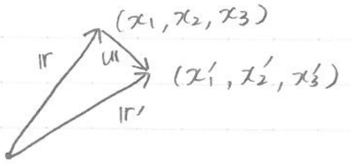
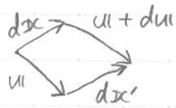
§1. 歪みテンソル



$u_i = x_i' - x_i$ 変位ベクトル (1.1)

$$\begin{cases} x_i' \text{ は } x_i \text{ の関数なので} \\ u_i \text{ も } x_i \text{ の関数} \end{cases}$$

2つの近い点を考える.



$$dx_i' = dx_i + du_i$$

距離
$$\begin{cases} dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} \\ dl' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} dl^2 = dx_i^2 \\ dl'^2 = dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2 \end{cases}$$

$du_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$ を代入

$$dl'^2 = dl^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l$$

ここで

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k = \dfrac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_i dx_k \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l = \dfrac{\partial u_l}{\partial x_k}\dfrac{\partial u_l}{\partial x_i} dx_k dx_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} dl' = dl^2 + 2u_{ik} dx_i dx_k & (1.2) \\ u_{ik} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial u_k}{\partial x_i} + \dfrac{\partial u_l}{\partial x_i}\dfrac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) & (1.3) \end{cases}$$

歪みテンソル

$u_{ik} = u_{ki}$ 対角化可能 (1.4)

つまり
$$\begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = u^{(1)} u^{(2)} u^{(3)}$$

の座標系を選ぶことができる

ある点で対角化可能 $\not\Leftrightarrow$ 他の点でも対角化可能

ある点で歪みテンソルが対角化可能のとき

(1,2)より

$$\begin{aligned} dl'^2 &= (\delta_{ik} + 2u_{ik}) dx_i dx_k \\ &= (1 + 2u^{(1)}) dx_1^2 \\ &\quad + (1 + 2u^{(2)}) dx_2^2 \\ &\quad + (1 + 2u^{(3)}) dx_3^2 \end{aligned}$$

歪みは3つの直交成分に分けられる.

例) $dx_1' = \sqrt{1 + 2u^{(1)}}\, dx_1$

$$\frac{dx_i' - dx_i}{dx_i} = \sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1$$

歪みが十分小さい → u_i も小さい

→ (1,3)の第3項は無視できる.

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \quad (1.5)$$

$$\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1 \approx u^{(i)}$$

微小体積の変形 $dV \to dV'$

$$dx_i' = (1 + u^{(i)}) dx_i$$

$$\begin{cases} dV = dx_1 dx_2 dx_3 \\ dV' = dx_1' dx_2' dx_3' \end{cases}$$

$$\begin{aligned} dV' &= dV (1 + u^{(1)})(1 + u^{(2)})(1 + u^{(3)}) \\ &= dV (1 + \underbrace{u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}}_{\text{不変}}) \end{aligned}$$

$$\| \quad u_{ii} = u_{11} + u_{22} + u_{33}$$

$$\begin{cases} dV' = dV (1 + u_{ii}) & (1.6) \\ u_{ii} = \dfrac{dV' - dV}{dV} \end{cases}$$

球座標 (r, θ, ϕ)

$$
\left.
\begin{aligned}
u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
u_{\theta\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\
u_{\phi\phi} &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\theta}{r}\cot\theta + \frac{u_r}{r} \\
2u_{\theta\phi} &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - u_\phi \cot\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \\
2u_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\
2u_{\phi r} &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r}
\end{aligned}
\right\} \quad (1.7)
$$

円柱座標 (r, ϕ, z)

$$
\left.
\begin{aligned}
u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
u_{\phi\phi} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} \\
u_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
2u_{\phi z} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial z} \\
2u_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\
2u_{r\phi} &= \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \phi}
\end{aligned}
\right\} \quad (1.8)
$$

$$\left(\cot x = \frac{1}{\tan x}\right)$$

§2 応力テンソル

変形が起きたときに元に戻ろうとする力
　= 内部応力

ある部分の全ての力　$\int \mathbb{F}\, dV$

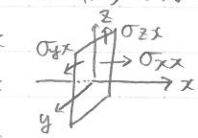
内部は作用反作用でキャンセル
表面にはたらく力のみになる
$\mathbb{F}$がスカラーなら表面積分可能

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \qquad (2.1)$$

$$\int F_i\, dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}\, dV = \oint \underbrace{\sigma_{ik}}_{\text{応力テンソル}}\, df_k \qquad (2.2)$$

$\sigma_{ik}\, df_k$ は $d\mathbb{f}$ にはたらく力の i 成分
σ_{ik} は x_k 軸に垂直な面にはたらく力の i 成分

例) x軸に垂直な面にはたらく力
- x軸方向　σ_{xx}
- y軸 〃　σ_{yx}
- z軸 〃　σ_{zx}



内部応力による力　$-\oint \sigma_{ik}\, df_k$

モーメント　$F_i x_k - F_k x_i$
(x_i は力がはたらく点)

全体のモーメント　$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i)\, dV$

$$M_{ik} = \int \left(\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} x_i \right) dV$$

$$= \int \frac{\partial(\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)}{\partial x_l}\, dV - \int \left(\sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} \right) dV$$

ここで $\frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \delta_{kl}$, $\sigma_{il}\delta_{kl} = \sigma_{ik}$ などより

$$M_{ik} = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)\, df_l + \int (\sigma_{ki} - \sigma_{ik})\, dV$$

M_{ik}が表面積分のみであるためには

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \qquad (2.3)$$

つまり応力テンソルは対称

$$\left.\begin{aligned} M_{ik} &= \int (F_i x_k - F_k x_i)\, dV \\ &= \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)\, df_l \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

全ての面から一様圧縮しているとき
圧力 P なら力は $-p\, df_i$

$$-p\, df_i = -p\, \delta_{ik}\, df_k = \sigma_{ik}\, df_k$$

$$\therefore \quad \sigma_{ik} = -p\, \delta_{ik} \qquad (2.5)$$

一般的には非対角要素はノンゼロ
→ 接線応力がはたらく
→ 表面要素をうごかす

平衡状態　$F_i = 0$

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \qquad (2.6)$$

重力場　$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0 \qquad (2.7)$

単位表面あたりの外力を $\mathbb{P}$ とすると
df には $\mathbb{P}\, df$ の力がはたらく
平衡状態では　$P_i\, df - \sigma_{ik}\, df_k = 0$
$df_k = n_k\, df$
とすると

$$\sigma_{ik} n_k = P_i \qquad (2.8)$$

が平衡状態での表面の条件

応力テンソルの平均値を導出
(2.6) に x_k をかけて積分

$$\int \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k\, dV = \int \frac{\partial (\sigma_{il} x_k)}{\partial x_l}\, dV - \int \sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l}\, dV$$

$$= 0$$

$$\therefore \quad \oint \sigma_{il} x_k\, df_l - \int \sigma_{ik}\, dV = 0$$

(2.8) を代入

$$\oint P_i x_k\, df = \int \sigma_{ik}\, dV = V \underbrace{\bar{\sigma}_{ik}}_{\text{平均}}$$

$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ より

$$\bar{\sigma}_{ik} = \frac{1}{2V} \oint (P_i x_k + P_k x_i)\, df \qquad (2.9)$$

§3 変形の熱力学

変形したものを考える.

$u_i \downarrow \quad \searrow u_i + \delta u_i$

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$$

$$\int \delta R \, dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i \, dV$$

δR は単位体積あたりの内部応力の仕事

$$\int \delta R \, dV = \oint \sigma_{ik} \delta u_i \, df_k - \int \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dV$$

無限遠で変位ゼロ → 第一項ゼロ

$$\int \delta R \, dV = -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \right) dV$$

$$= -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dV$$

$$= -\int \sigma_{ik} \, \delta u_{ik} \, dV$$

$$\therefore \quad \delta R = - \underbrace{\sigma_{ik}}_{\text{応力テンソル}} \delta \underbrace{u_{ik}}_{\text{歪みテンソル}} \qquad (3.1)$$

{ 弾性体を考える
{ 全ての瞬間で熱力学平衡の成立を仮定

{ エントロピー S、内部エネルギー $\mathcal{E}$
{ （単位体積あたり）

$$d\mathcal{E} = \underbrace{T dS}_{\text{得た熱}} \underbrace{- dR}_{\text{仕事}}$$

$$d\mathcal{E} = T dS + \sigma_{ik} du_{ik} \qquad (3.2)$$

(2.5) より 静水圧圧縮 : $\sigma_{ik} = -p \delta_{ik}$

$$\sigma_{ik} du_{ik} = -p \delta_{ik} du_{ik} = -p \, du_{ii}$$

du_{ii} は (1.6) より dV

$$\therefore \quad d\mathcal{E} = T dS - p dV$$

自由エネルギー $F = \mathcal{E} - TS$

$$dF = -S dT + \sigma_{ik} du_{ik} \qquad (3.3)$$

熱力学ポテンシャル Φ :

$$\Phi = \mathcal{E} - TS - \sigma_{ik} u_{ik} = F - \sigma_{ik} u_{ik} \qquad (3.4)$$

$$(\Phi = \mathcal{E} - TS + pV)$$

(3.3) (3.4) より $d\Phi = -S dT - u_{ik} d\sigma_{ik}$ (3.5)

独立変数 $\begin{cases} (3.2) \rightarrow S,\ u_{ik} \\ (3.3) \rightarrow T,\ u_{ik} \end{cases}$

$$\therefore \quad \sigma_{ik} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_{ik}} \right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \right)_T \qquad (3.6)$$

同様に (3.5) より

$$u_{ik} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ik}} \right)_T \qquad (3.7)$$

§4 フックの法則

自由エネルギ F を歪みテンソル u_{ik} で表したい

$u_{ik}=0$ のとき 内部応力ゼロ ∴ $\sigma_{ik}=0$

$\sigma_{ik}=\partial F/\partial u_{ik}$ → 線形項はない

F はスカラー → $u_{ii}{}^2$ と $u_{ik}{}^2$

2次まででだと

$$F = F_0 + \frac{1}{2}\lambda u_{ii}{}^2 + \mu u_{ik}{}^2 \quad (4.1)$$

λ, μ : ラメ定数.

変形による体積変化は u_{ii} の合計

$\begin{cases} u_{ii}=0 \rightarrow \text{形のみ変化: pure shear} \\ \text{形不変 体積変化: 静水圧 圧縮} \end{cases}$

→ 全ての変形はこの和で表される

$$u_{ik} = \underbrace{\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right)}_{\text{pure shear}} + \underbrace{\frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}}_{\text{static comp.}} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} F = \mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right)^2 + \frac{1}{2}K u_{ll}{}^2 & (4.3) \\ K = \lambda + \frac{2}{3}\mu & (4.4) \end{cases}$$

K : 体積弾性率, μ : 剛性率

熱力学平衡 → F min $(u_{ik}=0)$ → $\mu>0$

第一項ゼロのとき → $K>0$

$$\therefore \quad K>0, \quad \mu>0 \quad (4.5)$$

T 一定のとき

$$dF = K u_{ll}du_{ll} + 2\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right) \times d\left(u_{ik} - \frac{1}{3}u_{ll}\underbrace{\delta_{ik}}_{\text{ゼロ}}\right)$$

$$= K u_{ll}du_{ll} + 2\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right)du_{ik}$$

ここで $du_{ll} = \delta_{ik}du_{ik}$

$$dF = \left[K u_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right)\right] \times du_{ik}$$

$\sigma_{ik}=\partial F/\partial u_{ik}$ より

$$\sigma_{ik} = K u_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right)$$

応力テンソルを歪みテンソルで表現 (4.6)

$\sigma_{ii} = 3Ku_{ii}$ (第2項きえる)

$$u_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{3K} \quad (4.7)$$

$$u_{ik} = \frac{\delta_{ik}\sigma_{ll}}{9K} + \frac{\sigma_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll}}{2\mu} \quad (4.8)$$

$(\delta_{ii}=3)$

$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$ と (4.7) より

$$u_{ii} = -\frac{p}{K} \quad (4.9)$$

$$\frac{u_{ii}}{p} = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{1}{K}$$

$$\therefore \quad \underbrace{\frac{1}{K}}_{\text{圧縮率}} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

(4.8) → 歪みテンソル u_{ik} と応力テンソル σ_{ik} は線形

→ 変形は力に比例 → フックの法則

オイラーの定理 $u_{ik}\dfrac{\partial F}{\partial u_{ik}} = 2F$

$\partial F/\partial u_{ik} = \sigma_{ik}$ より

$$F = \frac{1}{2}\sigma_{ik}u_{ik} \quad (4.10)$$

u_{ik} が σ_{ik} に線形 → F は $\sigma_{ik}{}^2$ に比例

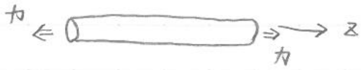
→ $\sigma_{ik}\,\partial F/\partial\sigma_{ik} = 2F$

$$\rightarrow \quad u_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} \quad (4.11)$$

フックの法則 → $u_{ik} = \dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}}, \quad \sigma_{ik} = \dfrac{\partial F}{\partial u_{ik}}$

§5 一様変形

歪みテンソルが一定とする (u_{ik})



単位面積あたりの力 : P

u_{ik} 一定 → σ_{ik} 一定 → (2.8) $\sigma_{ik} n_k = P_i$ (外力)

棒の横側では外力ゼロ : $\sigma_{ik} n_k = 0$

↳ $n_z = 0$ → σ_{zz} 以外 $\sigma_{ik} = 0$

$\sigma_{zi} n_i = P$ or $\sigma_{zz} = P$

(4.8) より u_{ik} $(i \neq k) = 0$ なので

$$u_{xx} = u_{yy} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K}\right)P \quad \text{縮み or 伸び}$$

$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad u_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \qquad (5.1)$$

$$u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu}\right)P \quad \text{伸び}$$

u_{zz} は相対的な伸びを表す

$\to u_z$ ⇓ $\to u_z'$

$$u_{zz} = \frac{P}{E} \qquad (5.2)$$

$$E = \frac{9K\mu}{3K+\mu} \qquad (5.3)$$

ヤング率

u_{xx}, u_{yy} は横向きの相対的な縮み/伸び (負 / 正)

$$u_{xx} = u_{yy} = -\sigma u_{zz} \qquad (5.4)$$

u_x ⇒ u_x'

$$\sigma = \frac{1}{2}\,\frac{3K - 2\mu}{3K + \mu} \qquad (5.5)$$

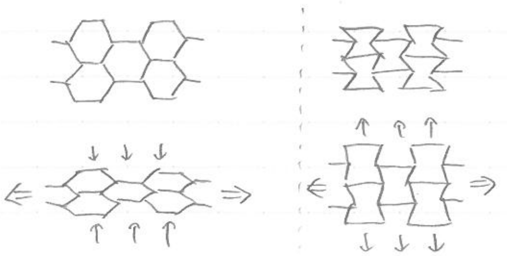
ポアソン比

ポアソン比 : 縦の伸びに対する横の縮みの比 (伸びなら $\sigma < 0$)

$K, \mu > 0$ より

$$-1 \leq \sigma \leq \frac{1}{2} \qquad (5.6)$$

- $\sigma > 0$ … 縦に伸びると横は縮む
- $\sigma = 0$ … 横は変化しない
- $\sigma < 0$ … 横も伸びる (ごく稀)



体積の相対的な増加は

$$u_{ii} = \frac{P}{3K} \qquad (5.7)$$

自由エネルギーは (4.10) より $\sigma_{zz} \neq 0$ (他はゼロ) なので $F = \frac{1}{2}\sigma_{zz}u_{zz}$

$$F = \frac{P^2}{2E} \qquad (5.8)$$

(5.3)(5.5) より

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\sigma)} \qquad (5.9)$$

(4.3) より

$$\begin{aligned}
F &= \mu\left(u_{ik}^2 - \frac{2}{3}\delta_{ik}u_{ik}u_{ll} + \frac{1}{9}\delta_{ik}^2 u_{ll}^2\right) + \frac{1}{2}Ku_{ll}^2 \\
&= \mu\left(u_{ik}^2 - \frac{1}{3}u_{ll}^2\right) + \frac{1}{2}Ku_{ll}^2 \\
&= \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(u_{ik}^2 - \frac{u_{ll}^2}{3}\right) + \frac{E\,u_{ll}^2}{6(1-2\sigma)} \\
&= \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(u_{ik}^2 - \frac{u_{ll}^2}{3} + \frac{(1+\sigma)}{3(1-2\sigma)}u_{ll}^2\right) \\
&= \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(u_{ik}^2 + \frac{\sigma}{1-2\sigma}u_{ll}^2\right) \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = \frac{E}{1+\sigma}\left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}u_{ll}\delta_{ik}\right) \qquad (5.11)$$

(4.8) より

$$u_{ik} = \frac{(1+\sigma)\sigma_{ik} - \sigma\sigma_{ll}\delta_{ik}}{E} \qquad (5.12)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\left[(1-\sigma)u_{xx} + \sigma(u_{yy} + u_{zz})\right]$$

yy … yy … xx … zz

zz … zz … xx … yy (5.13)

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\sigma}u_{xy}$$

xz … xz

yz … yz

$$u_{xx} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \sigma(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right]$$

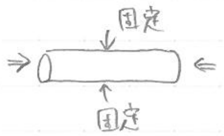
$yy \quad yy \quad xx \quad zz$

$zz \quad zz \quad xx \quad yy$ $\qquad (5.14)$

$$u_{xy} = \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{xy}$$

$xz \quad xz$

$yz \quad yz$



unilateral compression

u_{zz} 以外ゼロ

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} u_{zz}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} u_{zz}$$

ここで $\sigma_{zz} = p \quad (p < 0$ for comp.$)$

$$u_{zz} = \frac{p(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)} \qquad (5.15)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{p\sigma}{1-\sigma} \qquad (5.16)$$

$$F = \frac{1}{2}\sigma_{zz}u_{zz} = \frac{p^2(1+\sigma)(1-2\sigma)}{2E(1-\sigma)} \qquad (5.17)$$