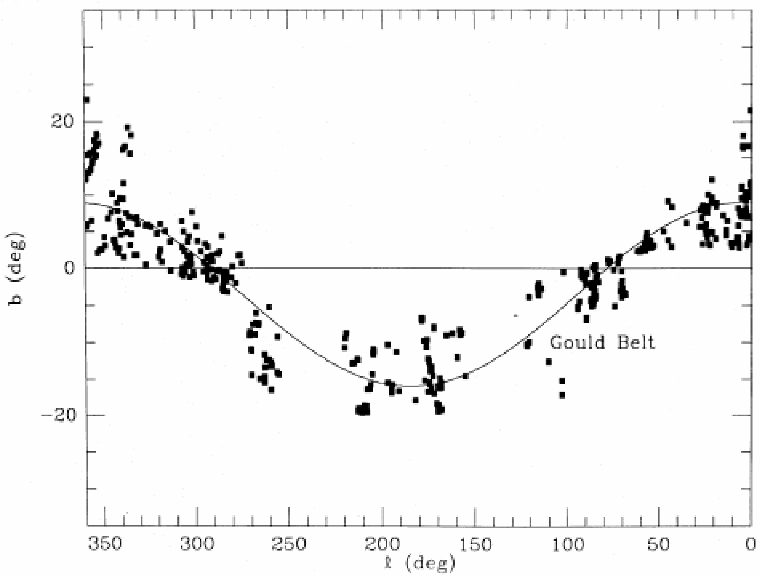


FIG. 3.—Plot of Gould belt clouds and best-fit curve $b = (-3.5° \pm 3) + (12.5 \pm 4) \sin (l - [275° \pm 20])$

Olano (1982) , AAp, 112,195

Taylor, Dickman, Scoville (1987) ApJ,315,104

オリオン･エリダヌス領域

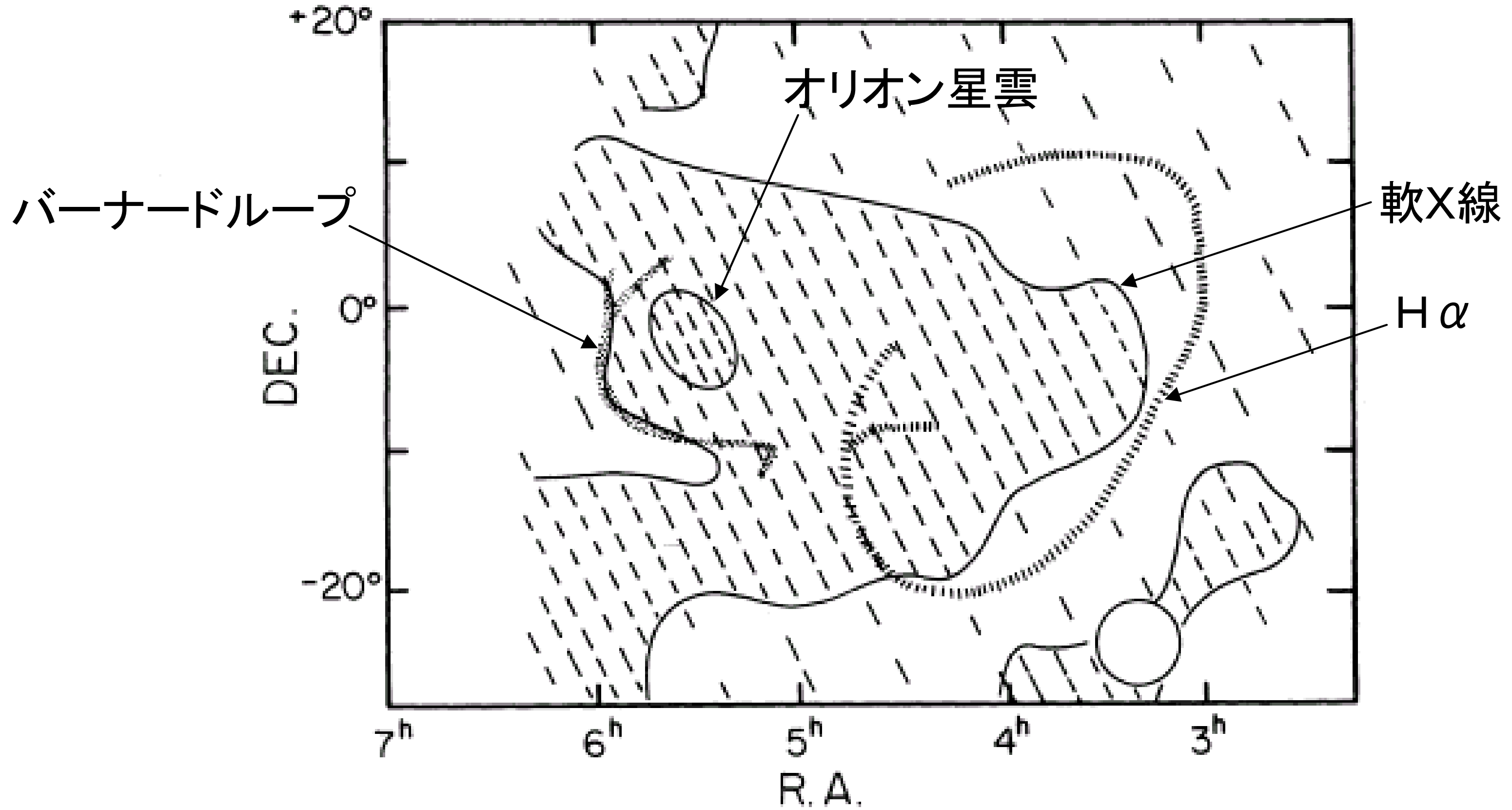
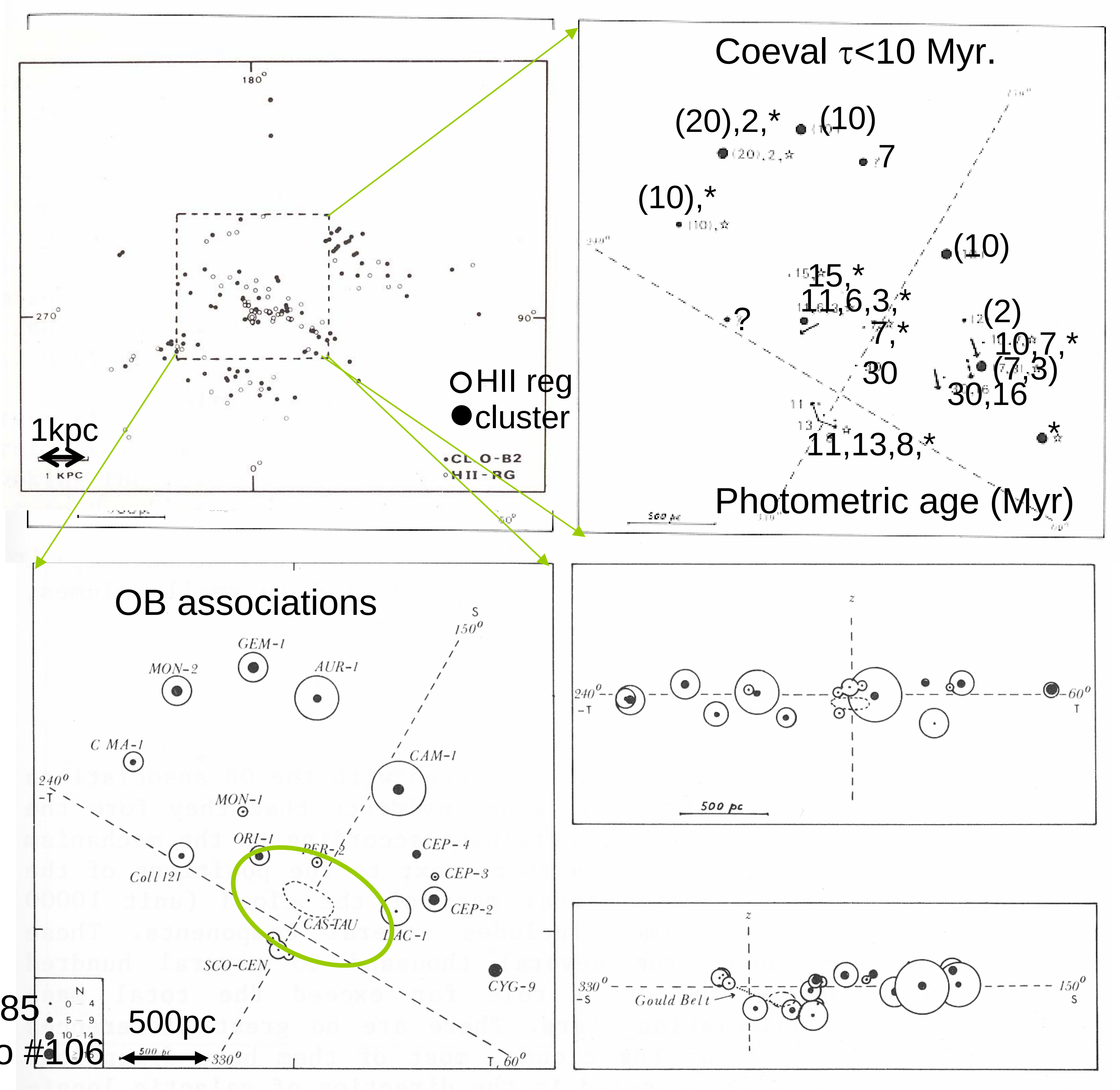


FIG. 7.—A relative intensity map of the diffuse X-ray background in the energy band 0.5–1.2 keV (from Nousek 1978). The locations of Barnard's loop and an outer 21 cm loop are also included. X-ray emission associated with the Crab Nebula (5^h32^m, +22°0) has been excluded from the map. The circle in the lower right indicates the approximate angular resolution.



Blaauw 1985
IAU Sympo #106

Origin of Gould Belt

(1) Oblique Collision of High Velocity Cloud with Galactic Disk.

- This may explain the tilted gas disk.

(2) Explosive events occurred in a tilted gas disk.

- A pre-existing tilted gas disk is necessary.
- Supercloud?

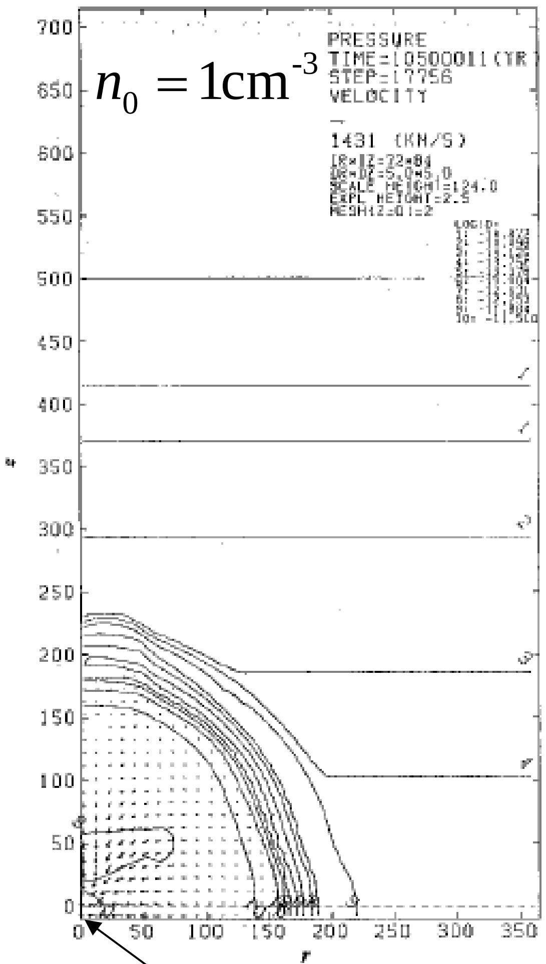
Similar objects in external galaxies:

M83 (Comerón 2001, AAp, 365,417)

groups of Trapezium clusters

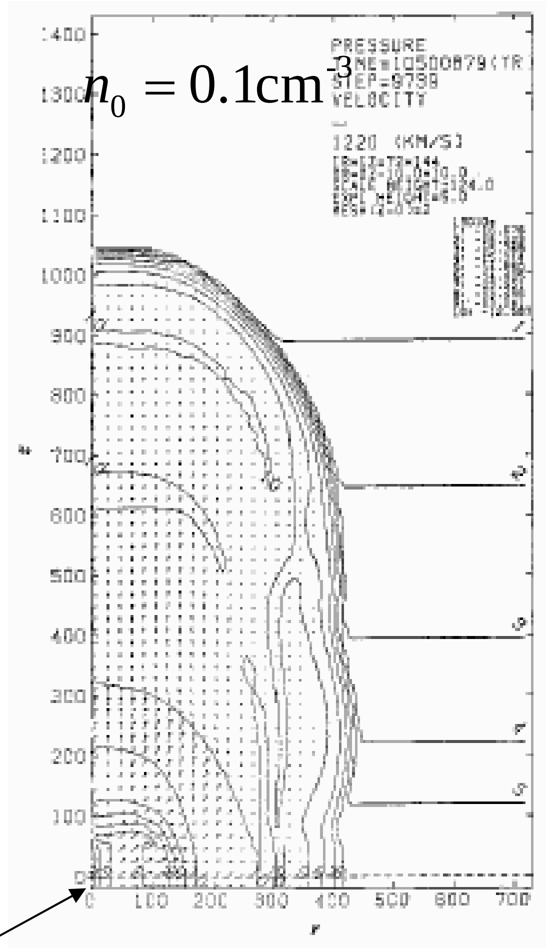
2次元シミュレーション

$$\Delta t = 2 \times 10^5 \,\mathrm{yr} \, \left(L_{\mathrm{SN}} = 1.7 \times 10^{38} \,\mathrm{erg\ s^{-1}} \right)$$



$n_0 = 1\mathrm{cm}^{-3}$

H



$n_0 = 0.1\mathrm{cm}^{-3}$

H

Δt間隔で超新星爆発

加速時間、半径

モデル	加速時間 t_a	加速距離 z_a	$n_0(z=0)\mathrm{cm}^{-3})$
TI (composite)	$\simeq 2t_D$	$\simeq 2H$	0.1
MMN (指数関数)	$3.3t_D$	$2.9H$ (at $t=0, 0.7H$)	1
MMN (ガウス)	$2.5t_D$	$1.7H$	1
球対称 Kompaneets 法 (指数関数)	$(2-3.48)t_D^*$	$(1.74-2.29)H^*$	

TIはTomisaka&Ikeuchi(86),MMNはMacLow, McCray, Norman(89)

加速に移る時間は $t_a \simeq (2-3)t_D$

加速に移る半径は $z_a \simeq (2-3)H$

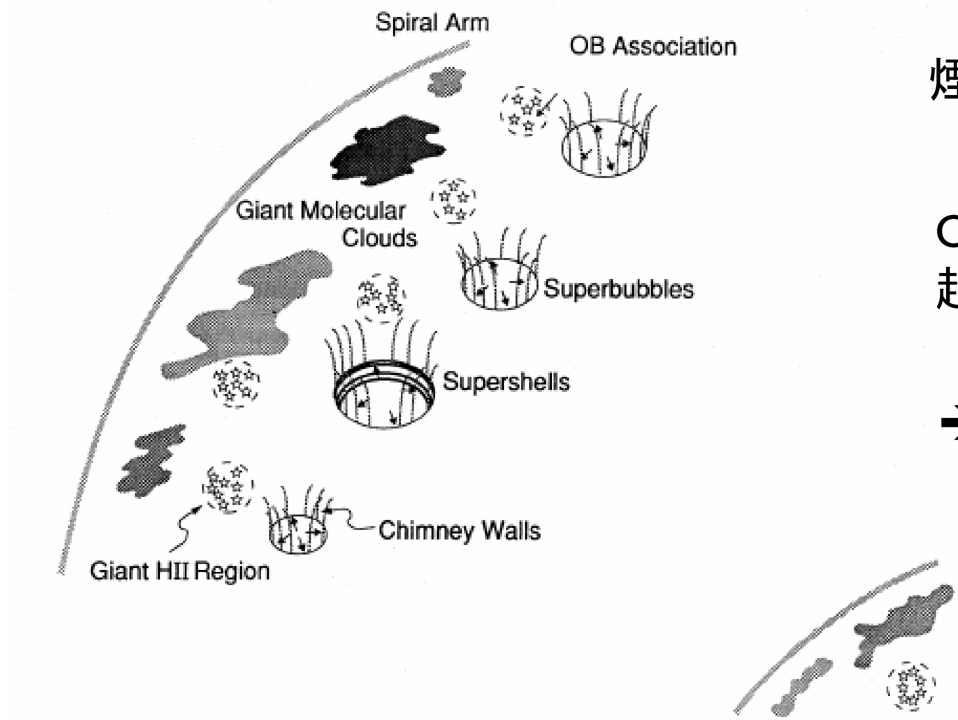


FIG. 4a

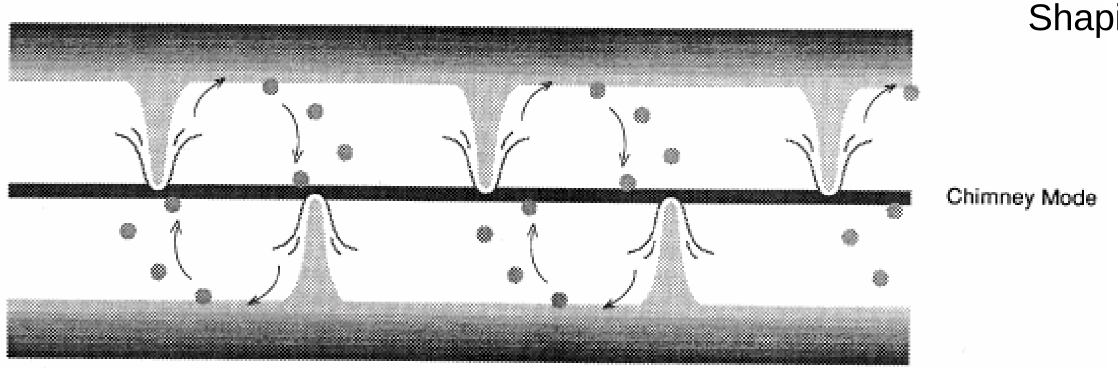


FIG. 4b

煙突モデル

OBアソシエーションでの集団的
超新星爆発

➔高温ガスのハローへの流れ

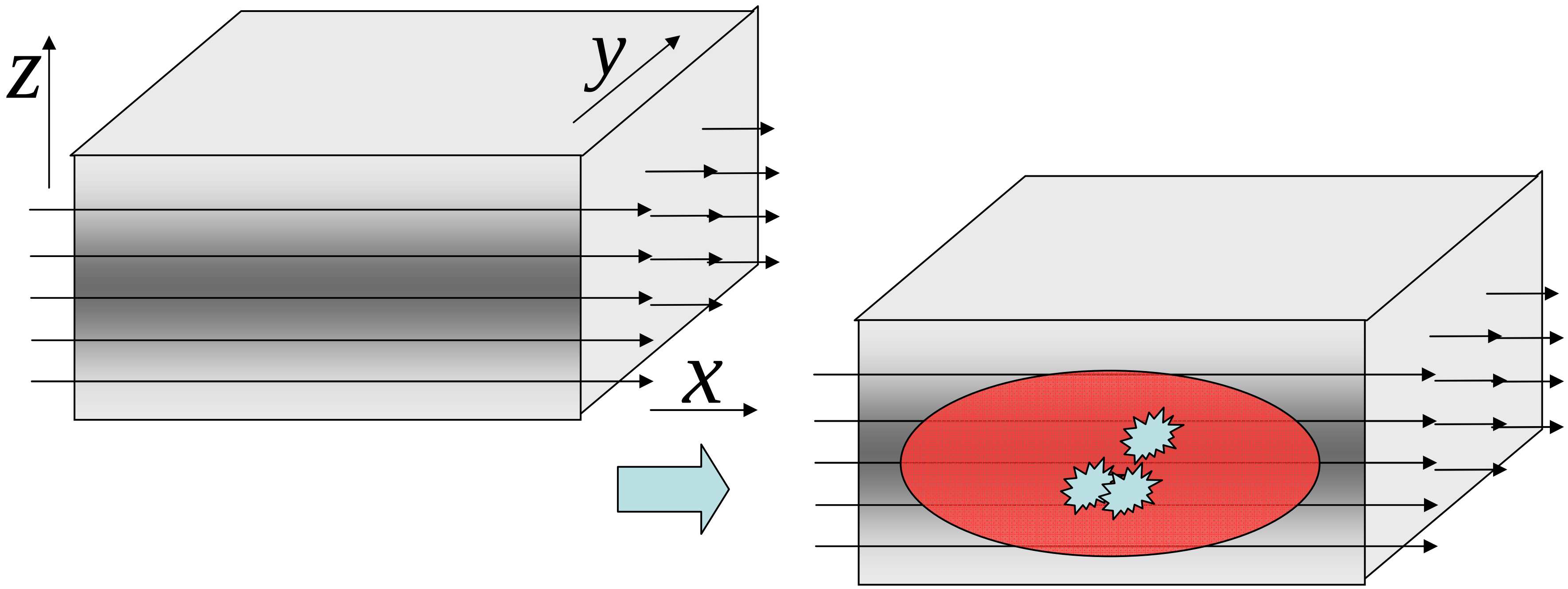
Galactic Fountainモデル

Shapiro, Field (1976) ApJ, 205, 762.

Norman, Ikeuchi (1989) ApJ,345, 372

Magnetic fields, if runs parallely to the disk prevent from blow-out from the gas disk.

- Observationally, B-fields run parallel to the disk.



  – B-field blocks the flow perpendicular to the disk.

Effect of Disk vs Magnetic Fields

- Density scale H vs the size of the bubble.
  - Size of the bubble:

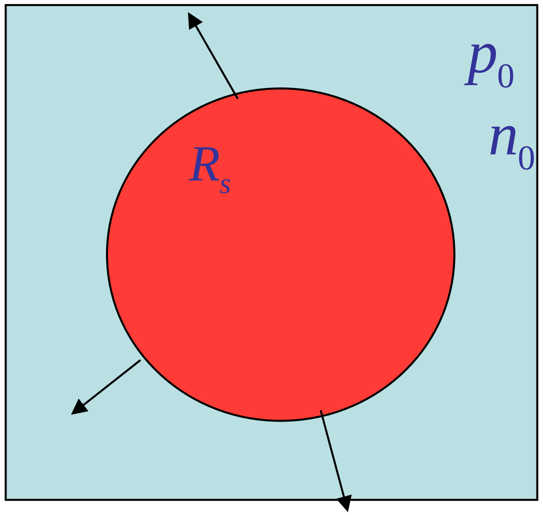
$$R_s \approx 300\mathrm{pc}\left(\frac{L_{\mathrm{SN}}}{3\times10^{37}\mathrm{erg\ s^{-1}}}\right)^{1/5}\left(\frac{n_0}{0.3\mathrm{cm^{-3}}}\right)^{-1/5}\left(\frac{t}{10\mathrm{Myr}}\right)^{3/5}$$

  - Timescale when ram pressure = external pressure:

$$\rho_0 V_s^2 \approx p_0$$

$$t_P \approx 80\mathrm{Myr}\ L_{38}^{1/2} n_0^{3/4} p_{-12}^{-5/4}$$

$$L_{38} = \frac{L_{\mathrm{SN}}}{10^{38}\mathrm{erg\ s^{-1}}} \quad p_{-12} = \frac{p_0}{10^{-12}\mathrm{erg\ cm^{-3}}}$$



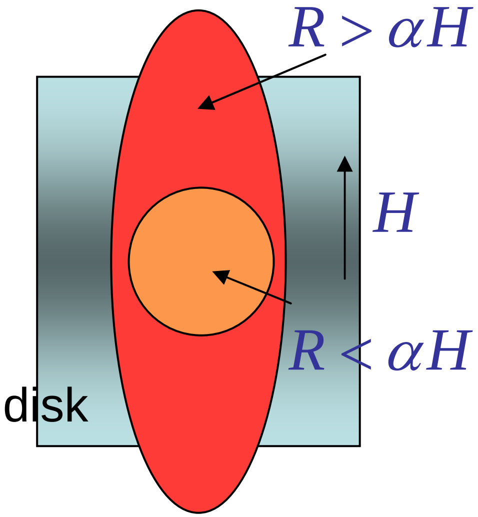
  - The expansion is decelerated much after. $t > t_P$
  - Deceleration time t_p .

- Condition for blow-out.
  - If $R_s(t_p) > \alpha H$=*acceleration radius*, the expansion of the bubble is accelerated.

$$\Rightarrow \quad L_{\mathrm{SN}} > L_{\mathrm{crit}}$$

  - critical luminosity

$$L_{crit} = 0.6\times10^{37}\mathrm{erg\ s^{-1}}\left(\frac{\alpha^2}{5}\right)H_2^2 n_0^{-1/2} p_{-12}^{3/2}$$



- Effect of magnetic energy:

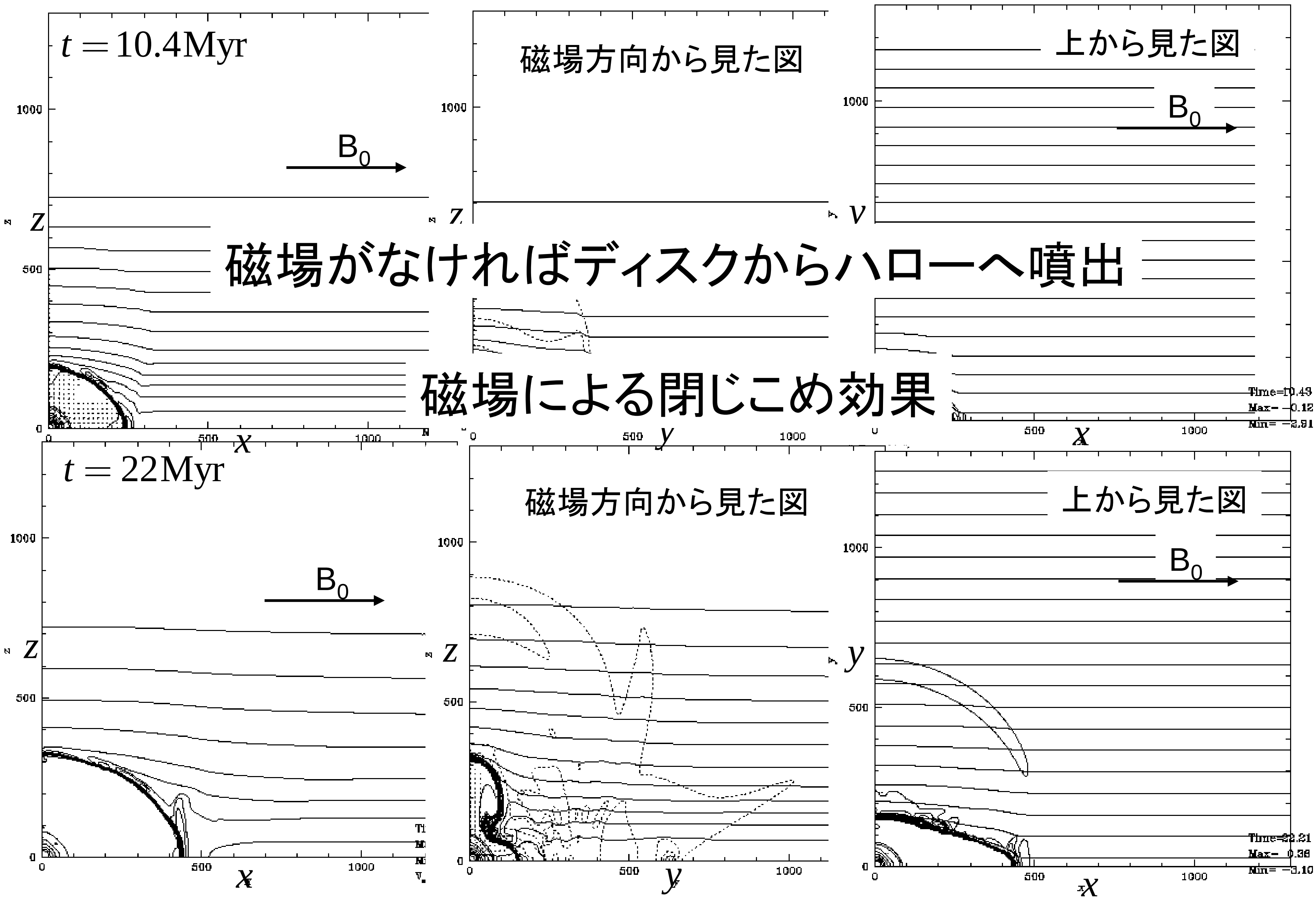
$$p_{\mathrm{mag},-12} = \left(B_0/5\mu\mathrm{G}\right)^2$$

- Critical luminosity

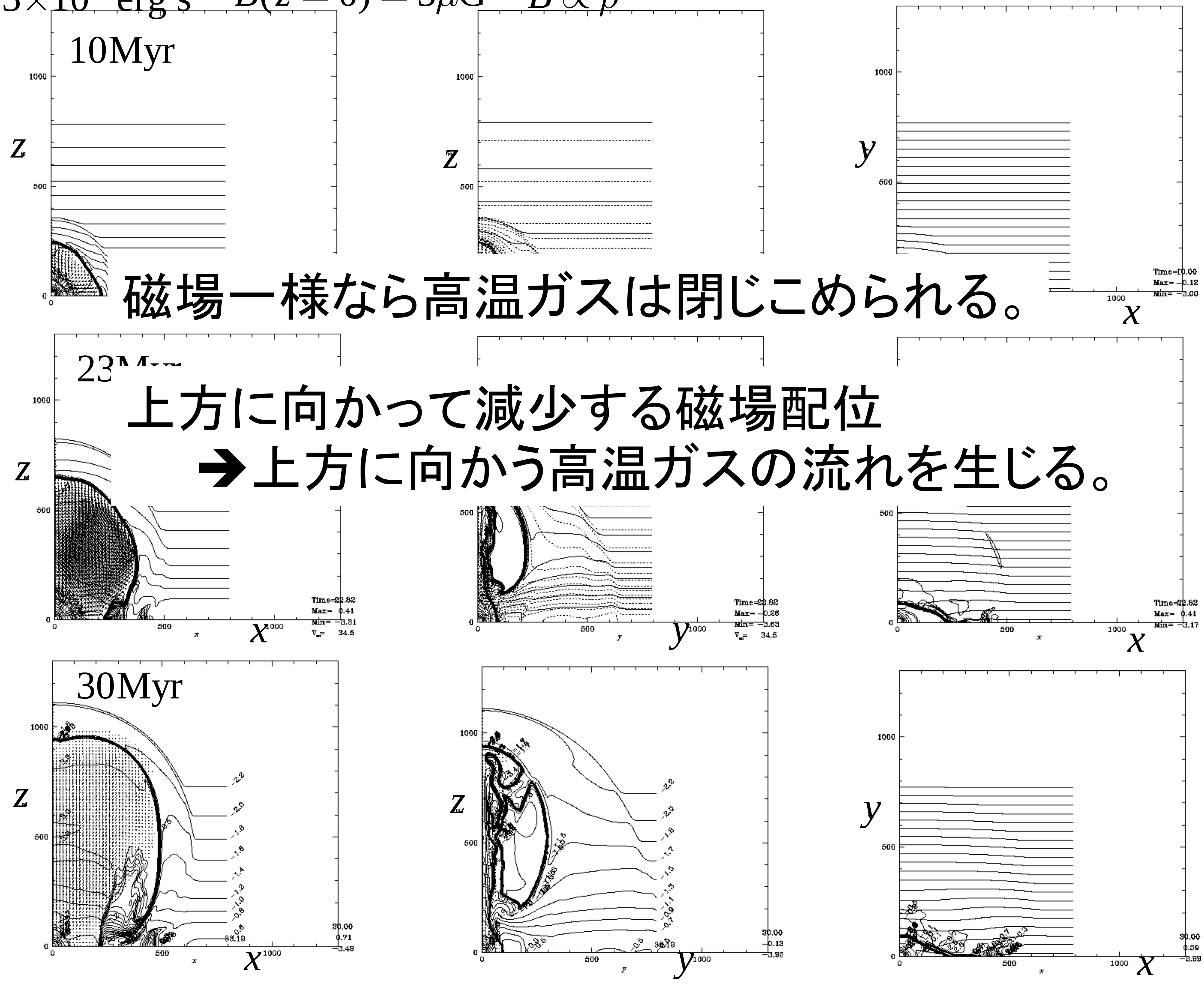
$$L_{crit} = 3\times10^{37}\mathrm{erg\ s^{-1}}\left(\frac{\alpha^2}{5}\right)\left(\frac{H}{180\mathrm{pc}}\right)^2\left(\frac{n_0}{0.3\mathrm{cm^{-3}}}\right)^{-1/2}\left(\frac{p_{\mathrm{total}}}{1.7\times10^{-12}\mathrm{erg\ cm^{-3}}}\right)^{3/2}$$

$$L_{\mathrm{crit}} \approx L_{\mathrm{SN}} \approx E_{51}(1/10^6\,\mathrm{yr}) \quad !!!$$

$L=3\times10^{37}\,\mathrm{erg\ s^{-1}}$ $B=5\mu\mathrm{G}$ 一様磁場



$L = 3\times10^{37}\,\mathrm{erg\ s^{-1}}\quad B(z=0) = 5\mu\mathrm{G}\quad B \propto \rho^{1/2}$

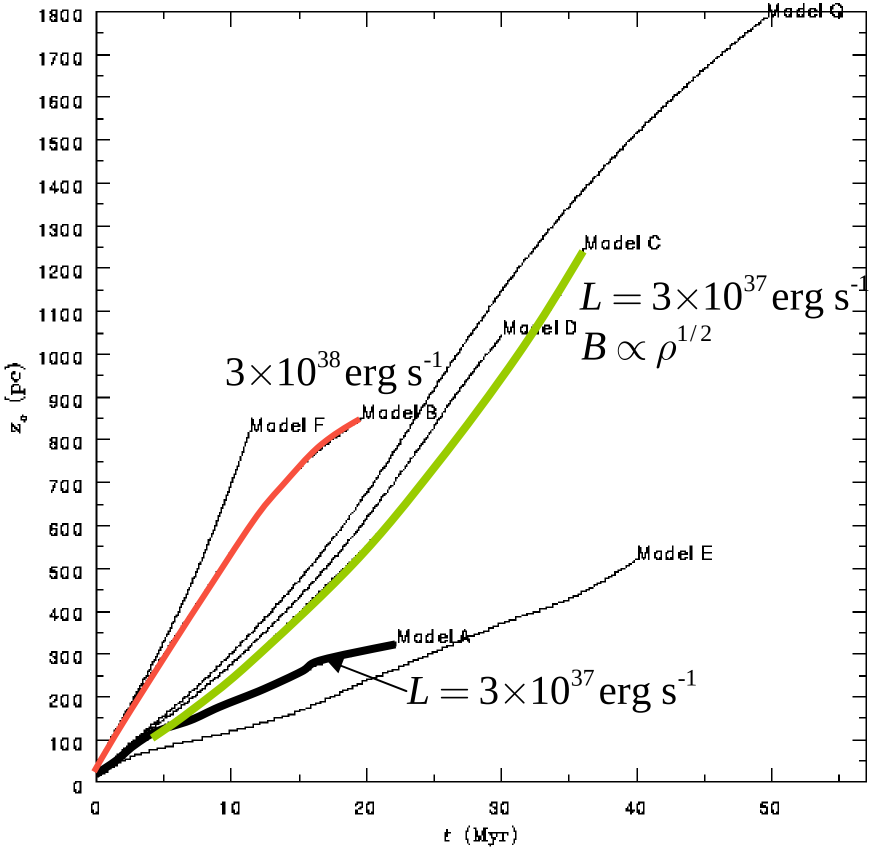


磁場一様なら高温ガスは閉じこめられる。

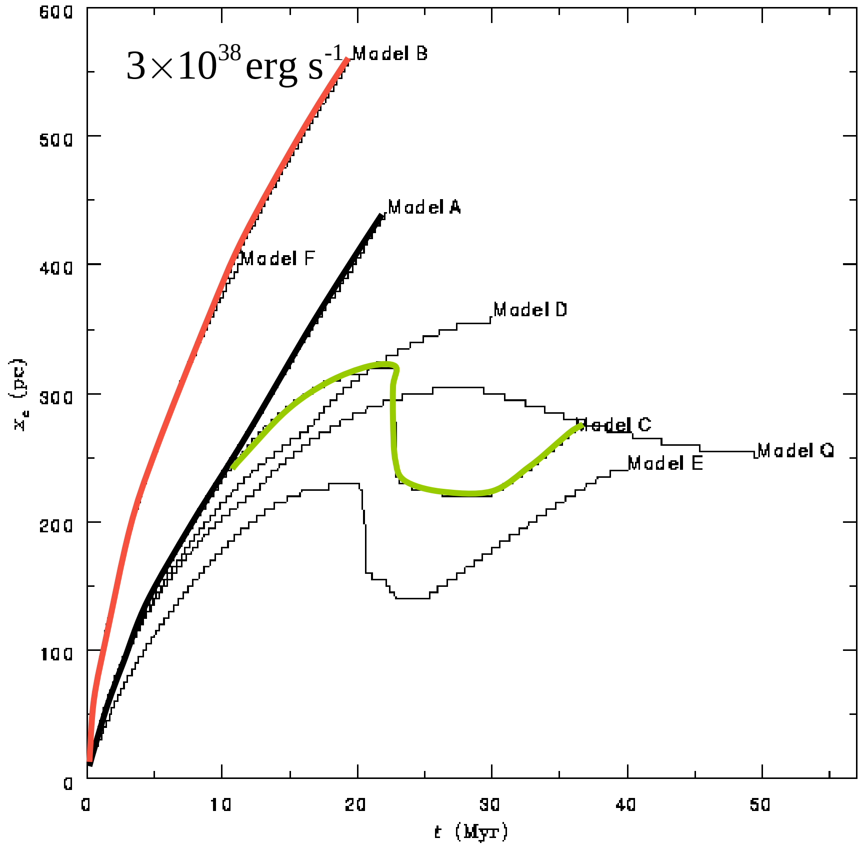
上方に向かって減少する磁場配位

➔上方に向かう高温ガスの流れを生じる。

Z方向への広がり



X方向への広がり



The Effect of Magnetic Field

- B-Field confines the superbubble to the gas disk, especially for the case with the magnetic scale-height being large.
- Side-effect: the expansion perpendicular to the B-field is blocked. Final outcome is an elliptical hole whose major axis is directed parallel to the B-field.
- In the ISM with finite scale-lengths for ρ and B-fields, hot gas escapes from the gas disk due to its buoyancy.

総研大物理科学研究科天文科学専攻
シミュレーション天文学　2004. 7. 13

星間ガスから星への進化

富阪幸治（国立天文台）

分子雲

バックグラウンド

^{13}CO

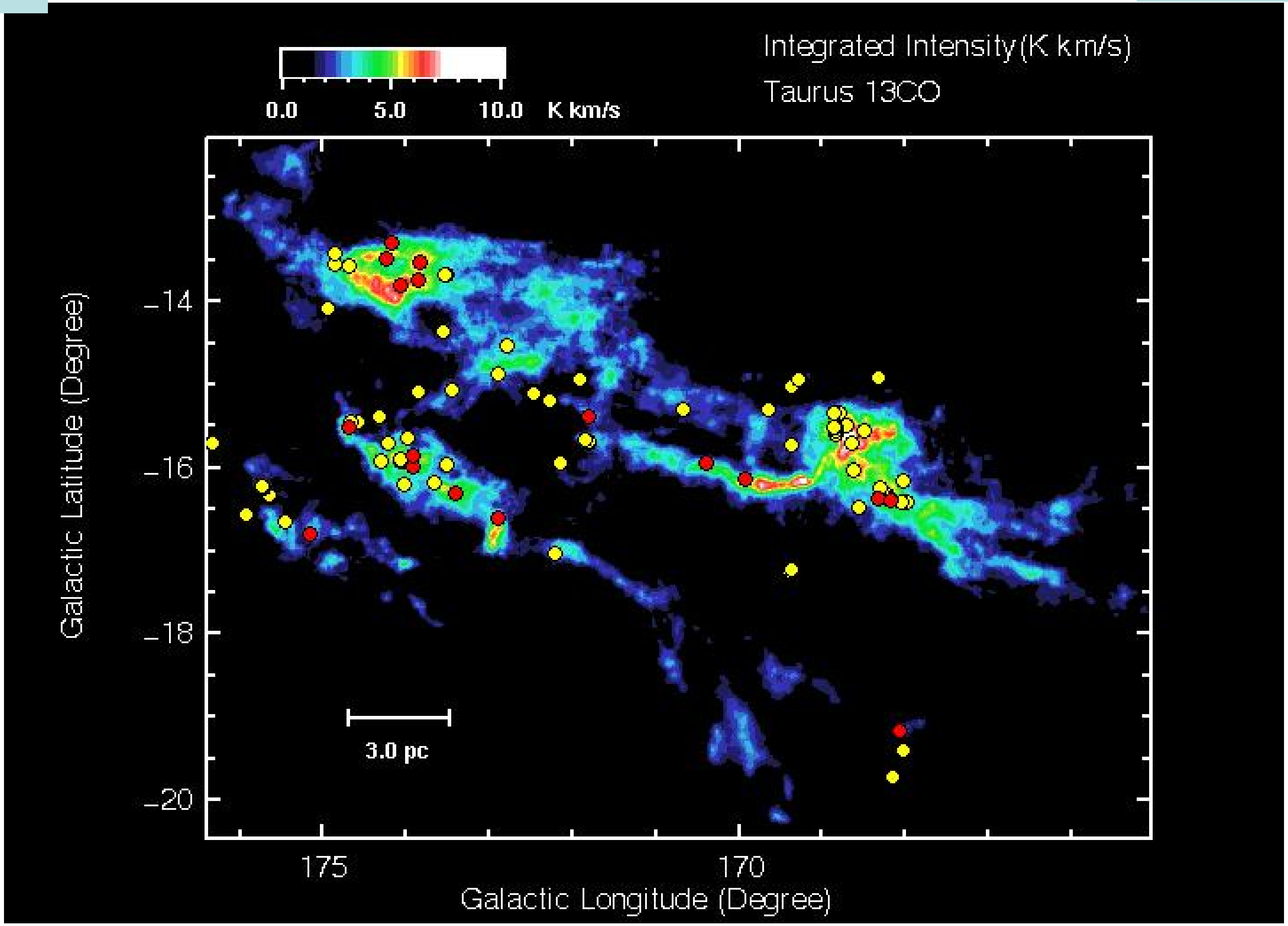


図1は、4メートル電波望遠鏡で観測したおうし座暗黒星雲の方向の^{13}CO分子スペクトルの電波強度図です。青から赤になるにつれてその方向からの電波が強い（分子がたくさんある）ことを示しています。この領域全体でおよそ太陽の7000倍の質量のガスがあり、ガスは平均で1立方cmあたり1000個程の分子からできています。図中の丸印は、赤色が赤外線衛星IRASのデータで、うまれたばかりの星があることを示しています。黄色は光や赤外線で見えるTタウリ星と呼ばれる核融合が始まる前の段階の若い星です。これからガスの濃いところで星がうまれているのがわかると思います。（名大A研ホームページ）

分子雲コアの中で星形成。

分子雲コア

$C^{18}O$

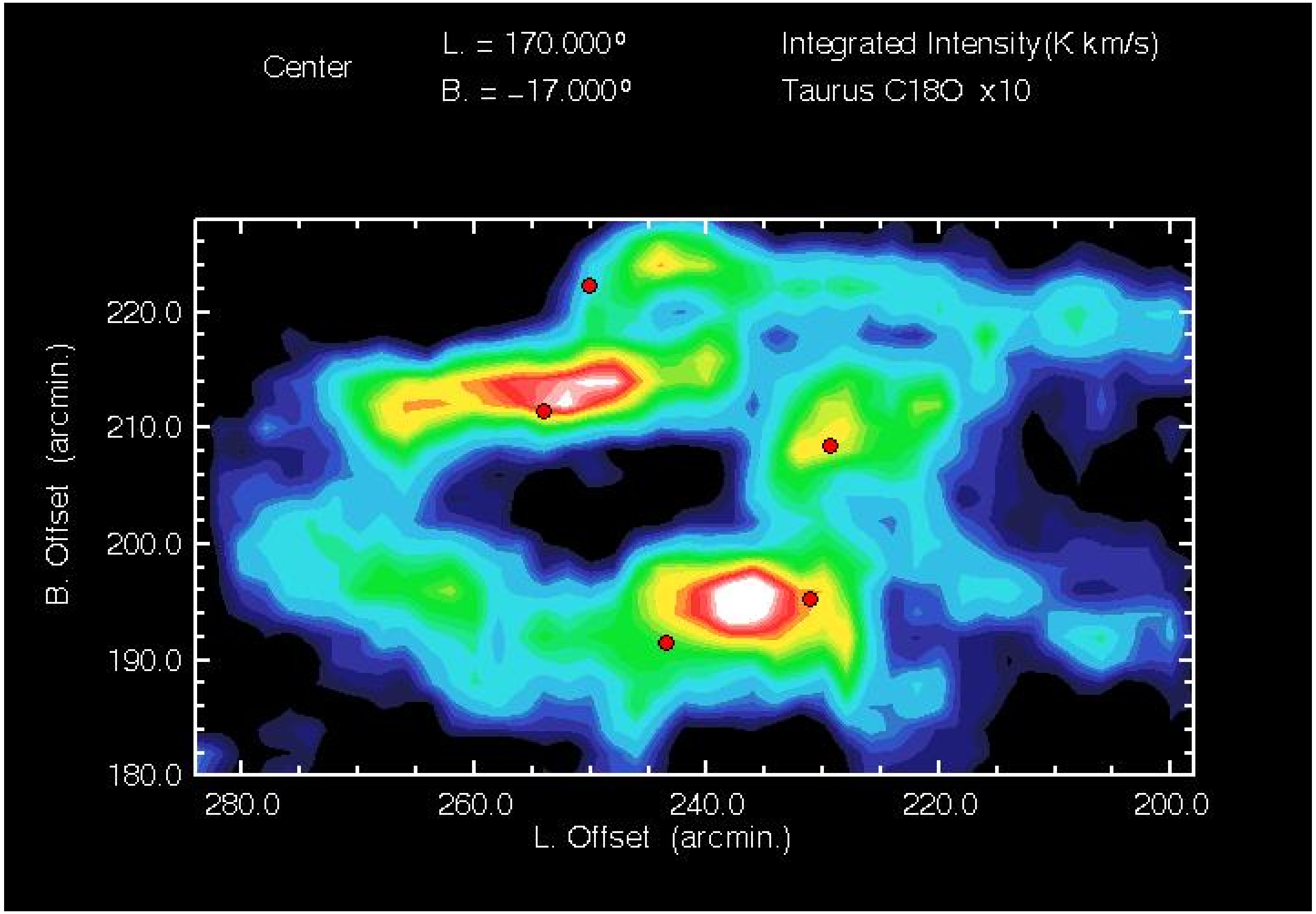
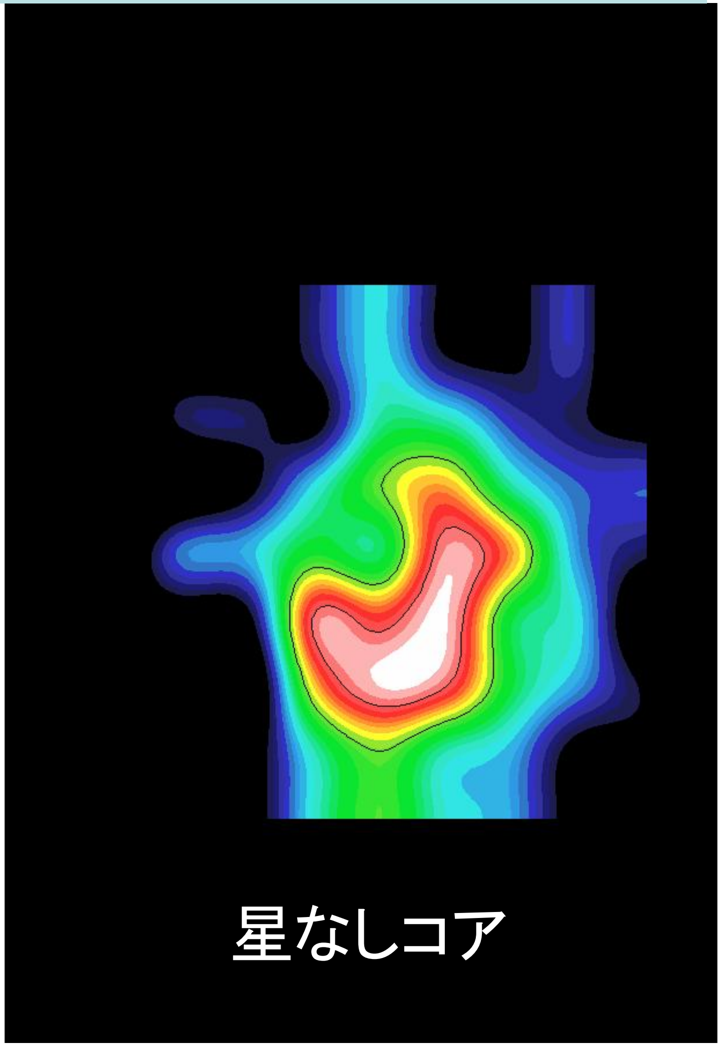
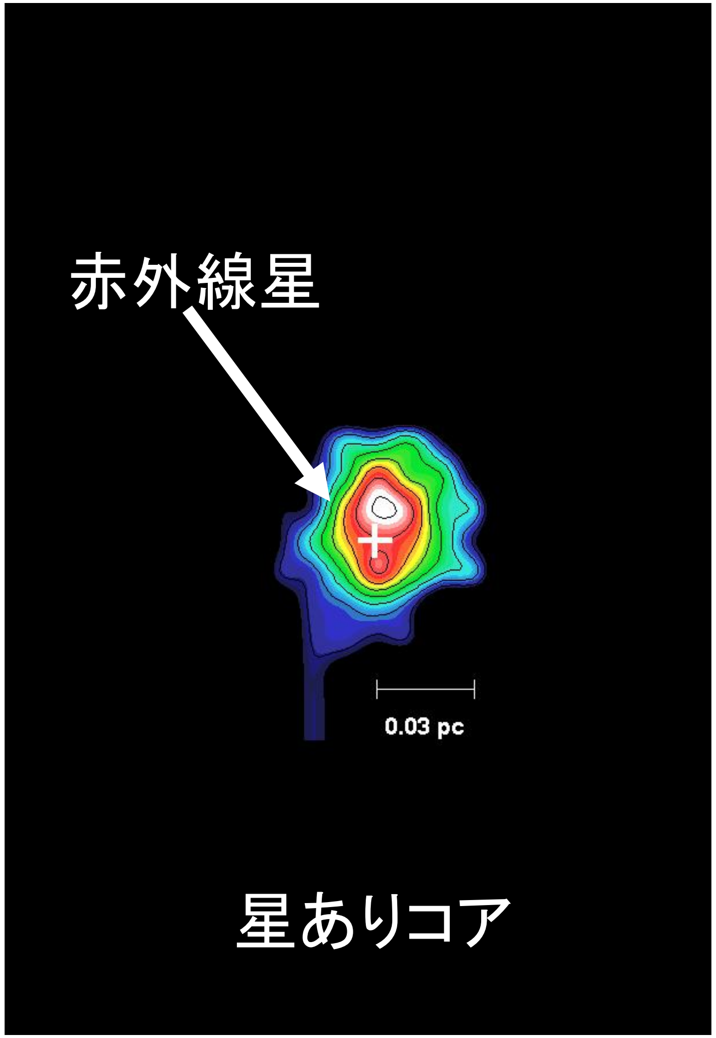


図2は、図1の左上のHLC2と呼ばれている領域の$C^{18}O$分子スペクトルの分布です。$C^{18}O$スペクトルは^{13}C
Oよりも分子雲の奥まで見通せる分子です。これにより分子雲の濃いところの構造がより明らかになります。
　このように分子雲全体からより濃いところを探していき$C^{18}O$よりも分子雲の濃いところを見通せる$H^{13}CO^{+}$分子スペクトルで、4m鏡よりも分解能の高い（細かく見える）野辺山の45m電波望遠鏡を使って観測した結果、私たちは星がうまれる前の段階である星の「たまご」を発見しました。（図3）（名大A研ホームページ）

分子雲コアから原始星へ

$H^{13}CO^{+}$

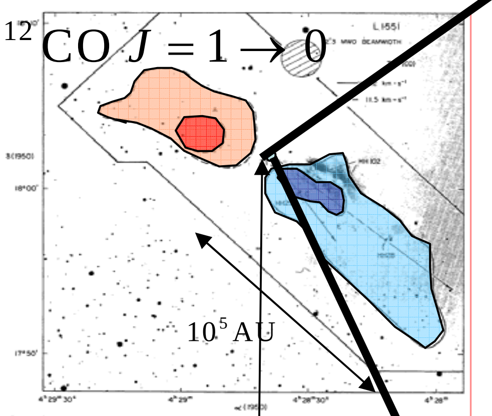




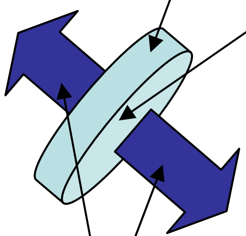
右図には赤外線で見えるうまれたばかりの星（十字印）があるけれど、左図にはそれがありません。また左図の分子雲の濃いところ（分子雲コア）は、右図よりも広がっています。星は、左図のような星の「たまご」が、自分たちの重力によってちぢんでガスがさらに集まり、その中でうまれると考えられます。（名大A研ホームページ）

スケールの異なる2種類のアウトフロー

L1551 IRS5

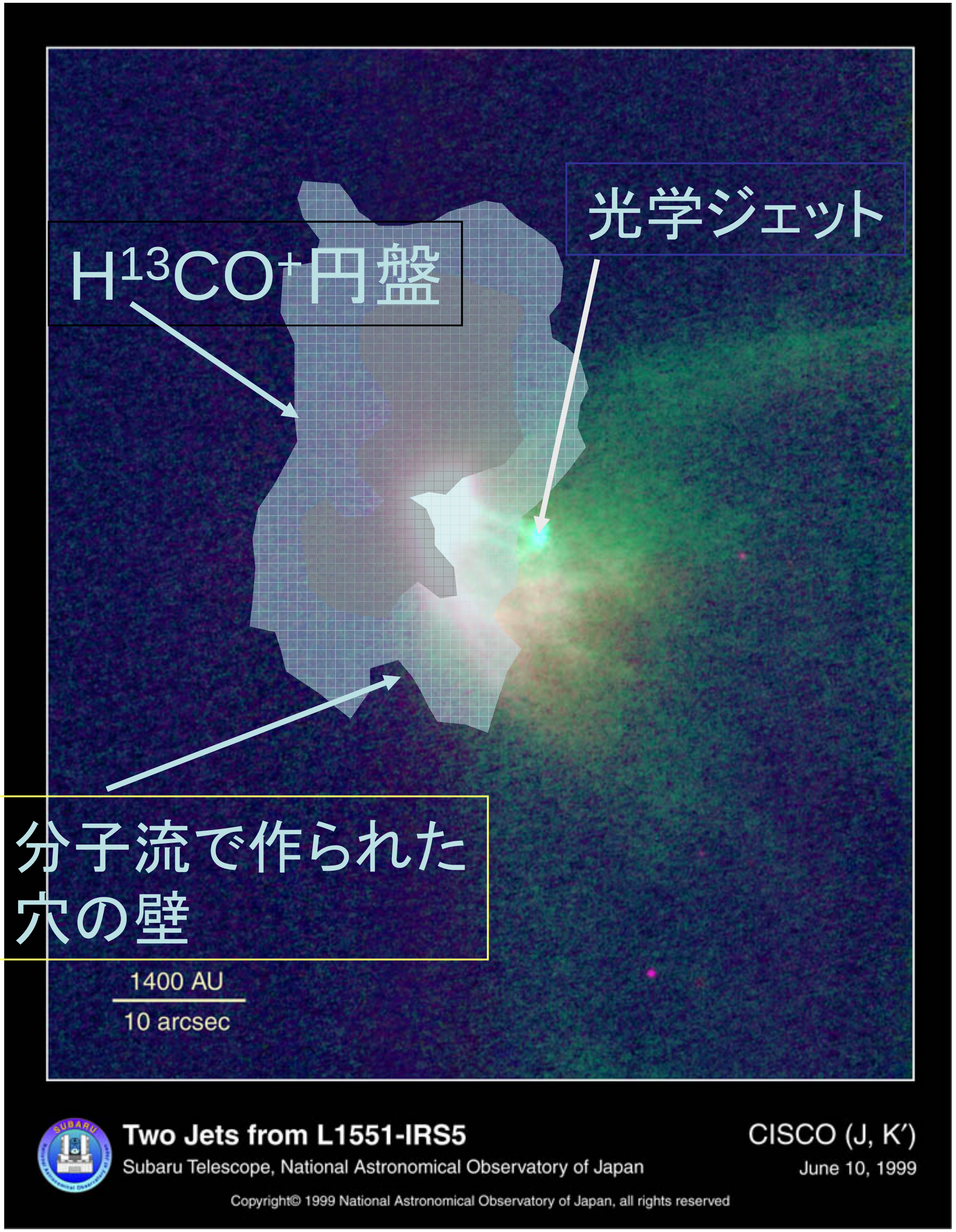


収縮円盤



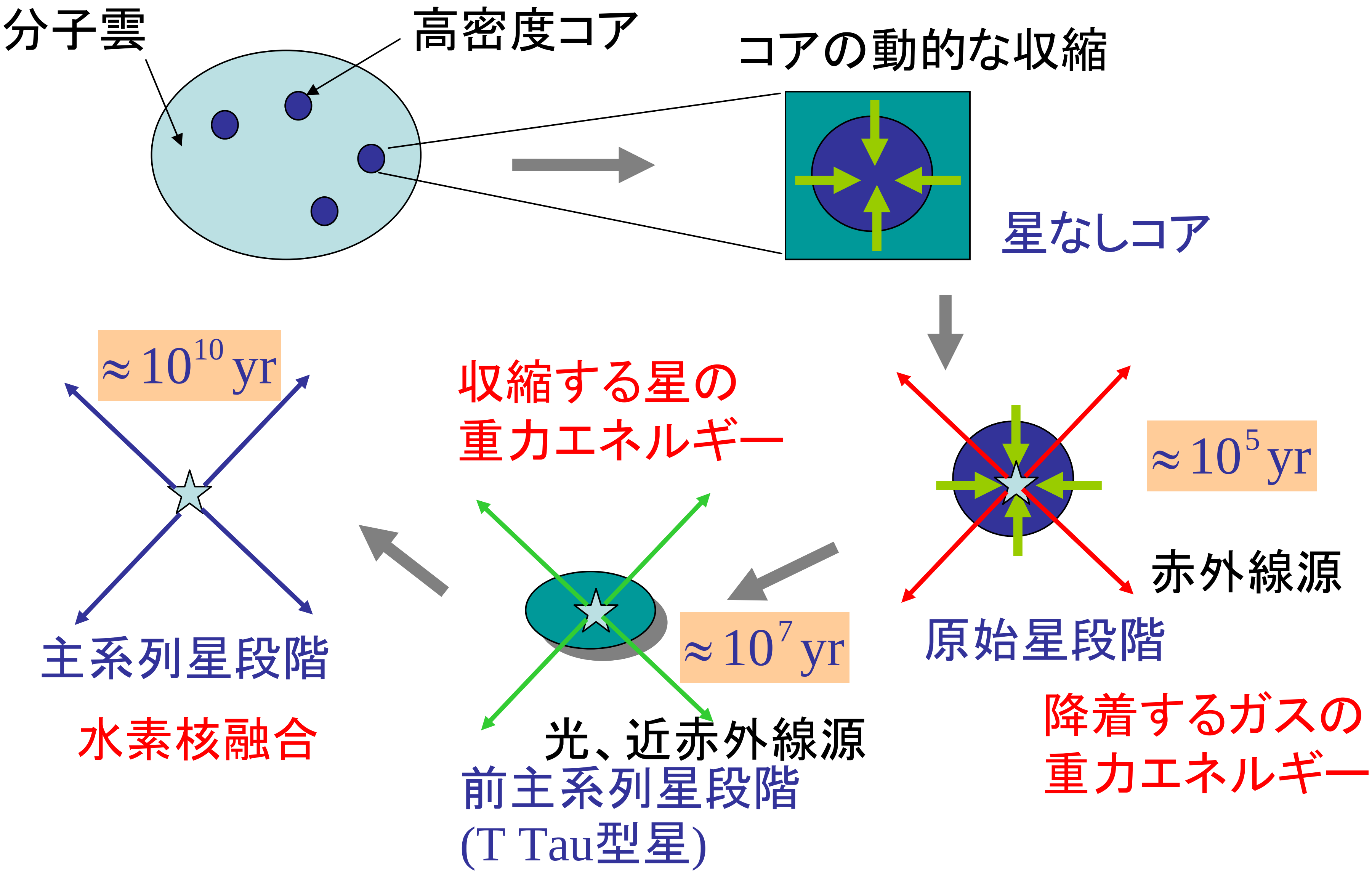
原始星（赤外線源）

収縮中に発生する飛び出し現象（アウトフロー）



星形成の概念図

太陽質量程度の星の形成過程



力学平衡解

- 温度T(等温音速c_s)、外圧P_0の元にある球状ガス

$$-\frac{d\rho c_s^2}{dr} - \rho g = 0 \qquad g = -\frac{GM_r}{r^2} = -\frac{4\pi G\int_0^r \rho r^2 dr}{r^2}$$

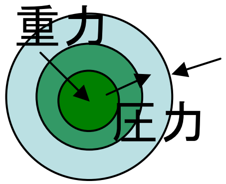
圧力　重力

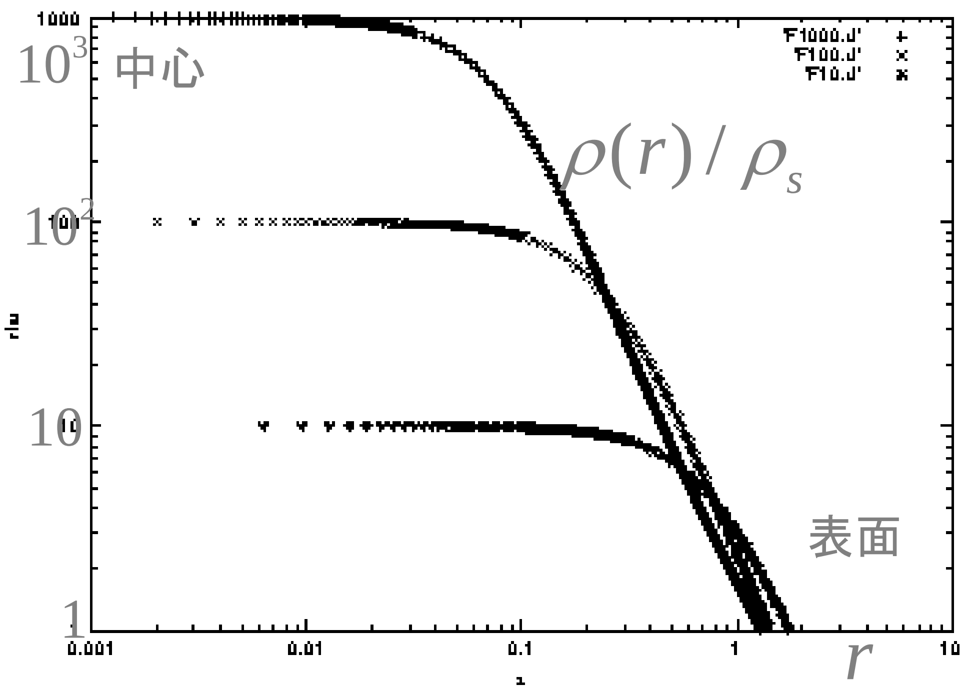
ガウスの定理

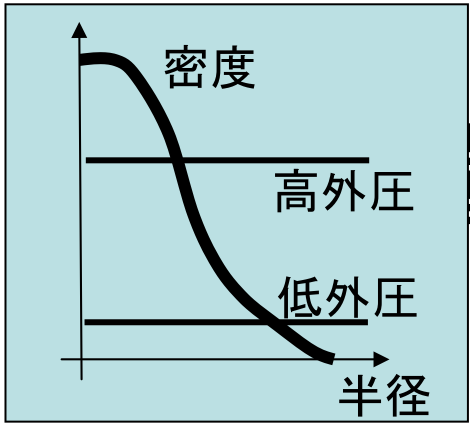
規格化　$\rho = \rho_s f;\ r = \frac{c_s}{\sqrt{4\pi G\rho_s}}\xi$

$$-\frac{df}{d\xi} - \frac{\int_0^\xi f\xi^2 d\xi}{\xi^2} = 0,$$

境界条件　$\xi = 0,\ f = f_c,\ \frac{df}{d\xi} = 0$







一密度関係と安定性

S不安定平衡・力学平衡VS非平衡

$$M_{cl} = M_{cl}(\rho_c, p_{ext})$$

$$\left(\frac{\partial M_{cl}}{\partial p_{ext}}\right)_{\rho_c} \cdot \left(\frac{\partial p_{ext}}{\partial \rho_c}\right)_{M_{cl}} \cdot \left(\frac{\partial \rho_c}{\partial M_{cl}}\right)_{p_{ext}} = -1$$

$\left(\frac{\partial M_{cl}}{\partial p_{ext}}\right)_{\rho_c} < 0$ゆえ

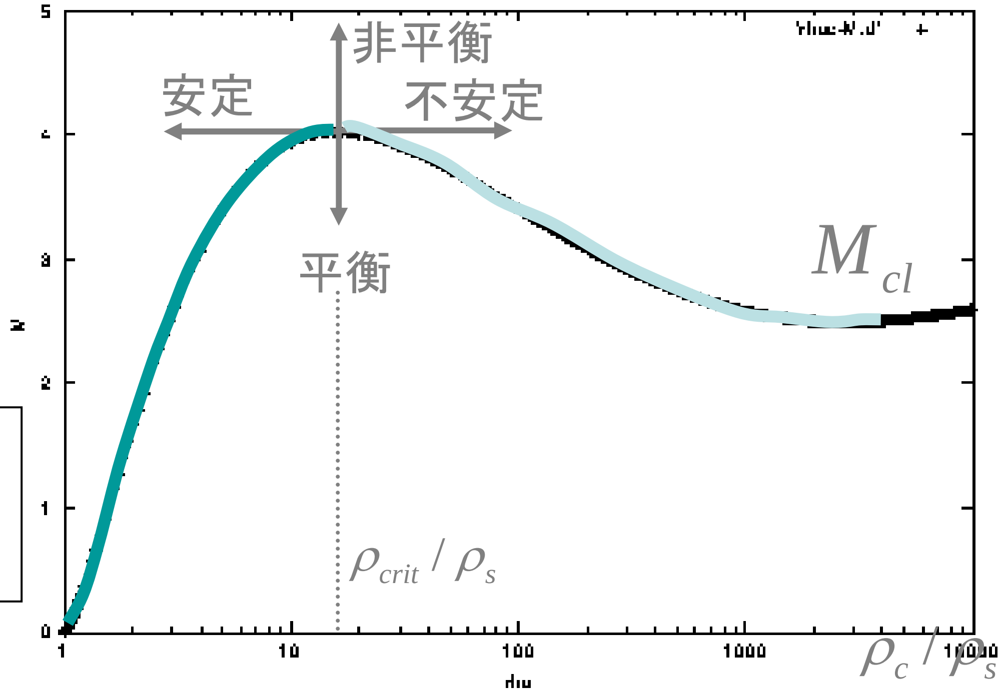
$$\left(\frac{\partial p_{ext}}{\partial \rho_c}\right)_{M_{cl}} \cdot \left(\frac{\partial \rho_c}{\partial M_{cl}}\right)_{p_{ext}} > 0$$

$\left(\frac{\partial M_{cl}}{\partial \rho_c}\right)_{p_{ext}} > 0$ なら $\left(\frac{\partial \rho_c}{\partial p_{ext}}\right)_{M_{cl}} > 0$

外圧
増すと
収縮

安定

$\left(\frac{\partial M_{cl}}{\partial \rho_c}\right)_{p_{ext}} < 0$ なら $\left(\frac{\partial \rho_c}{\partial p_{ext}}\right)_{M_{cl}} < 0$ 不安定



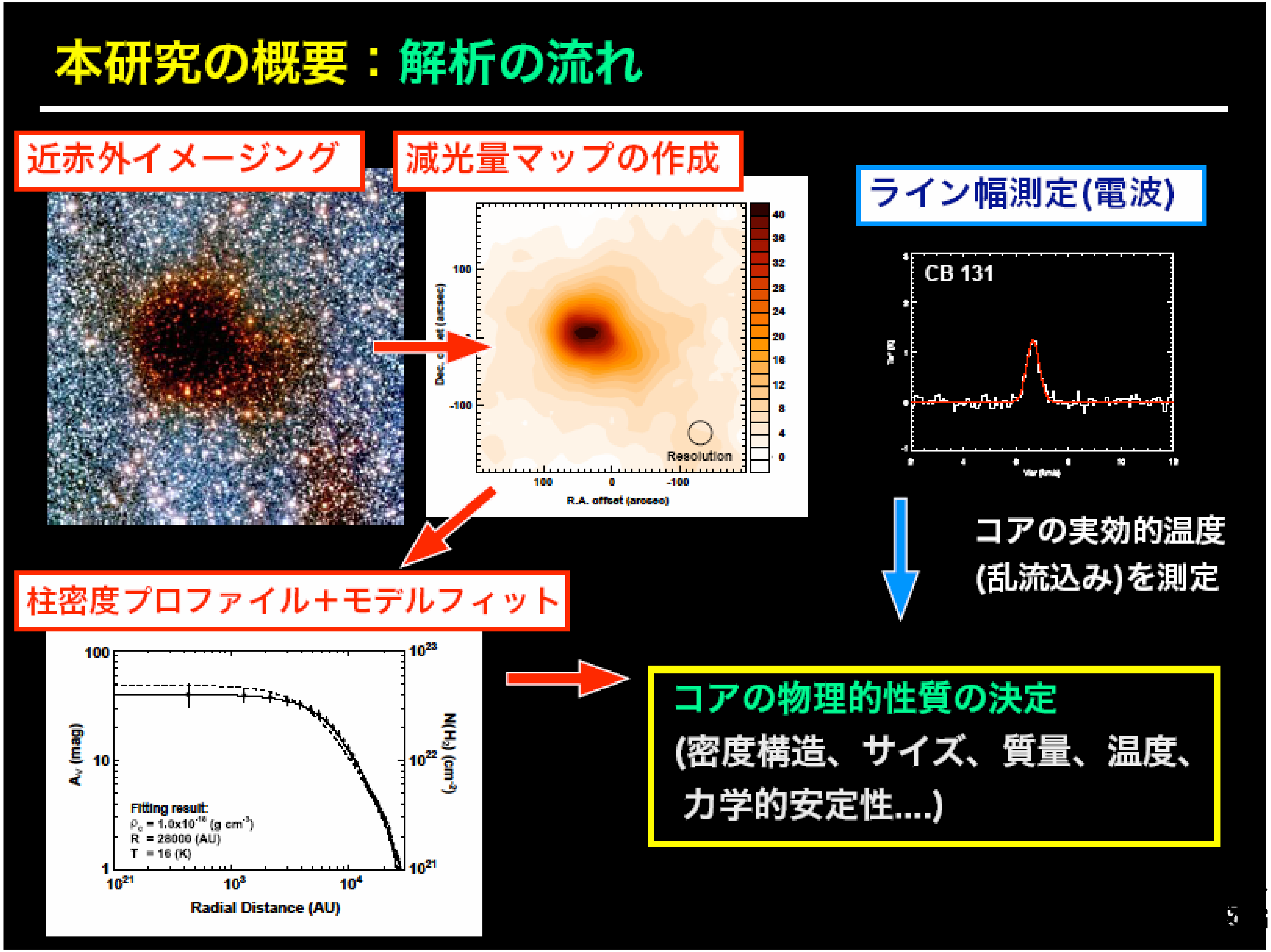
密度比<20

観測例

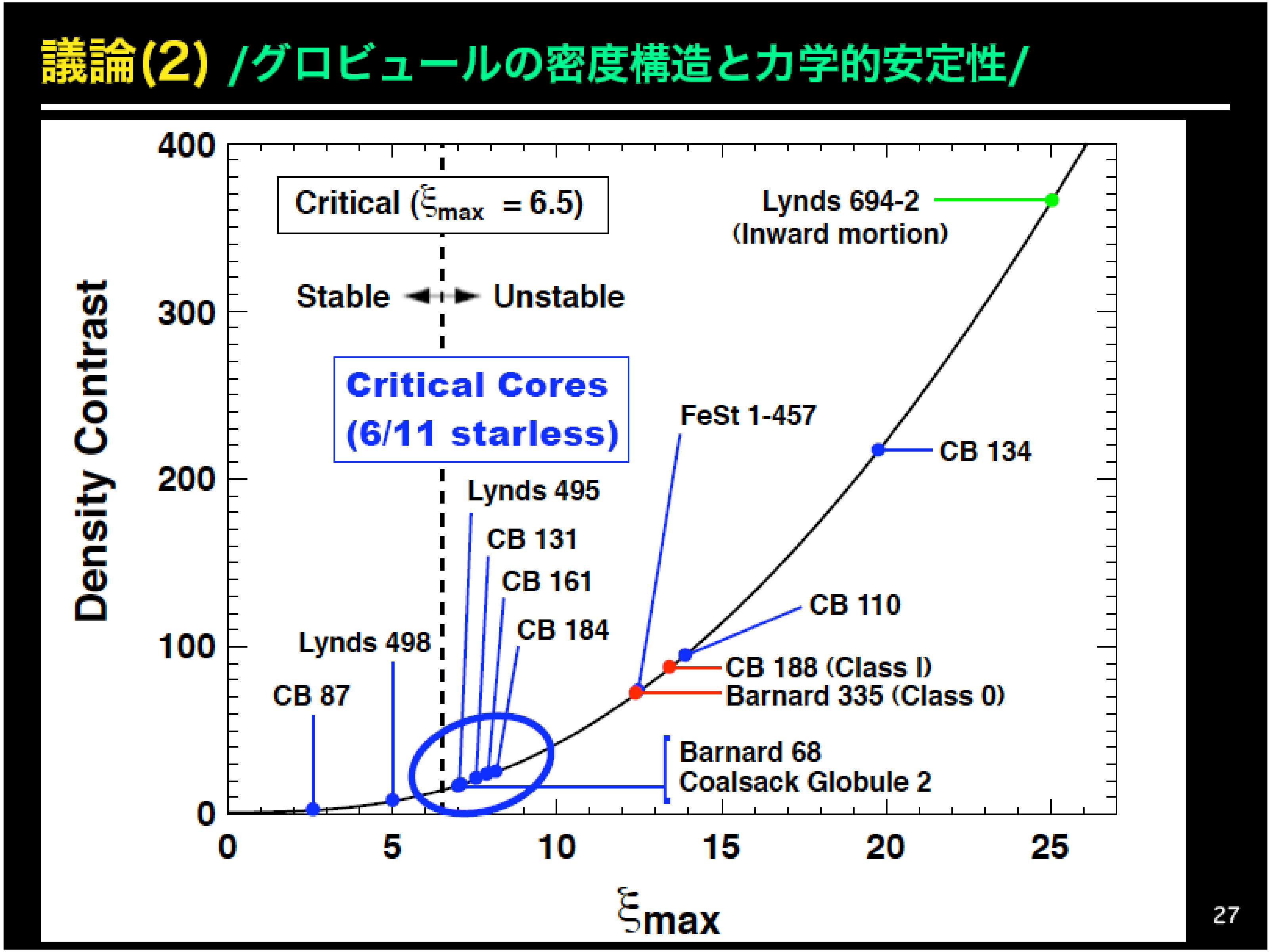
- 孤立した暗黒星雲の密度分布

- 力学平衡解に近い？

$$N_H = \int n dz$$



力学平衡解からわかること



IRSF/SIRIUS　神鳥 亮1、直井隆浩2、中島 康3、田村元秀3、立松健一3　1.総研大/ALMA準備室、2.東京大学、3.国立天文台

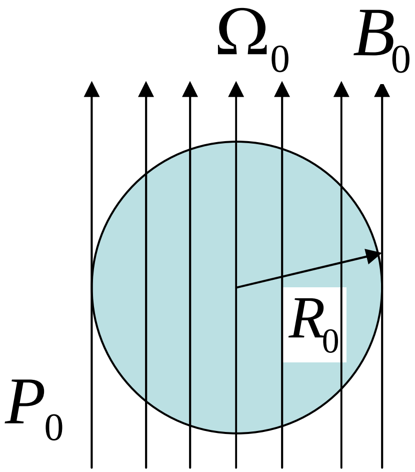
磁気静水圧平衡

ガス圧のみならず、磁場にも重力に対して抗する効果がある。

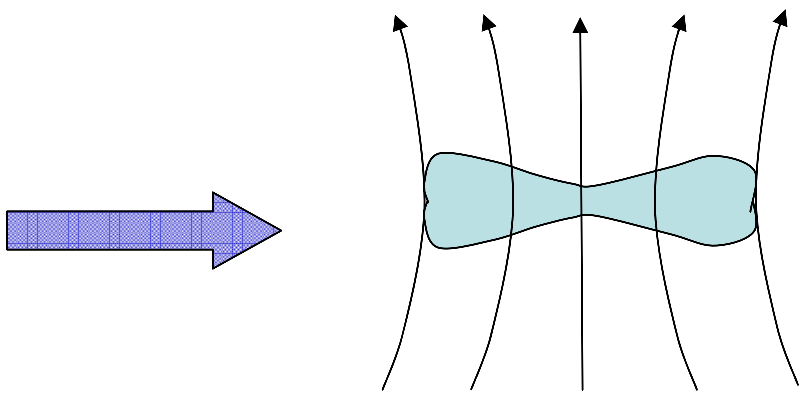
$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{B}=\mathrm{rot}\ \mathbf{A} \\ \mathbf{g}=-\mathrm{grad}\,\phi\end{array}\right.$$

B=rot A ベクトルポテンシャル Grad-Shafranov 方程式
磁場に垂直方向のつりあい

$\mathbf{g}=-\mathrm{grad}\,\phi$ 重力ポテンシャル Poisson 方程式



平衡形状



磁束管内の質量と角運動量を保存

≈プラズマの閉じ込め

力学平衡解からわかること

静水圧平衡

$$\frac{1}{4\pi}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}\boxed{-\rho\nabla\psi-\nabla p}\cancel{-\rho\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})}=0.$$

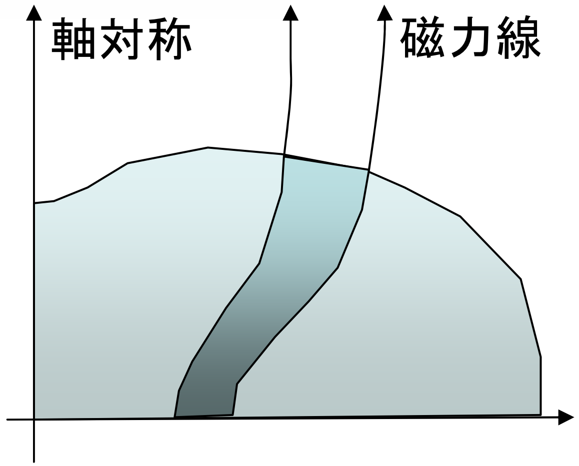
磁場なし

ポアッソン方程式

$$\boxed{\nabla^2\psi=4\pi G\rho}$$

磁力管内の物質分布（等温）

$$\rho=\frac{q}{c_s^2}\exp\left[-\left(\psi-\cancel{\frac{1}{2}r^2\omega^2}\right)/c_s^2\right]$$



➔ポテンシャルと磁場の間の関係式

➔q はある磁力管の中にどれだけの質量を含むかに寄って決まる。(mass loading)

決めると

静水圧平衡の式とポアッソン方程式は解ける。

問： $-c_s^2\dfrac{d\rho}{dz}-\rho\dfrac{d\psi}{dz}=0$

の解が、

$\rho=A\exp(-\psi/c_s^2)$

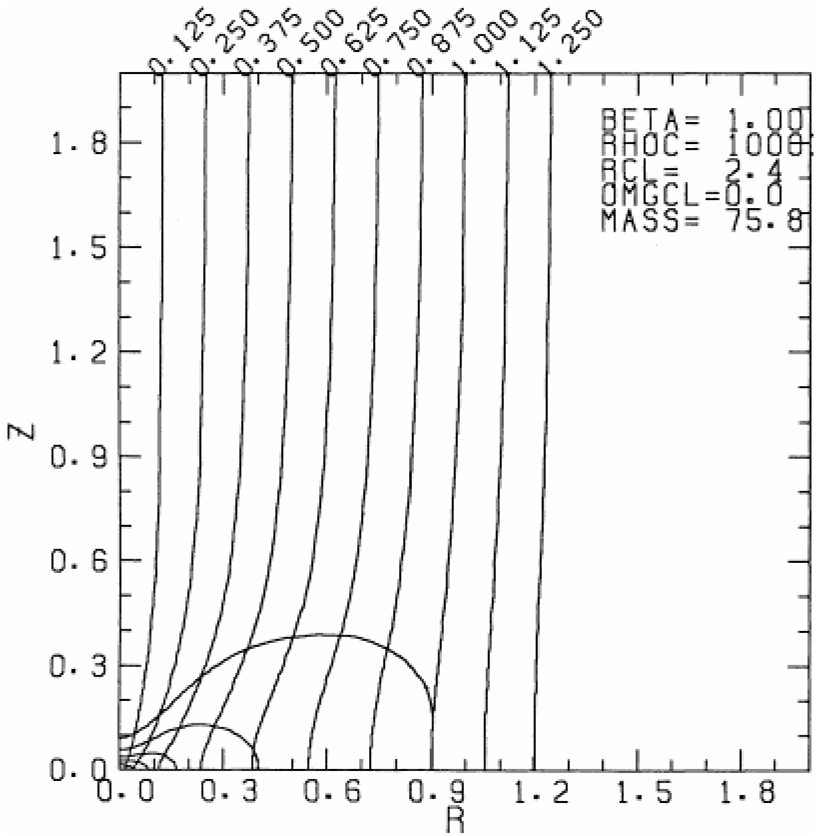
で与えられることを示せ。

Mouschovias & Spitzer, 1976, ApJ 210, 326

Tomisaka, Ikeuchi, & Nakamura, 1988, ApJ, 335, 239

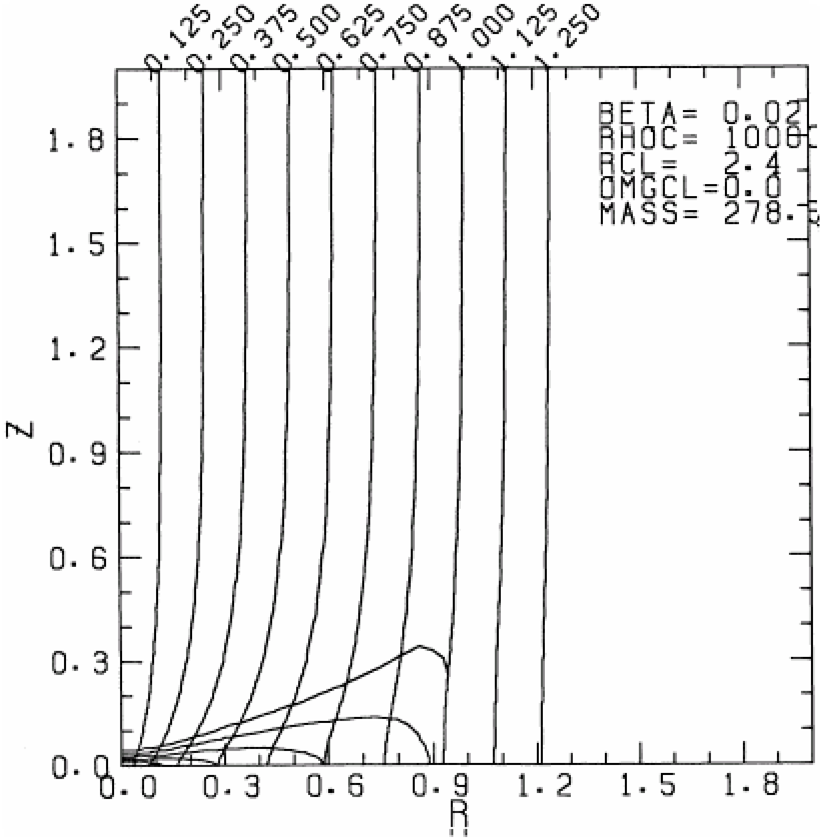
中心密度の異なる一連の解（外圧、磁束＝一定）

ρ_c： $2 \Rightarrow 10^3$



$\beta = 1$

ρ_c： $2 \Rightarrow 10^3$



$\beta = 0.02$

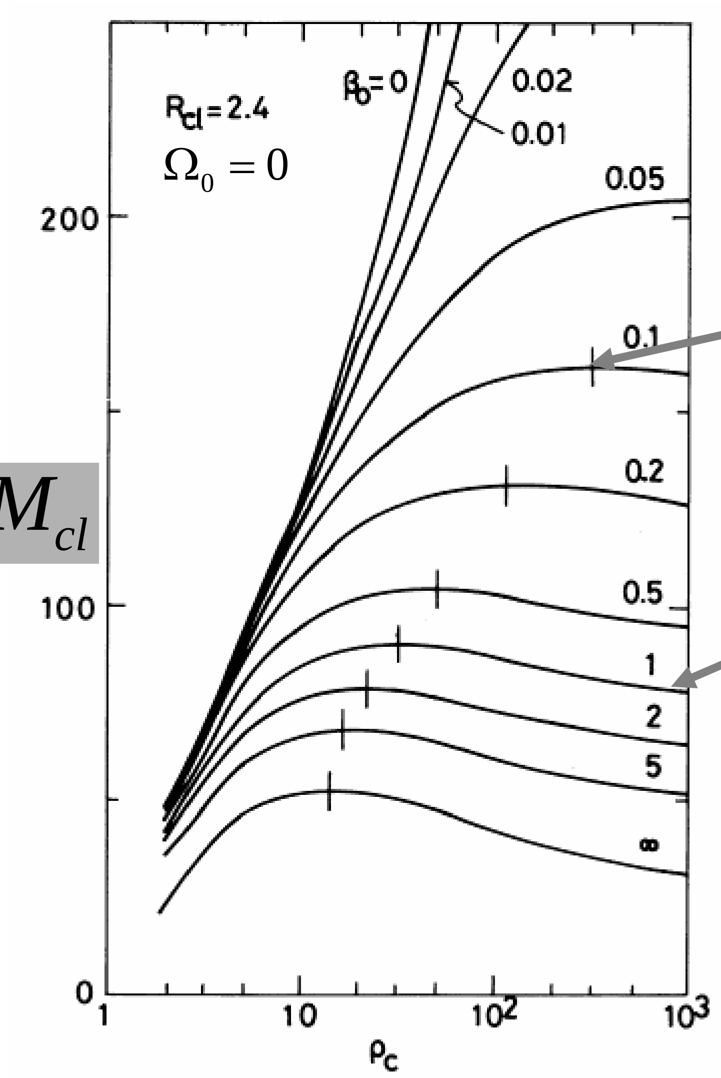
最大質量

$$\boxed{M_{cl} \approx \Phi_B / 2\pi\sqrt{G}}$$

星間雲を貫く磁束

$\Phi_B \Uparrow$　$\Phi_B = \pi R^2 B$

面積×磁束密度



最大質量

M_{cl}

$\Phi_B = \mathrm{const}$

ρ_c / ρ_s

磁場は自己重力を支えることができる

力学平衡解からわかること

- 超臨界雲

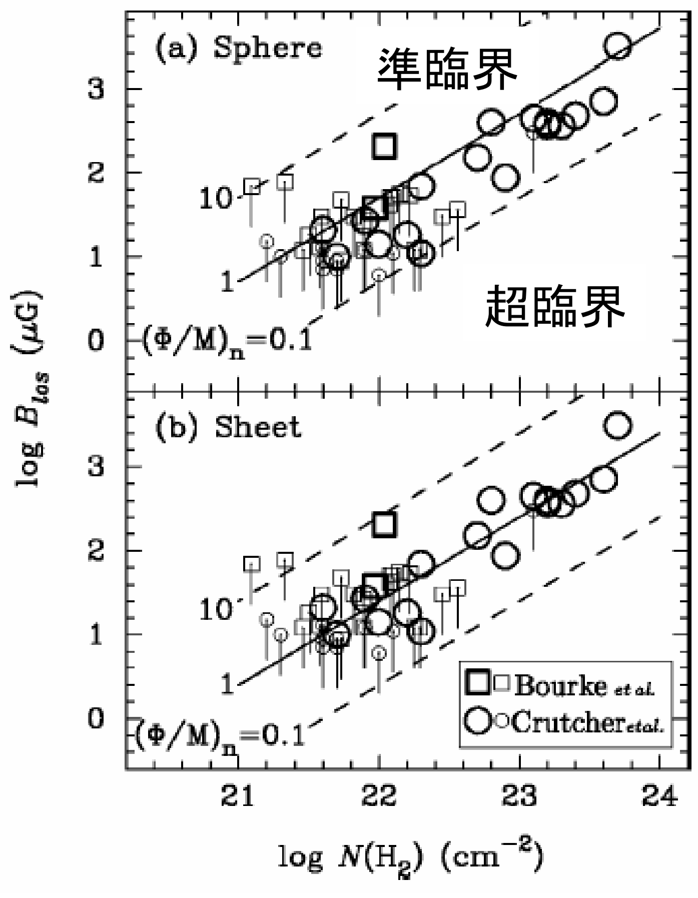
  $M_{cl} > \Phi_B / 2\pi\sqrt{G}$

  – 動的収縮
- 準臨界雲

  $M_{cl} < \Phi_B / 2\pi\sqrt{G}$

  – 磁場で支えられた平衡

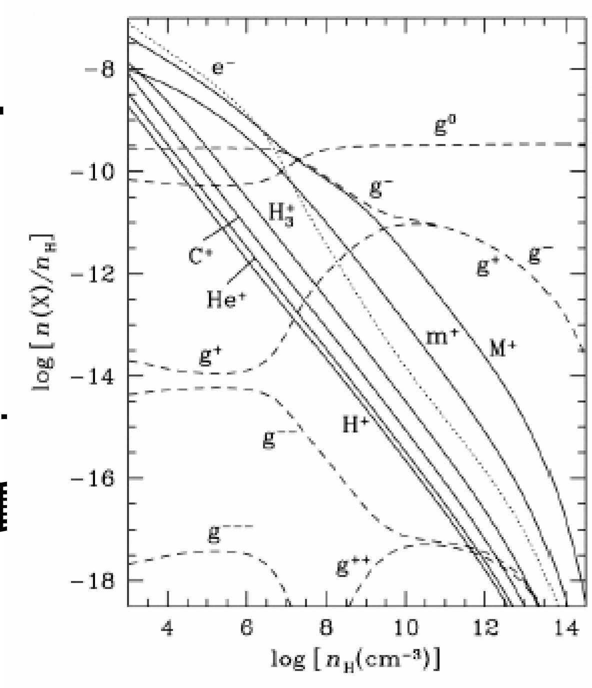
  – 準静的進化



Mass loadingによる違い

プラズマ・ドリフトによる準

準臨界雲



- プラズマ・ドリフト
  - イオン、電荷を帯びたダスト：電離度少・
  - 中性分子、ダスト：イオンなどと相対運動

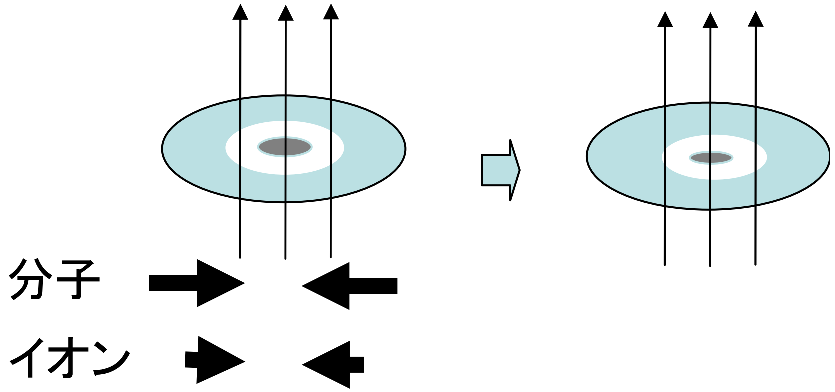
$$\frac{1}{4\pi}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}=\alpha\rho_i\rho_n(\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_n)$$

  - ほぼ力学平衡状態
  - 磁束/質量比の進化

$$\tau_d=\frac{R}{|\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_n|}=\frac{4\pi\alpha\rho_i\rho_n R}{(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}}$$

$$\approx\frac{4\pi\alpha\rho_i\rho_n R^2}{B^2}$$

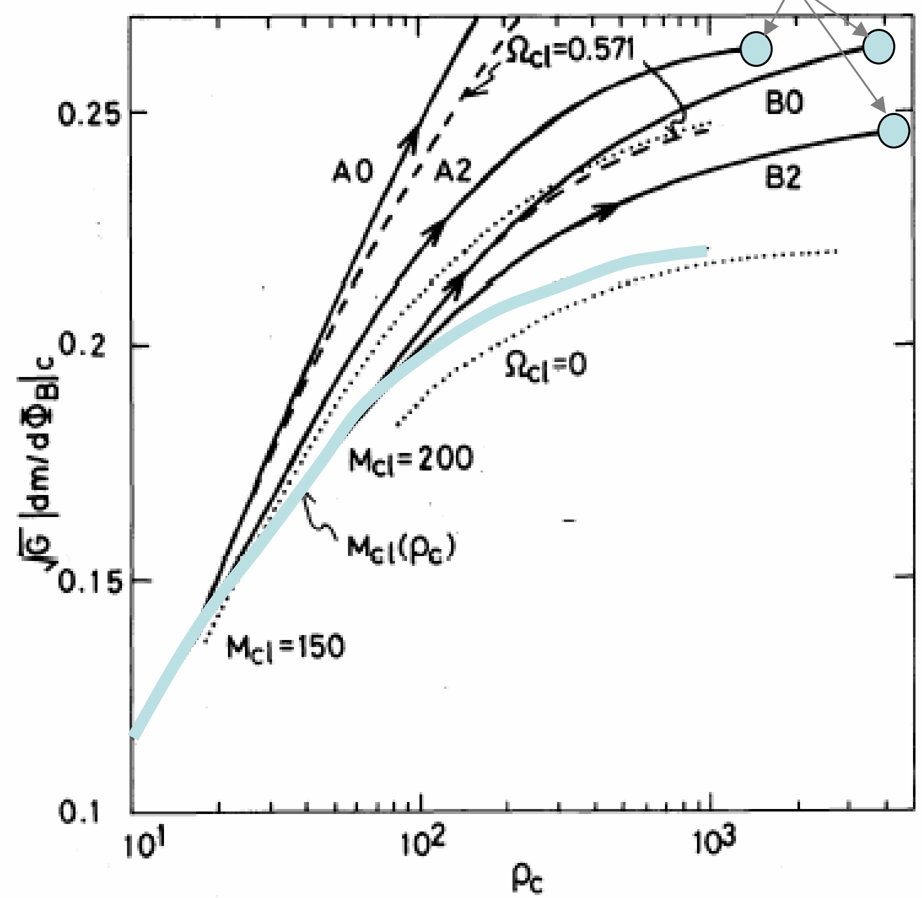
$$=25\mathrm{Myr}\left(\frac{B}{3\mu\mathrm{G}}\right)^{-2}\left(\frac{n}{10^2\,\mathrm{cm}^{-3}}\right)^2\left(\frac{R}{1\mathrm{pc}}\right)^2\left(\frac{x}{10^{-6}}\right)$$



プラズマ・ドリフトによる準静的進化

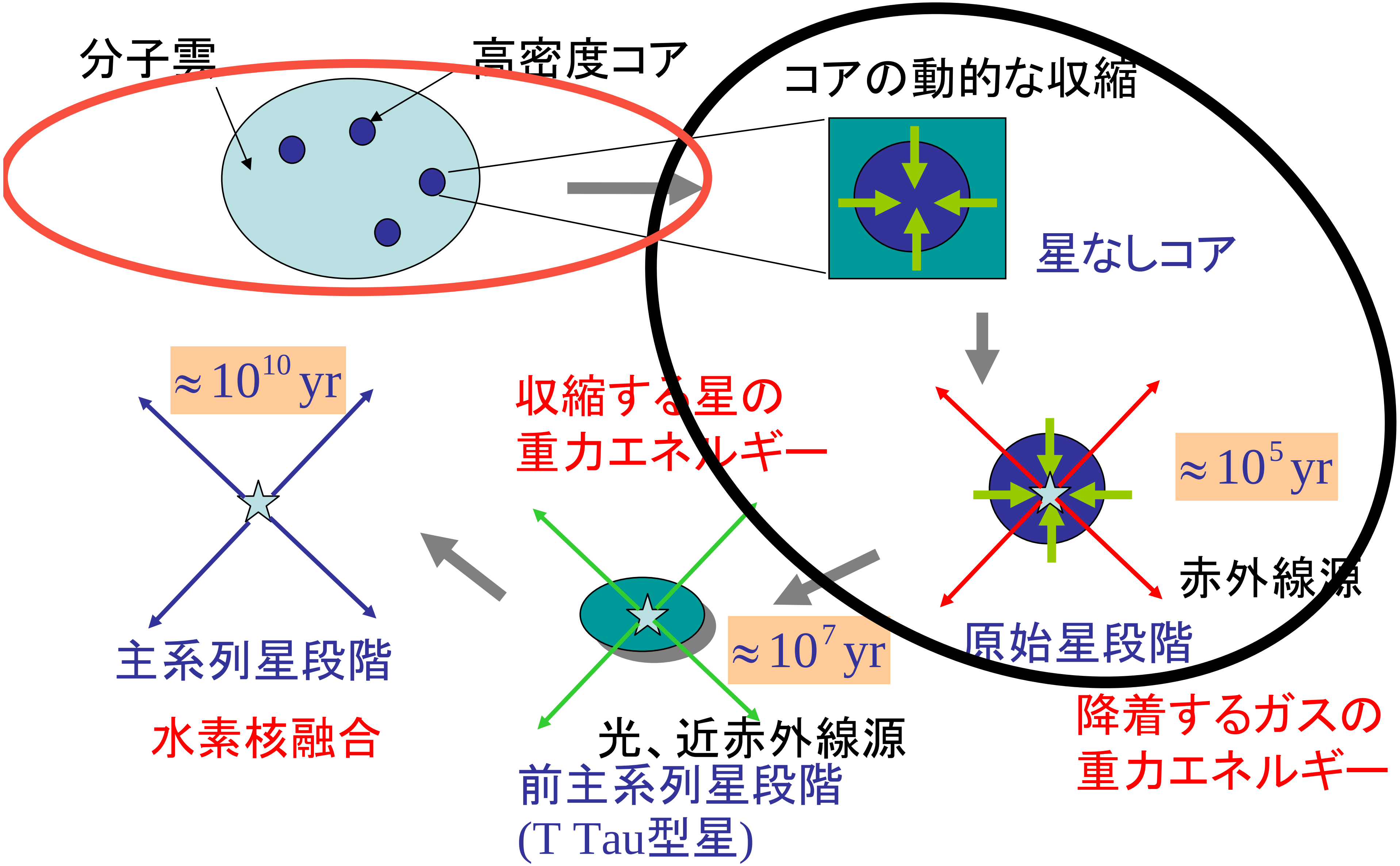
- 平衡状態から出発し、磁束管間のガスの移動を追跡。それに応じた平衡解をつなぐ→準静的進化
- 中心部で質量/磁束比が増大。
- 超臨界に達した段階で、動的進化に移行する。

最終平衡状態



星形成の概念図

太陽質量程度の星の形成過程



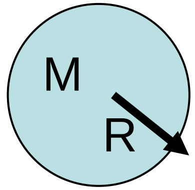
前主系列段階の星

T-Tau型星

ーーケルビン・ヘルムホルツ収縮する星ーー

自己重力エネルギー:重力で凝集している物質をばらばらにするのに要するエネルギー

$$\Phi = -\int \frac{GM_r}{r} dM \qquad M_r = \int_0^r dM$$



一様密度球の場合 $\Phi = -\frac{2}{5}\frac{GM^2}{R} \qquad M_r = 4\pi\rho_0 r^3/3$

一様球状の星の収縮

$$\Delta\Phi \cong \frac{2}{5}\frac{GM^2}{R^2}\Delta R \sim 2\times10^{39}\mathrm{erg}\left(\frac{M}{2\times10^{33}\mathrm{g}}\right)^2\left(\frac{R}{7\times10^{10}\mathrm{cm}}\right)^{-2}\left(\frac{\Delta R}{1\mathrm{m}}\right)$$

太陽光度 $E = L_\odot \Delta T = 1.2\times10^{41}\mathrm{erg\ y^{-1}}\left(\frac{L_\odot}{4\times10^{33}\mathrm{erg\ s^{-1}}}\right)\left(\frac{\Delta T}{1\ \mathrm{y}}\right)$

$\frac{\Delta R}{\Delta T} = 60\mathrm{m\ y^{-1}}$ だけ収縮すれば太陽の光度は説明可

これが働く期間は?

$R/(\Delta R/\Delta T) \sim 10^7\ \mathrm{y}$ ←ケルビン・ヘルムホルツ収縮時間

太陽の年齢～50億年!!

T-Tau型星

ーーケルビン・ヘルムホルツ収縮する星ーー

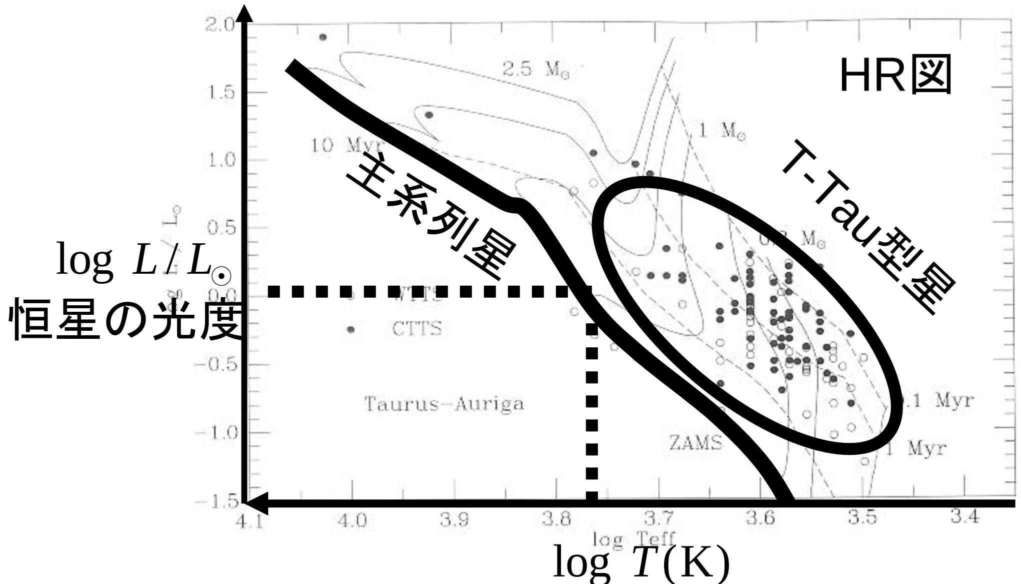


Fig. 1.2. HR diagram positions of young stars within the Taurus–Auriga molecular cloud complex (Figure 1.1). For comparison, theoretical evolutionary tracks for pre-main-sequence stars of masses 2.5, 2.0, 1.5, 1.0, 0.5, 0.3, and 0.1 $M_\odot$ are shown. The dashed lines are isochrones for ages of 10^5, 10^6, and 10^7 yr (0.1, 1, and 10 Myr), with the hydrogen-fusion 'zero-age main sequence' or ZAMS shown as the lowest line running from upper left to lower right. The open circles refer to weak-emission T Tauri stars (WTTS; see text), while the filled circles denote the positions of the classical T Tauri stars (CTTS). Stellar properties taken from Kenyon & Hartmann (1995); evolutionary tracks are from D'Antona & Mazzitelli (1994).

動的収縮する星間雲

一様球対称等温ガス球の収縮

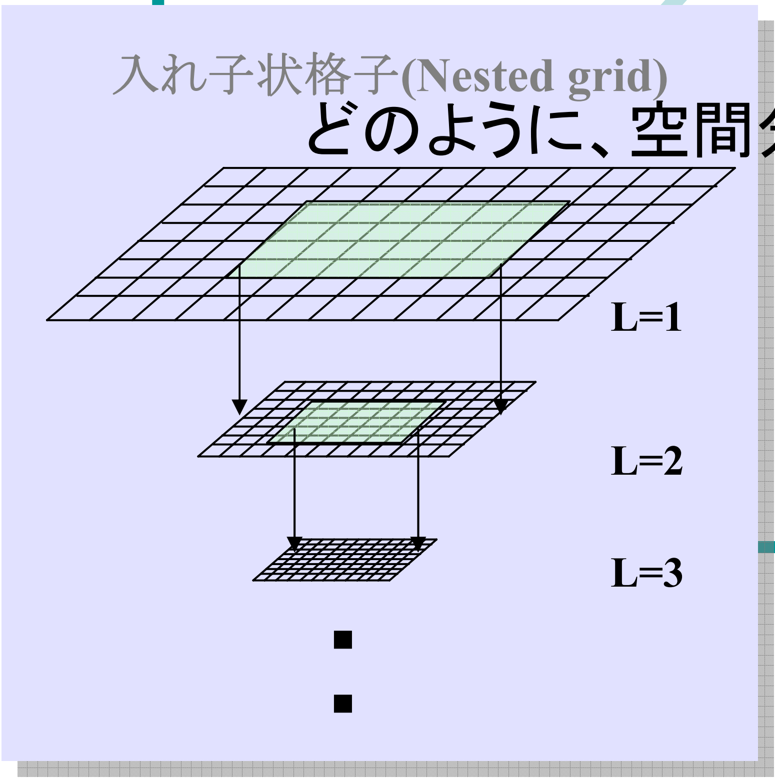
平衡に近い場合

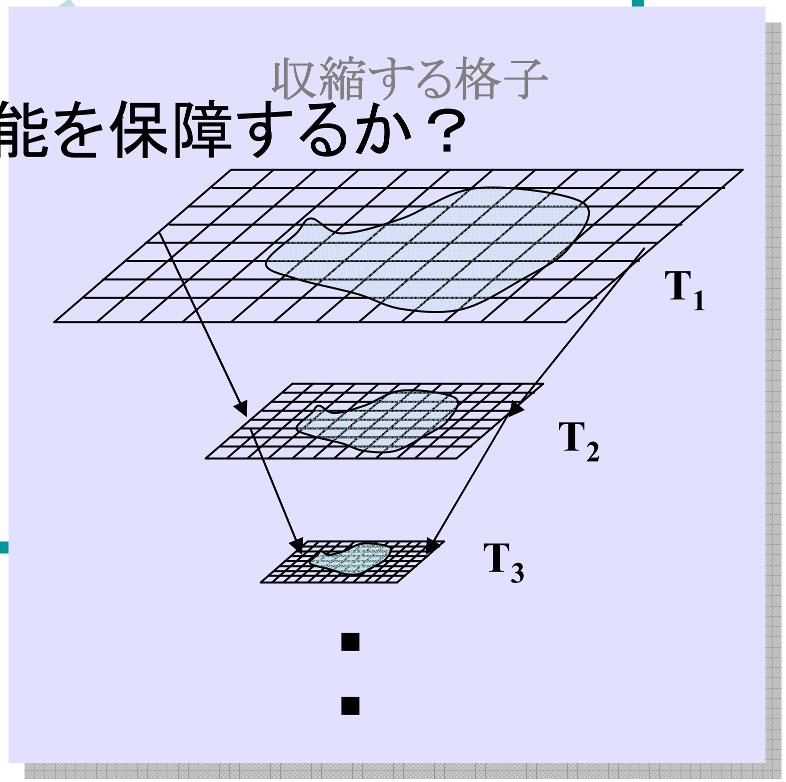
非一様収縮？

平衡から遠い場合

一様収縮？

どのように、空間分解能を保障するか？





電磁流体力学

プラズマを電気伝導性を持つ連続物質と考える

- 変位電流無視：マックスウエル方程式

アンペールの法則 $$\mathrm{rot}\ \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},$$

ファラデイの法則 $$\mathrm{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0,$$

- 電磁流体：ローレンツ力

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\nabla p - \rho\nabla\phi + \frac{\mathbf{j}\times\mathbf{B}}{c}$$

$$\frac{\mathrm{rot}\mathbf{B}\times\mathbf{B}}{4\pi} = -\frac{1}{8\pi}\mathrm{grad}\ \mathbf{B}^2 + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}\cdot\mathrm{grad})\ \mathbf{B}$$

- オームの法則： $$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{c}\right)$$

磁場の誘導方程式

電磁流体力学とは

MagnetoHydroDynamics(MHD)

電場：消去→流体＋磁場

- 磁場の誘導方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla^2\mathbf{B}$$

η

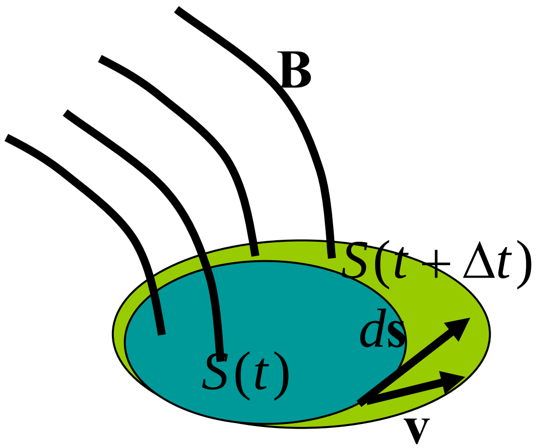
- 理想MHD

$$\sigma \uparrow \ L \uparrow \quad \Rightarrow \quad \eta B / L^2 \to 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

  – ある質量を貫く磁束が保存

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt} &= \frac{d}{dt}\int \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}dS = \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}dS + \int \mathbf{B}\cdot(\mathbf{v}\times d\mathbf{s}) \\ &= \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}dS + \int \mathbf{B}\times\mathbf{v}\cdot d\mathbf{s} \\ &= 0\end{aligned}$$



磁場が流体に凍結している

理想MHD基礎方程式

- 連続の式

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\rho\mathbf{v} = 0}$$

- 運動方程式

$$\boxed{\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p - \rho\nabla\phi} \; \boxed{+\frac{(\mathrm{rot}\,\mathbf{B})\times\mathbf{B}}{4\pi}}$$

- 磁場の誘導方程式

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})}$$

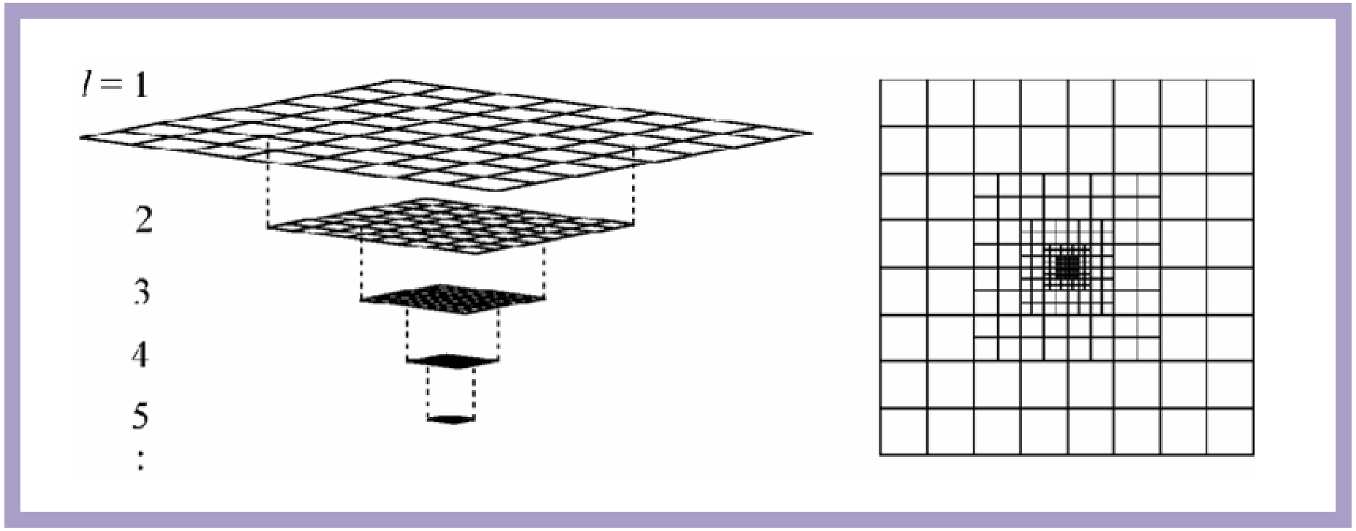
- 重力のポアッソン方程式

$$\boxed{\nabla^2\phi = 4\pi G\rho}$$

- バロトロピー（圧力ー密度）関係
  - 等温 $\boxed{p = c_s^2\rho}$
  - エントロピー一定

$$p = K\rho^{\Gamma}$$

Introduction of Nested Grid

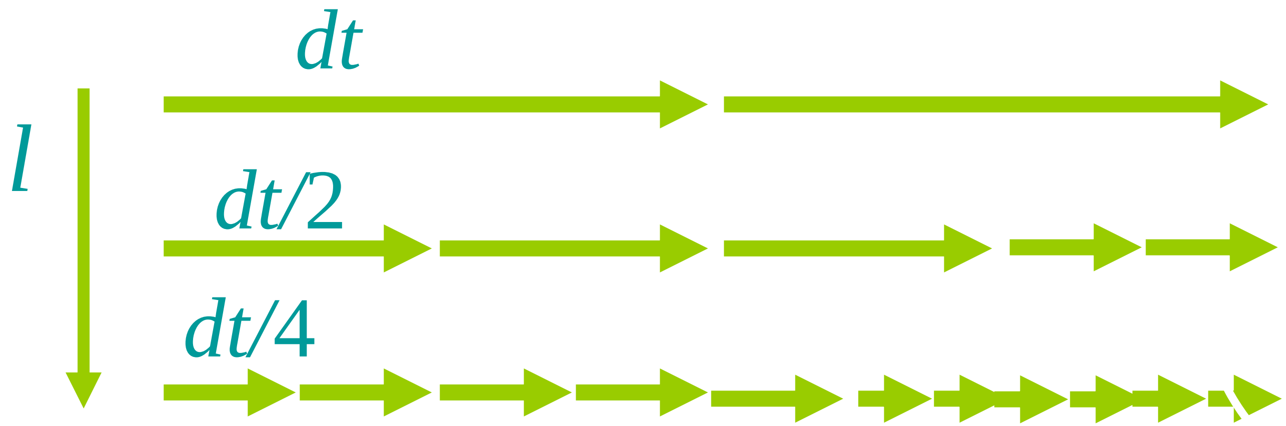


- Nested grid is a cheap edition of AMR B-)
  - AMR is somewhat expensive for nearly spherically collapsing gas cloud.
- Cell width $\Delta x_l = 1/2\ \Delta x_{l-1}$
- Subgrids are formed automatically according to physical conditions.
- Location of the subgrid is fixed.
- Schemes：
  - Roe method for HD and MHD
  - Multigrid method for selfgravity.
- Numerical fluxes are conserved in grid-interfaces, surfaces between fine and coase grids.

PARAMESH: Parallel Structu
Grid AMR

多重格子法

MHD part
Multi timestep (1)



- High resolution in time in sub-grid

□ $\Delta t_l = \mathrm{Min}(\ \Delta t_{l\text{-}1}\ ,\ \mathrm{CFL}\ \ \Delta x\ /\ v)$

  – The fine grid takes two or more steps while the coarse grid does one step.

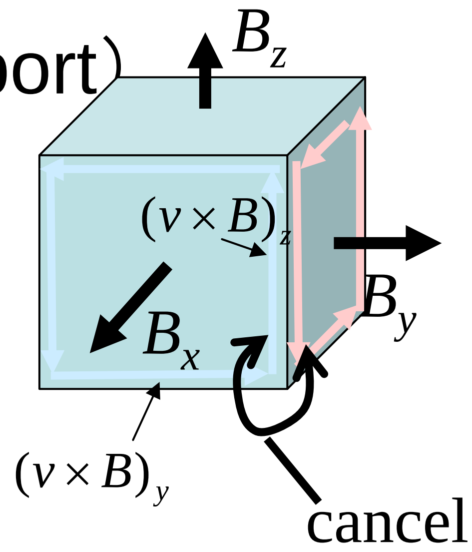
  – This ensure that CFL condition is satisfied in every grid.

多重格子法

安定な計算のために

- マックスウェル方程式 div B=0 を保障するコード
- 方法
  - 制限輸送法(Constrained Transport)

$$\frac{\partial B}{\partial t} = rot(v \times B) \Rightarrow \frac{\delta B_x}{\delta t}\Delta S = \sum (v \times B)\cdot \Delta l$$



  - 時間積分後のクリーニング

$$\left.\begin{aligned} \Delta\Phi &= \mathrm{div}\mathbf{B} \\ \mathbf{B}' &= \mathrm{grad}\Phi \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} - \mathbf{B}'$$

低電離度ガス

- 磁場と結合しているのは、電離した成分（イオン、電子、）
- 中性成分（分子、）は、電離成分との（わずかな速度差を持ち）２体衝突によって運動量を交換し、間接的に磁場と結合できる。
- 電離度が密度の1/2乗に反比例するとき、分子雲内部で、上の過程は $n_{\mathrm{cr}} \approx 10^{10}\,\mathrm{cm}^{-3}$ まで成立。

Collapse & Fragmentation of Aligned Rotator ---Initial Condition and Physical Models

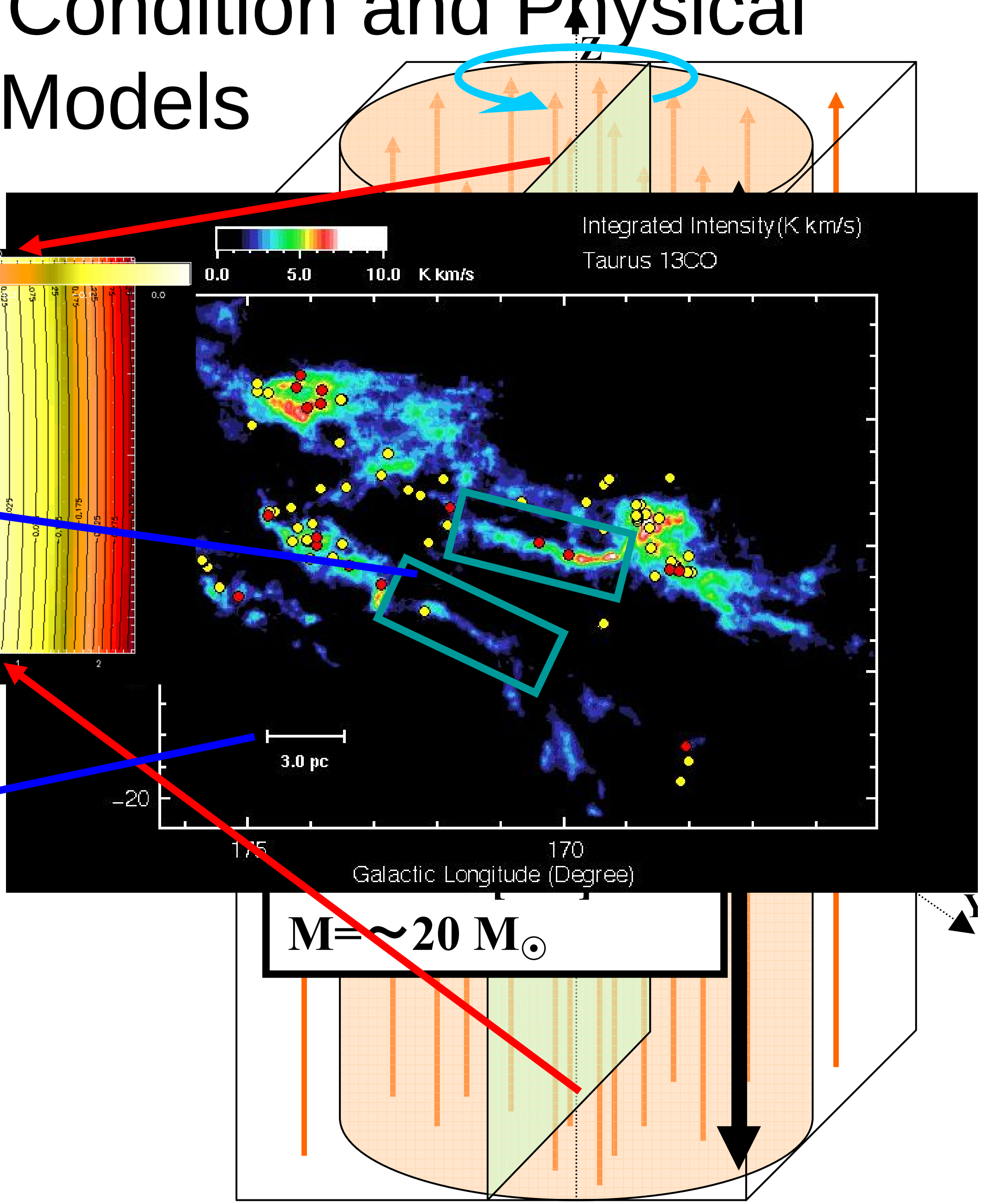
- An isothermal cylindrical cloud
  - in hydrostatic b…
    (Stodolkiewicz…

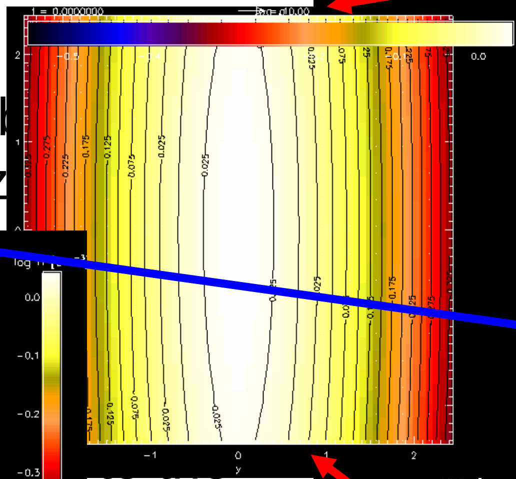
…dded.

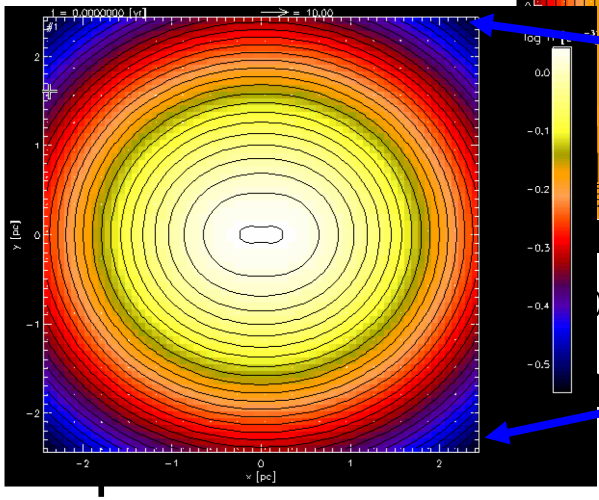
…etric

…as well

as axisymmetric m=0 mode







Physical Models & Numerical Method

- Ideal MHD ガスの状態方程式
- Composite Polytropic Eq. of State
  - Which mimics the result of 1D RHD (eg. Masunaga, Inutsuka 2000).

$$p = c_s^2\rho + c_s^2\rho_{crit}\left(\rho/\rho_{crit}\right)^{7/5}$$

$$p \approx \begin{cases} c_s^2\rho \;\ldots\; (\rho \le \rho_{crit}) & \text{Isothermal} \\ K\rho^{7/5}\ldots(\rho > \rho_{crit}) & \text{Adiabatic} \end{cases}$$

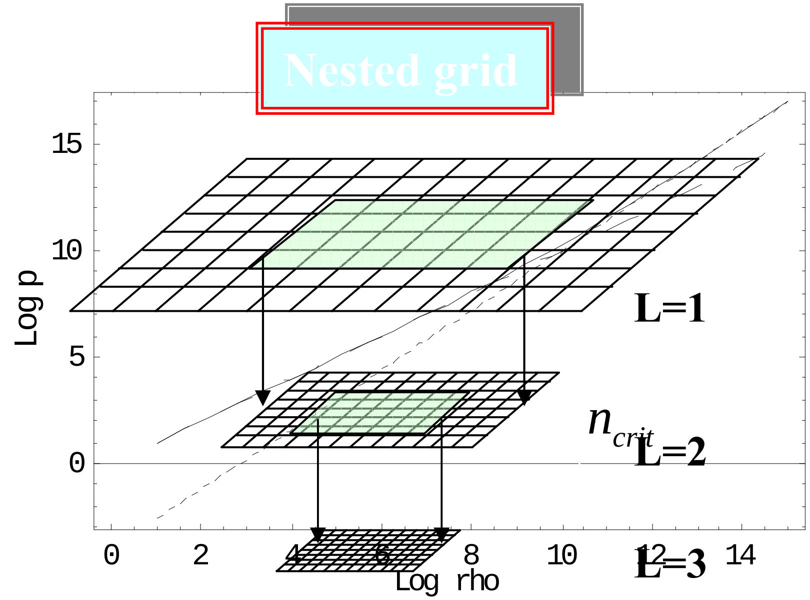
- Parameter
  - Magnetic-to-Thermal Pressure Ratio

$$\alpha = \frac{B_{0c}^2/4\pi}{c_s^2\rho_{0c}}$$

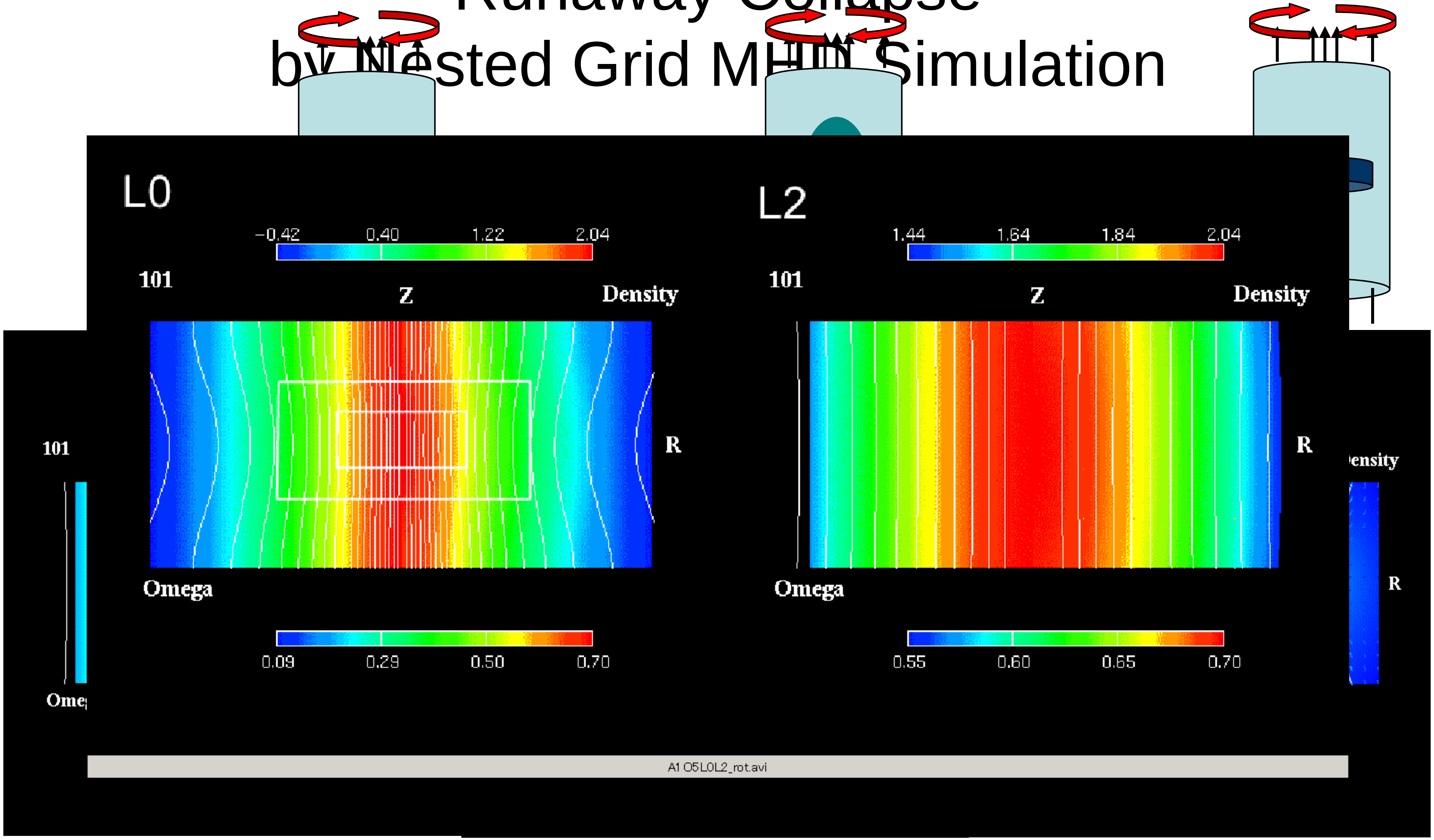
  - Angular Rotation Speed / Free-Fall Rate

$$\omega = \Omega\left(4\pi G\rho_{0c}\right)^{-1/2}$$

- "Nested Grid" Technique
  - Coarser grid: covers global structure
  - Finer grid: small-scale structure near the center.



Axisymmetric Evolution of Isothermal Runaway Collapse by Nested Grid MHD Simulation



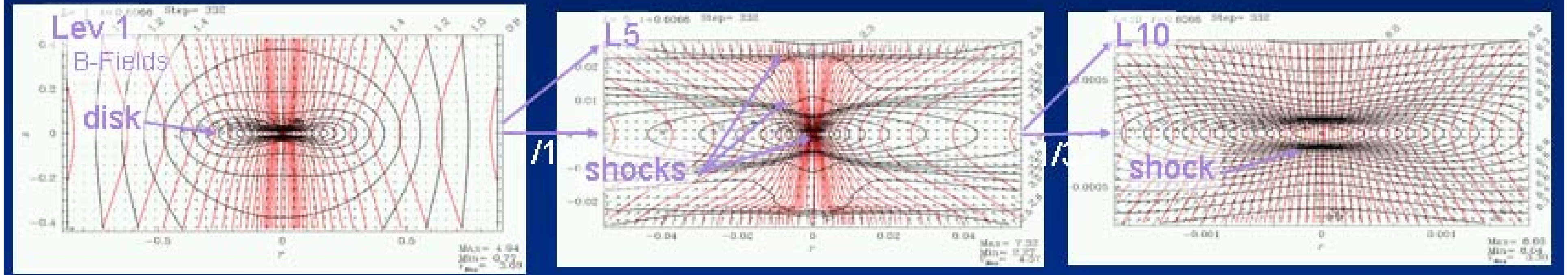
$$\alpha = 1,\ \Omega_0 = 5\ (\mathrm{L2})$$

Typical Dynamical Evolution of Rotating Magnetized Clouds

Runaway Isothermal Collapse Disk-in-disk structure.

$t=0.6066\tau_{ff} \sim 10^6$yr after collapse begins

$\rho_c < \rho_{crit}$ $p = c_s^2 \rho$

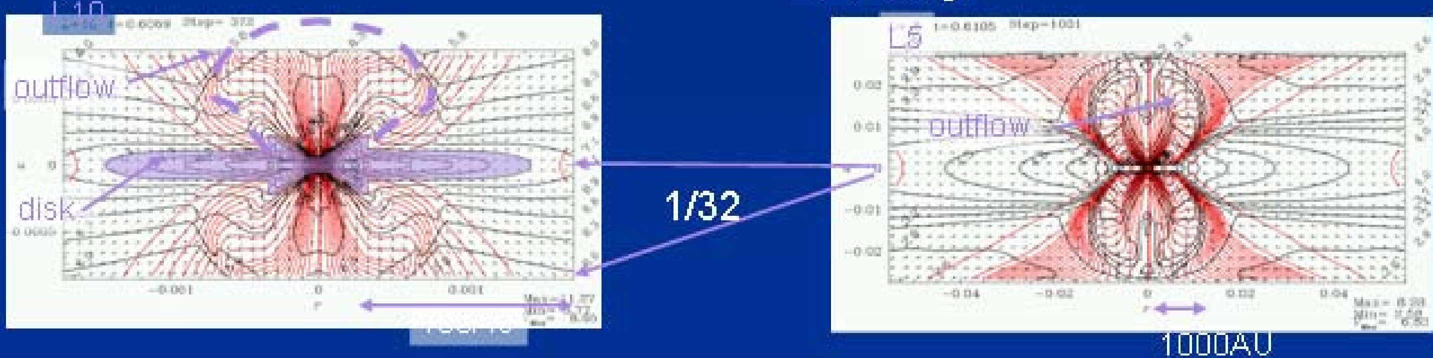


Accretion onto Adiabatic Core (τ=0: core forms)

$\rho_c > \rho_{crit}$ $p = K\rho^{\gamma}$

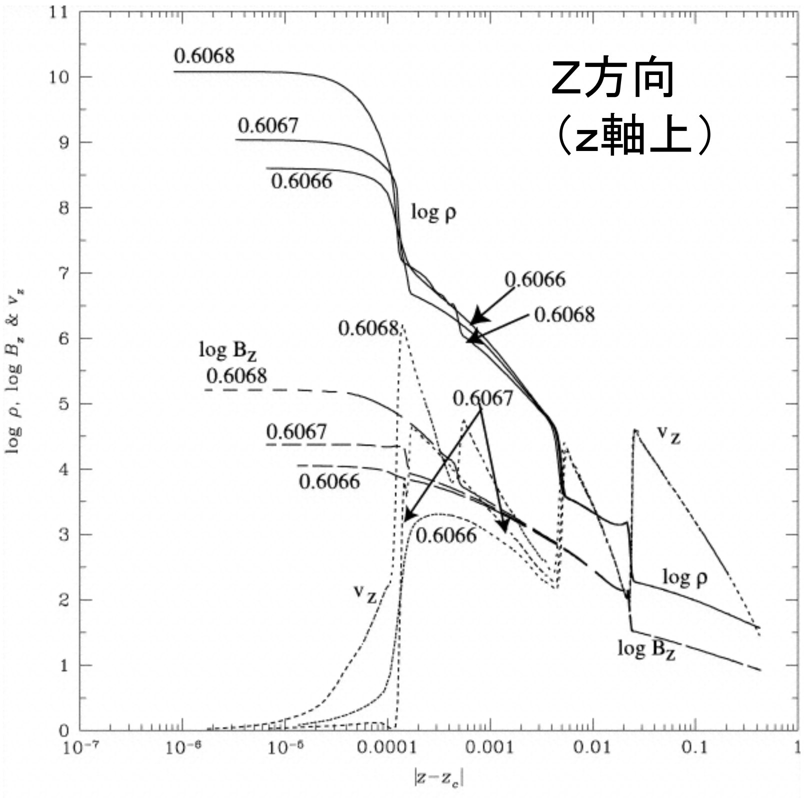
$\tau < 10^3$y

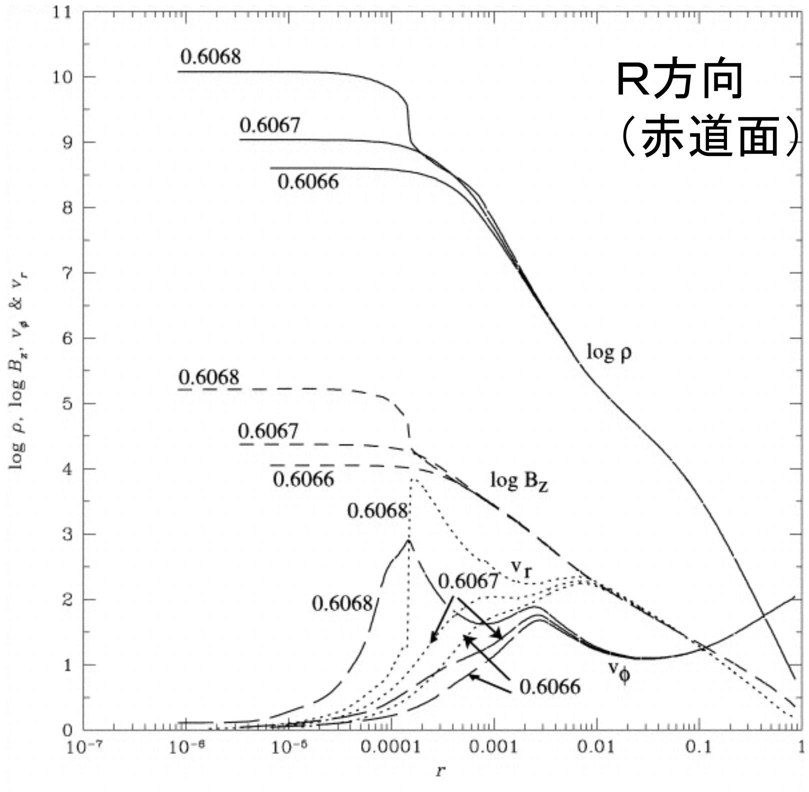
τ=7 10^3y



All models with $\Omega_c \neq 0$ and $\alpha \neq 0$ show indicate outflows.

詳細構造



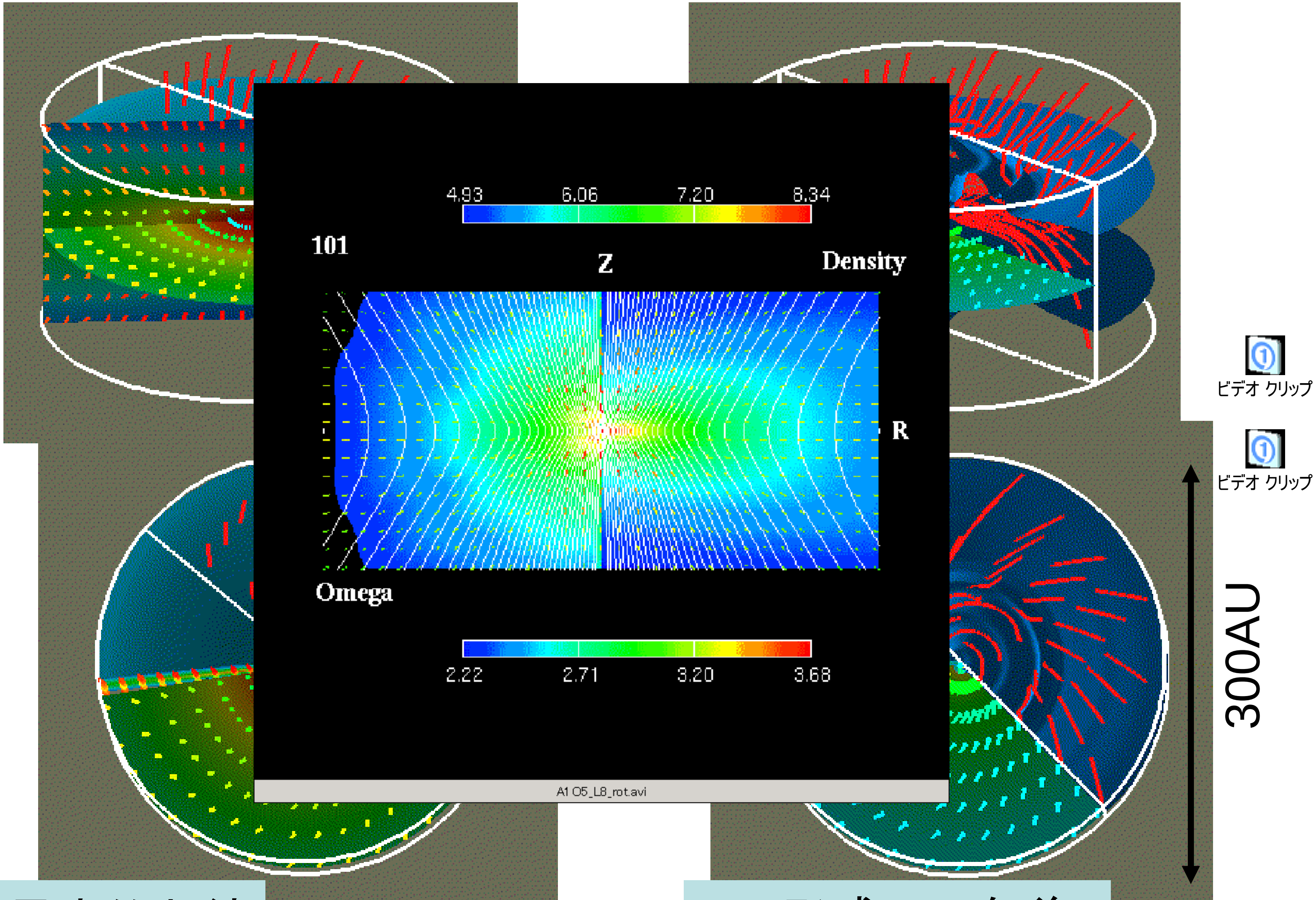


R方向：スムーズな分布
Z方向：衝撃波の発生

$\alpha=1, \ \Omega=5$

降着期

磁場あり、回転あり



暴走的収縮

コア形成1000年後

Tomisaka 1998 ApJL **502**, L163

Outflowのメカニズム

磁気遠心力風

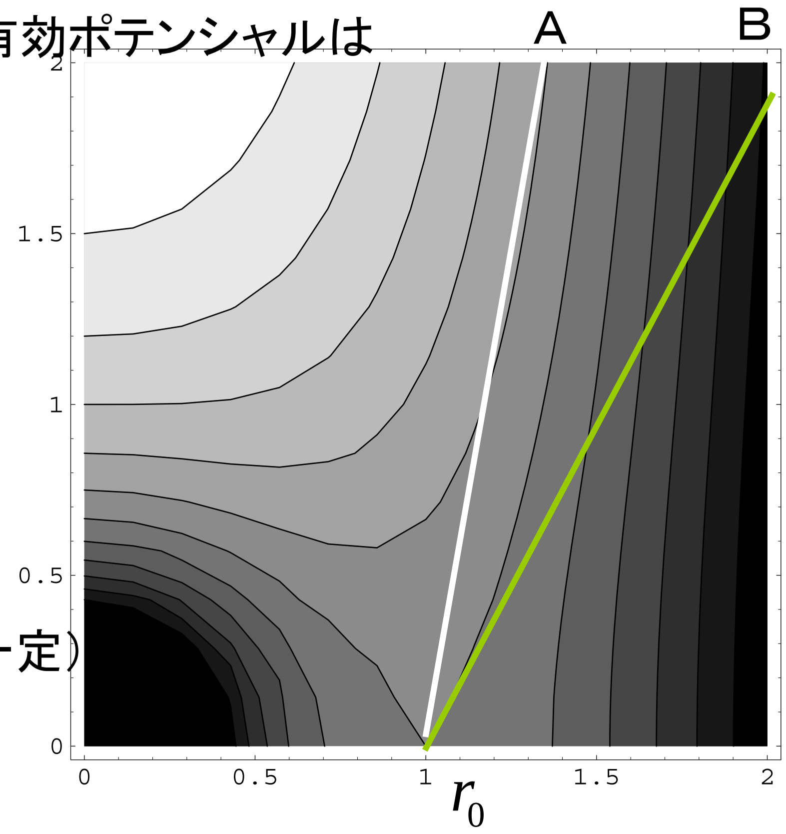
中心星（質量M_*）のまわりで、円運動している円盤上の半径r_0の位置にいるガス塊を考える。

$$\omega_0 = (GM_*)^{1/2} / r_0^{3/2}$$

全領域でこの角速度と同じ回転をする場合の有効ポテンシャルは

$$\phi(r,z) = -\frac{GM_*}{(r^2+z^2)^{1/2}} - \frac{1}{2} r^2 \omega_0^2$$

有効ポテンシャルはr_0の位置で峰になり、
中心方向へも、外向きにも谷になっている。



Aの流線に沿ってはポテンシャルを登るが、
Bの流線に沿ってはポテンシャルを下る。

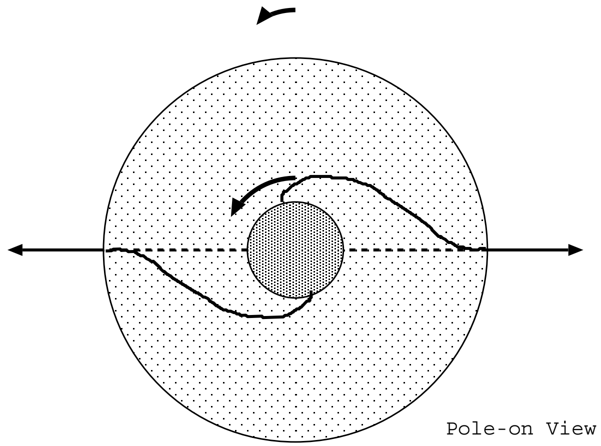
磁場が強ければ、物質はその磁力線に沿って
移動し、その磁力線に沿って共回転する（ω_0一定）

Aの磁力線に沿ってはポテンシャルを登るが、
Bの磁力線に沿ってはポテンシャルを下る。

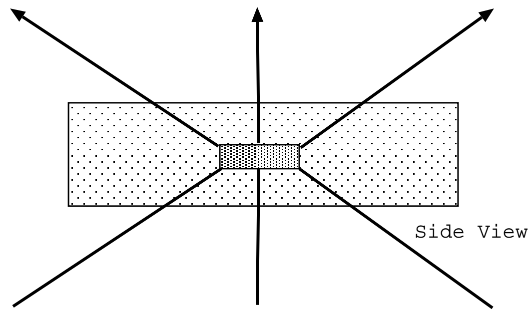
Blandford, Payne (1982)MNRAS,199,883

➔こちらが実現すれば、アウトフロー

角運動量の磁力線に沿っての輸送。



上から見た図

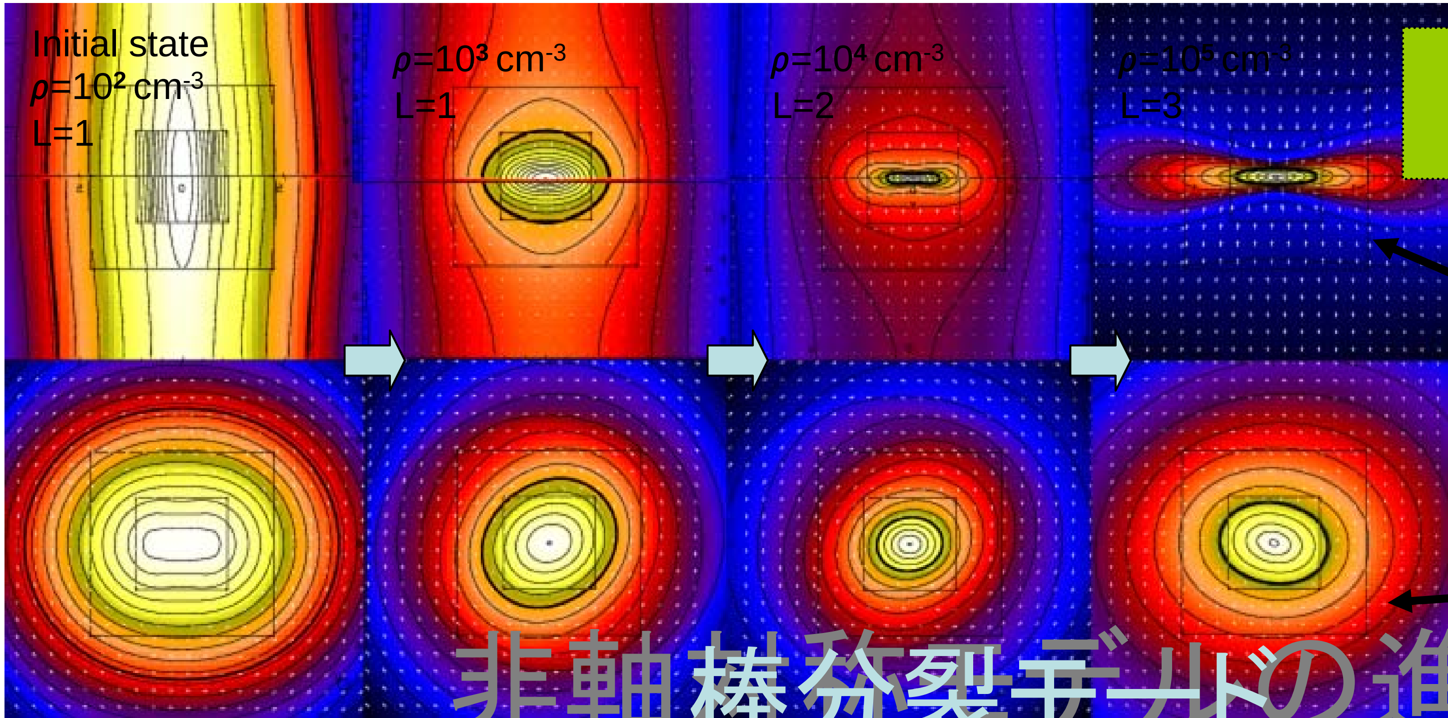


横から見た図

問題：r_0での有効ポテンシャルの値は、 $\phi = -3GM_* / 2r_0$ である。
この値と同じ値をもつポテンシャルの等高線はr_0で円盤と±60度で交差することを示せ。
方法：ポテンシャルをr_0の近傍でテイラー展開し、$\phi(r_0 + \Delta r, \Delta z) = \phi(r_0, 0)$ を満たすΔrとΔzの関係を求めよ。

これから、60度より寝た磁力線は角運動量輸送により磁気遠心力風を駆動することができる。

3.Results



Side view

x=0 plane

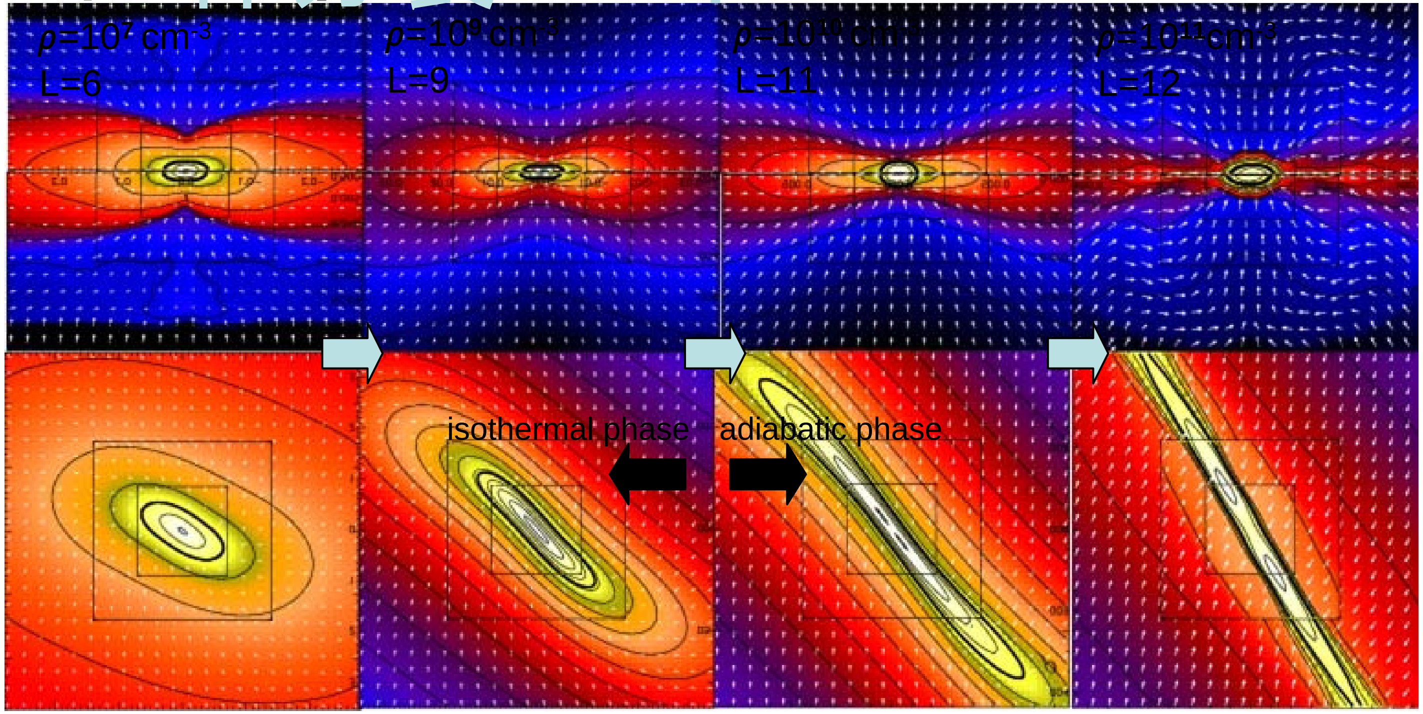
Pole-on view

z=0 plane

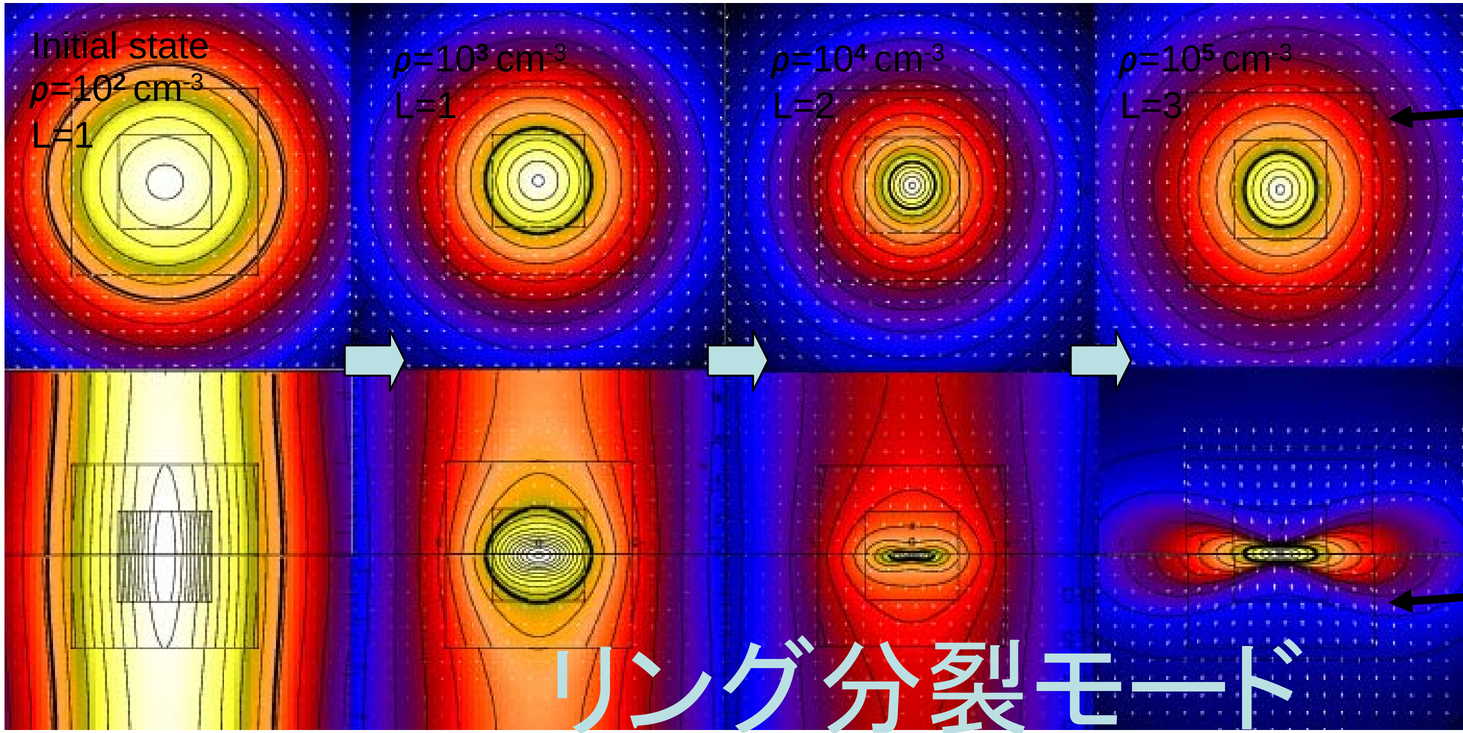
非軸棒分裂モードの進化

$(A_{m2}, \alpha, \omega)=(0.2, 1, 0.5)$

Model with strong magnetic field and high rotation speed



Only after the sufficiently thin disk is formed, the non-axisymmetric perturbation can grow



Pole-on view

z=0 plane

Model with weak magnetic field and high rotation speed

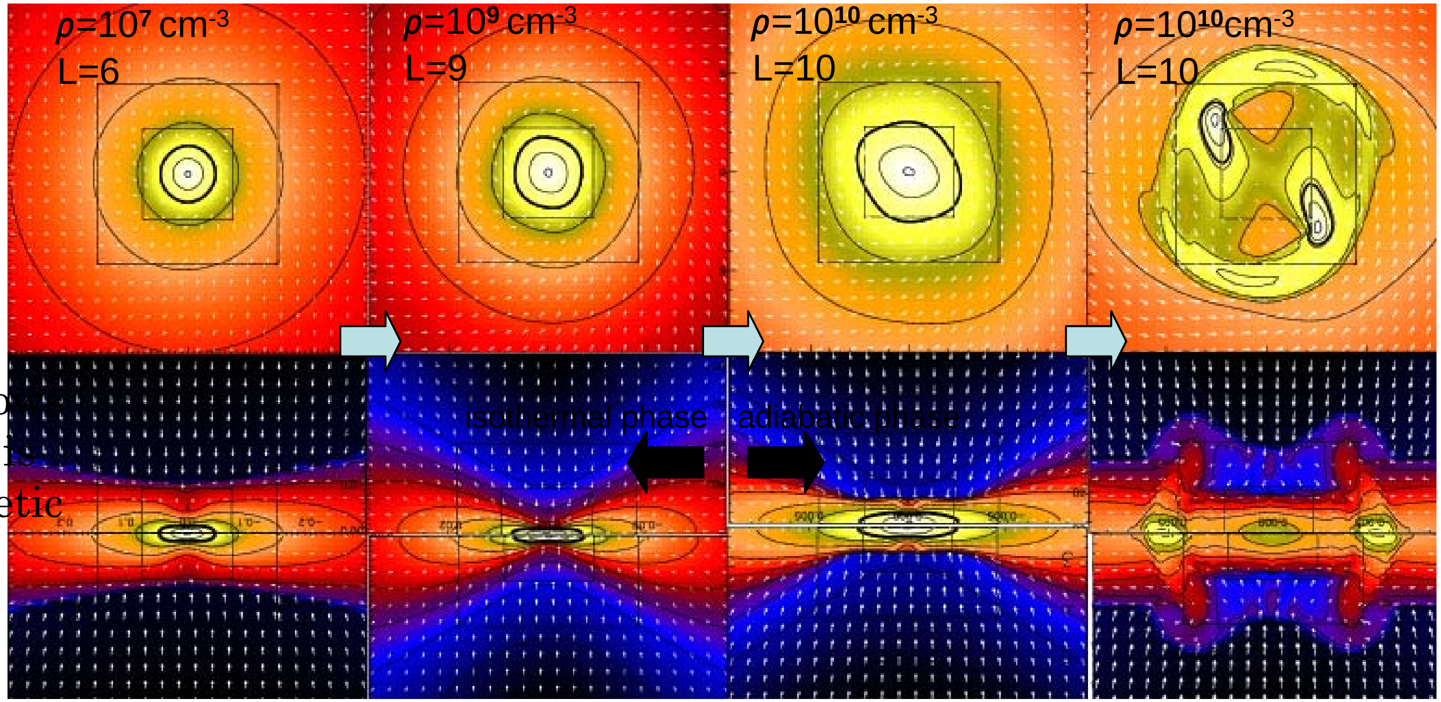
Side view

x=0 plane

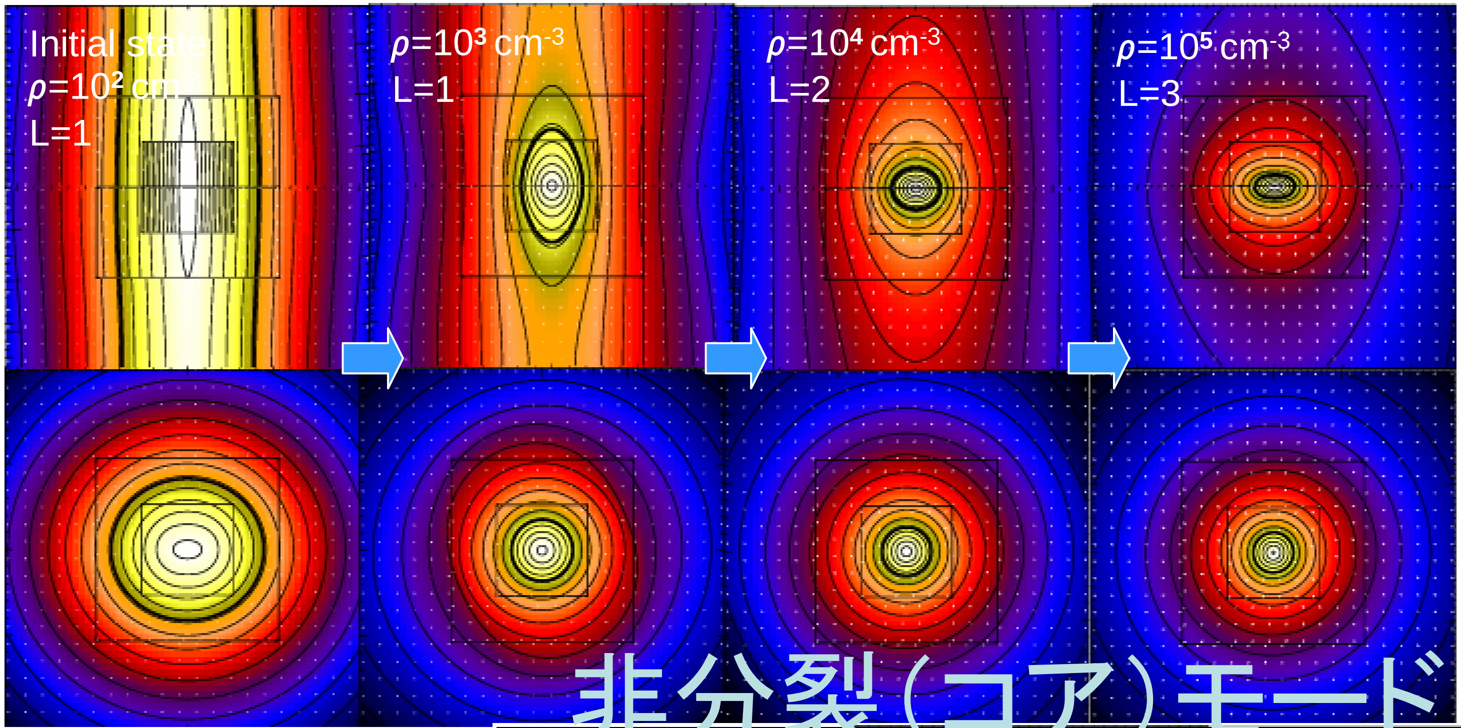
Typical Model

(A_{m2}, α, ω)=(0.01, 0.01, 0.5)

In this model, the non-axisymmetry hardly grows because disk formation is delayed for weak magnetic fields.



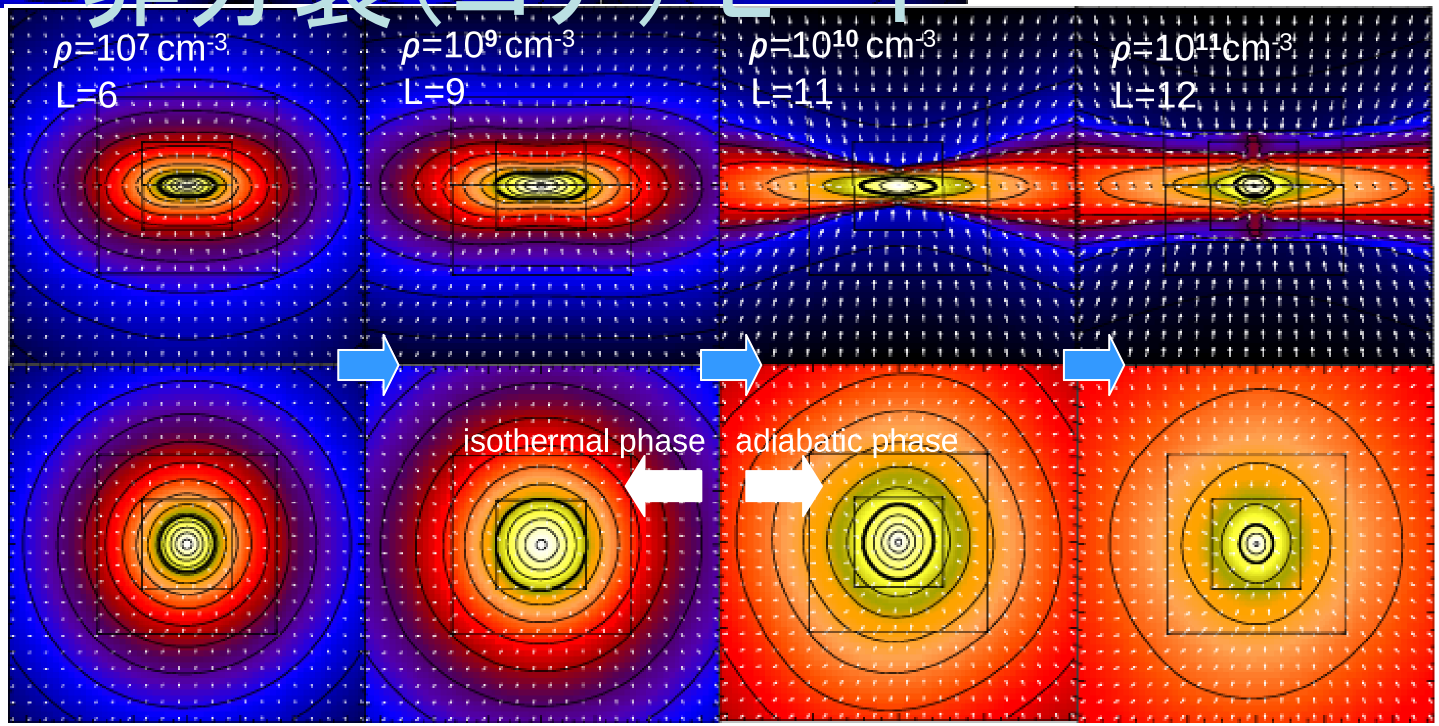
非分裂(コア)モード



This corresponds to strong B-field & slow rotation.

Disk -->
Spherical core

Core Model
(A_{m2}, α, ω)=(0.01, 1, 0.1)

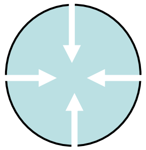


$\Omega\neq0$, $B\neq0$ (Machida et al 2004 MN in press)

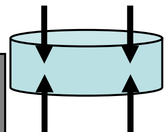
- On convergence: $$\frac{\left[\Omega_c/\left(2\pi G\rho_c\right)^{1/2}\right]^2}{0.3^2}+\frac{\left(B_c/2\pi G^{1/2}\Sigma_c\right)^2}{1}=1$$

- Spherical collapse

$$\Omega_c\propto R^{-2}\propto\rho^{2/3}\Rightarrow\Omega_c/\rho_c^{1/2}\propto\rho_c^{1/6}$$
$$B_c\propto R^{-2}\propto\rho^{2/3}\Rightarrow B_c/\rho_c^{1/2}\propto\rho_c^{1/6}$$
$$\therefore(\Omega_c/\rho^{1/2})\propto(B_c/\rho_c^{1/2})$$

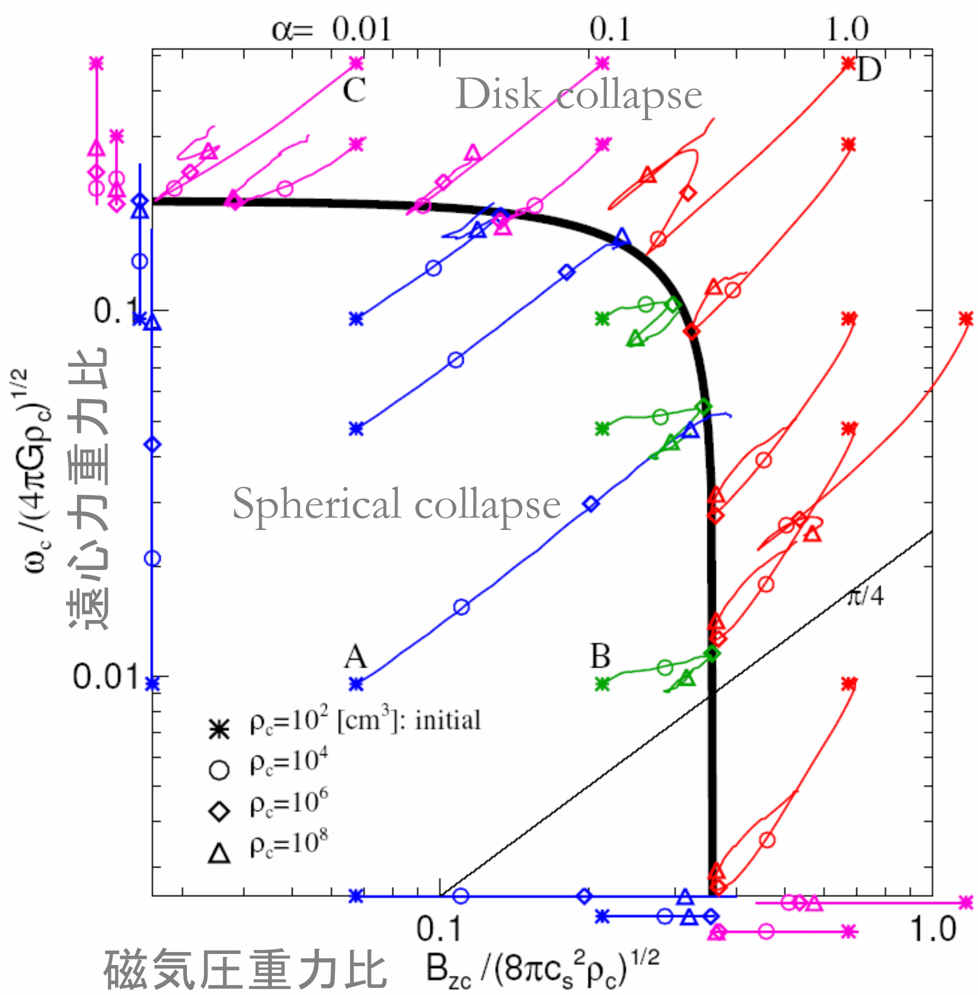


  - 右上方向45度へ進化
- 磁気ブレーキ
  - 磁場による角運動量の外部への輸送
  - $\Omega/\rho^{1/2}$の抑制
- Disk collapse



$$\Omega_c\sim\text{const}\Rightarrow\Omega_c/(4\pi G\rho_c)^{1/2}\propto\rho_c^{-1/2}$$
$$B_c\sim\text{const}\Rightarrow B_c/(8\pi c_s^2\rho_c)^{1/2}\simeq\rho_c^{-1/2}$$
$$\therefore(\Omega_c/\rho^{1/2})\propto(B_c/\rho_c^{1/2})$$

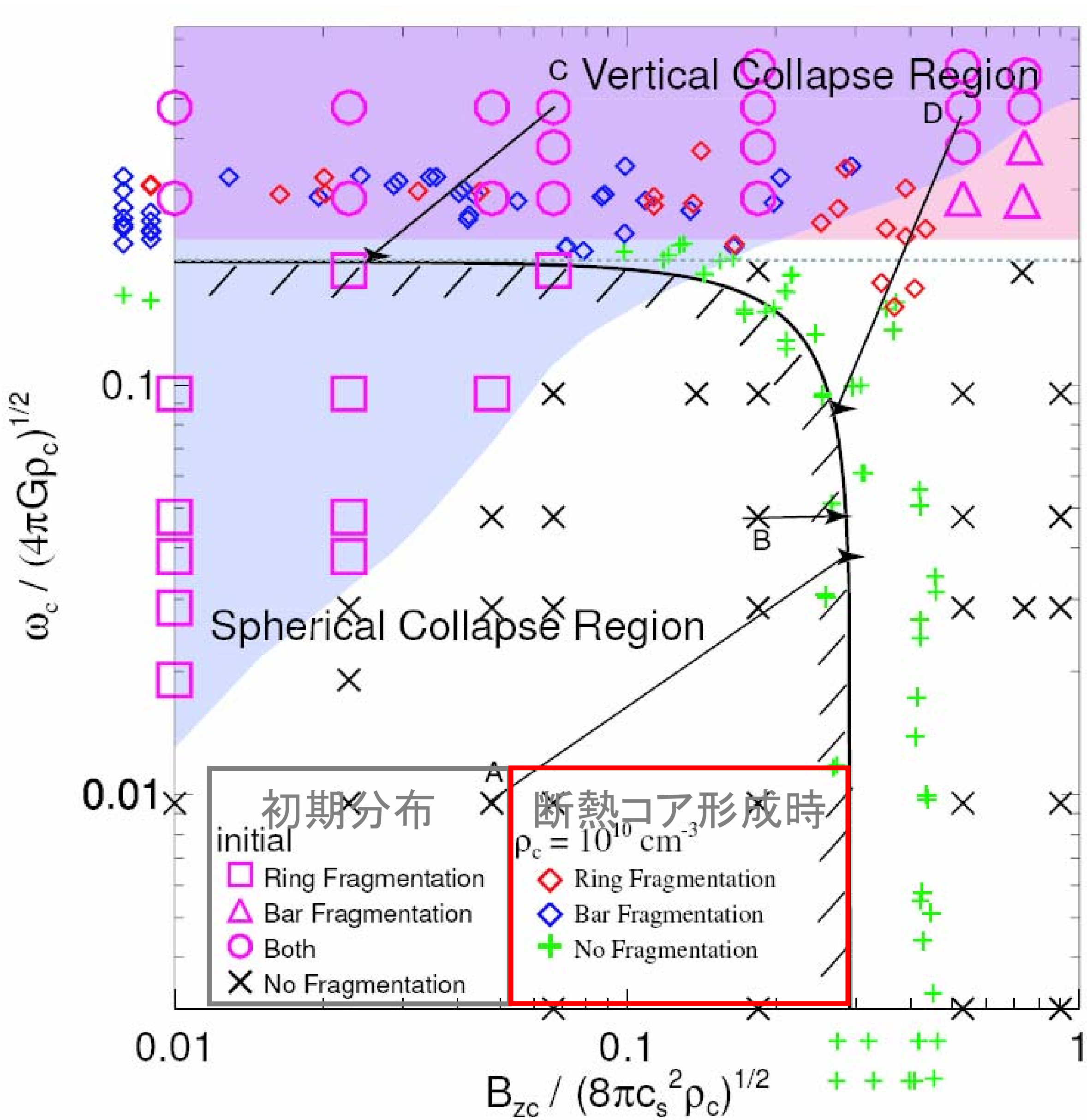
  - 左下方向45度へ進化



分裂条件:
$\Omega_c/(4\pi G\rho_c)^{1/2}>0.2$
@断熱コア形成時

初期条件→分裂時の
条件:45度の直線上

分裂する領域はブ
ルーに着色した領域



To Fragment

$$\frac{\Omega_0}{B_0} > \frac{G^{1/2}}{2^{1/2} c_s} \sim 3\times10^{-7}\,\mathrm{yr}^{-1}\,\mu\mathrm{G}\left(\frac{c_s}{190\mathrm{ms}^{-1}}\right)^{-1}$$

Prestellar core L1544

$$v_\phi \simeq 0.09\mathrm{km\ s}^{-1} @ r = 15000\mathrm{AU}$$ Ohashi et al (1999)

$$\Rightarrow \Omega_0 \simeq 1.3\times10^{-6}\,\mathrm{yr}^{-1}$$

$$v_\phi \simeq 0.14\mathrm{km\ s}^{-1} @ r = 7000\mathrm{AU}$$ Williams et al (1999)

$$\Rightarrow \Omega_0 \simeq 4.2\times10^{-6}\,\mathrm{yr}^{-1}$$

$$B_0 \simeq +11 \pm 2\mu\mathrm{G}$$ Zeeman splitting Crutcher & Troland (2000)

$$\Rightarrow \frac{\Omega_0}{B_0} \sim (1.2-3.8)\times10^{-7}\,\mathrm{yr}^{-1}\,\mu\mathrm{G}$$

Marginal!!

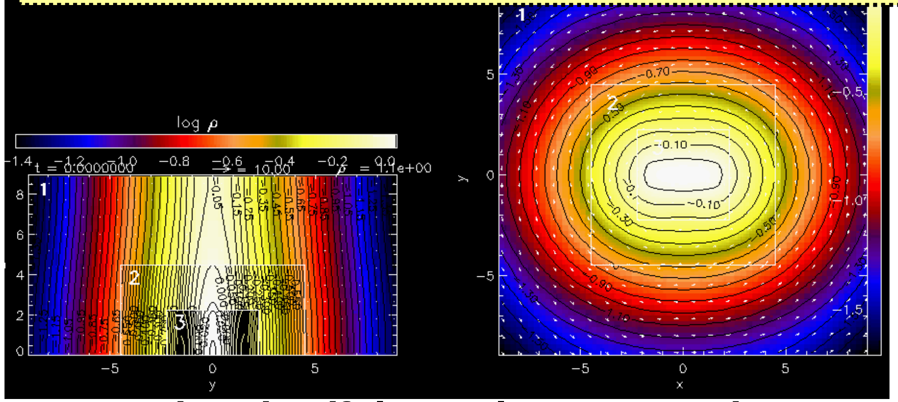
Measurement both Ω and B at the same density

➔ future forecast!

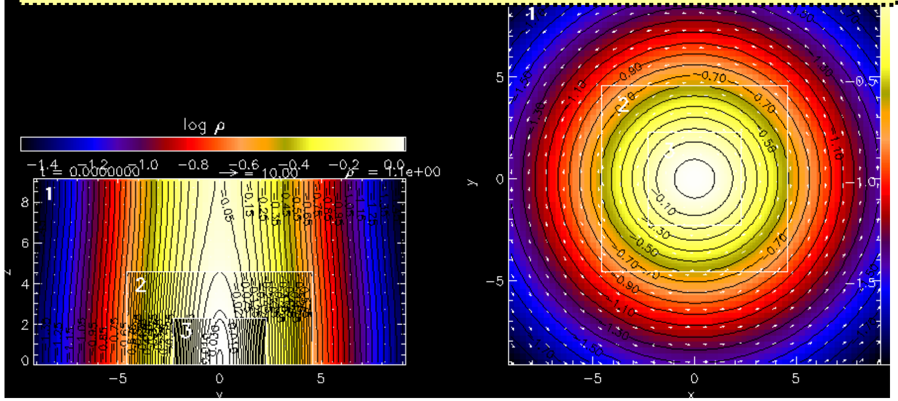
Modes of Fragmentation

Core type

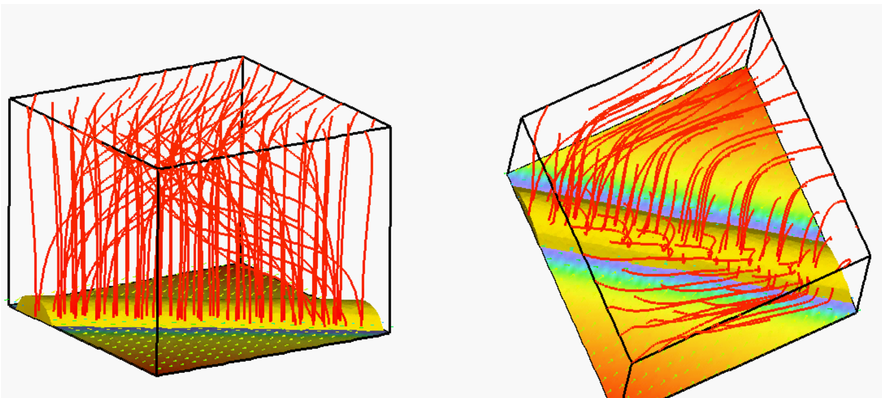
bar fragmentation : A_{m2}=0.2 α=1.0 ω=0.5	**ring fragmentation** : A_{m2}=0.01 α=0.01 ω=0.5



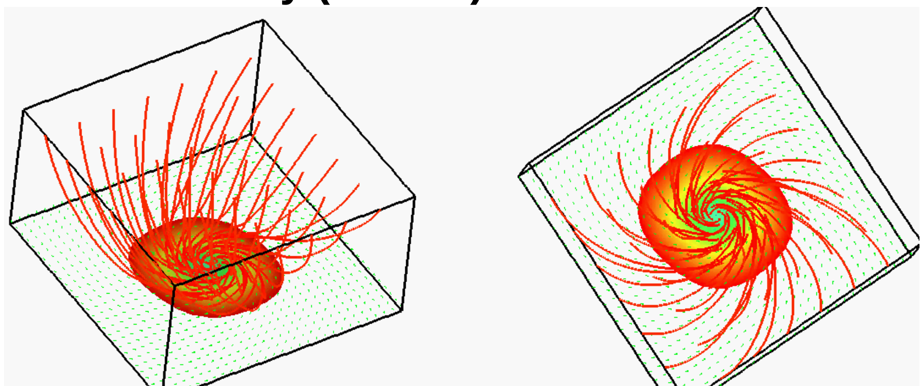
density (false color, contour)
velocity (arrows)



density (false color, contour)
velocity (arrows)



Shape of the magnetic field line
(red stream lines)
outflow region(blue isovolume)



Shape of the magnetic field line
(red stream lines)
outflow region(blue isovolume)

第3部のまとめ

- 物理を明らかにするには、単に非定常シミュレーションだけに頼ってはいけない。
  - 平衡状態のシミュレーション解析は、進化の道筋を示してくれる。
- 多重格子法は、星形成の動的進化を明らかにする強力な方法である。
- これを用いて、収縮、アウトフロー、分裂などの過程を調べることができた。

千葉大学
シミュレーション天文学

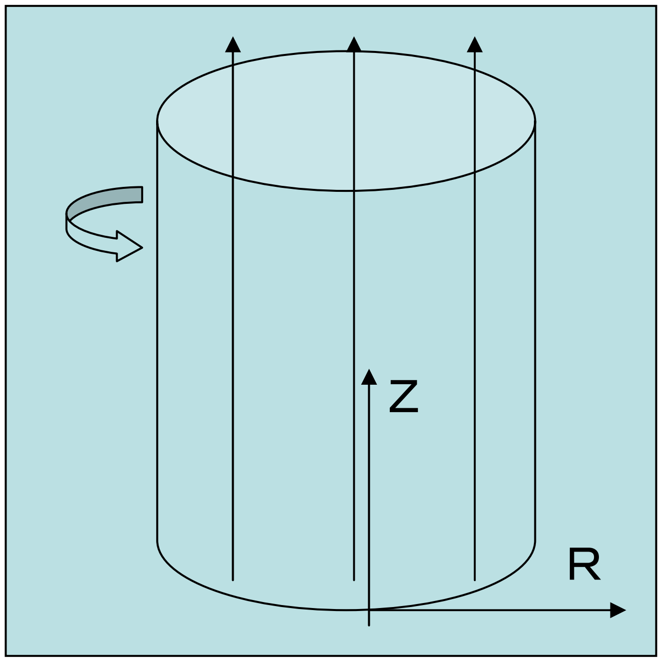
輻射輸送計算による観測的可視化

富阪幸治（国立天文台）

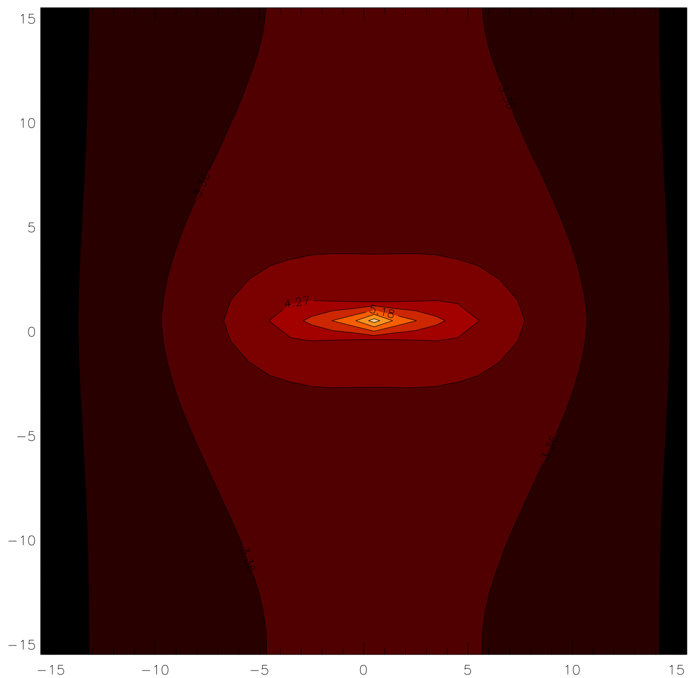
観測的可視化とは

- 流体、磁気流体シミュレーション
  - 従属変数:物理量が独立変数:座標に対して得られる。

初期:ゆっくり回転、磁場ありJ // B

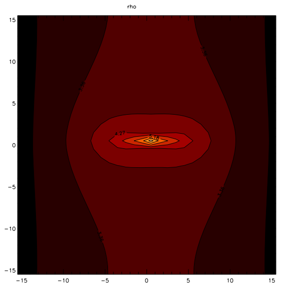


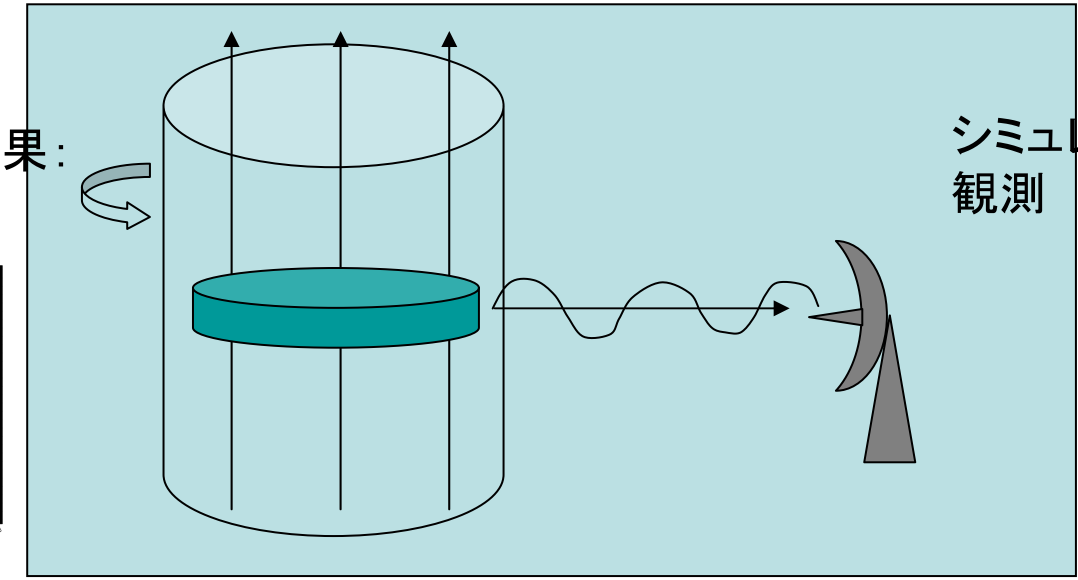
ディスク形成後:密度分布



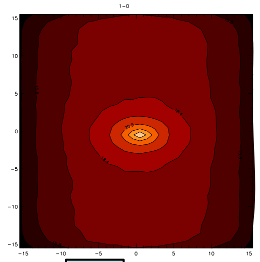
観測的可視化

シミュレーション結果：
速度、密度、．．．

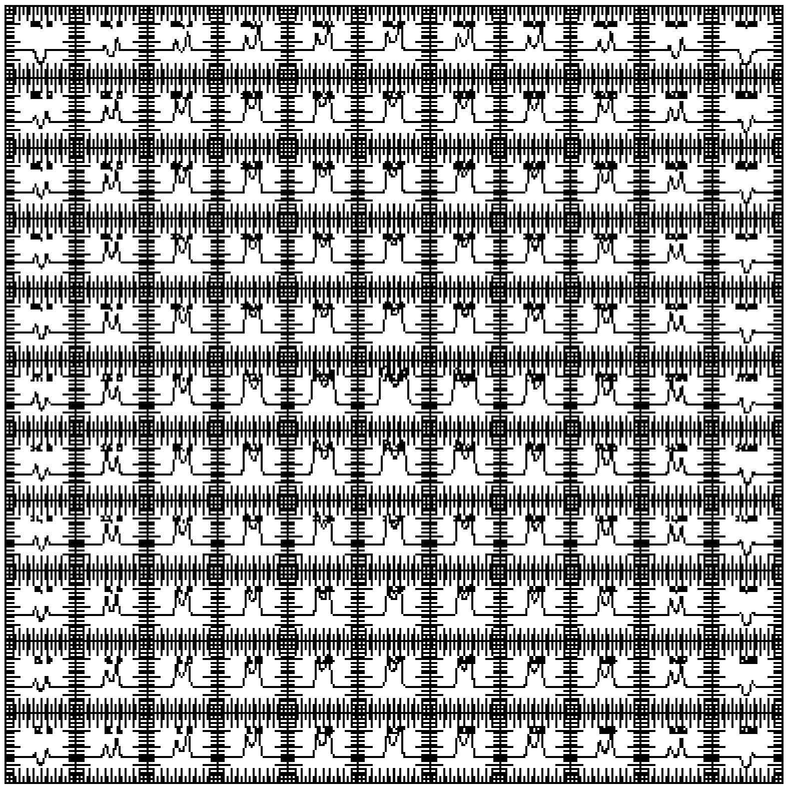




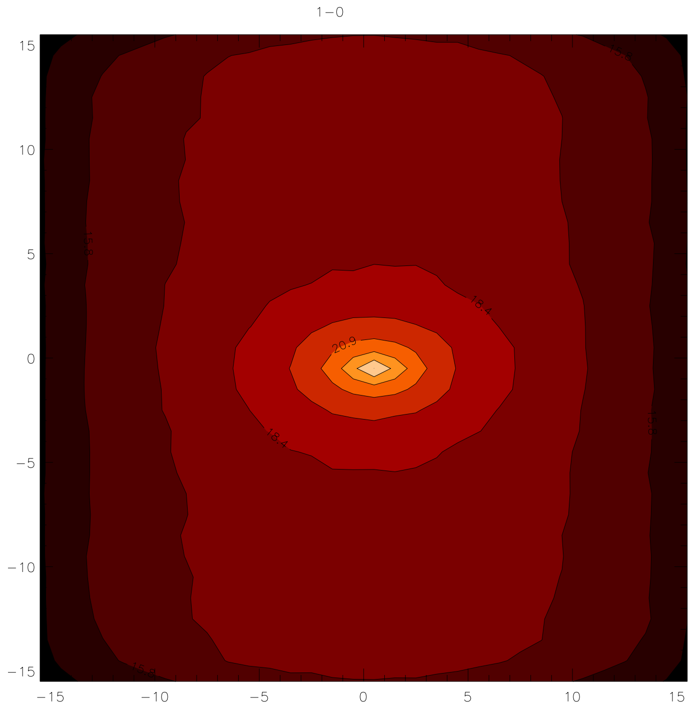
シミュレーション結果の
観測



スペクトル　^{12}CO J=1→0

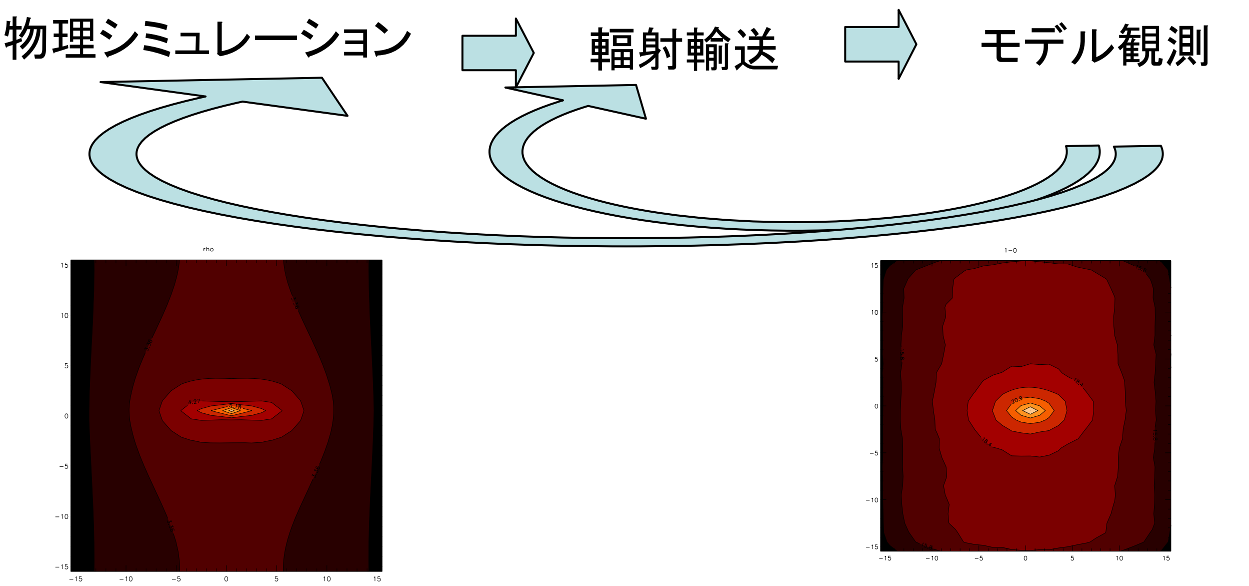


積分強度図　^{12}CO J=1→0

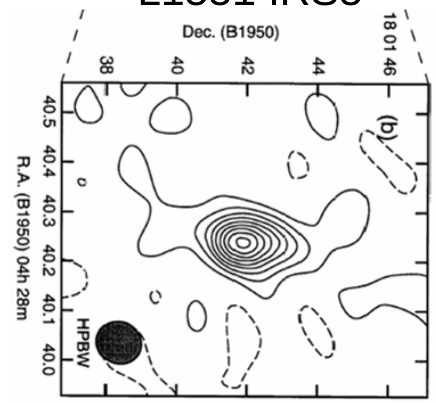


観測的可視化

- 物理的シミュレーション結果を、輻射輸送フィルタープログラムで処理し、観測結果と直接比較。
- 物理パラメータの直接推定



L1551 IRS5



Momosa et al. 1998
C18O J1-0

数値計算法

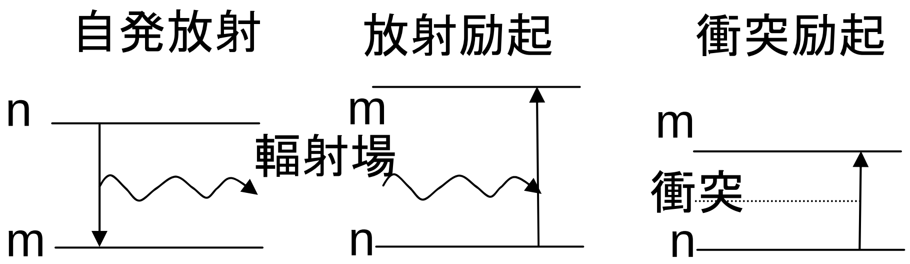
1. 特定分子、特定遷移に対する励起温度（T_{ex}）分布
   – モンテカルロ法による線スペクトル輻射輸送解法
   – 非局所熱平衡（Non Local Thermal Equilibrium）
2. 射線を与えて、線スペクトル、積分強度分布などを計算

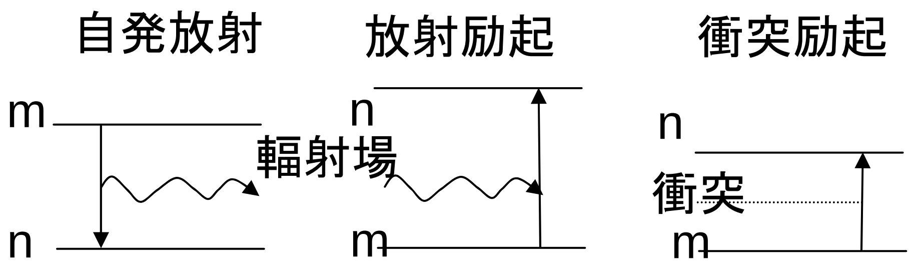
釣り合いの関係

- 順位nにある原子の数n_nに関する釣り合いの式

平均輻射強度 $J_\nu = \frac{1}{4\pi}\int I_\nu d\Omega$

$$n_n \sum_m \left(A_{n,m} + B_{n,m}\int_{-\infty}^{\infty} J_\nu \phi(\nu-\nu_{cell})d\nu + C_{n,m}\right) = \sum_m \left(n_m A_{m,n} + n_m B_{m,n} \int_{-\infty}^{\infty} J_\nu \phi(\nu - \nu_{cell}) d\nu + n_m C_{m,n}\right)$$





Einstein 係数

- A係数　単位時間あたり自発放射率

$n \to m$への単位体積、時間あたり自発放射の数$A_{n,m} n_n$

準位nの分子
個数密度

- B係数　エネルギー密度Jの輻射を吸収して励起、誘導放射する率

$n \to m$への単位体積、時間あたり自発放射の数$B_{n,m} n_n \int_0^\infty J \phi(\nu) d\nu$

- C係数　分子、原子等との衝突で輻射を伴わず、衝突励起、衝突脱励起する率

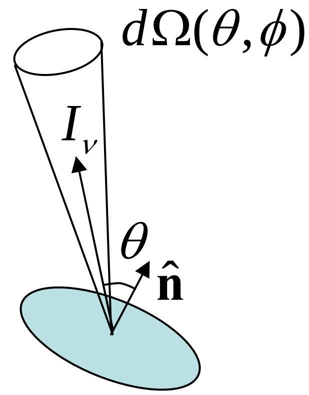
$n \to m$への単位体積、時間あたり衝突励起の数$C_{n,m} n_n$

  – 水素分子による衝突励起の場合
    - 実験室環境では実験によってはかられる。
    - 低温、低密度の宇宙環境では量子化学計算によってはかられる。

$$C_{n,m} = C^0_{n,m} n_{\mathrm{H_2}}$$

輻射輸送

輻射強度　I_ν erg s^{-1} cm^{-2} sr^{-1} Hz^{-1}

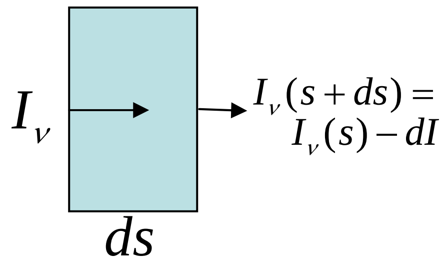


– $\hat{\mathbf{n}}$方向へ向いた面積*dS*を通り、(θ,ϕ)方向に向いた立体角$d\Omega$内へ、単位時間に流れる振動数ν–$\nu+d\nu$の輻射のエネルギーdE_νは

$$dE_\nu = I_\nu(\theta,\phi)d\nu\cos\theta dSd\Omega$$

- 輻射輸送方程式

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu$$



– 吸収　$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds$

$$\alpha_\nu = {h\nu_0}\big/{4\pi}(n_l B_{lu} - n_u B_{ul})\phi(\nu - \nu_{cell}):\ \text{吸収係数}$$

– 放射　$dI_\nu = +j_\nu ds$

$$j_\nu^{ul} = {h\nu_0}\big/{4\pi}\, n_u A_{ul}\phi(\nu - \nu_{cell}):\text{放射率}$$

輻射輸送

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dI}{ds} = -I + \frac{j}{\alpha}$$

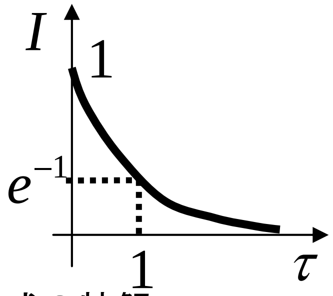
$$\alpha ds = d\tau$$

光学的深さ

$$S = j/\alpha$$

$$\frac{dI}{d\tau} = -I + S(\tau)$$

源泉関数



非斉次方程式の特解

$$I = e^{-\tau}\left[\int^{\tau} S e^{\tau'} d\tau' + D\right]$$

斉次方程式の一般解

境界条件 $I(\tau = 0) = I_0$

$$\boxed{I = I_0 e^{-\tau} + \int_0^{\tau} S e^{-\tau'} d\tau'}$$

輻射輸送方程式の形式解
(Formal Solution)

源泉関数が一定なら

$$I = I_0 e^{-\tau} + S_0\left(1 - e^{-\tau}\right)$$

$\tau \ll 1$　光学的に薄い範囲

$$e^{-\tau} \cong 1 - \tau$$

$$\boxed{I = I_0(1-\tau) + \tau S_0}$$

$\tau \gg 1$　光学的にあつい範囲

$$\boxed{I = S_0}$$

熱、放射の流れが存在しない --- 熱力学平衡

$$dI_\nu / d\tau = 0 \qquad \boxed{I_\nu = S_\nu}$$

熱力学平衡 --- 黒体輻射

$$\boxed{I_\nu = B_\nu(T)}$$

このときは $j_\nu = \alpha_\nu B_\nu$

キルヒホッフの法則

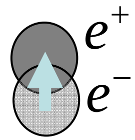
AとB係数

- 束縛ー束縛遷移

振動子強度

$$\alpha_\nu = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{1,2}\phi_{1,2}(\nu), \qquad \int_{\Delta\nu} \phi_{12}(\nu) d\nu = 1$$

電気双極子モーメント



$$\sigma_{\mathrm{bb}}(\nu) = \frac{4\pi^2}{3}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\left|\left\langle \phi_f \left| \frac{\mu}{e} \right| \phi_i \right\rangle\right|^2 \nu\delta(\nu - \nu_{fi})$$

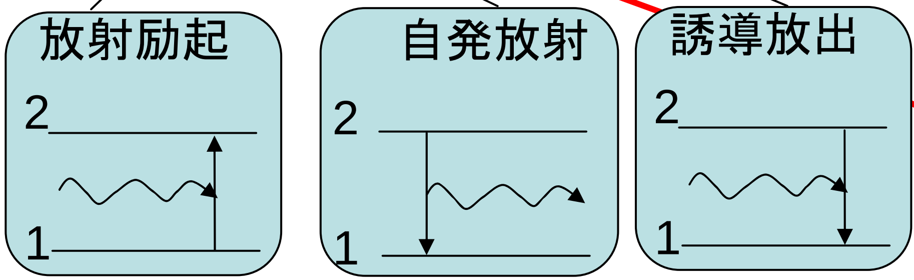
The Physics of Astrophysics (Shu 1991)
Part III. Quantum Theory of Radiation Processes

  - 吸収係数→B係数は分子の電気双極子モーメントの2乗に比例する。

AとB係数

- A係数とB係数の関係（2準位分子）
  - 熱平衡の場合

$$n_1 B_{12} J_\nu = n_2 A_{21} + n_2 B_{21} J_\nu$$



プランク分布

$$J_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{e^{h\nu/kT}-1},$$

ボルツマン分布

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-h\nu_{12}/kT},$$

g_n:統計的重み

$$\frac{g_2}{g_1} A_{21}\left(e^{h\nu/kT}-1\right) = \left(\frac{2h\nu^3}{c^2}\right)\left[e^{h\nu/kT} B_{12} - \left(\frac{g_2}{g_1}\right) B_{21}\right]$$

  - A、B係数は温度によらないので $e^{h\nu/kT} : 1 = e^{h\nu/kT} B_{12} : \left(\frac{g_2}{g_1}\right) B_{21}$

$$\underline{A_{21} = \left(\frac{2h\nu^3}{c^2}\right) B_{21}} \longleftarrow \underline{B_{21}} = \left(\frac{2h\nu^3}{c^2}\right)^{-1} A_{21} \quad \underline{= \left(\frac{g_1}{g_2}\right) B_{12}}$$

輻射輸送の基礎

- B係数

$$A_{21} = \left(\frac{2h\nu^3}{c^2}\right) B_{21}$$

- CO

異核2原子分子の回転遷移

遷移則
輻射を伴う遷移$\Delta J = \pm 1$ だけが許される。

$$E_J^{rot} = hJ(J+1)B$$

B回転定数←回転軸周りのモーメント

異核2原子分子の回転遷移

$$\begin{aligned} h\nu_{J+1,J} &= E_{J+1}^{rot} - E_J^{rot} \\ &= hB\left[(J+1)(J+2) - J(J+1)\right] \\ &= 2hB(J+1) \end{aligned}$$

古典論
回転エネルギーIω²/2

$$\nu_{J+1,J} = 2(J+1)B$$

$$A_{J+1,J} = \left(\frac{16h(J+1)^3 B^3}{c^2}\right) B_{J+1,J}$$

$\underbrace{\text{電気双極子モーメントが}}_{\text{と回転定数}}$与えられれば➔B係数➔A係数と計算できる。

Critical Density

2-準位分子

自発放射と衝突励起・脱励起の釣り合い

$$\left(A_{21}+C_{21}^{0}n\right)n_2 = C_{12}^{0}nn_1$$

ここで　$C_{12}^{0}g_1 = C_{21}^{0}g_2 e^{-(E_2-E_1)/kT}$ に注意すると、

$$\frac{n_2}{n_1+n_2} = \frac{\frac{C_{12}^{0}}{C_{12}^{0}}}{1+\frac{A_{21}}{C_{21}^{0}n}+\frac{C_{12}^{0}}{C_{12}^{0}}} = \frac{\frac{g_2}{g_1}e^{-h\nu/kT}}{1+\frac{n_{crit}}{n}+\frac{g_2}{g_1}e^{-h\nu/kT}}$$

ここで出てくる　$n_{crit} \equiv A_{21}/C_{21}^{0}$　を特性密度

$n \ll n_{crit}$ 励起準位の分子数は、ボルツマン分布で予想されるより、非常に少ない。

$n \gg n_{crit}$ ボルツマン分布一致

$n \sim n_{crit}$　輝線が観測される密度下限

$$n_{crit} \equiv A_{21}/C_{21}^{0}$$

ゆえμの大きな分子ほど特性密度が高い

J→1-0遷移の臨界密度

	CO	CS	HCO$^+$
A_{10}	7.2x10^{-8}	1.8x10^{-6}	4.3x10^{-5}
C_{10}	2.8x10^{-11}	3.7x10^{-11}	2.6x10^{-10}
n_{crit}	2.6x10^{3}	5x10^{4}	1.6x10^{5}

輻射輸送計算

1. LTE（局所熱平衡）計算

   すべての準位の励起温度が運動温度と等しいと仮定し、一度だけ輻射輸送を解いて予測される輻射を得る

2. Large Velocity Gradient（脱出確率法）

   輻射は放出された地点近傍で吸収され、吸収量はその地点の速度勾配による。→脱出確率→統計平衡→輻射強度

3. Non-LTE（非局所熱平衡）計算

   輻射輸送と統計平衡の双方の無矛盾な解を、緩和法を用いて得る。

LTE計算

- 「LTEすべての順位の励起温度が運動温度と等しい」と近似
- 励起温度T_{ex}のボルツマン分布

$$n_n = n_0 \frac{g_n \exp(-E_n/kT)}{\sum_n g_n \exp(-E_n/kT)}$$

- 吸収係数と放射率の計算

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi}(n_l B_{lu} - n_u B_{ul})\phi(\nu - \nu_{cell}):\ \text{吸収係数}$$

$$j_\nu^{ul} = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_u A_{ul}\phi(\nu - \nu_{cell}):\text{放射率}$$

- 輻射輸送

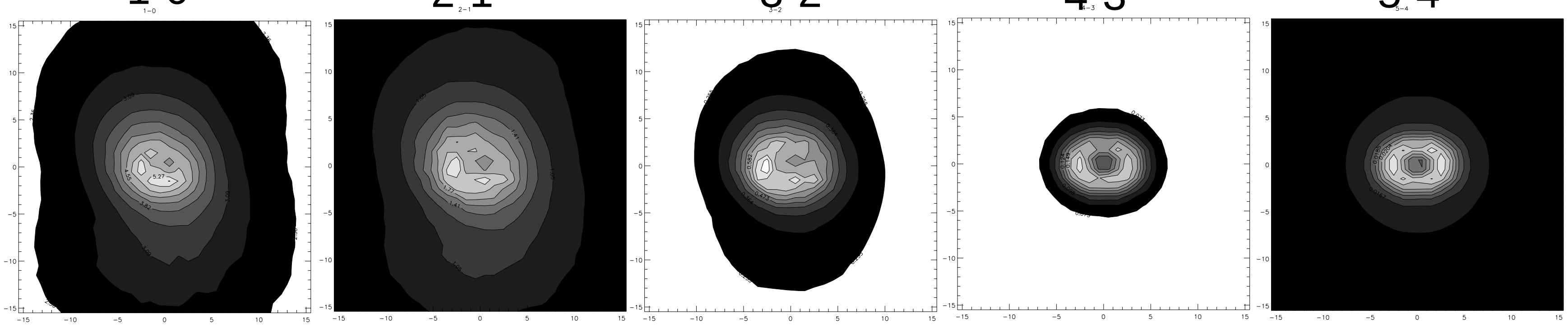
$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu$$

HCO^+

$HCO^+/H_2=7.8 \times 10^{-9}$ $T_k=10K$

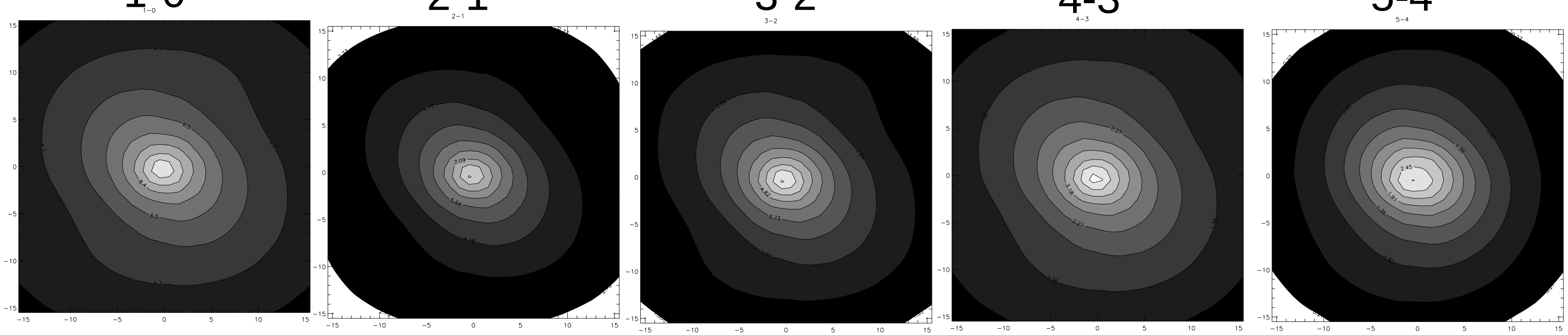
Non-LTE

1-0 2-1 3-2 4-3 5-4



LTE

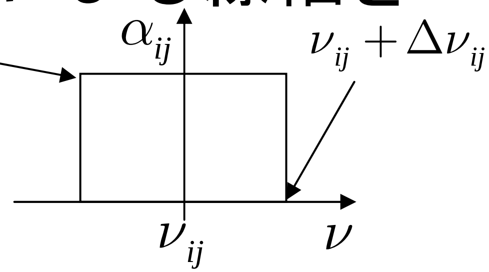
1-0 2-1 3-2 4-3 5-4



Large Velocity Gradient近似
Sobolev　近似解法

- 単位体積からの放射率は光子の脱出確率β_{ij}を用いて $E_{ij} = h\nu_{ij} n_i A_{ij} \beta_{ij},\ i > j$
- 吸収係数の振動数依存：熱運動速度uによる線幅を持つ矩形で近似

$$\Delta\nu_{ij} = (u/c)\nu_{ij}$$



$$2\alpha_{ij}(\nu)\Delta\nu_{ij} = \frac{h\nu_{ij}}{4\pi}\left(n_j B_{ji} - n_i B_{ij}\right) = \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} n_j B_{ji}\left(1 - \frac{n_i g_j}{n_j g_i}\right)$$

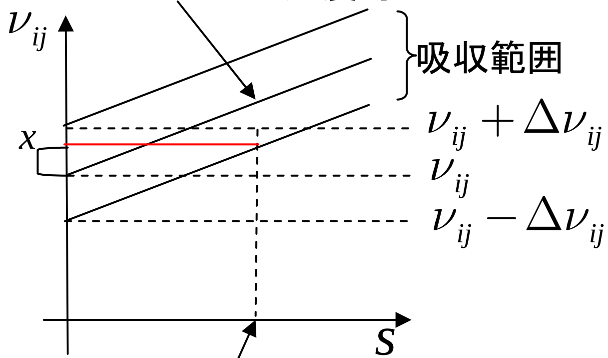
B係数同士の関係

$$\alpha_{ij} = \frac{n_j B_{ji}}{2\Delta\nu_{ij}}\left(1 - \frac{n_i g_j}{n_j g_i}\right)\frac{h\nu_{ij}}{4\pi}$$

準位分布による

$$\nu'_{ij} = \nu_{ij}\left(1 + \frac{dv}{ds}\frac{s}{c}\right) + \Delta\nu_{ij}$$

- 近傍での吸収を仮定➔吸収範囲
  - 中心振動数からx離れた振動数
  - 吸収できる距離 $s = \dfrac{x + \Delta\nu_{ij}}{\nu_{ij}} c \dfrac{ds}{dv}$



$$s = \frac{x + \Delta\nu_{ij}}{\nu_{ij}} c \frac{ds}{dv}$$

脱出確率

$$\frac{\int_{-\Delta\nu_{ij}}^{\Delta\nu_{ij}} \exp(-\alpha s)\,dx}{\int_{-\Delta\nu_{ij}}^{\Delta\nu_{ij}} dx} = \frac{1}{2\Delta\nu_{ij}}\int_{-\Delta\nu_{ij}}^{\Delta\nu_{ij}} \exp(-\alpha s)\,dx \longleftarrow s = \frac{x+\Delta\nu_{ij}}{\nu_{ij}} c \frac{ds}{dv}$$

$$= \frac{1}{2\Delta\nu_{ij}}\int_{-\Delta\nu_{ij}}^{\Delta\nu_{ij}} \exp\left(-\alpha \frac{x+\Delta\nu_{ij}}{\nu_{ij}} \frac{c}{dv/ds}\right) dx \longleftarrow y = \frac{x}{\Delta\nu_{ij}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \exp\left(-\alpha(1+y)\frac{u}{dv/ds}\right) dy$$

$$= -\frac{dv/ds}{2u\alpha}\left[\exp\left(-\alpha(1+y)\frac{u}{dv/ds}\right)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{dv/ds}{2u\alpha}\left(1-\exp\left(-\frac{2\alpha u}{dv/ds}\right)\right)$$

Sobolev近似

$$\boxed{\frac{1}{\tau_{ij}} = \frac{dv/ds}{2u\alpha_{ij}} \longrightarrow \beta_{ij} = \frac{1-\exp(-\tau_{ij})}{\tau_{ij}}}$$

Castor(1970)

統計平衡 $n_{J+1}A_{J+1,J}\beta_{J+1,J} - n_J A_{J,J-1}\beta_{J,J-1}$

$$+\sum_{K} C_{K,J} n_K - n_J \sum_{K\neq J} C_{J,K} = 0$$

β に関して緩和法は必要だが、
輻射輸送は解かずに局所的な統計平衡式のみを解くことで解を得る。

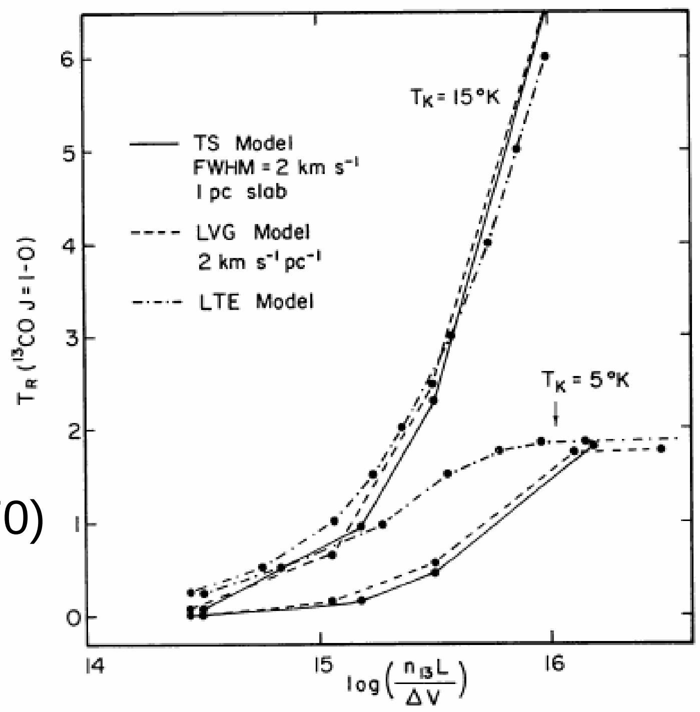


FIG. 32.—Comparison of the results of a turbulent slab model (TS), an LVG model, and an LTE model for the growth of the radiation temperature of the ^{13}CO line with increasing column density for kinetic temperatures of 5 K and 15 K. Good agreement is found between the results of the TS and LVG models, but the column density can be greatly underestimated at low temperatures in the LTE model.

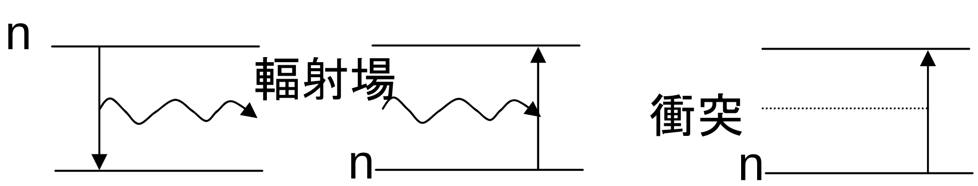
Snell 1981

Non-LTE ➔詳細釣り合い

レベル n から n 以外へ　　　　レベル n 以外から n へ

$$n_n\sum_{m<n}A_{n,m}+n_n\sum_{m\neq n}\left[B_{n,m}\int_{-\infty}^{\infty}J_\nu\phi(\nu-\nu_{cell})d\nu+C_{n,m}\right]=\sum_{m>n}n_mA_{m,n}+\sum_{m\neq n}\left[n_mB_{m,n}\int_{-\infty}^{\infty}J_\nu\phi(\nu-\nu_{cell})d\nu+n_mC_{m,j}\right]$$

自発放射　　放射励起　　衝突励起



平均輻射強度 $J_\nu=\dfrac{1}{4\pi}\int I_\nu d\Omega$

輻射輸送（モンテカルロ法）

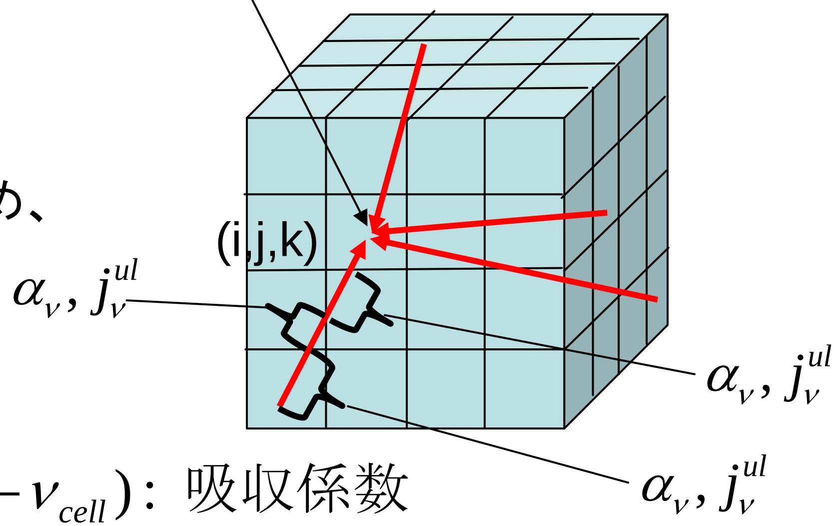
(1)ランダムに選んだ光線に沿ってI_νを求め、

$$\frac{dI_\nu}{ds}=-\alpha_\nu I_\nu+j_\nu$$ 輻射輸送方程式

I_ν： 輻射強度

$\alpha_\nu=\dfrac{h\nu_0}{4\pi}(n_lB_{lu}-n_uB_{ul})\phi(\nu-\nu_{cell})$： 吸収係数

$j_\nu^{ul}=\dfrac{h\nu_0}{4\pi}n_uA_{ul}\phi(\nu-\nu_{cell})$：放射率



(2) Specific intensity $J_\nu=\dfrac{1}{N_{Ray}}\sum I_\nu$

輻射輸送方程式の解法

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu$$

Long-characteristics法

A点のθ=225度方向へ向かう輻射強度
➔境界からA点へ向かう射線に沿って方程式を積分

Short -characteristics法

B点のθ=225度方向へ向かう輻射強度
➔格子の中間の白丸から射線に沿ってB点まで方程式を積分
➔白丸での輻射強度は左右の格子点の輻射強度から内挿

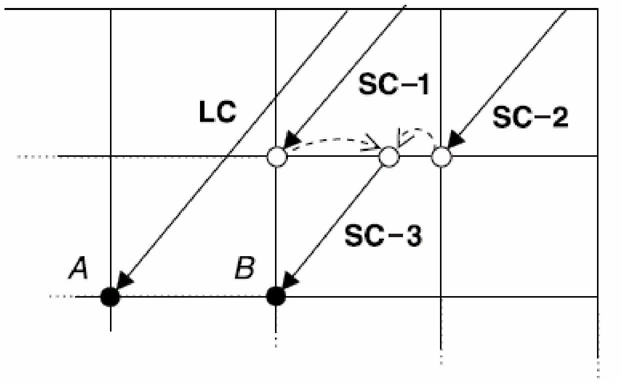


Fig. 1.—Two schemes for computing intensity at a grid position. With an LC calculation is done by integrating directly from the cloud surface to a grid position A. Alternatively, the intensity can be propagated one grid layer at a time using SCs. In the latter case interpolation (*dashed arrows*) is used to determine the intensity at the starting position of the third SC that ends at the grid position B.

モンテカルロ法

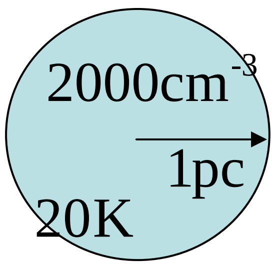
ランダムに選ばれた方向からの射線に沿って、Long-characteristics法で輻射輸送方程式を積分し、格子点(格子中央)での平均輻射強度を計算する。

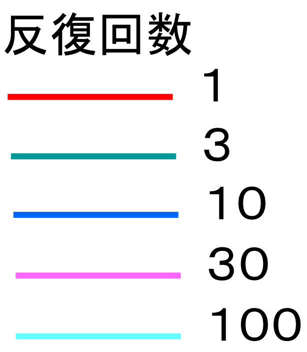
励起温度の空間分布

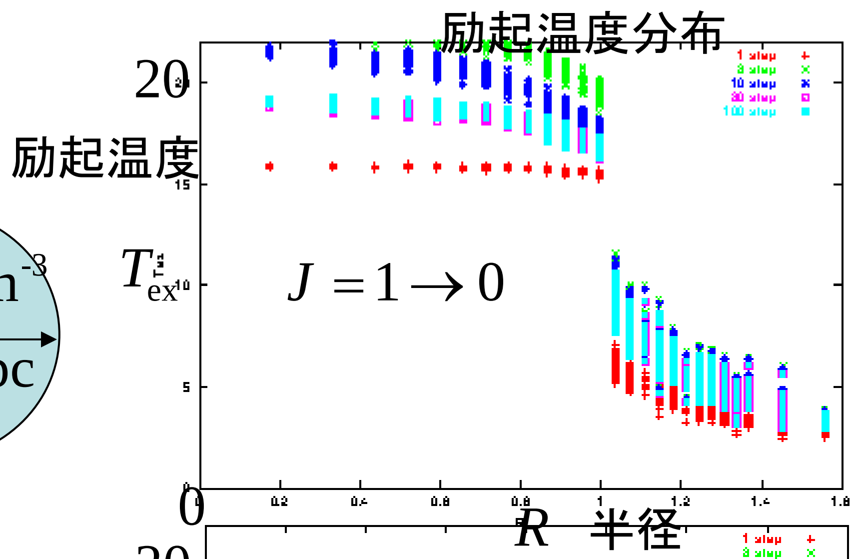
射線ごとに、輻射強度を決定（スペクトル、積分強度）

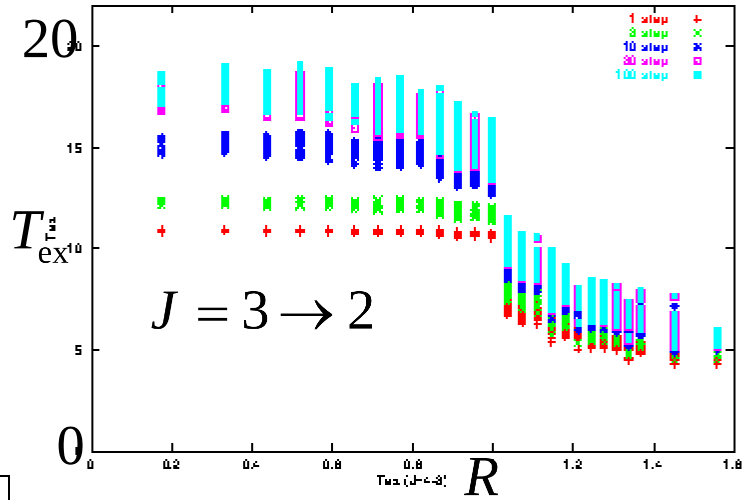
テスト計算

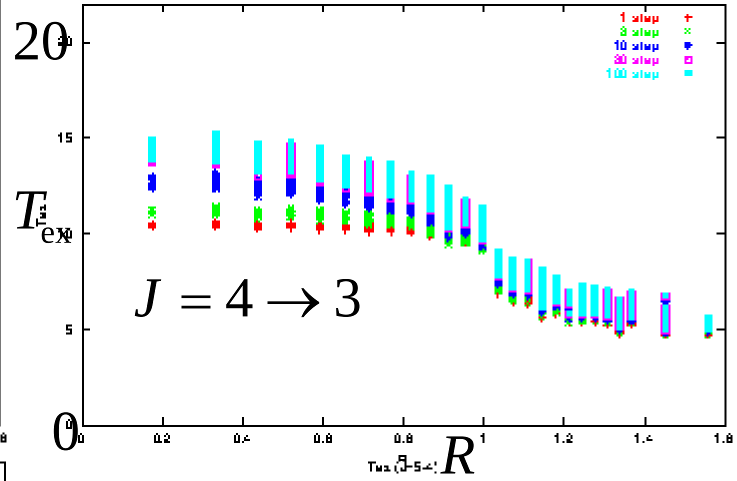
一様密度(2000cm^{-3})温度(20K)半径(1pc)速度(1kms^{-1}pc^{-1})で収縮する球状星間雲（Bernes問題）

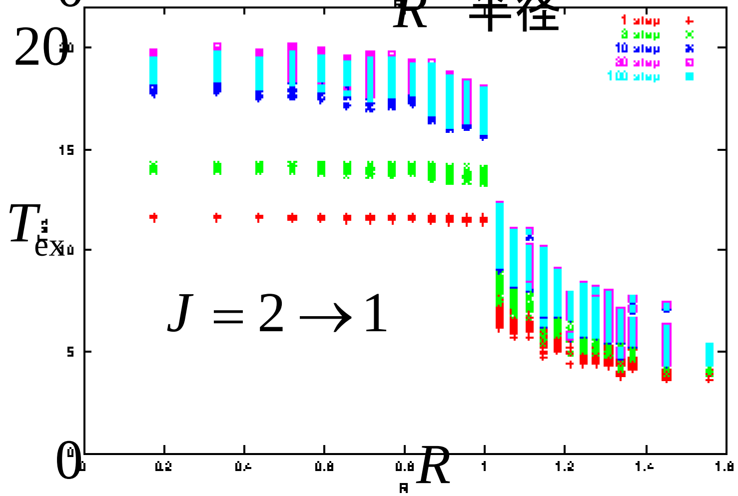


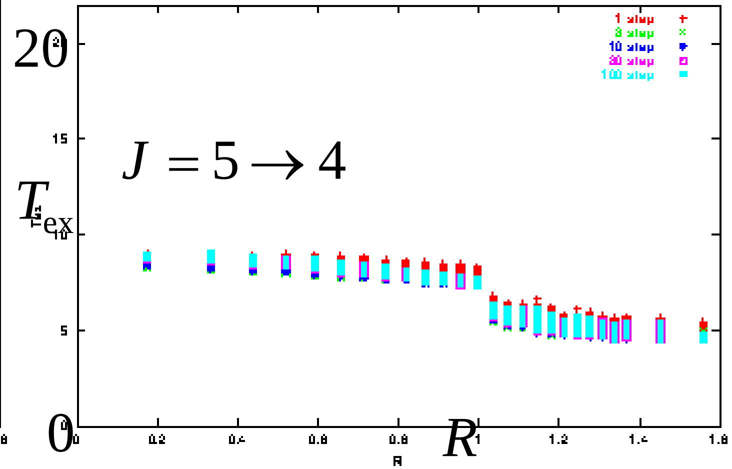




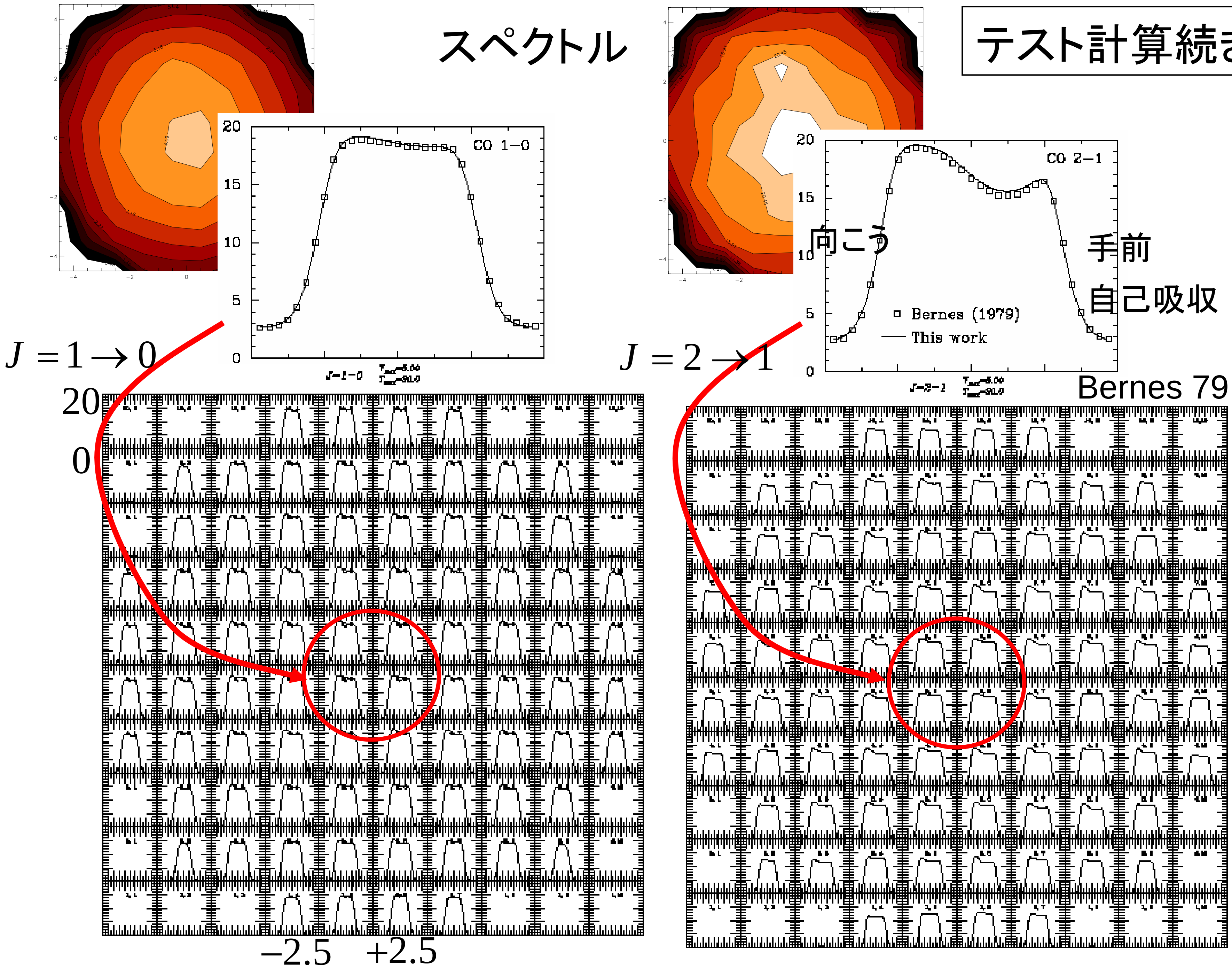








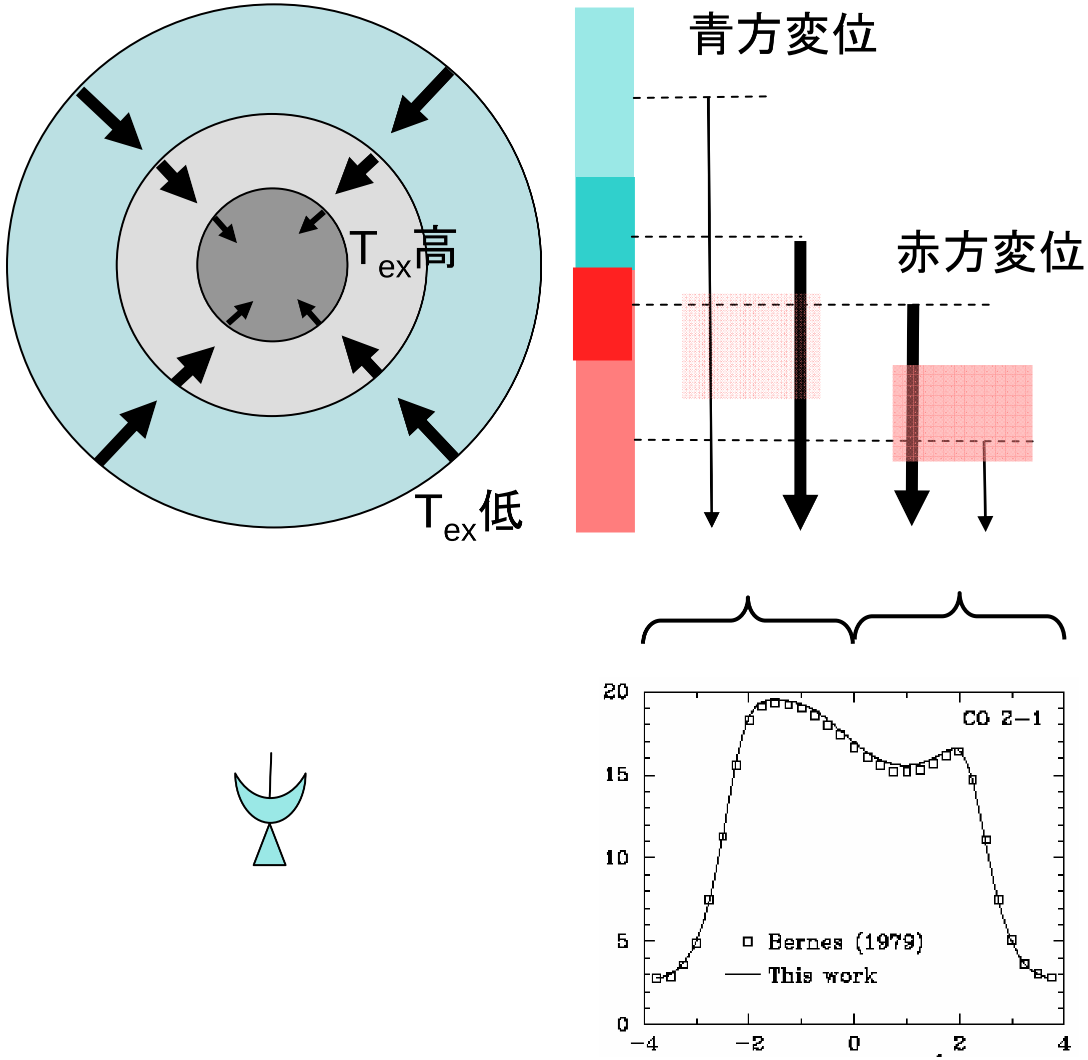
テスト計算続き



スペクトル
CO 1−0
$J = 1 \rightarrow 0$
20
0
−2.5 +2.5
CO 2−1
Bernes (1979)
This work
$J = 2 \rightarrow 1$
向こう
手前
自己吸収
Bernes 79

赤青非対称

自己吸収、self-absorption,
self-reversal



Blue Asymmetry

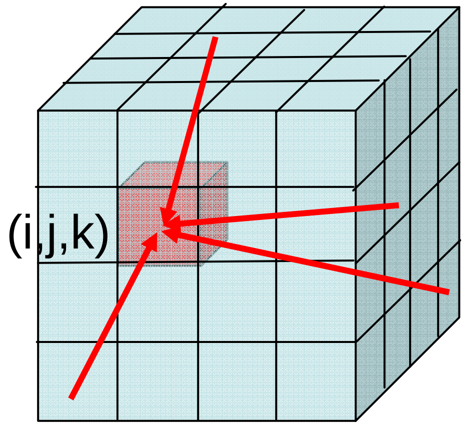
収束の加速

$$(\Lambda - \Lambda^*)[S_{ul}^{\dagger}(J_\nu)]$$

すべてのグリッドで吸収、放出、輻射強度を無矛盾に決定

（1）目的グリッドに外から入射する輻射強度を決める

（2）目的グリッド内で吸収、放出、輻射強度を無矛盾に決める　$\Lambda^*[S_{ul}(J_\nu)]$



Accelerated Λ Iteration (ALI)

$$\Lambda \text{ iteration: } J_\nu = \Lambda[S_{ul}(J_\nu)]$$
$$J_\nu \leftarrow J_\nu$$

S_{ul}: 源泉関数

$$\text{Accelerated } \Lambda \text{ iteration: } J_\nu = (\Lambda - \Lambda^*)[S_{ul}^{\dagger}(J_\nu)] + \Lambda^*[S_{ul}(J_\nu)]$$

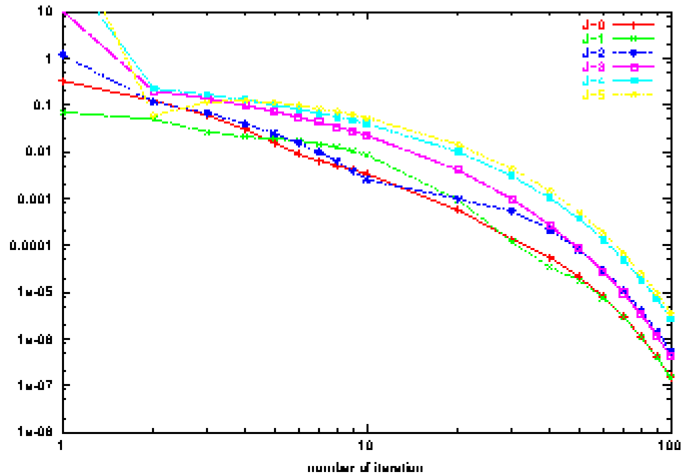
・ Λ^*は、逆変換可能なオペレータ、$S_{ul}^{\dagger}(J_\nu)$は近似的な源泉関数

「ALI」による収束の加速

$$N_{\mathrm{G}} = 10^3,\ N_{\mathrm{Ray}} = 30,\ {}^{12}\mathrm{CO}$$

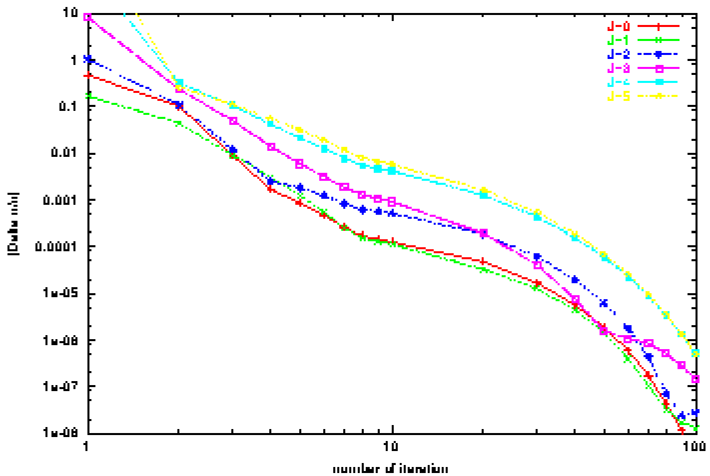
Λ iteration

$\Delta n_l / n_l$



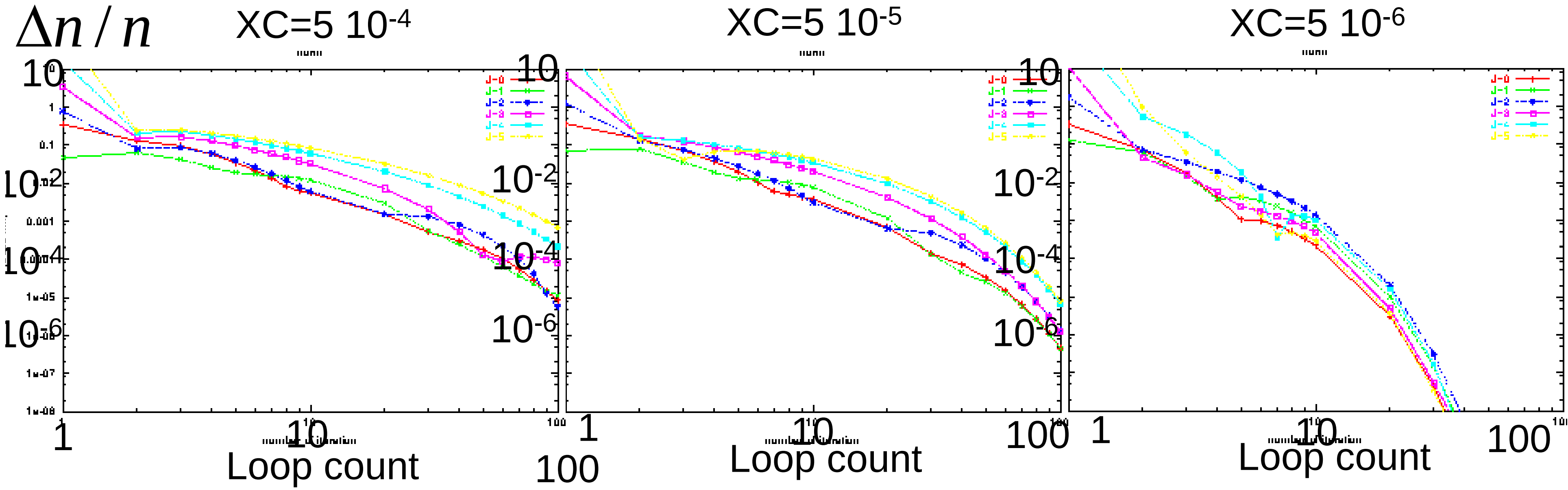
$N_{\mathrm{iteration}}$

Accelerated Λ iteration



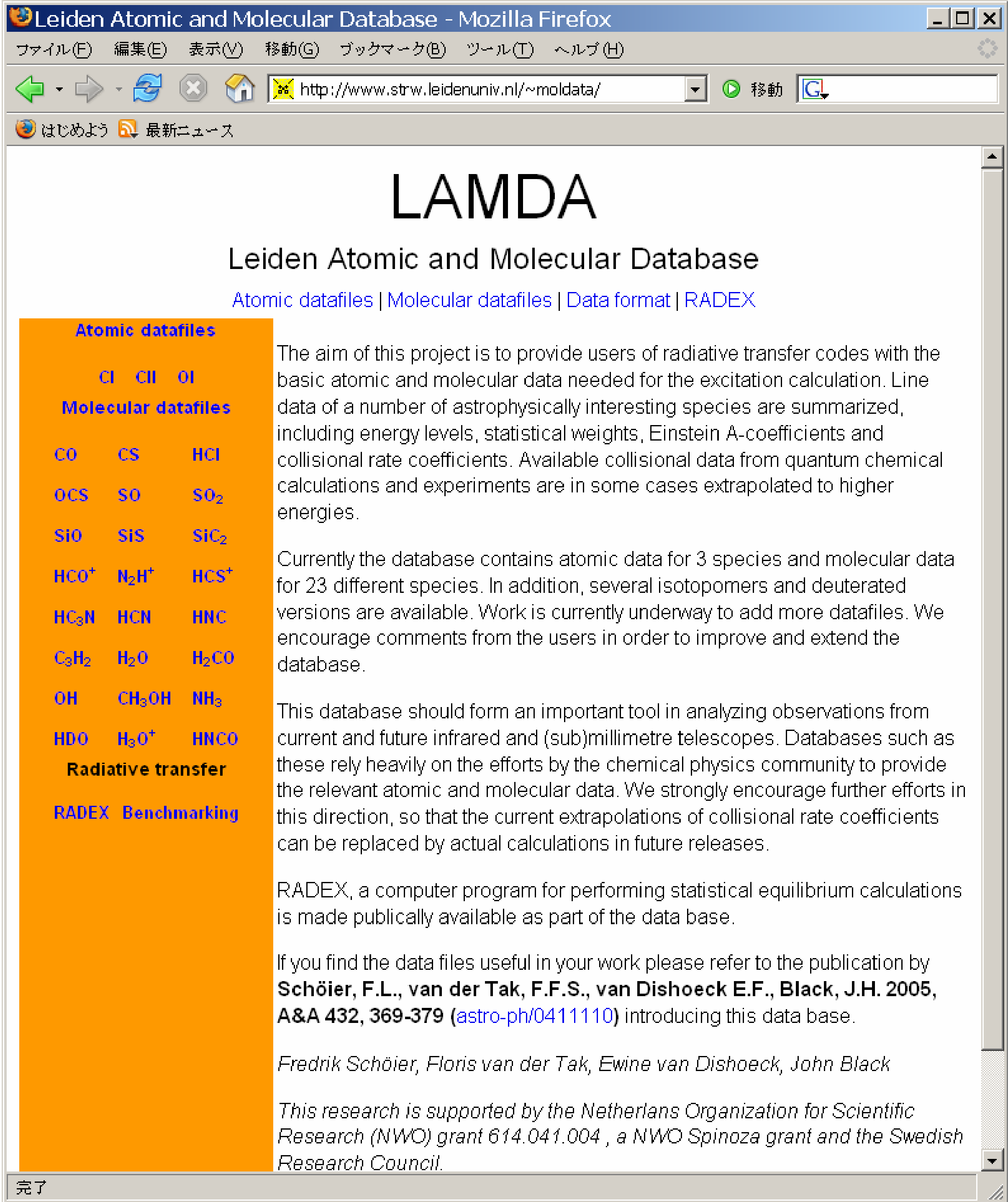
$N_{\mathrm{iteration}}$

収束回数のCOMPOSITIONによる違い



Leiden 大学

http://www.strw.leidenuniv.nl/~moldata/



Schöier, F.L., van der Tak, F.F.S., van Dishoeck E.F., Black, J.H. 2005, A&A 432, 369-379 (astro-ph/0411110)

```
!MOLECULE
HCO+
!MOLECULAR WEIGHT
29.0
!NUMBER OF ENERGY LEVELS
31
!LEVEL + ENERGIES(cm^-1) + WEIGHT + J
    1          0.0000     1.0        0
    2          2.9750     3.0        1
    3          8.9250     5.0        2
    4         17.8497     7.0        3
…..
!NUMBER OF RADIATIVE TRANSITIONS
30
!TRANS + UP + LOW + EINSTEINA(s^-1) + FREQ(GHz) + E_u(K)
    1     2     1   4.2512e-05     89.1885230      4.28
    2     3     2   4.0810e-04    178.3750650     12.84
    3     4     3   1.4757e-03    267.5576190     25.68
    4     5     4   3.6269e-03    356.7342880     42.80
    5     6     5   7.2449e-03    445.9029960     64.20
…..
!NUMBER OF COLL PARTNERS
1
!COLLISIONS BETWEEN
1 HCO+ - H2 from Flower (1999) + extrapolation
!NUMBER OF COLL TRANS
465
!NUMBER OF COLL TEMPS
15
!COLL TEMPS
   10.0   20.0   30.0   50.0   70.0  100.0  150.0  200.0  250.0  300.0  350.0  400.0  500.0 1000.0 2000.0
!TRANS + UP + LOW + COLLRATES(cm^3 s^-1)
    1     2     1  2.6e-10 2.3e-10 2.1e-10 2.0e-10 1.9e-10 1.8e-10 2.0e-10 2.2e-10 2.3e-10 2.5e-10 2.7e-10 2.8e-10 2.9e-1
    2     3     1  1.4e-10 1.2e-10 1.1e-10 1.0e-10 9.2e-11 8.8e-11 8.4e-11 8.2e-11 8.1e-11 8.3e-11 8.1e-11 8.5e-11 8.8e-1
    3     3     2  3.8e-10 3.7e-10 3.4e-10 3.4e-10 3.3e-10 3.5e-10 3.6e-10 3.8e-10 4.0e-10 4.2e-10 4.4e-10 4.4e-10 4.6e-1
    4     4     1  1.0e-10 9.1e-11 8.4e-11 7.3e-11 6.8e-11 6.3e-11 5.9e-11 5.6e-11 5.5e-11 5.5e-11 5.5e-11 5.5e-11 5.8e-1
```

Molecule Data 例

HCO+ ! corrected on Feb.2,'05 <== nu=1/lambda
7.84e-9 ! XC composition HCO+/H2 Redman et al. (2004) MNRAS 352 1365
44.59E+09 ! BB rotation constant $\boxed{B}$
3.937E-18 ! electric dipole moment 3.937 Dbye $\boxed{\mu}$
5 ! level max
3 ! level of Temperature
10 ! T (K)

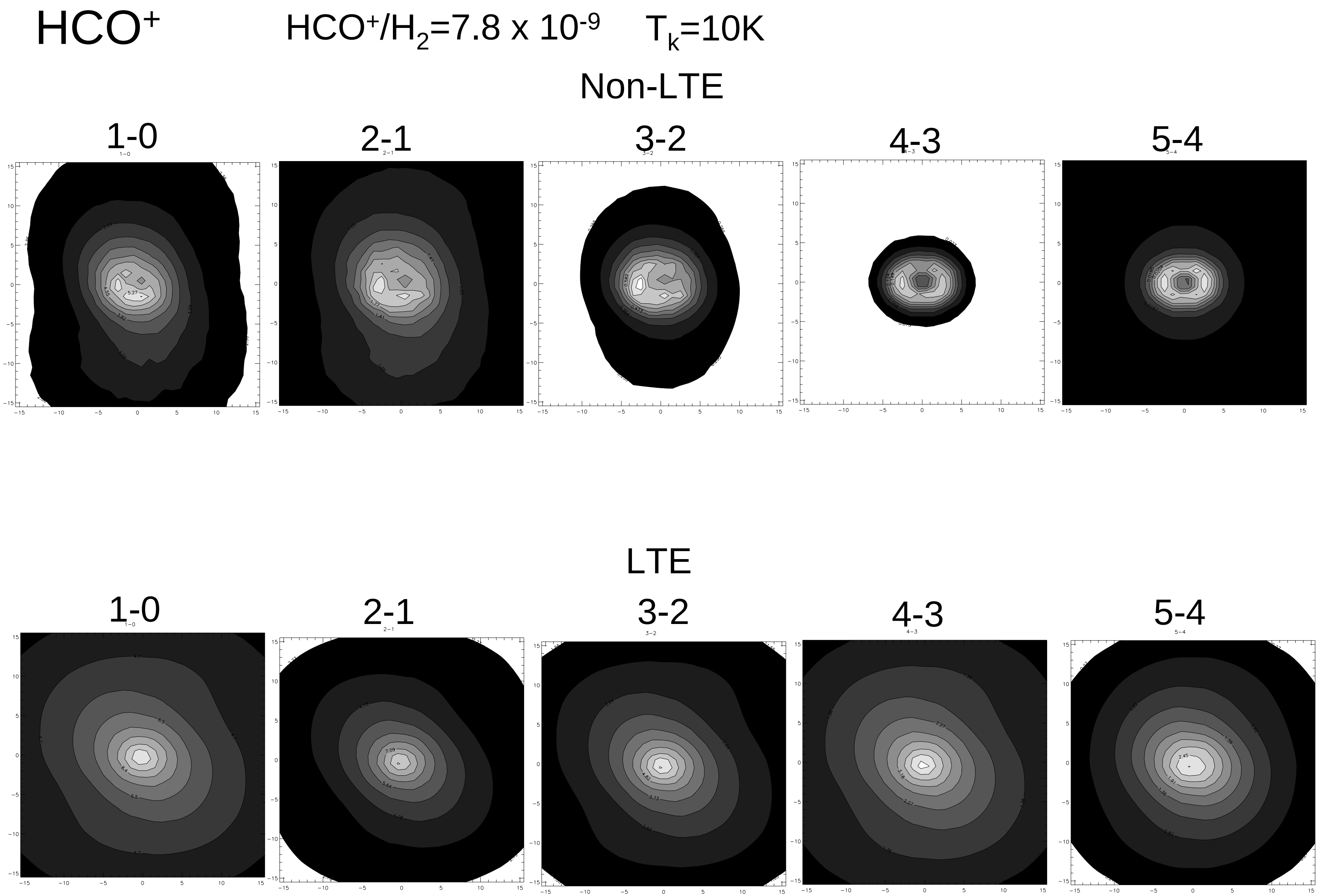
0	0	0.000E+00	C_{00}
1	0	2.600E-10	C_{10}
2	0	1.400E-10	C_{20}
3	0	1.000E-10	…
4	0	5.900E-11	…
5	0	3.300E-11	…
0	1	5.084E-10	C_{01}
1	1	0.000E+00	C_{11}
2	1	3.800E-10	C_{21}
3	1	2.500E-10	C_{31}
4	1	1.600E-10	…
5	1	1.200E-10	…
0	2	1.938E-10	C_{02}

$$E_r = hBJ(J+1)$$

$$A_{J+1,J} = 16hB^3(J+1)^3/c^2 \times B_{J+1,J}$$

$$B_{J+1,J} = 32\pi^4\mu^2(J+1)/3h^2c(2J+3)$$

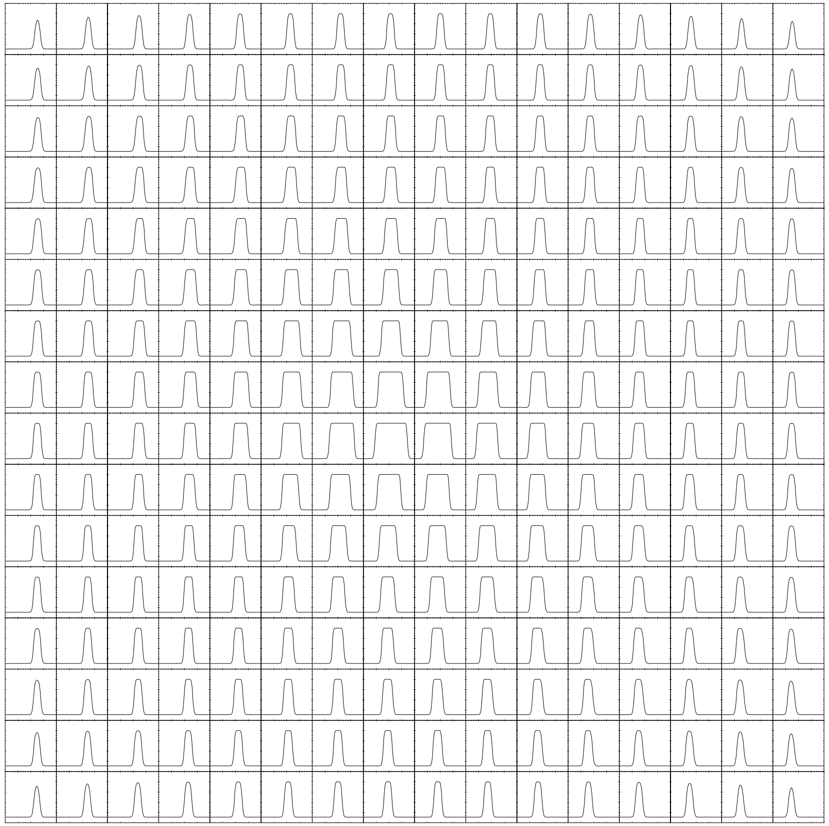
$$C_{L,U} = (g_U/g_L)\exp[-(E_U-E_L)/kT]\, C_{UL}$$


HCO+
HCO+/H2=7.8 x 10-9 Tk=10K
Non-LTE
1-0
2-1
3-2
4-3
5-4
LTE
1-0
2-1
3-2
4-3
5-4

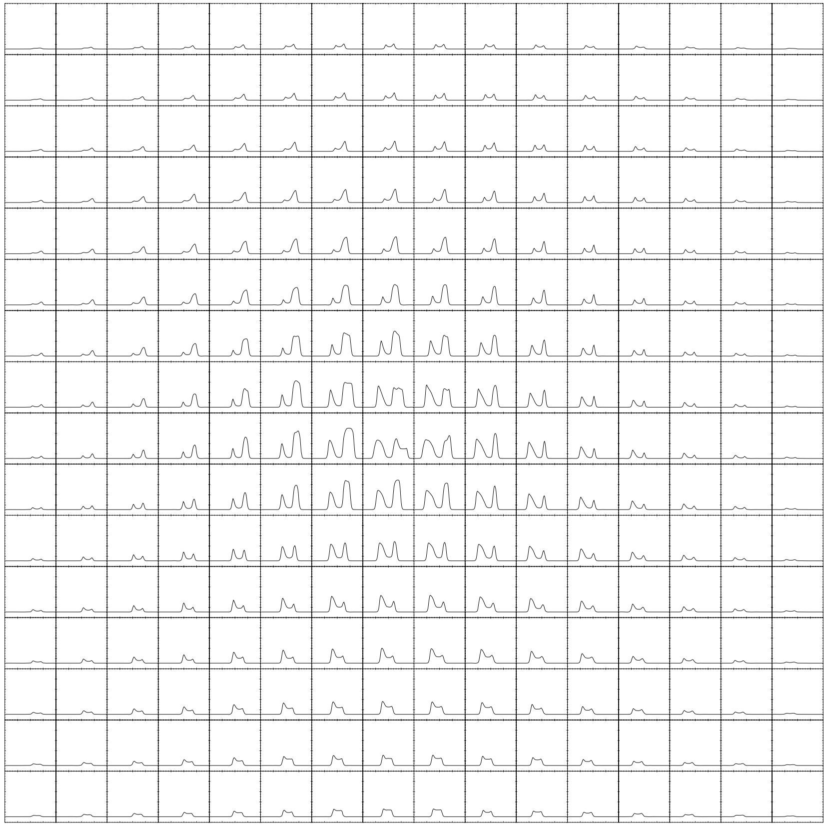
HCO^+ 1-0 $HCO^+/H_2=7.8 \times 10^{-9}$ T_k=10K

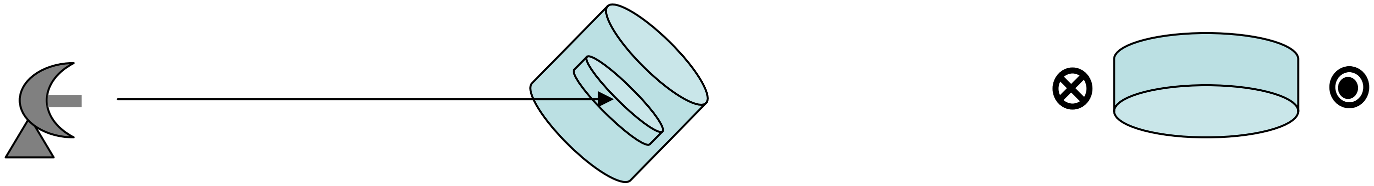
$\alpha_0=1, \Omega_0=5$, L=0, Step=329

LTE



Non-LTE

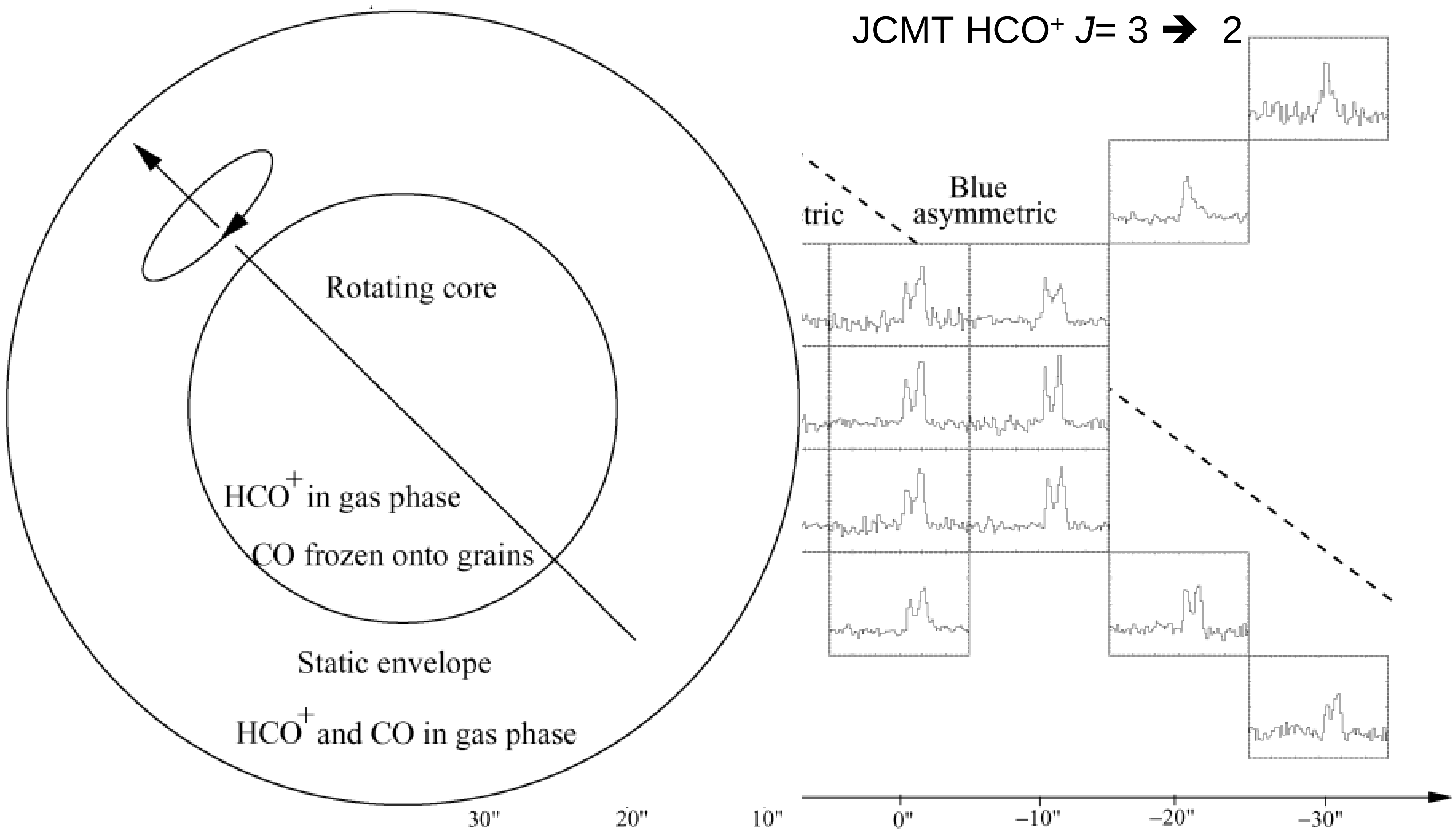




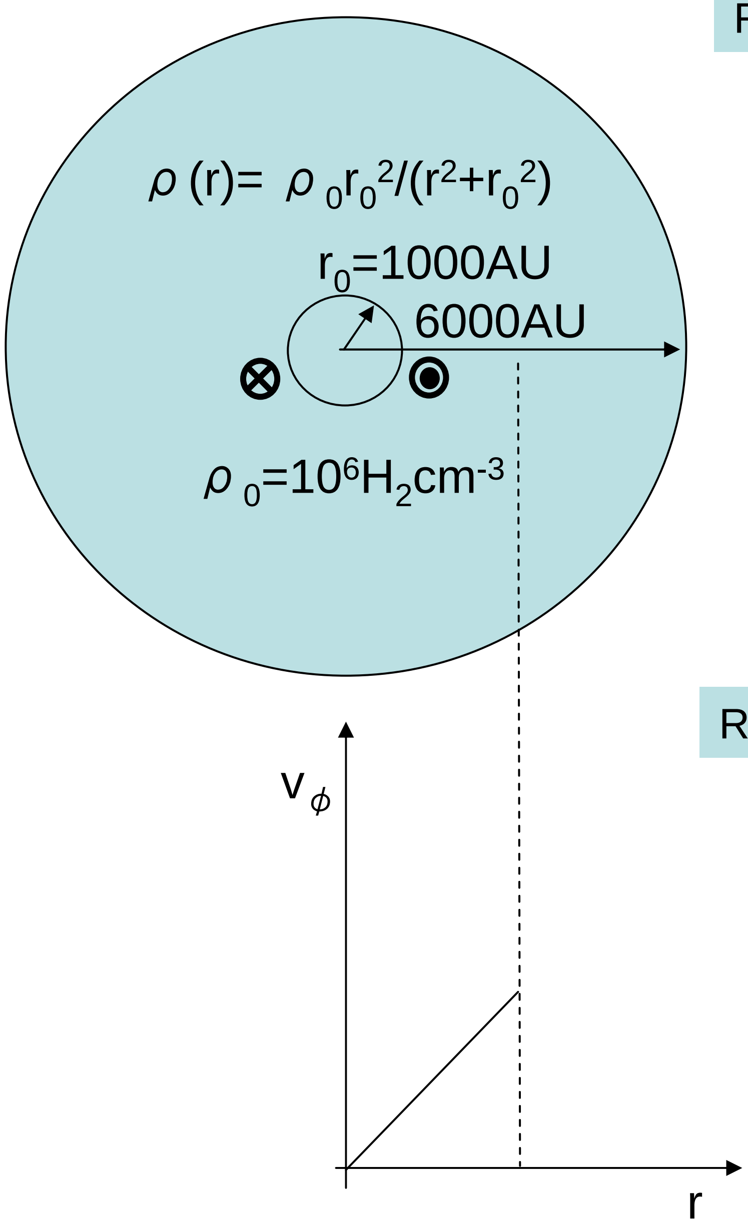
L1689B

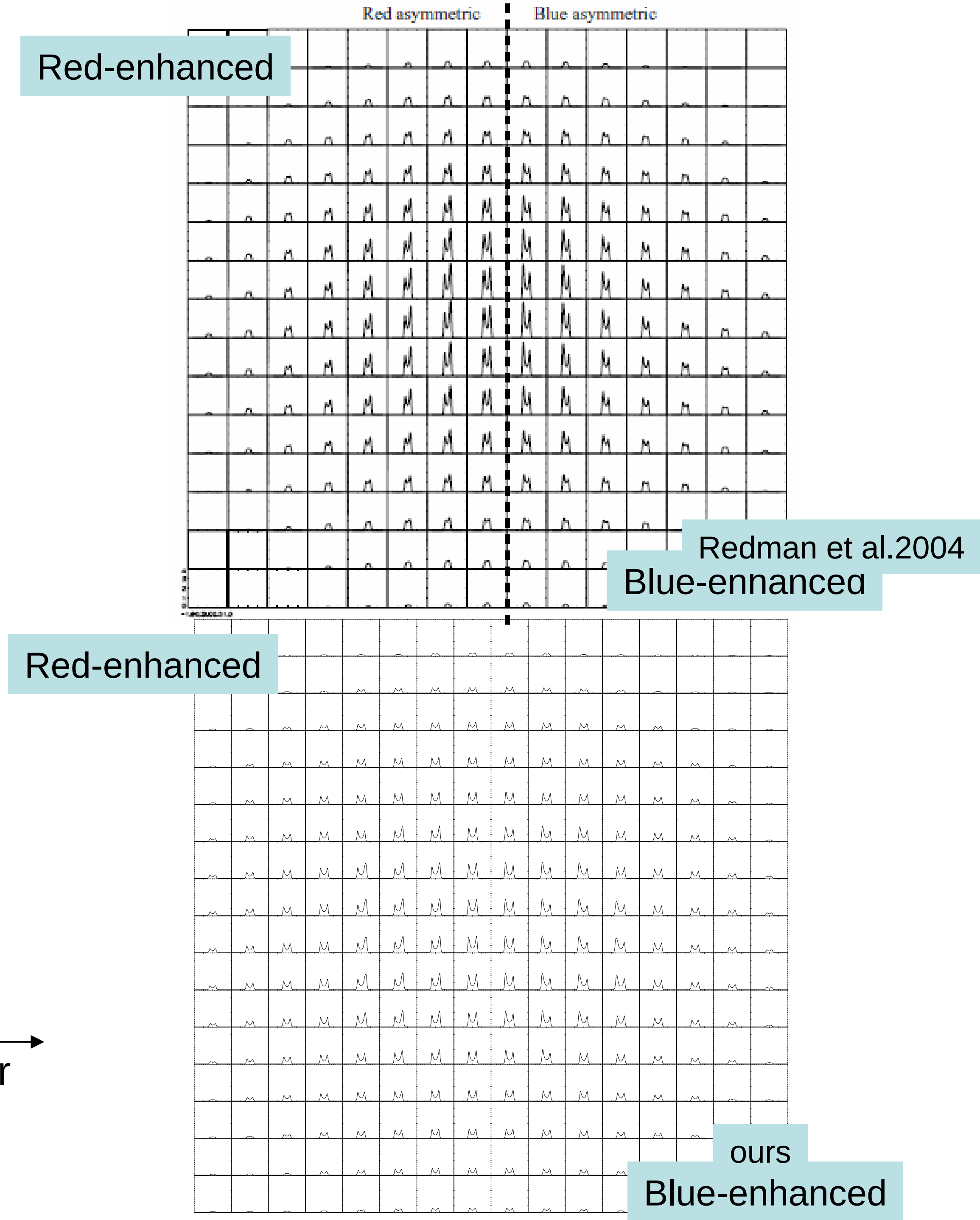
Presetellar core

JCMT HCO^+ J= 3 ➔ 2



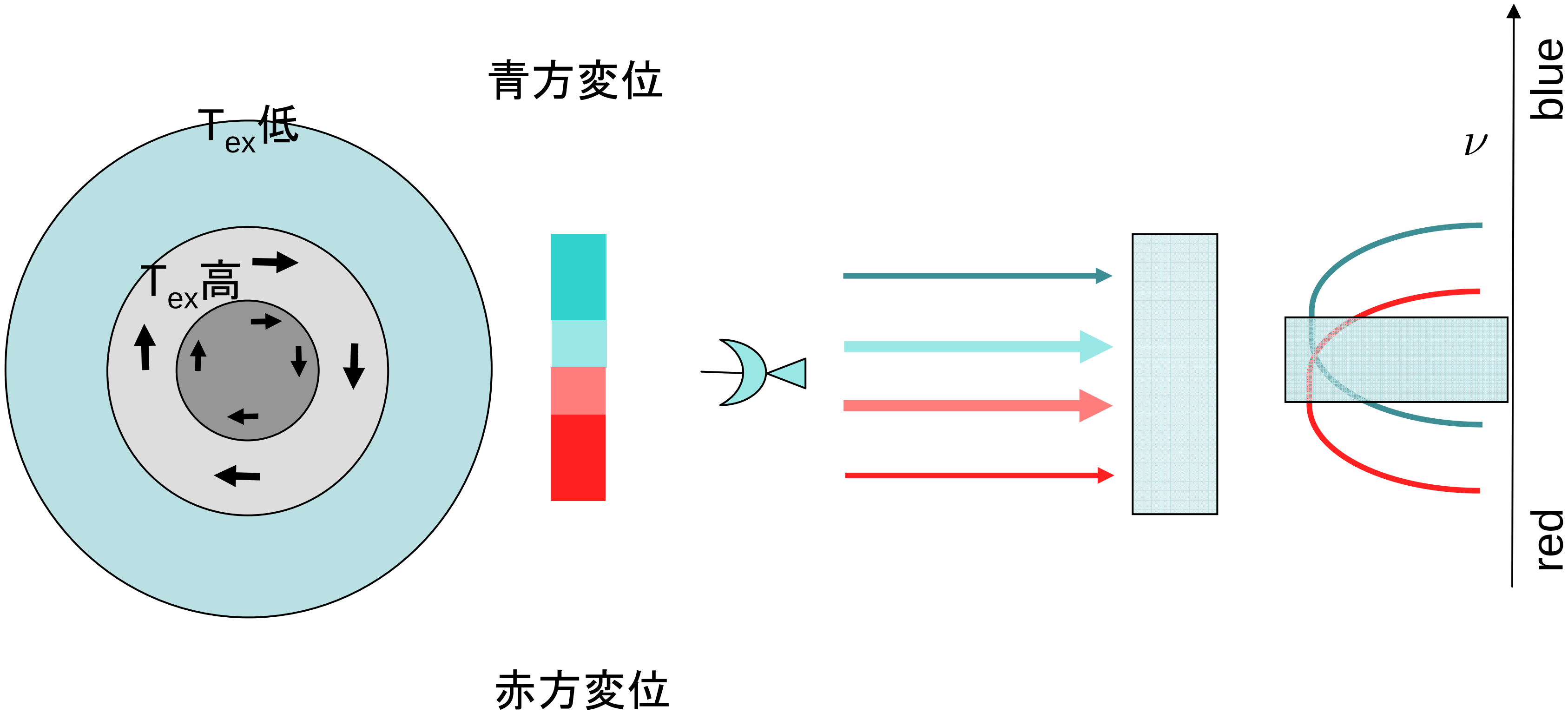
Redman et al. (2004) MNRAS 352,1365


ρ (r)= ρ 0r0²/(r²+r0²)
r0=1000AU
6000AU
ρ 0=10⁶H2cm⁻³
vφ
r


Red asymmetric
Blue asymmetric
Red-enhanced
Redman et al.2004
Blue-enhanced
Red-enhanced
ours
Blue-enhanced

回転星間雲

自己吸収、self-absorption,
self-reversal

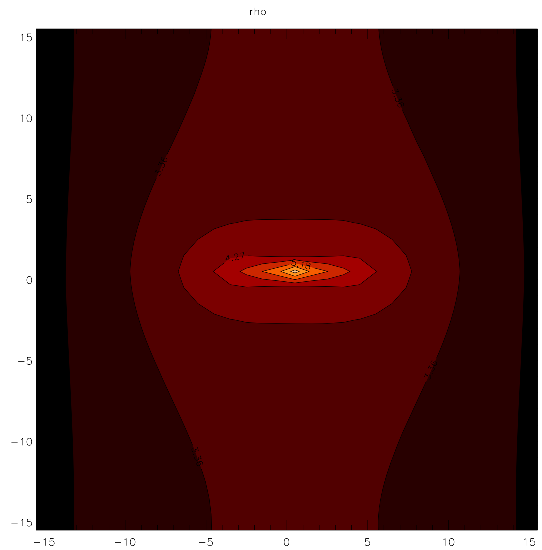


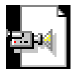
計算例

磁場を持ってゆっくりと回転している円筒状の等温星間雲の重力収縮（Tomisaka 2002）

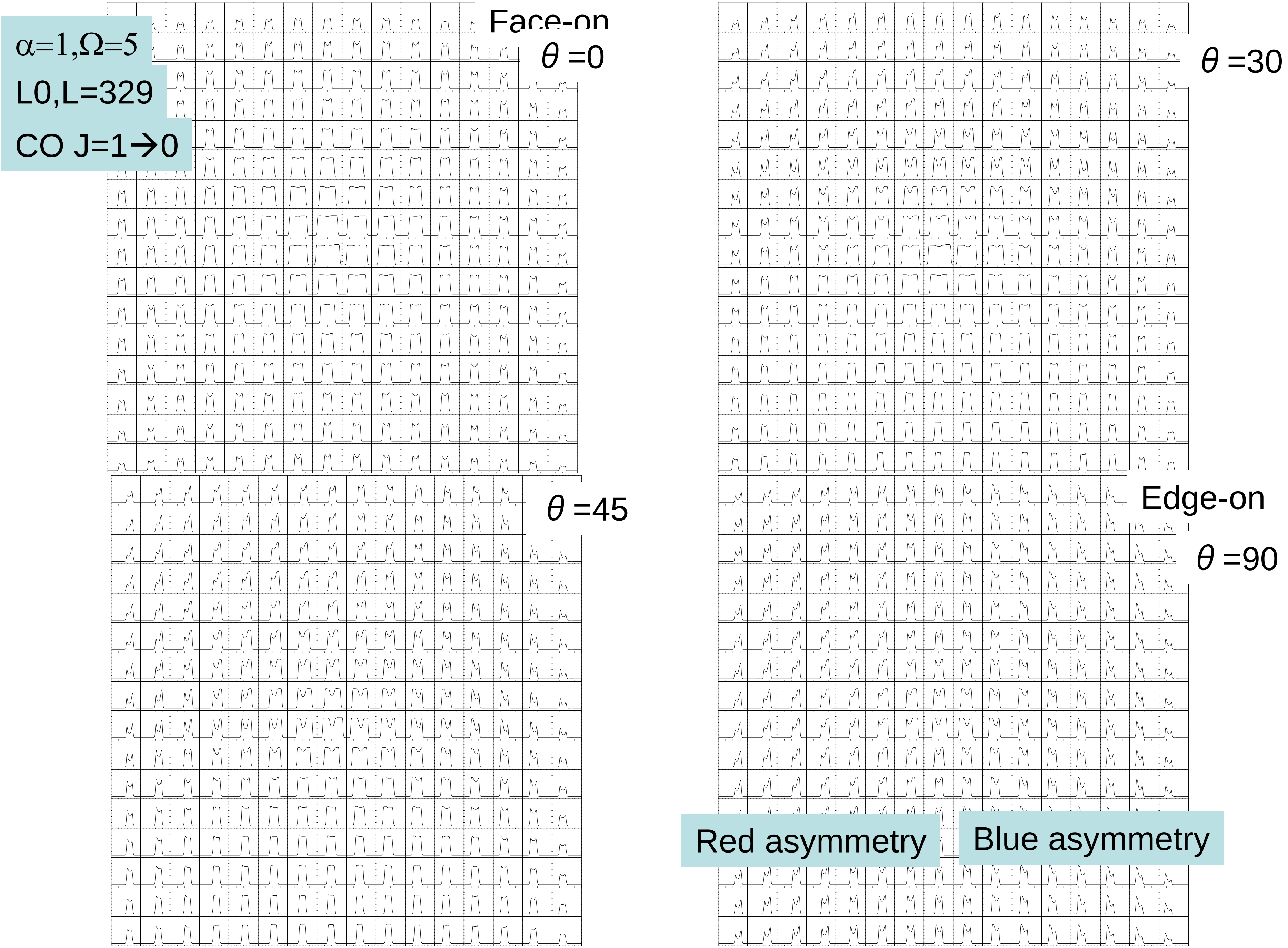
(1)暴走的収縮期の解（スナップショット）の密度、温度分布を与え、観測的可視化を行う。

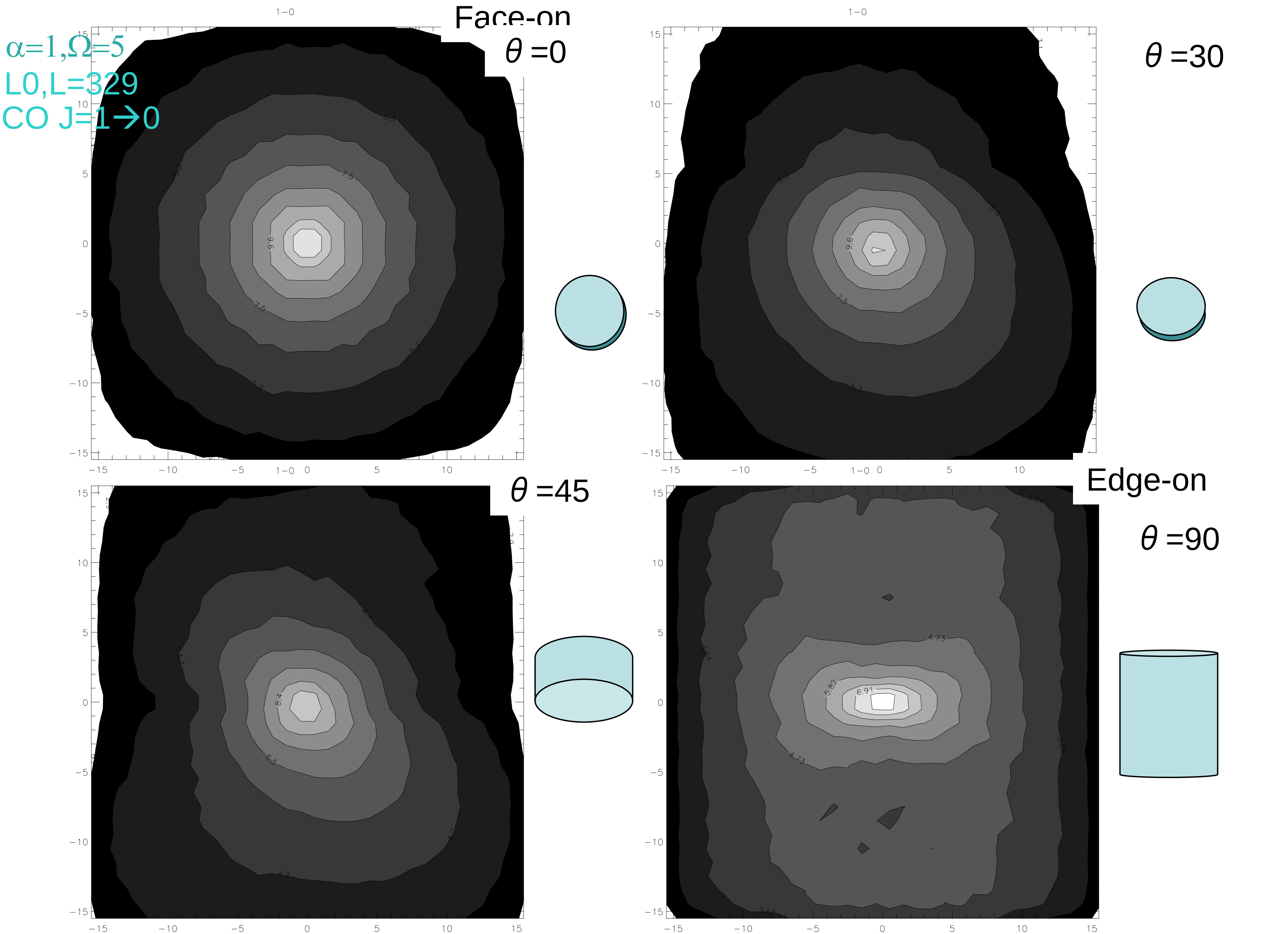
(2)臨界密度の異なる2種の分子種（CO、CS）について、スペクトル、積分強度分布を求める。



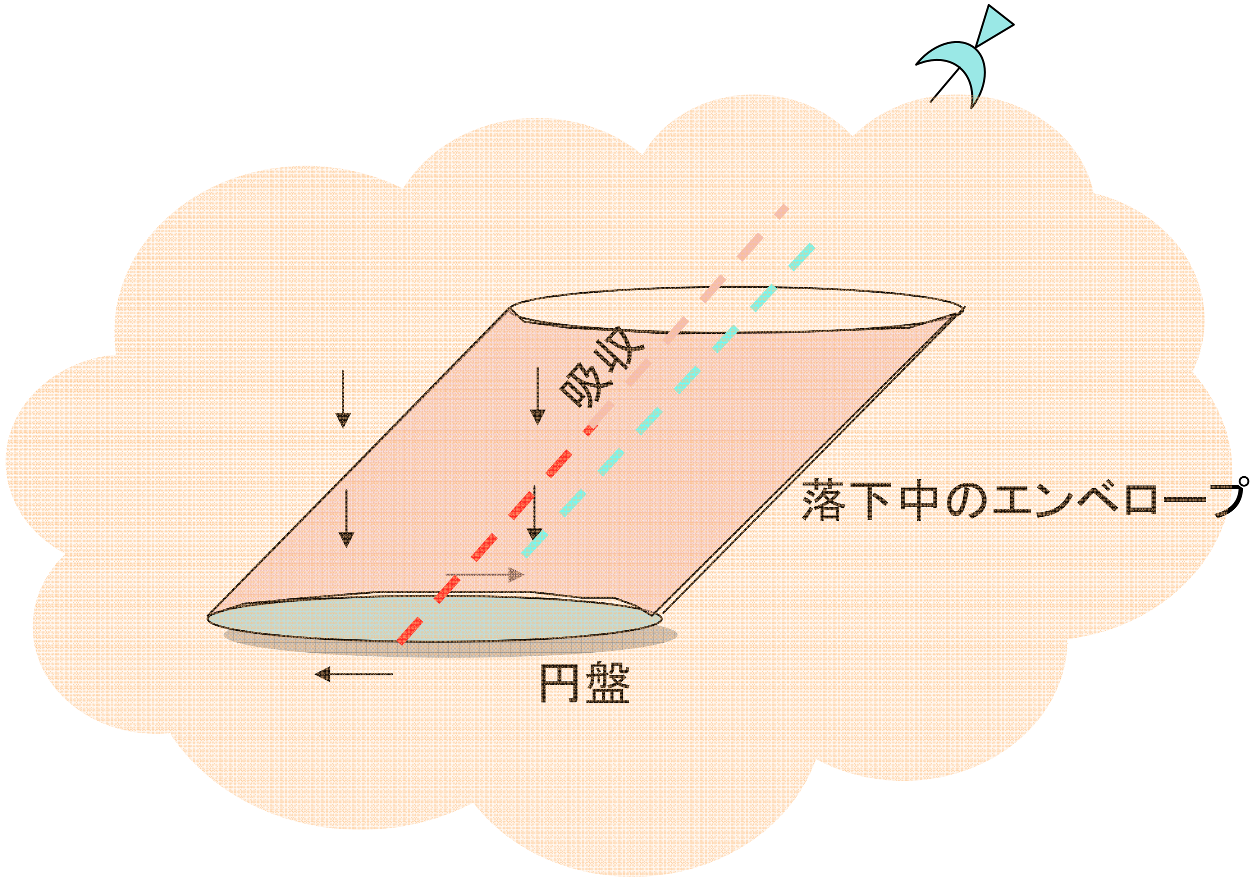


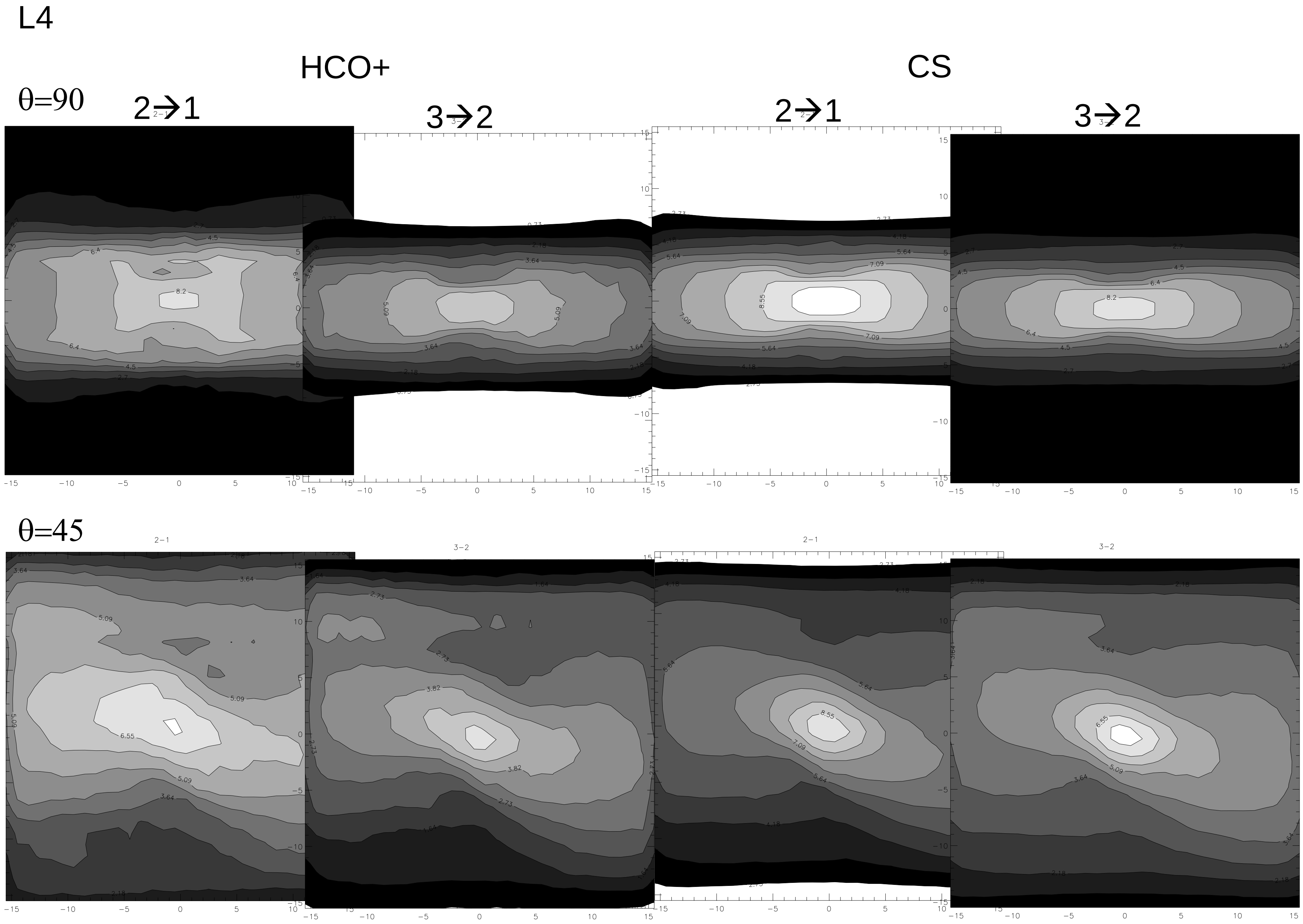
ビデオ クリップ

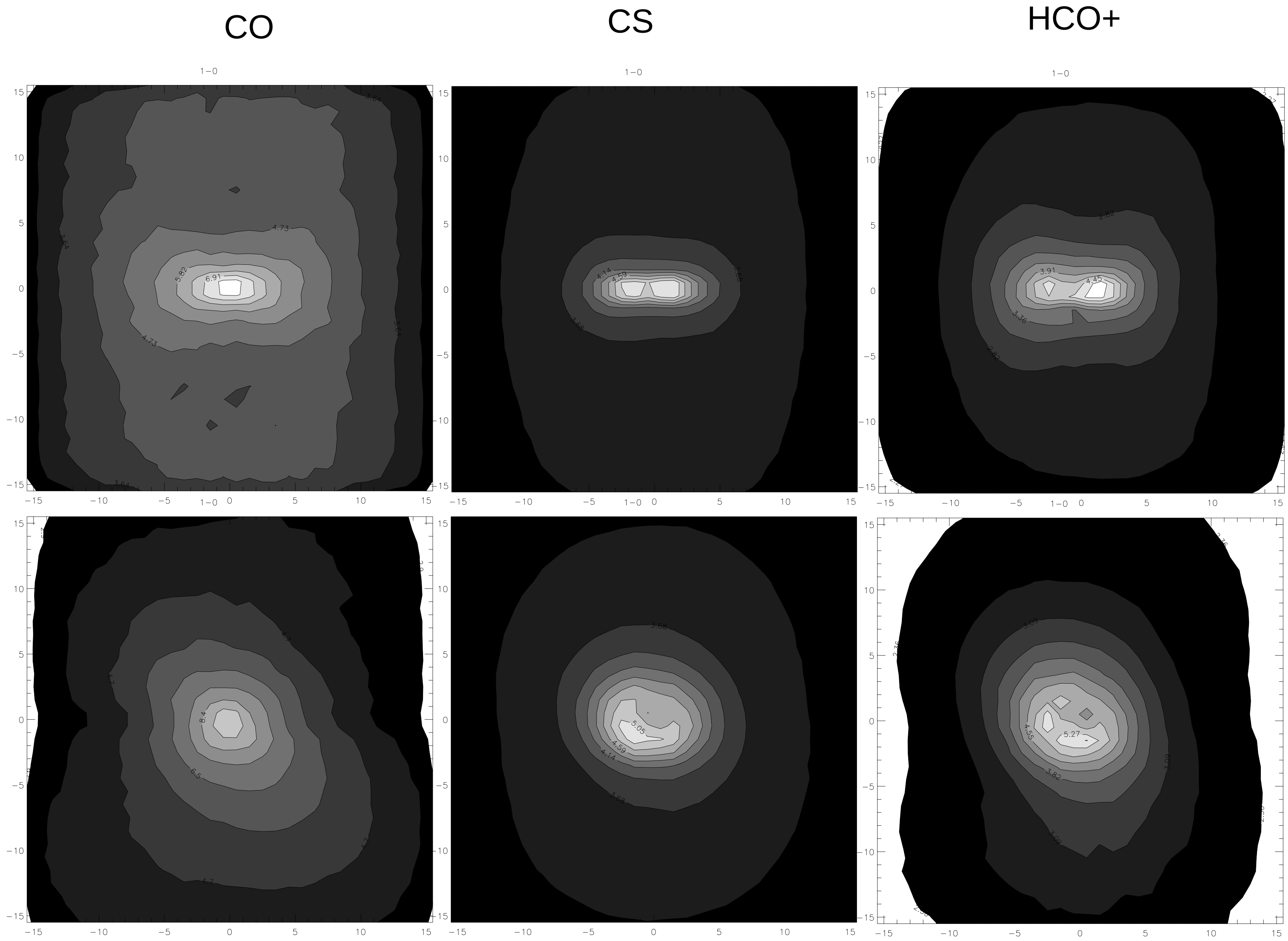

α=1,Ω=5
L0,L=329
CO J=1→0
Face-on
θ =0
θ =30
θ =45
Edge-on
θ =90
Red asymmetry
Blue asymmetry


α=1,Ω=5
L0,L=329
CO J=1→0
Face-on
θ =0
θ =30
θ =45
Edge-on
θ =90

斜め方向からみたときに軸対称分布の円盤が非軸対称に見えるわけ




L4
HCO+
CS
θ=90
2→1
3→2
2→1
3→2
θ=45
2-1
3-2
2-1
3-2


CO
CS
HCO+
1−0
1−0
1−0
1−0
1−0
1−0
6.91
5.82
4.73
3.64
4.59
4.14
3.68
3.91
4.45
3.36
2.82
8.4
6.5
4.7
5.05
5.27
4.55
3.82
3.09
2.36

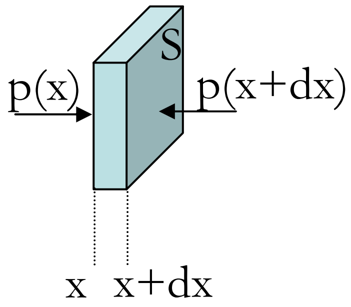
第4部のまとめ

- 輻射輸送に関する基礎的事項を勉強した。
- シミュレーションから予想される正確な輻射を求め（観測的可視化）、観測結果と比較することが現在可能になりつつある。
- 天文シミュレーションと観測天文学の、より緊密な関係から新たな天文学へ。

シミュレーション研究の進展

- 問題の定式化
- 実験装置であるプログラムについて、適当な計算法を検討
  - 数値不安定性
- プログラムの作成、テスト（検証）
  - 検証問題：類似問題で既知の解のある問題
    - 衝撃波管問題、自己相似解、定常問題の解
- 計算の実行
- 計算結果の解析
  - シミュレーションの可視化、アニメーション
  - 結果から誘導される単純な量の間の関係
  - 物理的解釈
- 計算結果の観測的可視化
  - 観測事実との詳細な突き合わせ
- 結果をわかりやすい形で発表

圧力による力



力=Sdx$\rho\,\alpha$=S{p(x)-p(x+dx)}

単位体積あたり力
=$\rho\,\alpha$=-{p(x)-p(x+dx)}/dx

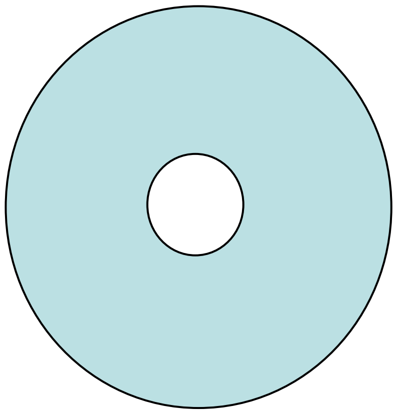
dx→0 → - dp/dx

中心でのg？

$$g = -\frac{GM_r}{r^2} = -\frac{4\pi G\int_0^r \rho r^2 dr}{r^2}$$

$r \rightarrow 0$　　$g \rightarrow \infty$？　　NO

M_r ＝ rより内側の質量



$$g = -\frac{4\pi G\int_0^r \rho r^2 dr}{r^2}$$

ρテイラー展開

$$\simeq \frac{4\pi G\int_0^r \left\{\rho_c + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2}\right)_{r=0} r^2\right\} r^2 dr}{r^2}$$

$$= -\frac{4\pi G}{3}\rho_c r - \frac{2\pi G}{5}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2}\right)_{r=0} r^3$$

$$= -\frac{4\pi G}{3}\rho_c r$$