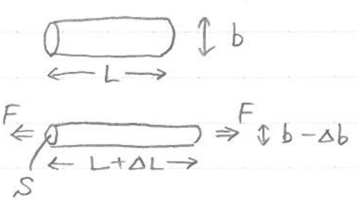
接触相互作用モデル

● Hooke の法則

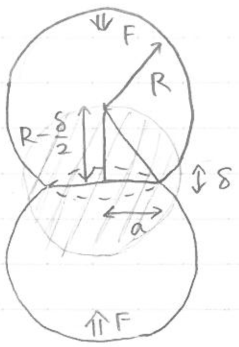


$\begin{cases} \text{ヤング率 } Y \ [\mathrm{dyn\ cm^{-2}}] \\ \text{ポアソン比 } \nu \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta L}{L} = \dfrac{F}{YS} \\ \nu = \dfrac{\Delta b / b}{\Delta L / L} \end{cases}$$

(詳しくは参考資料)

● Hertz 理論



$$\left(R - \frac{\delta}{2}\right)^2 + a^2 = R^2$$

$$R^2 - \delta R + \frac{\delta^2}{4} + a^2 = R^2$$

$$\delta \ll R$$

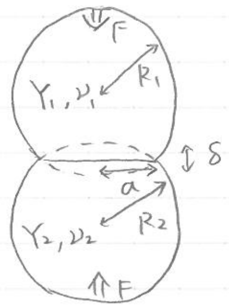
$$\delta = \frac{a^2}{R} \Leftrightarrow a = \sqrt{R\delta} \Leftrightarrow \frac{\delta}{a} = \frac{a}{R} \quad \cdots (1)$$

Hooke の法則を接触面付近の $V \sim a^3$ に適用

$$L \sim a, \quad S \sim a^2$$

$$\frac{\delta}{a} \sim \frac{F}{Ya^2} \quad \cdots (2)$$

(1), (2) より
$$F \sim \frac{Ya^3}{R} \sim Y R^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{3}{2}} \leftarrow \text{非線形バネ}$$

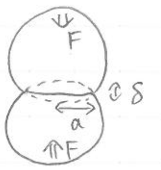


$$\begin{cases} a = \sqrt{R\delta} \\ F = \dfrac{4Y_*}{3R} a^3 = \dfrac{4Y_* R^{\frac{1}{2}}}{3} \delta^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \\ Y_* = \left[\dfrac{(1-\nu_1)^2}{Y_1} + \dfrac{(1-\nu_2)^2}{Y_2} \right]^{-1} \end{cases}$$

変形による弾性エネルギー
$$u_E = \int F d\delta = \int \frac{4Y_* R^{\frac{1}{2}}}{3} \delta^{\frac{3}{2}} d\delta = \frac{8Y_* R^{\frac{1}{2}}}{15} \delta^{\frac{5}{2}} = \frac{8Y_*}{15R^2} a^5$$

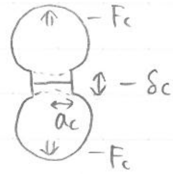
● JKR理論



単位表面積あたりのエネルギー γ [erg cm^{-2}]
左のとき $2\pi a^2$ 失われている
接触面での束縛エネルギー

$$U_s = -2\gamma\pi a^2$$

表面吸着力(引力) = 弾性力(斥力) のとき
外力 = 0 の平衡解がある (a_0, δ_0)



$F<0$ (引っぱり) の平衡解もあるが
$-F$ が大きすぎると pull-off する (a_c, $-\delta_c$, $-F_c$)

$a^2 \sim R\delta$ とすると $U_s \sim -2\pi\gamma R\delta$
表面吸着力 $-F_s$ は $F_s \equiv \dfrac{dU_s}{d\delta} \sim -2\pi\gamma R$

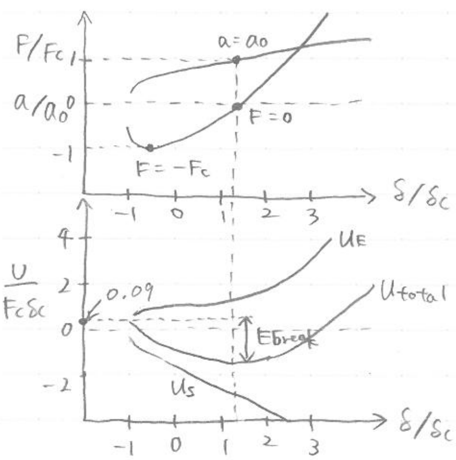
$$\therefore\ F_c \sim 2\pi\gamma R$$

外力 $F=0$ のとき

$$F_s + F_E = 0$$
$$-2\pi\gamma R + Ya_0^3/R = 0$$
$$\therefore\ a_0 \sim \left(\frac{2\pi\gamma R^2}{Y}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \delta_0 \sim \frac{a_0^2}{R}$$

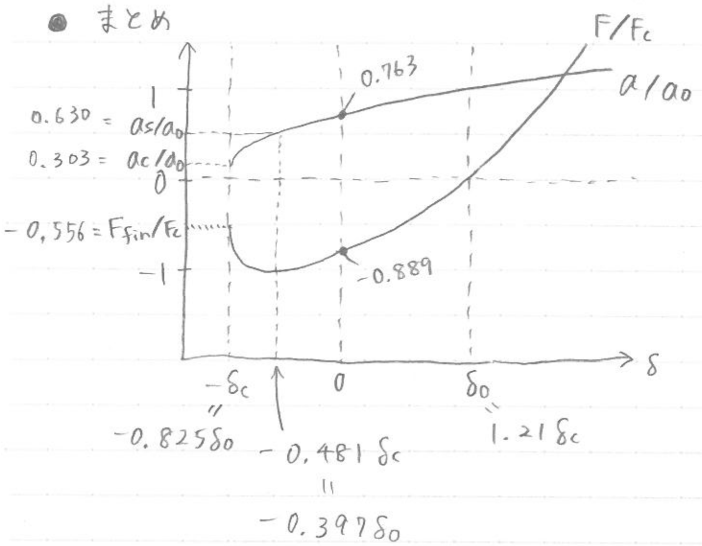
このときの束縛エネルギー

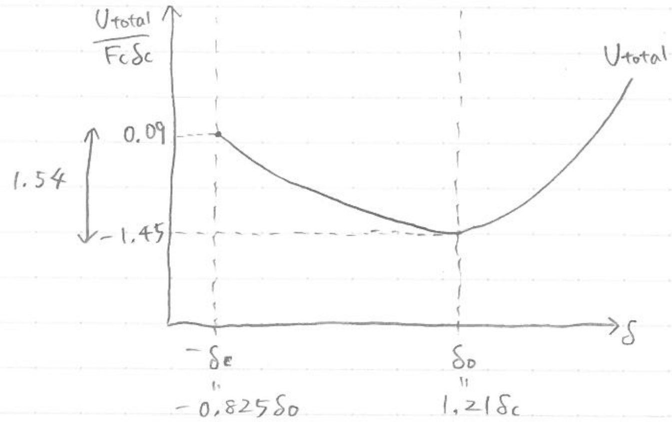
$$E_{break} \sim 2\pi\gamma a_0^2 \sim F_c\delta_0 \sim \frac{(2\pi\gamma)^{\frac{5}{3}} R^{\frac{4}{3}}}{Y^{\frac{2}{3}}}$$



$$a_0 = \left(\frac{9\pi\gamma R^2}{Y_*}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$F_c = 3\pi\gamma R$$
$$\delta_c = \frac{1}{2}\frac{a_0^2}{6^{\frac{1}{3}}R}$$
$$\delta_0 = \frac{a_0^2}{3R}$$
$$E_{break} = 1.54\,F_c\delta_c$$

● まとめ





⇓ 接触

$\delta = 0$

その瞬間 $a = 0.763 a_0$ の接触面形成

$(F = -0.889 F_c)$

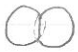
⇓

衝突前の運動エネルギー $> 0.09 F_c \delta_c$
→ はね返る

衝突前の運動エネルギー $< 0.09 F_c \delta_c$
→ δ_0 を中心に振動

$E_{stick} = 0.09\ F_c \delta_c$

※ エネルギー散逸(音波)を考えると
$E_{stick} = 0.4\ F_c \delta_c$



$\begin{cases} F = 0,\ a = a_0,\ \delta = \delta_0 \\ U_{total} = -1.45\ F_c \delta_c \end{cases}$

⇓ ひきはがす

$\begin{cases} F = -F_c,\ a = 0.630 a_0 \\ \delta = -0.481 \delta_c \end{cases}$

⇓ まだのびる

切れる瞬間

$\begin{cases} F = -0.556 F_c,\ a = 0.303 a_0 \\ \delta = -\delta_c,\ U_{total} = 0.09 F_c \delta_c \end{cases}$

$E_{break} = 1.54\ F_c \delta_c$

※ エネルギー散逸(音波)を考えると
$E_{break} = 1.8\ F_c \delta_c$