3.4 Angular momentum transport mechanisms

- 3.3.2 で Shakura - Sunyaev α を導入した.
  - $\nu = \alpha c_s h$: turbulent viscosity.
- 乱流の起源は? αはどれくらい大きくて、diskの物理状態にどう依存するか?
- ここでは、重要な円盤物理を考える.

3.4.1 The Rayleigh criterion

回転の安定性

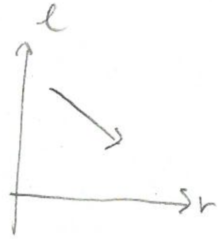
non-magnetized, non-self-gravitating disk に対して、

($M_{disk}/M_* < h/r$)

その回転の安定性は、Rayleigh criterion で与えられる.

- 微小な振動 $e^{i\omega t}$ を考える. 導出はまた今度.

$$\frac{d\ell}{dr} = \frac{d}{dr}(r^2\Omega) < 0 \qquad (3.57)$$



不安定条件

diskの内側ほど、角運動量が大きい

(=) Keplerian rotation : $\ell \propto \sqrt{r}$

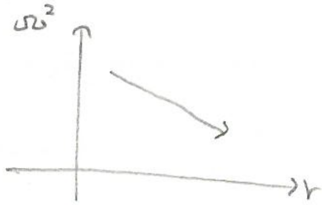
つまり安定

3.4.2 The magnetorotational instability (MRI)

- 磁場と gas の coupling → disk を不安定にする.

- weakly magnetized disk flow が線形的に不安定になる条件

$$\frac{d}{dr}(\Omega^2) < 0 \quad (3.58)$$



これは. Keplerian disks でも満たされる. $(\Omega_k^2 \propto r^{-3})$

- 磁場と couple した disk の線形不安定性

→ magnetorotational instability (MRI)

/ Balbus - Hawley instability

以下、この MRI について考えていく.

ideal magnetohydrodynamics (MHD)

3つの式

equations of continuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \quad (3.59)$$

eq. of momentum conservation

magnetic tension

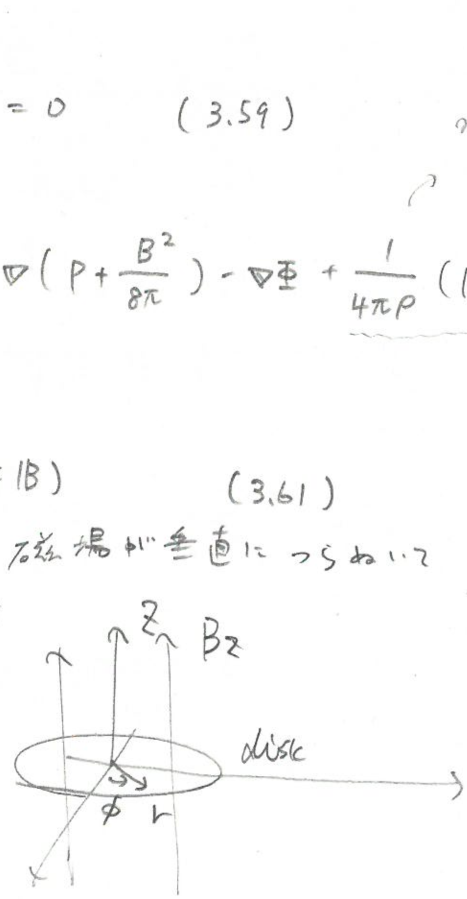
$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla\left(P + \frac{B^2}{8\pi}\right) - \nabla\Phi + \frac{1}{4\pi\rho}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} \quad (3.60)$$

eq. of magnetic induction

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla\times(\boldsymbol{v}\times\mathbf{B}) \quad (3.61)$$

軸対称、非圧縮な disk を、磁場が垂直につらぬいている状態で考える. ↳ ρ = const

円筒座標系



eq. of motion

$$r:\quad \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{d\Phi}{dr} + f_r \qquad (3.62)$$

$$\phi:\quad r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = f_\phi \qquad (3.63)$$

$\frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x}$

$\nabla u = 0$ (非圧縮)

$P = \mathrm{const}$?

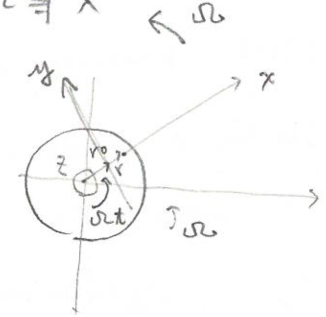
f: 磁場による力

at r_0 の微小な領域に注目

diskと共に回転する Cartesian coordinate を導入

$$r = r_0 + x \qquad (3.64)$$

$$\phi = \Omega t + \frac{y}{r_0} \qquad (3.65)$$



$(x, y \ll r_0)$

$$\dot{r} = \dot{x}, \quad \ddot{r} = \ddot{x},$$

$$\dot{\phi} = \Omega + \frac{\dot{y}}{r_0}, \quad \ddot{\phi} = \frac{\ddot{y}}{r_0} \qquad (\Omega\text{は時間依存しないと仮定})$$

2次以上の項をむしして

(3.62)

$$\rightarrow \quad \ddot{x} - (r_0 + x)\left(\Omega + \frac{\dot{y}}{r_0}\right)^2 = -\frac{d\Phi}{dr} + f_r$$

?

$$\ddot{x} - r_0\Omega^2 - 2\Omega\dot{y} - x\Omega^2 = -\frac{d\Phi}{dr} + f_r$$

$$\vdots$$

$$\ddot{x} - 2\Omega\dot{y} = -x\frac{d\Omega^2}{d\ln r} + f_x$$

(3.63)

$$\rightarrow \quad (r_0 + x)\cdot\frac{\ddot{y}}{r_0} + 2\dot{x}\left(\Omega + \frac{\dot{y}}{r_0}\right) = f_\phi$$

$$\ddot{y} + 2\Omega\dot{x} = f_y$$

(3.66)

これらの式は磁場の項 (f_r, f_z) がなければ、r_0 での回転から少しずれたところでの周転運動を示している.

B_z があることで、磁力線が曲げられることによる magnetic tension が生じる → 回転運動を妨げる向きに働く.

- B_z の効果を考える.

$\mathbb{B}$ の変化 $\delta\mathbb{B}$ と magnetic tension #

まず、一様な状態に微小な変動が加わることを考える

$$\rho = \rho_0 \quad (\text{非圧縮流体なので一様とする})$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1(r, t)$$

$$\mathbb{B} = \mathbb{B}_0 + \mathbb{B}_1(r, t)$$

(3.59) ~ (3.61) は、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0 \quad (3.a)$$

元は $\mathbb{B} \times (\nabla \times \mathbb{B})$ からきてる
$\mathbb{B}_0 = \mathrm{const}$ より
$\nabla \times \mathbb{B}_0 = 0$ となるので
$\mathbb{B}_0 \times (\nabla \times \mathbb{B}_1)$ だけが残る

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_1 \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_1 = -\frac{1}{\rho_0}\nabla\left(P_1 + \frac{\mathbb{B}_0 \cdot \mathbb{B}_1}{8\pi}\right) - \nabla\Phi + \frac{1}{4\pi\rho_0}(\mathbb{B}_0 \cdot \nabla)\mathbb{B}_1 \quad (3.b)$$

$$\frac{\partial \mathbb{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v}_1 \times \mathbb{B}_0) \quad (3.c)$$

さらに、$\nabla \cdot \mathbb{B}_1 = 0$ (Maxwell eq.) (3.d)

2次以上の項は微小なのでむし

(3.b) に ∇ をスカラー的にかける. (3.a) (3.d) より、

$$\nabla^2 \left(P_1 + \frac{1}{\pi}\mathbb{B}_0 \cdot \mathbb{B}_1\right) = 0$$

積分して任意関数を0とすると、0 とできる

(いいのか? 物理的イミは?)

すると、(3.b)は

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\rho}(\mathbf{B}_0\cdot\nabla)\mathbf{B}_1 \qquad (3.b')$$

一方で、(3.c)は

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{v}_1\times\mathbf{B}_0)$$

$$= (\mathbf{B}_0\nabla)\mathbf{v}_1 - \underbrace{(\mathbf{v}_1\nabla)\mathbf{B}_0}_{=0} + \mathbf{v}_1\underbrace{(\nabla\cdot\mathbf{B}_0)}_{=0} - \mathbf{B}_0\underbrace{(\nabla\cdot\mathbf{v}_1)}_{=0\ (\because (3.a))}$$

$$= (\mathbf{B}_0\nabla)\mathbf{v}_1 \qquad (3.c')$$

ここで、$\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_z)$ だった。

$$\mathbf{B}_0\nabla = B_z\frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{スカラー}) \qquad (3.e)$$

(3.b')の両辺をtで偏微分し、(3.c')(3.e)を考慮すると

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi\rho}\left(B_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho}B_z^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{B_z^2}{4\pi\rho}} \quad \text{とすると}$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = v_A\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}$$

となり、z方向に伝播する波動方程式となっていることがわかる。

→ 振動は波として伝わる。(非圧縮流体中にも波が存在)。

次に、振動を $\xi \propto \exp(i(\omega t - kz))$

とする。このとき、磁場の変動 $\mathbb{B}_1$ は、(3.61)をみたすように考えると
(たぶん…)

$$(\mathbb{B}_1 =)\,\delta\mathbb{B} = -ikB_z\xi \qquad (3.68)$$

magnetic tension は、$\dfrac{1}{4\pi\rho}(\mathbb{B}_0\nabla)\mathbb{B}_1$ だった。

$$f = \frac{1}{4\pi\rho} B_z \frac{\partial}{\partial z}\cdot(-ikB_z\xi)$$

$$= -\frac{B_z^2}{4\pi\rho}k^2\xi$$

$$= -(kv_A)^2\xi$$

整理

今、disk の中の、$r=r_0$ という場所に着目していた。

x、y … r、ϕ 方向の微小なずれ　Lagrangue的…?

(r_0 にある塊の、r、ϕ 方向の微小な振動)

$\mathbb{B}_1$ ($\delta\mathbb{B}$) … 一様な磁場 $\mathbb{B}_0$ に加わる振動。

すべて $\xi \propto e^{i(\omega t - kz)}$ で振動

(3.66) は次のようになる。

$$-\omega^2 x - 2i\omega\Omega y = -x\frac{d\Omega^2}{d\ln r} - (kv_A)^2 x \qquad (3.70)$$

$$-\omega^2 y + 2i\omega\Omega x = -(kv_A)^2 y \qquad (3.71)$$

(3.70)(3.71)より

$$\omega^4 - \omega^2\left[\frac{d\Omega^2}{d\ln r} + 4\Omega^2 + 2(kv_A)^2\right] + (kv_A)^2\left[(kv_A)^2 + \frac{d\Omega^2}{d\ln r}\right] = 0$$

(3.72)

$\omega^2 > 0$ … $e^{i(\omega t - kz)}$ は振動 → 振動は成長しない

$\omega^2 < 0$ … 振動は exponential で成長.

↳ $$(kv_A)^2 + \frac{d\Omega^2}{d\ln r} < 0 \qquad (3.73)$$

弱い磁場を考えると、 $B_z \to 0$、$v_A \to 0$ で (3.73) は

$$\frac{d\Omega^2}{d\ln r} < 0$$

$$\frac{d\Omega^2}{dr} < 0 \qquad \left(\because \frac{d}{d\ln r} = r\frac{d}{dr},\ r>0\right)$$

となり、(3.58) が導びかれる。

MRI の性質をもう少し詳しく見る

growth rate と磁場の強さの基準を示す。

(3.72) で、Keplerian rotation を仮定すると、

$$\frac{d\Omega^2}{d\ln r} = \frac{dr}{d\ln r}\frac{d\Omega^2}{dr}$$

$$= r \cdot -3\frac{GM_*}{r^4} \qquad \left(\because \Omega = \sqrt{\frac{GM_*}{r^3}}\right)$$

$$= -3\Omega^2$$

より、 $(kv_A)^2 - 3\Omega^3 < 0$

$$k_{crit} v_A = \sqrt{3}\,\Omega \qquad (3.74)$$

$k < k_{crit}$ で不安定

⟺ $\lambda > \lambda_{crit} = 2\pi/k_{crit}$ のスケールで不安定

B_z が強くなると、v_A は大きくなり、k_{crit} は小さくなる

→ B が強いと不安定が起こるスケールは大きくなる.

λ_{crit} が円盤の鉛直方向のスケールをこえると ($\sim > 2h$)
不安定は起こらなくなる。

$$\lambda_{crit} = \frac{2\pi}{k_{crit}} < 2h$$

$$2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{3}\Omega} \cdot \sqrt{\frac{B^2}{4\pi\rho}} < 2\frac{c_s}{\Omega}$$

$$B^2 < \frac{12}{\pi}\rho {c_s}^2 \qquad (3.75)$$

plasma β : 熱運動による gas 圧と magnetic pressure の比

$$\beta \equiv \frac{8\pi P}{B^2} \qquad (3.76)$$

を用いると、(3.75) の条件は、

$$\beta > \frac{2\pi^2}{3} \qquad (3.77)$$

と書ける。

つまり、熱的圧力とのつり合いに近づくような磁場 ($\beta \sim 1$)
は強すぎる。

(3.73) の導出

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\left\{-\left[\frac{d\Omega^2}{d\ln r} + 4\Omega^2 + 2(kv_A)^2\right] \pm \sqrt{\left[\frac{d\Omega^2}{d\ln r} + 4\Omega^2 + 2(kv_A)^2\right]^2 - 4(kv_A)^2\left[(kv_A)^2 + \frac{d\Omega^2}{d\ln r}\right]}\right\} < 0$$

$$\left[\frac{d\Omega^2}{d\ln r} + 4\Omega^2 + 2(kv_A)^2\right]^2 < \left[\frac{d\Omega^2}{d\ln r} + 4\Omega^2 + 2(kv_A)^2\right]^2 - 4(kv_A)^2\left[(kv_A)^2 + \frac{d\Omega^2}{d\ln r}\right]$$

$$\therefore (kv_A)^2 + \frac{d\Omega^2}{d\ln r} < 0$$

もっとすぐでてきそう…

growth rate はどうなっているか。

今、$\Omega = \Omega_K$ より、

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\left\{-(\Omega^2 + 2(kV_A)^2) \pm \sqrt{\{(\Omega^2 + 2(kV_A)^2\}^2 - 4(kV_A)^2((kV_A)^2 - 3\Omega^2)}\right\}$$

$\Omega^4 + 16(kV_A)^2\Omega^2$

$$\therefore \frac{\omega^2}{\Omega^2} = -\left(\frac{kV_A}{\Omega}\right)^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{16\left(\frac{kV_A}{\Omega}\right)^2 + 1} - \frac{1}{2}$$

$$d(\omega^2/\Omega^2)\,/\,d(kV_A/\Omega) = -2\left(\frac{kV_A}{\Omega}\right) \pm \frac{1}{2}\cdot 16 \cdot 2\left(\frac{kV_A}{\Omega}\right)\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{16(\ )^2+1}}$$

$$= -2\left(\frac{kV_A}{\Omega}\right)\left\{1 \mp \frac{8}{\sqrt{16(\ )+1}}\right\}$$

$d(\omega^2/\Omega^2)\,/\,d(kV_A/\Omega) = 0$ のとき

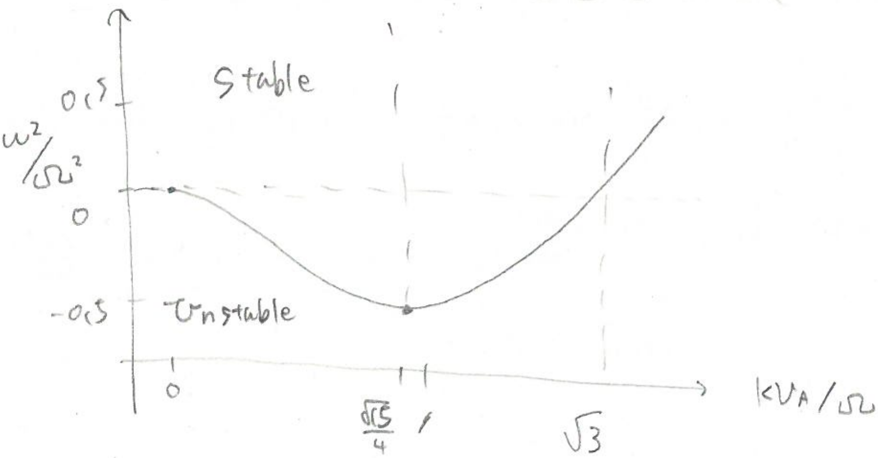
$$1 = \frac{64}{16\left(\frac{kV_A}{\Omega}\right)^2 + 1}$$

$$16\left(\frac{kV_A}{\Omega}\right)^2 = 63$$

$$(kV_A)_{max} = \frac{}{4}\,\Omega \qquad (3.78)$$

つまり、

$$|\omega_{max}| = \frac{3}{4}\Omega \qquad (3.79)$$



$e^{i(\underset{\sim}{\omega} t - kz)}$

ω は growth rate.

(3.79) より、最大で 1 回転周期 となる.

→ この非常に短いタイムスケールは、

MRI が効くと、他の効果で MRI を妨げるのは

難しいことを示している.

MRI が dominant となる!