2017. 7. 2.

## Jeans Criteria

均質で isothermal な球状の cloud が重力崩壊を起こすときの条件。

密度、圧力、重力ポテンシャルの摂動を考える

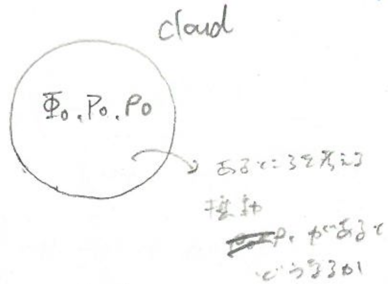
$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad — ①$$

$$P = P_0 + P_1 \quad — ②$$

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \quad — ③$$

(①–③: スカラー)

$$v = v_1 \quad — ④ \quad \text{- ベクトル}$$




$\rho$ は密度、$P$ は圧力、$\Phi$ は重力ポテンシャル、$v$ は速度

添字 0 は定常状態、1 は(わずかな)摂動 ($x_0 \gg x_1$)

連続の式.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho v) = 0 \quad — ⑤$$

運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + v\nabla v = -\nabla P - \rho\nabla\Phi \quad — ⑥$$

摂動があるとき、どうなるかを考える. ①–④を⑤, ⑥にだいにゅう

⑤, ⑥の方程式の radial 方向のみを考えて、

$$⑤: \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0+\rho_1) + \nabla(\rho_0+\rho_1)v_1 = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho_1 + \rho_0\nabla v_1 = 0 \quad ⑤'$$

( $\rho_1 \cdot v_1$ … 微小なのでむし (2次以上はむし)
$\frac{\partial}{\partial t}\rho_0 = 0$ ($\rho_0 = \text{const}$) )

⑥ $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0+\rho_1)v_1 + v_1\nabla v_1 = -\nabla(P_0+P_1) - (\rho_0+\rho_1)\nabla(\Phi_0+\Phi_1)$$

$$\rho_0\frac{\partial}{\partial t}v_1 = -\nabla P_1 - \rho_0\nabla\Phi_1$$

( 振動なしで $\frac{\partial(\rho_0 v_0)}{\partial t} + v_0\nabla v_0 = -\nabla P_0 - \rho_0\nabla\Phi_0$

$\rightarrow -\rho_0\nabla\Phi_0 = 0$

$\nabla\Phi_0 = 0$ )

振動は断熱的に起こるとする.

$$C_s = \left(\frac{\gamma P_0}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad P = K\rho^\gamma$$

sound speed

$$K = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} = \frac{(P_0+P_1)}{(\rho_0+\rho_1)^\gamma} \simeq (P_0+P_1)\cdot\frac{1}{\rho_0^\gamma}\left(1-\gamma\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)$$

$$= \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} + \frac{P_1}{\rho_0^\gamma} - \gamma\frac{P_0\rho_1}{\rho_0^{\gamma+1}}$$

$$\therefore \quad P_1 = \gamma P_0\cdot\frac{\rho_1}{\rho_0}$$

$$= C_s^2\rho_1$$

$$\therefore \quad \rho_0\frac{\partial v_1}{\partial t} = -C_s^2\nabla\rho_1 - \rho_0\nabla\Phi_1 \quad -⑥'$$

ポアソン方程式

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \quad -⑦$$

$$\Delta(\Phi_0+\Phi_1) = 4\pi G(\rho_0+\rho_1)$$

$$\Delta\Phi_0 = 4\pi G\rho_0$$

$$\therefore \quad \Delta\Phi_1 = 4\pi G\rho_1 \quad -⑦'$$

$\rho_1$だけの方程式にする。

⑤′の時間微分

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\{\rho_0 \nabla v_1\}$$

$$= c_s^2 \Delta \rho_1 + \rho_0 \Delta \Phi_1 \quad (\because \nabla \times ⑥')$$

$$= c_s^2 \Delta \rho_1 + 4\pi G \rho_0 \rho_1$$

$\rho_1 \propto e^{i(\omega t + |k||r|)}$ として、

$$\omega^2 \rho_1 = c_s^2 k^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \rho_1$$

$$\therefore \omega^2 = k^2 c_s^2 - 4\pi G \rho_0$$

$\omega^2 > 0$ なら、$\rho_1$は振動する（振動は成長しない）

$\omega^2 < 0$ なら、$\rho_1$は exponential で成長する

→ 重力崩壊

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 - 4\pi G \rho_0 < 0$$

$$k < \sqrt{\frac{4\pi G \rho_0}{c_s^2}} \equiv k_J = \frac{2\pi}{\lambda_J}$$

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\pi c_s^2}{G \rho_0}}$$

密度が大きいほど
$\lambda_J$は短い

Jeans wave length

ジーンズ波長より大きな波長のゆらぎだと、自己重力が勝り、重力崩壊が起こる。

ジーンズ波長のゆらぎに含まれる質量

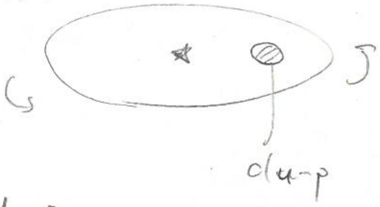
$$M_J \equiv \frac{4}{3}\pi \lambda_J^3 \cdot \rho_0 = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\pi c_s}{G \rho_0}\right)^{\frac{3}{2}} \rho_0$$

Jeans Mass

## Toomre's Q parameter

scale $\Delta r$ の clump を考える (disk内で)

重力収縮、熱運動による拡散、shear のどれが効くか。




$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \quad \text{free fall}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{dt}v = \frac{dr}{dt}\cdot\frac{dv}{dr} = v\frac{dv}{dr} = \frac{1}{2}\frac{d}{dr}v^2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dr}v^2 = -\frac{GM}{r^2}$$

$$v^2 = \frac{2GM}{r} + C$$

ざっくり $\quad v \sim \sqrt{\frac{GM}{\Delta r}}$ 落ちる速さ

よって、

$$t_{ff} \sim \frac{\Delta r}{v} = \sqrt{\frac{\Delta r^3}{GM}} \sim \sqrt{\frac{\Delta r}{\pi G \Sigma}}$$

(今、diskを考えてるので、$M \sim \pi(\Delta r)^2 \Sigma$)

音速がclumpの内から外を伝わる時間は

$$t_p \sim \frac{\Delta r}{c_s}$$

shear が clump を azimuthal 方向に引きさく時間は、

$$t_{shear} = \frac{1}{r}\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)^{-1} \sim \Omega^{-1}$$

重力で収縮するには

$t_{ff} < t_p$ かつ $t_{ff} < t_{shear}$

よって、

$$A_H^2 < t_p \, t_{shear}$$

$$\frac{\Delta r}{\pi G \Sigma} < \frac{\Delta r}{c_s} \cdot \frac{1}{\Omega}$$

$$\pi G \Sigma \gtrsim c_s \Omega$$

$$Q \equiv \frac{c_s \Omega}{\pi G \Sigma}$$

$Q \lesssim 1$ なら 重力不安定、

$> 1$ で 安定