

銀河の中の星惑星形成

担当者：富阪、和田、小久保、花輪（名古屋大）、杉山

時間 火曜 午後 II 限

4 - 5 月は不定期授業が多いので、最初だけ水曜日とした。

6 月、7 月も集中があるので、こちらも集中とした。

7 月は集中があるので、9 月に移動した。

- | | | |
|--------------------------|-----------------------|------|
| 1) 5/9(水) I 限 | 富阪 | |
| 2) 5/15(火) I 限 | 富阪 | |
| 3) 5/22(火) II 限 | 富阪 | |
| 4) 5/29(火) II 限 | 和田 | |
| 5) 6/5(火) II 限 | 和田 | |
| 6) 6/12(火) II 限 | 和田 | |
| 6/19(火) --- | (観測天文学 II のため休講) | |
| 7,8)6/26(火) II 限,III 限 | 花輪,花輪 | |
| 7/3(火) --- | (電波観測システム特論のため休講) --+ | |
| 9) 7/6(金) II 限 | 杉山 | <--+ |
| 10) 7/9(月) II 限 | 杉山 | <--+ |
| 7/10(火) --- | (電波観測システム特論のため休講) --+ | |
| 11,12)7/17(火) II 限,III 限 | 花輪,花輪 | |
| 13) 9/4(火) II 限 | 小久保 | |
| 14) 9/11(火) II 限 | 小久保 | |
| 15) 9/18(火) II 限 | 小久保 | |

I 限(10:30-12:00)

II 限(1:30-3:00)

III 限(3:30-5:00)

科目の概要：

授業計画：

1 回：序（富阪）

授業プログラム説明(0.5h)

なぜ流体力学の基礎が「銀河の中の星・惑星系形成」に必要なか？

1.5 - 3 回：流体力学の基礎（富阪）

流体力学の基礎方程式

基礎方程式

断熱の基礎方程式

加熱、冷却物理過程

衝撃波

ラバール管

定常球対称問題の天文への応用
膠着
恒星風：パーカーウインド

4－6回：銀河スケールの星形成過程（和田）

観測的事実
銀河スケールで見た星形成
シュミット則
星形成のモード
スターバースト
銀河中心
ULIRG
バー銀河
星間気体の流体力学と星形成
密度波理論
銀河渦状衝撃波
バー銀河の中の星間気体の運動

7－9回：星間雲から星への進化（花輪）

観測的事実
星なしコア
原始星
前主系列星
時間進化スケール、重要な物理過程
輻射輸送
磁場のジュール拡散と双極性拡散
静水圧平衡
Bonner-Ebert 臨界質量
磁氣的超臨界、準臨界雲
自己相似解を使った解析

：宇宙の熱史（杉山）

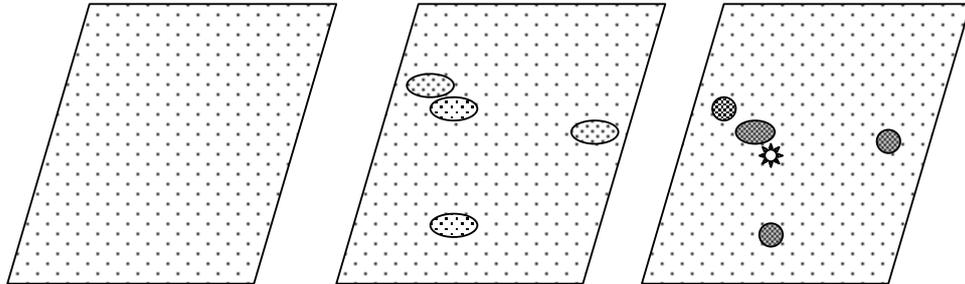
10－12回：塵円盤から惑星系への進化（小久保）

観測的事実
系外惑星
塵円盤
プラネテシマルから原始惑星への進化
衝突系シミュレーション
原始惑星へのガスの膠着

第1章 流体力学の基礎

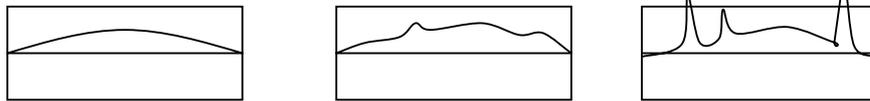
1. 構造の形成

- (1) 銀河の形成
- (2) 星の形成
- (3) 惑星の形成



共通性

- (1) 自己重力によって物質が集まる現象。



- (2) 気体のもつ性質によってできる物質の性質が決まる現象。
 - (ア) 冷却、加熱
 - (イ) 不安定性 (熱不安定性、重力不安定性)
 - (ウ) 亜音速、超音速の流れ

例：重力VS熱圧力

球対称の系で重力エネルギー

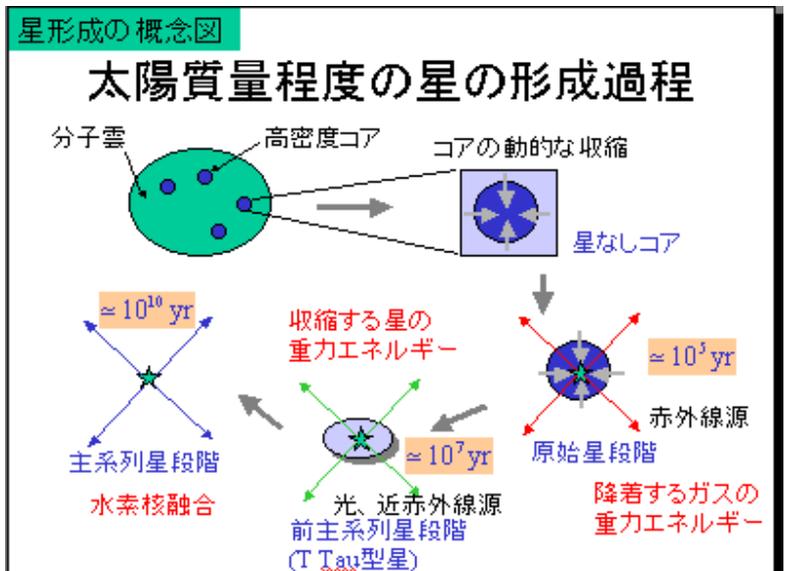
$\Phi \approx -\frac{GM^2}{R}$ と、熱エネルギー $T = pV$ の全エネルギーが $E = \Phi + T = 0$ となる状態を考える。 $p = \frac{\rho kT}{\mu H}$ 、

$R \approx \left(\frac{M}{\rho}\right)^{1/3}$ を使うと、

エラー！ 編集集中のフィールドコードからは、オブジェクトを作成できません。

が得られる。これより小さい質量に対しては、全エネルギーが正に、大きな質量に対しては負になる。したがってこの質量よりも大きな質量のものは重力によって集まることが期待される。反対に、これより軽いものは、圧力効果で収縮できない。この臨界質量のことをジェーンズ質量と呼ぶ。

もし形成の過程で、等温で密度が上昇してゆくと、この質量は密度とともに減少してゆく。したがって収縮とともに小さい構造が重力によって形成されることが期待される。これを fragmentation とよぶ。反対に、 $T \propto \rho^{-1}$ のように変化するとして、 $\Gamma > 4/3$ なら $T^{3/2} / \rho^{1/2}$ は



密度とともに上昇するので、ジーンズ質量は収縮の過程で増加する。これはこれまで収縮していた固まりが収縮を止めることを示している。

この違いは、「密度が上昇したときに温度がどのように変化する」ということから生じているが、これを決めている過程は、個々の物理過程を見なければ理解できない。しかし、それがわかったときに重力のものを引き寄せる性質と熱圧力のものを支える性質の間でおこる釣り合いの結果どのようなことが期待されるかは、上の議論で理解することができる。

(1) 流体力学基礎方程式

流体とは？

「水は方円の器に従う。」

応力：物体を変形させようとしたときに働く力。

物体の内部の面を通じて働く応力のうち面に平行な成分が小さいもの。

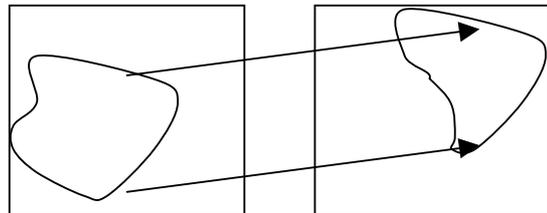
(2 . 1) 基礎方程式

力学の基礎：ニュートン運動方程式。

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad (2.1)$$

流体力学でも、単位体積あたりに働く力を \mathbf{f} とし、単位体積あたりの質量（質量密度）を ρ とすると、

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}. \quad (2.2)$$



流体の中で働く力のうち、必ず働くのは、圧力によるものでそれは単位体積あたり $-\nabla p$ である。

そのほかに、重力が働いている（単位質量に働く重力 \mathbf{g} のことを重力加速度という）場合、(2.2)式は

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (2.3)$$

流体の変形の仕方に制限をつける式が必要である。流体の内部に体積 ΔV を考え、境界にある粒子に注目してそれを追跡すると、その内部の質量は時間的に変化しないはずである。すなわち、

$$\frac{d\rho\Delta V}{dt} = 0 \quad (2.4)$$

である。

$$\frac{d\Delta V}{dt} = \oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int \text{div} \mathbf{v} dV, \quad (2.5)$$

すなわち

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \text{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2.6)$$

が運動と密度の変化の間の関係を記述する関係式である（質量に関する連続の式）。

(2 . 2) ラグランジュ形式とオイラー形式

(2.3)式で使った時間微分 $\frac{d}{dt}$ はもともとある粒子(流体の場合は有限の体積をもつことに着目して流体素片と呼ぶ)に着目してその速度がどのように変わるかを記述したものであった。これをラグランジュの時間微分とよぶ。これに対して場所を固定した空間のある1点での(普通の)時間微分 $\frac{\partial}{\partial t}$ をオイラーの時間微分と呼ぶ。当然これらの間には関係がある。それを考えてみよう。それには空間と時間の関数である $F(\mathbf{x}, t)$ を考える。 $\frac{dF}{dt} \Delta t$ は、同じ粒子を追跡しながら Δt の間に生じた変化を求めるものである。 Δt の間に \mathbf{x}_0 から $\mathbf{x}_0 + \mathbf{v} \Delta t$ に移動するので、この差分は

$$\frac{dF}{dt} \Delta t = F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v} \Delta t, t_0 + \Delta t) - F(\mathbf{x}_0, t_0) \quad (2.7)$$

と書き直せる。一方、オイラーの時間微分に対応するものは

$$\frac{\partial F}{\partial t} \Delta t = F(\mathbf{x}_0, t_0 + \Delta t) - F(\mathbf{x}_0, t_0) \quad (2.8)$$

であることに注意。(2.7)を $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0, t = t_0$ の周りでテイラー展開を用いて書き直すと、

$$\frac{dF}{dt} \Delta t = F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v} \Delta t, t_0 + \Delta t) - F(\mathbf{x}_0, t_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}_0, t_0} \cdot \mathbf{v} \Delta t + \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}_0, t_0} \Delta t, \quad (2.9)$$

これからラグランジュの時間微分とオイラーのそのの間には

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \quad (2.10)$$

という関係があることがわかった。これを(2.3)式に適用すると、オイラー形式で書いた運動方程式(オイラー方程式)は

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (2.11)$$

である。

つぎに質量に関する連続の式は(2.6)に(2.10)を適用して、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2.12)$$

すなわち、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.13)$$

がオイラー形式で書いた、質量に関する連続の式である。

結局、オイラー形式の基礎方程式は(2.13)と(2.11)であり、ラグランジュ形式で書くとそれぞれ(2.6)と(2.3)である。

これらの方程式は密度、圧力、速度(3成分)という5変数の間に4つの式[(2.11)と(2.3)は成分ごとに3つ]しかないので、さらにもう一つ関係が必要である。これは通常、熱力学の第一法則(エネルギー保存)から得られ、単位体積あたりのエネルギー ε に対して

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div}(\varepsilon + p) \mathbf{v} = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}, \quad (2.14)$$

のように与えられる。

圧力と密度の関係 $p = P(\rho)$ があれば上の二つの基礎方程式だけで方程式を閉じることができる。 $p = P(\rho)$ をバロトロピー関係と呼ぶ。密度にかかわらず温度が変化しない (等温) 場合は、

$$p = a^2 \rho \quad (2.15)$$

のように、エントロピーが一定 (断熱) なら

$$p = K \rho^\gamma \quad (2.16)$$

のように書ける。

(2.3) 重力に関する基礎方程式

重力と静電気力の比較の比較からはじめよう。静電気では点電荷 Q がそれから距離 r だけ離れた点に作る電界の強さは

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (2.17)$$

であたえられることはよく知っている。それに対して、質量 M を持った質点から距離 r だけ離れた点に作られる重力 (加速度) は

$$g = -G \frac{M}{r^2} \quad (2.18)$$

であるから、この二つを比較すると、電荷 Q を質量 M に取り替えるとともに $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow -G$ とすると、静電気と重力を同じように見ることができることがわかる。ガウスの法則

$$\text{div}\mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (2.19)$$

およびそのポテンシャルの表現

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (2.20)$$

は、この変換で、それぞれ $\text{div}\mathbf{g} = -\nabla^2\phi = -4\pi G\rho_m$ のようになる。この

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho_m \quad (2.21)$$

をポアソン方程式と呼び、適当な境界条件が与えられれば質量分布から重力ポテンシャルの分布を求めることができる。

(練習問題) 重力のポアソン方程式をとりて重力ポテンシャルを求めよ。ただし、質量分布は球対称とし密度は半径 R の球内は一定で外部では真空とせよ。つまり $\rho_m \begin{cases} = \rho_0 (r < R) \\ = 0 (r \geq R) \end{cases}$ である。

ヒント： ∇^2 は球座標では、 $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$ なの
 で球対称の場合ポアソン方程式は、 $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 4\pi G \rho$ となる。

[3] ジーンズ不安定性

自己重力がどのような場合に重要となって物体を凝集させるかを定める大きさの尺度を求めてみよう（ジーンズ波長と呼ばれる）。

ここで学ぶテクニックは線形解析と呼ばれるもので、物理量がゆっくりとしか変化しない量 X から微小な量 δX だけずれているとき、この δX がどのように変化するかを考えるものである。

一様な気体（密度 ρ_0 、速度 $u_0 = 0$ 、圧力 p_0 ）で満たされた空間に、揺らぎが生じている。そのときの密度は $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ 、速度は $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}$ 、圧力は $p = p_0 + \delta p$ であったとする。ただし、 δ のついた量は一次の微小量でそれが見つからない量に比べて小さいとしている。すなわち $|\delta X| \ll |X|$ 。以下では x 方向にのみ変化する $\partial/\partial x \neq 0, \partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$ 、として、これら、連続の式に代入すると、

$$\frac{\partial(\rho_0 + \delta\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_0 + \delta\rho)(u_0 + \delta u)}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

ここで u は x 方向の速度成分を現す。ここで、 δ のつかない量どうし、 δ のついた量を 1 次で含む量どうしのそれぞれの関係は

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t} + \frac{\partial\rho_0 u_0}{\partial x} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \frac{\partial(u_0\delta\rho + \rho_0\delta u)}{\partial x} = 0, \quad (3.3)$$

となるが、 δ のつかない量どうしの(3.2)は自動的に満足され、次の次数の(3.3)で 2 項目は 0 である。同じように、運動量保存（運動）方程式

$$(\rho_0 + \delta\rho) \left\{ \frac{\partial(u_0 + \delta u)}{\partial t} + (u_0 + \delta u) \frac{\partial(u_0 + \delta u)}{\partial x} \right\} = - \frac{\partial(p_0 + \delta p)}{\partial x} - \rho_0 \frac{\partial(\phi + \delta\phi)}{\partial x}, \quad (3.4)$$

から、 δ のついた量を 1 次で含む項の間の関係は

$$\rho_0 \left(\frac{\partial\delta u}{\partial t} \right) = - \frac{\partial\delta p}{\partial x} - \rho_0 \frac{\partial\delta\phi}{\partial x}, \quad (3.5)$$

となる。圧力の変化と密度の変化の間に関係があると、たとえば断熱なら $\frac{\delta p}{\delta\rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} = c_s^2$ であるし、等温なら $\frac{\delta p}{\delta\rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = \frac{p_0}{\rho_0} = c_s^2$ のように書き直せる。

(3 . 1) 音波

重力が効いていない場合を考える。(3.3)は

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0 \quad (3.6)$$

で、(3.5)は

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \delta u}{\partial t} \right) = -c_s^2 \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} \quad (3.7)$$

となるから、(3.6)を空間微分し、(3.7)を時間微分した式に代入すると、

$$\frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} = 0, \quad (3.8)$$

のなるが、これは $\left(\frac{\partial \delta u}{\partial t} + c_s \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta u}{\partial t} - c_s \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right) = 0$ 、であるから、位相速度 $\pm c_s$ で左右に伝

播する波を表す。 δu の変化する速度成分は波の伝わる方向のもののみであるから、これは縦波であり、(3.6)や(3.7)のように密度の変化をともなう粗密波である。音波はこのように気体中に生じた微小な密度変化が圧力を介して伝播する波であることがわかる。このときの位相速度

$c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s} = \left(\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \right)^{1/2}$ は (断熱) 音速、また変化が等音で起こる場合のそれは

$c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T} = \left(\frac{p_0}{\rho_0} \right)^{1/2} = \left(\frac{kT}{\mu H} \right)^{1/2}$ 等温音速と呼ばれる。ここで理想気体の状態方程式

$p = nkT = \frac{\rho kT}{\mu H}$ (ここで、 n は圧力に寄与する粒子の密度、 μ は圧力に寄与する粒子に対する平均分子量、 H は水素原子質量、 k はボルツマン定数である) を用いた。

(練習問題) 星間気体は水素 H 原子とヘリウム原子 He が原子数の比で約 10 : 1 で出来上がった混合気体であるとする。すべての元素が完全に電離した状態 H^+ 、 He^{2+} と自由電子 e になっているとき平均分子量 μ の値を求めよ。また、低温で分子状態の水素 H_2 と中性の He ならどうか。前者が温度 $T = 10^4$ K、後者が $T = 10$ K とするとそれぞれの音速はどれくらいになるか。

(3.2) 自己重力が働く場合

それでは、自己重力が働いている場合はどうだろうか。(3.5)は

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \delta u}{\partial t} \right) = -c_s^2 \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} - \rho_0 \frac{\partial \delta \phi}{\partial x}, \quad (3.9)$$

であり、連続の式(3.6)は音波と同様で、

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0 \quad (3.10)$$

である。重力場に関するポアソン方程式からは δ のついた量を一次で含む関係式として

$$\frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial x^2} = 4\pi G \delta \rho \quad (3.11)$$

がえられる。(3.9)を空間微分し、(3.11)を使うと、

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial t} \right) = -c_s^2 \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial x^2} - 4\pi G \rho_0 \delta \rho, \quad (3.12)$$

これと、(3.10)を時間微分した式から、

$$\frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial x^2} + 4\pi G \rho_0 \delta \rho, \quad (3.13)$$

が得られる。波を空間的には平面波の重ねあわせであらわして、

$$\delta \rho(x, t) = \sum A(\omega, k) \exp(i\omega t - ikx) \quad (3.14)$$

と書けるが、ひとつの成分だけを取り出して(3.13)に代入すると、

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 \quad (3.15)$$

という振動数と波数の関係（これを分散関係と呼ぶ）が得られる。密度を小さくするとこれは音波のそれと一致することがわかる。波数が十分の大きければ、 $\omega^2 > 0$ で、この波数の波は振動するが、波数を小さく、波長を長くしてゆくと $k^2 = \frac{4\pi G \rho_0}{c_s^2} \equiv k_J^2$ のところで振動数が0とな

り、それを超えると $\omega^2 < 0$ すなわち $\omega = \pm i\alpha$ が純虚数（ α は正の実数）となり、 $\exp \mp \alpha t$ で単調に変化する。 $\omega = -i\alpha$ の波は単調に増大するので、揺らぎ $\delta \rho$ が初期にいくら小さくても、 $1/\alpha$ 程度の時間で増大し非常に大きな揺らぎを生ずることがわかる。重力によってこのような不安定性を生じる最短の波長をジーンズ波長と呼び、自己重力が重要になるスケールを与える。

$$\lambda_J \equiv \frac{2\pi}{k_J} = \frac{\pi c_s}{(G \rho_0)^{1/2}} \quad (3.16)$$

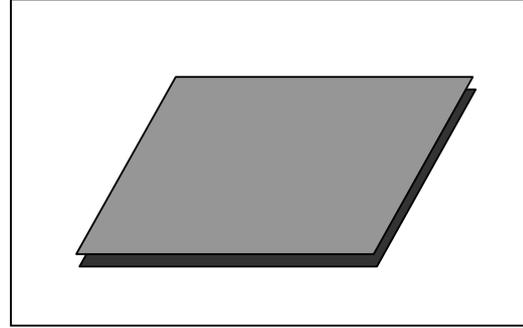
音波の解析で自己重力を無視しても良かったのは、 $\lambda \ll \lambda_J$ であったからである。このスケールは、星間分子雲内の代表的な値 $c_s = 200 \text{ m s}^{-1}$ 、 $\rho_0 = 2 \times 10^{-20} \text{ g cm}^{-3}$ を取ると、 $\lambda_J \approx 1.7 \times 10^{18} \text{ cm} = 0.56 \text{ pc}$ となる。さらに、自己重力が重要になるスケールとして、半径 $R = \lambda_J / 2$ の球内の質量

$$M_J = \frac{4\pi}{3} \rho_0 \left(\frac{\lambda_J}{2} \right)^3 = \frac{\pi}{6} \left(\frac{\pi}{G \rho_0} \right)^{3/2} c_s^3 \rho_0 \quad (3.17)$$

をジーンズ質量と呼び、これより大きな質量は自己重力の効果によって凝集することができると考えられる。このスケールは、先の $c_s = 200 \text{ m s}^{-1}$ 、 $\rho_0 = 2 \times 10^{-20} \text{ g cm}^{-3}$ で、 $M_J \approx 27 M_\odot$ となる。

(3 . 3) 薄板の重力不安定

天体の形成過程では円盤ができる場合が多いので、図のように薄い板に生じる重力不安定性は様々な場合重要になる。この場合は比較的簡単に分散関係が得られる。



Z 方向に積分した基礎方程式を用いる。密度は面密度 (単位面積あたりの質量) $\int_{-\infty}^{\infty} \rho dz = \sigma$ に置き換わる。連続の式(2.13)は

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla_{2D} \cdot \sigma \mathbf{v} = 0, \quad (3.18)$$

に、運動方程式(2.11)は

$$\sigma \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{2D}) \mathbf{v} \right] = -c_s^2 \nabla_{2D} \sigma - \sigma \nabla_{2D} \phi, \quad (3.19)$$

となる。ここで $\nabla_{2D} \equiv \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y}$ である。重力のポアソン方程式(2.21)は

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \sigma \delta(z) \quad (3.20)$$

となる。ここで $\delta(z)$ でディラックのデルタ関数である。一様で静止している板に微少な揺らぎが加わったとして、 $\sigma = \sigma_0 + \delta\sigma$ 、 $\mathbf{v} = \delta\mathbf{v}$ 、 $\phi = \phi_0 + \delta\phi$ とする。1次の微少量のみを残した式はそれぞれ、

$$\frac{\partial \delta\sigma}{\partial t} + \sigma_0 \frac{\partial \delta v_x}{\partial x} = 0, \quad (3.21)$$

$$\sigma_0 \frac{\partial \delta v_x}{\partial t} = -c_s^2 \frac{\partial \delta\sigma}{\partial x} - \sigma_0 \frac{\partial \delta\phi}{\partial x}, \quad (3.22)$$

となる。ここで、 x 方向に進む波を考えて空間微分を x のみにしている。

重力のポアソン方程式(3.20)で1次の微少量のみを残して $\partial/\partial y = 0$ とした式は

$$\frac{\partial^2 \delta\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta\phi}{\partial z^2} = 4\pi G \delta\sigma \delta(z) \quad (3.23)$$

であるが、板上に生じた密度の揺らぎは全空間にポテンシャルの揺らぎを作るので板の外と中で矛盾のない解を取る必要がある。板の外 $z \neq 0$ では(3.23)は

$$\frac{\partial^2 \delta\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.24)$$

一方、板を含む領域では、式(3.23)を $z = 0$ を挟んで $-\varepsilon$ から $+\varepsilon$ まで微小区間積分して

$$\frac{\partial \delta\phi}{\partial z} \Big|_{z=+\varepsilon} - \frac{\partial \delta\phi}{\partial z} \Big|_{z=-\varepsilon} = 4\pi G \delta\sigma \quad (3.25)$$

となる。

前の節で行ったように

$$\delta X(x, t) = \delta A \exp i(\omega t - kx) \quad (3.26)$$

のような x 方向に進む一つの波を考える。(3.24)は

$$\frac{\partial^2 \delta\phi}{\partial z^2} - k^2 \delta\phi = 0 \quad (3.27)$$

となるから $z \rightarrow \pm\infty$ で発散しない解を選ぶと

$$\delta\phi = \delta\phi(z=0) \exp(-k|z|) \quad (3.28)$$

となっている必要がある。これを(3.25)に代入すると、

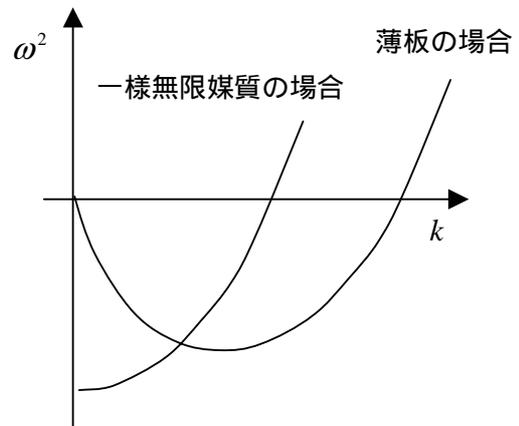
$$\delta\phi = -\frac{2\pi G\delta\sigma}{k} \exp(-k|z|) \quad (3.29)$$

となるが、これを(3.22)に代入して $\delta\phi$ を消去すると、(3.21)と(3.22)から分散関係が

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 2\pi G\sigma_0 k \quad (3.30)$$

のように得られる。分散関係は、波数 k が大きければ音波のそれと一致するが、波数 k を減らすと、 $k_J = \frac{2\pi G\sigma_0}{c_s^2}$ で $\omega = 0$ となり、さらにそれ以下の波数に対しては振動数が純虚数になる

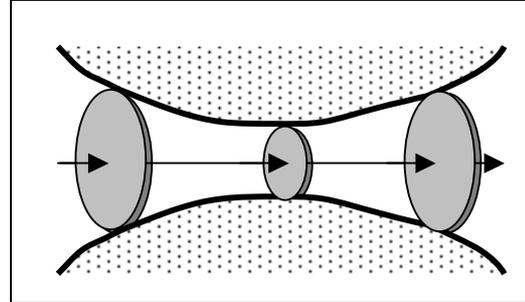
から、この薄板は、 $k < k_J$ の長い波長の揺らぎに対しては不安定になることがわかる。この性質はジーンズ不安定性と同じであるが、分散関係が異なっている。



[4] 超音速と亜音速の流れ

音速よりの速い（超音速）流れとそれより遅い（亜音速）流れはまったく異なった振る舞いを示すことが多い。

図のように断面積 $S(x)$ がゆっくりと変化する管（ラバール管）を考える。管の断面内では物理量は一定であり、 x のみに従って変化する1次元の流れと考える。流れが定常 $\partial/\partial t = 0$ だとすると、連続の式(2.13)は、



$$\rho v_x S = \text{const}, \quad (4.1)$$

となるが、

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{v_x} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad (4.2)$$

また、運動方程式(2.11)は

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{c_s^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (4.3)$$

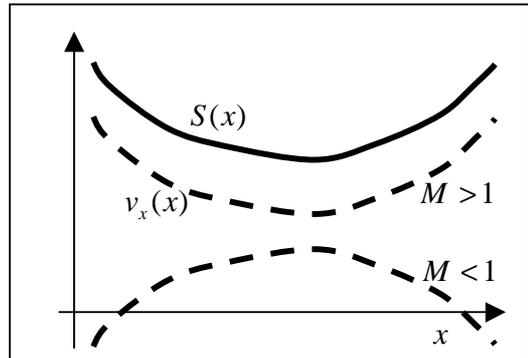
ここで断熱音速を c_s として $\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \frac{\partial \rho}{\partial x} = c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$ を使った。(4.2)と(4.3)を用いると、

$$\left(\frac{v_x^2}{c_s^2} - 1\right) \frac{1}{v_x} \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x}, \quad (4.4)$$

となる。ここで $M = v_x/c_s$ はマッハ数と呼ばれ、超音速 $M > 1$ 、亜音速 $M < 1$ を区別する。

超音速 $M > 1$ の場合、式(4.4)の係数は正であるから、速度は断面積が増加する部分 ($dS/dx > 0$) で増加する ($dv_x/dx > 0$) 事がわかる。

一方亜音速 $M < 1$ の場合、断面積が増加する部分 ($dS/dx > 0$) で、速度が減少する ($dv_x/dx < 0$) 事がわかる。



(4 . 1) 場所によって異なる力を受けて運動する定常流

場所によって異なる単位質量あたり $g(x)$ の力を受けて運動する場合の定常の流れを考える。流れの断面積は一定とする。連続の式は

$$\rho v_x = \text{const} \quad (4.5)$$

であり、ただちに、

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{v_x} \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad (4.6)$$

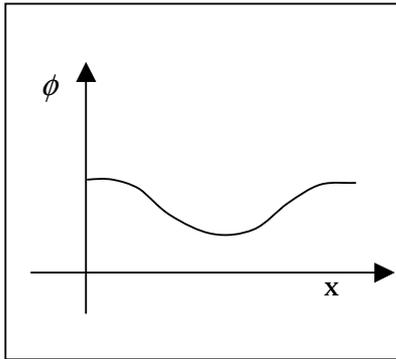
れる。一方、運動方程式(4.3)に相当する式は

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{c_s^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + g(x), \quad (4.7)$$

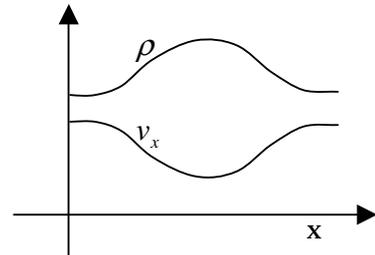
となる。同じように、(4.6)と(4.7)から

$$\left(\frac{v_x^2}{c_s^2} - 1 \right) \frac{1}{v_x} \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{g(x)}{c_s^2}, \quad (4.8)$$

が得られる。

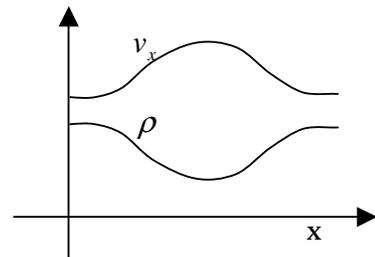


左のような力学ポテンシャルを考えると、亜音速の流れに対しては、左辺のかっこ内の値は負であるから、 $g(x) > 0$ であるポテンシャルの谷の左側では減速、 $g(x) < 0$ である谷の右側では加速されることが分かる。これは、(4.5)を考慮すると、ポテンシャルの谷の部分は流体の速度が遅く密度は高



くなり、山の部分では、速度が速くなり密度が低くなることが分かる（右上図）。釣り合って静止している流体はポテンシャルの谷に集まるのでその性質と類似していることが分かる。

超音速の流れに対しては左辺のかっこ内の値は正であるから、逆に、ポテンシャルの谷の部分は流体の速度が早く密度は低くなり、山の部分では、速度が遅くなり密度が高くなる（右下図）。粒子をこのような力学ポテンシャルの元で流せば、エネルギーの保存から、ポテンシャルの谷で速度が速くなるがその性質と類似している。



このように、亜音速と超音速では、ポテンシャルに対する反応がまったく反対になることは興味深い。

(4.1) 恒星風

恒星から高温の気体の流れ出す現象が恒星風であるが、これを加速するメカニズムとして、上に述べたラバール管と同じメカニズムが考えられる。球対称では $\text{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_r)$ であるから、

$$r^2 \rho v_r = \text{const.} \quad (4.9)$$

すなわち、

$$\frac{2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{1}{v_r} \frac{\partial v_r}{\partial r} = 0. \quad (4.10)$$

また、中心星の質量を M として、 $g = -\frac{GM}{r^2}$ であるから、

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{c_s^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{GM}{r^2}, \quad (4.11)$$

であるが、(4.10)を用いると、

$$(M^2 - 1) \frac{1}{v_r} \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{2}{r} - \frac{GM}{c_s^2} \frac{1}{r^2}, \quad (4.12)$$

ここで、 $M = v_r / c_s$ は流れのマッハ数である。これが式(4.4)と類似していることに注意しよう。右辺が > 0 であれば、 $dS/dx > 0$ すなわちラバール管の面積が広がっていることに対応し、右辺が < 0 であれば、 $dS/dx < 0$ すなわちラバール管の面積が狭まっていることに対応している。

(1) ガスが等温の場合

簡単のためにガスが等温であると仮定すると、 $2/r - (1/c_s^2)GM/r^2$ は右の図の様に变化するから、星の近くではラバール管の面積が狭まって、離れるとラバール管の面積が広がっているような流れが発生する。

右辺=0 となる半径 $r_c = GM/2c_s^2$ で規格化した半径 $x \equiv r/r_c$ を用いると式(4.12)は、

$$(M^2 - 1) \frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}, \quad (4.13)$$

となる。この式は

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{M^2}{2} - \log M - 2 \log x - \frac{2}{x} \right) = 0, \quad (4.14)$$

ゆえ、解は

$$M^2 - 2 \log M = 4 \log x + \frac{4}{x} + C \quad (4.15)$$

で与えられる。 x と M の関係 (解) を得るには次のように考えればよい。

$$f(M) = 2M^2 - 2 \log M, \quad g(x) = 4 \log x + \frac{4}{x} + C \quad (4.16)$$

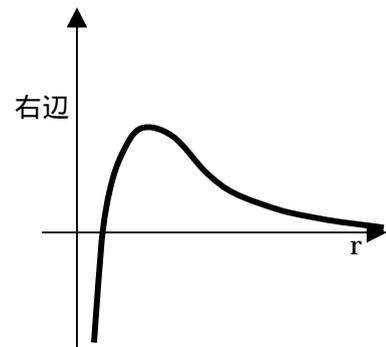
という2つの関数を考え、 $f(M)$ と $g(x)$ の値が重なる範囲はどうなっているかを考える。この(4.16)の二つの関数は下の図のような変化をするから、 $g(x)$ は $C = -3$ の時に $x = 1$ で最小値 1 を取る。下の図はそれぞれ

```
Plot[M^2 - 2 Log[M], {M, 0.1, 2}, PlotRange -> {0, 2},
 AspectRatio -> 1, AxesLabel -> {"M", "f(M)"}]
```

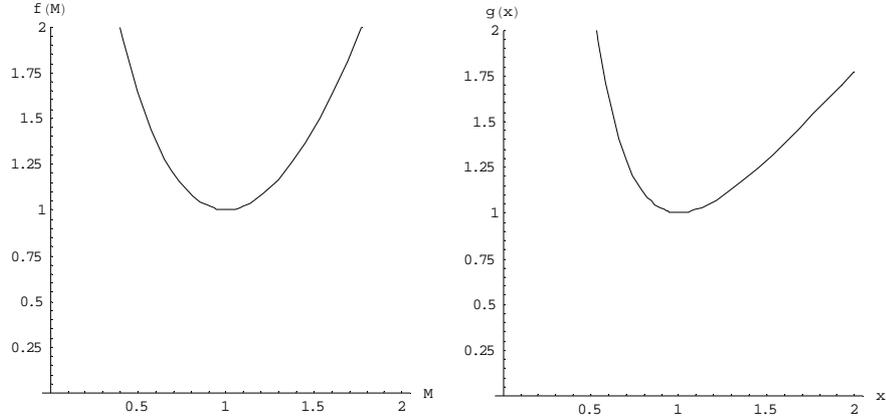
```
Plot[4 Log[x] + 4 / x - 3, {x, 0.1, 2}, PlotRange -> {0, 2}
 AspectRatio -> 1, AxesLabel -> {"x", "g(x)"}]
```

Mathematica で描いた $f(M)$ と $g(x)$ の変化の様子である。

(ア) $C = -3$ の場合



このときは、 $f(M)$ の全ての値に対して、 $f(M) = g(x)$ を満足する x の値が存在する。従って、 $M > 0$ の全ての値に対して、 $x > 0$ の値が対応することになる。

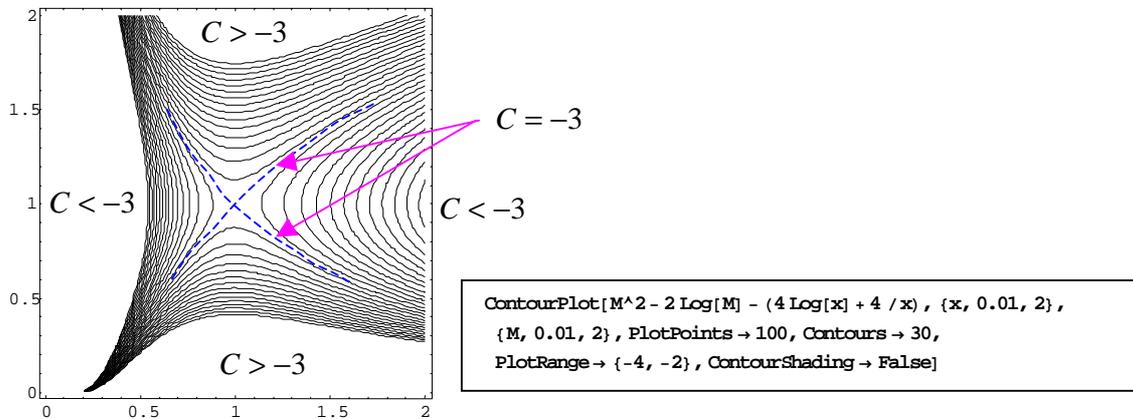


(イ) $C < -3$ の場合
このときは、 $g(x)$ が下にシフトするので、 $g(x) < 1$ の部分では対応する M の値を持たないことになる。

つまり、 $x < x_1$ と $x > x_2$ の領域に解が存在し、中間の $x_1 < x < x_2$ には解が存在しないことになる。

(ウ) $C > -3$ の場合

このときは、 $g(x)$ が上にシフトして最小値が $g(1) = 4 + C > 1$ となるので、 $1 \leq f(M) < 4 + C$ の部分では対応する x の値を持たないことになる。つまり、 $M < M_1$ と $M > M_2$ の領域に解が存在し、中間の $M_1 < M < M_2$ には解が存在しないことになる。



この図は、横軸 x 、縦軸 M に対して、式(4.15)をプロットしたもので、縦方向に走っている解は(イ)に、横方向に走っている解は(ウ)に対応している。(ア)に相当する解は、中心の x ポイントをちょうど通る解で点線で示してある。

(ア)の $C = -3$ の解の内、右上がりのものは、星の表面でゆっくりと外向きに流れだし、 $x = 1$ の半径で音速を超え、遠方で超音速に加速される流れで、恒星風を表す解となっている。 $C = -3$ の解の内、右下がりのものは、星の表面で超音速で流れ出した流れが次第に減速され遠方では亜音速で流れ出していると考えられることもできるが、それよりもむしろ、定常の方程式(4.12)は $v_r \rightarrow -v_r$ としても同様に成り立つから、内向きの流れと考えて、遠方では低速度で落下しつつあった流れが $x = 1$ の半径で音速を超え、星の近傍では超音速で落下しつつあると考えれば、これは重力による降着の解と見なすことができる。

(イ)の $C < -3$ の解は空間的にある領域にしか存在しない解になっている。

(ウ)の $C > -3$ の解は空間的には限定されていないが、加速されても音速に達することなく亜音速で減速する場合（下側の分枝）と、減速されても音速に達することなく超音速でふたたび加速される場合（上側の分枝）とで構成される。

個々までの資料は http://yso.mtk.nao.ac.jp/~tomisaka/lecture_notes.J.html に置かれている。