4.2. Dust Setting

ダストがガスから受ける摩擦のタイムスケール：t_{fric}

$$t_{fric} = \frac{mv}{|F_D|} \quad [s] \quad (4.11)$$

↑ stopping time

① ダストの質量 $m = \frac{4}{3}\pi s^3 \rho_m$ [g]

② ガスの抵抗力：F_D

$$\begin{cases} \text{Stokes Drag} : F_D = -\frac{C_D}{2}\pi s^2 \rho v v \quad (s > l_g) \\ \text{Epstein Drag} : F_D = \frac{4\pi}{3}\rho s^2 v_{th} v \quad (s < l_g) \end{cases}$$

ガス分子の熱速度：v_{th} [cm/s]
ダスト粒子の速度：v [cm/s]
$l_g \sim 3$ cm @ 1AU.

①.② より、Epstein Drag による t_{fric} は

$$t_{fric} = \frac{mv}{|F_D|} = \frac{4}{3}\pi s^3 \rho_m v \Big/ \frac{4\pi}{3}\rho s^2 v_{th} v = \frac{\rho_m \cdot s}{\rho \cdot v_{th}} \quad (4.12)$$

例) (4.12)式による 1 AU でのダストがガスから受けるタイムスケール

$$v_{th} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} c_s \sim 10^5 \left(\frac{r}{1AU}\right)^{-\frac{1}{4}} \overset{r=1AU}{\sim} 10^5 \quad [cm/s]$$

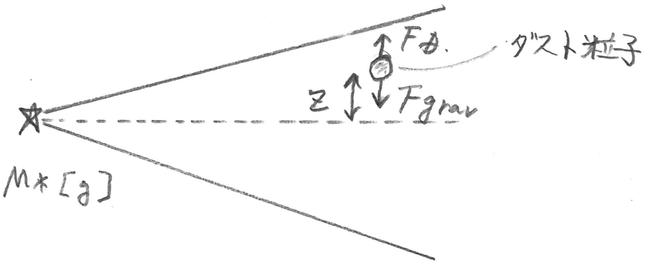
$$\rho \sim 6.0 \times 10^{-9} \left(\frac{r}{1AU}\right)^{-\frac{11}{4}} \sim 10^{-9} \quad [g/cm^3]$$

$$\rho_m = \frac{3m}{4\pi s^3} \overset{s=1\mu m,\ m\sim 10^{-11} g}{\sim} 3 \quad [g/cm^3]$$

$$t_{fric} = \frac{\rho_m \cdot s}{\rho \cdot v_{th}} = 3 \quad [s]$$

ダストが赤道面に向く力：$\mathbb{F}_{grav}$

そのときに働くガスの抵抗力：$\mathbb{F}_{D}$.



$$|\mathbb{F}_{grav}| = m\,\Omega^2 z \qquad (4.14)$$

$$\left(\Omega = \sqrt{\frac{GM_*}{r^3}}\ \text{[rad/s]}\right)$$

$$|\mathbb{F}_{D}| = \frac{4\pi}{3}\rho s^2 v_{th} v \qquad (\text{Epstein Drag}) \qquad (4.15)$$

ここで $|\mathbb{F}_{grav}| = |\mathbb{F}_{D}|$ がつり合うとき、そのときの終端速度 v_{settle} は、

→等速度

$$m\,\Omega^2 z = \frac{4}{3}\pi\rho s^2 v_{th}\cdot v_{settle}.$$

↓ $m = \frac{4}{3}\pi s^3 \rho_m$ より

$$v_{settle} = \frac{\rho_m \cdot s}{\rho\, v_{th}}\Omega^2 z \ \text{[cm/s]} \qquad (4.16)$$

例) $z \sim h$ @1AU での終端速度 v_{settle} は、

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM_*}{r^3}} \propto r^{-\frac{3}{2}}, \quad \Omega \sim 2\times10^{-7}\left(\frac{r}{1\text{AU}}\right)^{-\frac{3}{2}} \overset{1\text{AU}}{\sim} 10^{-7}\ \text{[rad/s]}$$

$$c_s \sim 10^5\left(\frac{r}{1\text{AU}}\right)^{-\frac{1}{4}} \sim 10^5\ \text{[cm/s]}$$

$$z \sim h = \frac{c_s}{\Omega} \sim \frac{10^5}{10^{-7}} \sim 10^{12}\ \text{[cm]}$$

$$\Sigma_g = 1.7\times10^3\left(\frac{r}{1\text{AU}}\right)^{-1.5} \overset{1\text{AU}}{\sim} 1.7\times10^3\ \text{[g/cm}^2\text{]}$$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Sigma_g}{h} \sim \frac{1.7\cdot10^3}{\sqrt{2\pi}\cdot10^{12}} \sim 6\times10^{-10}\ \text{[g/cm}^3\text{]}$$

$$\rho_m = \frac{3m}{4\pi s^3} \overset{s=1\mu m}{\sim} 1\ \text{[g/cm}^3\text{]}$$

$$v_{th} = \sqrt{\frac{8}{\pi}}c_s \sim 10^5\left(\frac{r}{1\text{AU}}\right)^{-\frac{1}{4}} \overset{1\text{AU}}{\sim} 10^5\ \text{[cm/s]}$$

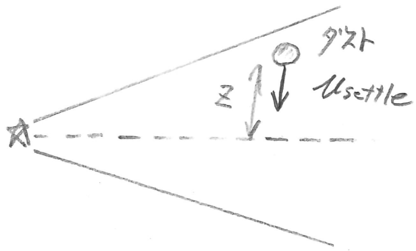
よって、(4.16)式から、

$$v_{settle} \sim 10^{-2}\ \text{[cm/s]}$$

となる

○ 高さzに位置するダストが赤道面に降着するタイムスケール：t_{settle}

$$t_{settle} = \frac{z}{|u_{settle}|} \qquad (4.17)$$



例) $z \sim 10^{12}$ (cm), $u_{settle} \sim 10^{-2}$ [cm/s] のとき $\propto$ 1AU.

$$t_{settle} \sim 10^{14} \text{ (sec)} = 10^{14} \times \frac{1}{365 \times 24 \times 60 \times 60} \sim 3 \times 10^{6} \text{ (yr)}$$

となる //

○ガス密度をガウス分布で表すときの t_{settle}

$$\rho(z) = \rho_0 \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2h^2}\right), \quad \rho_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Sigma_g}{h}, \quad h = \frac{c_s}{\Omega} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{u_{th}}{\Omega}$$

(P39. の(2.8)式より)

$$\rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{h}{u_{th}}$$ より.

$$t_{settle} = \frac{z}{|u_{settle}|} = \frac{z \cdot \rho \cdot u_{th}}{\rho_m \cdot s \cdot \Omega^2 z} = \frac{u_{th}}{\rho_m s} \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Sigma_g}{h} \exp\left(-\frac{z^2}{2h^2}\right)\right]}_{=\rho} \underbrace{\sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{h}{u_{th}}}_{=\Omega} \times \frac{1}{\Omega}$$

(4.16)式より

$$= \frac{2}{\pi} \frac{\Sigma_g}{\rho_m \cdot s \cdot \Omega} \exp\left[-\frac{z^2}{2h^2}\right] \text{ [sec]} \qquad (4.18)$$

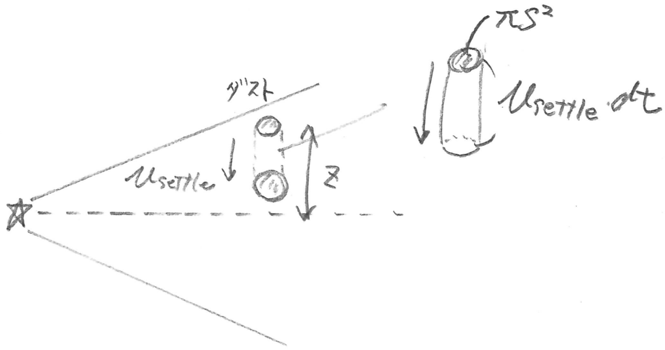
となる //

上層の円盤に位置するダストほど
赤道面に降着するタイムスケール
は短い。 →

※ このときは乱流の働きは無視している.

4.2.1. Single particle settling with coagulation

高さzに位置するダストが赤道面に降着するときに周囲のダストと合体成長するときの関係を考えていく。



$$dm = \underbrace{\pi s^2 \cdot u_{settle}\, dt \cdot \rho(z)}_{[g]} \cdot f$$

f: $\left(\frac{\text{Dust}}{\text{gas}}\right)$ 比.

$$\frac{dm}{dt} = \pi s^2 u_{settle}\, \rho(z)\, f \qquad (4.19)$$

ここで $|u_{settle}| = \left|\frac{dz}{dt}\right| = \frac{\rho_m \cdot s}{\rho \cdot u_{th}} \Omega^2 z$

$\rho_m = \frac{3}{4\pi s^3}$ を代入

$$u_{settle} = -\frac{3}{4\pi s^3} \frac{s\Omega^2 z}{\rho u_{th}}$$ と表せるので.

(4.19) 式は.

$$\frac{dm}{dt} = \frac{3}{4} \frac{\Omega^2 f}{u_{th}} z m \quad \text{となる.} \quad (4.20)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\rho_m}{\rho} \frac{s}{u_{th}} \Omega^2 z \quad (4.21)$$

式 (4.20). (4.21) より数値計算から以下のような関係図が表せる

パラメータ

$r = 1\,AU$

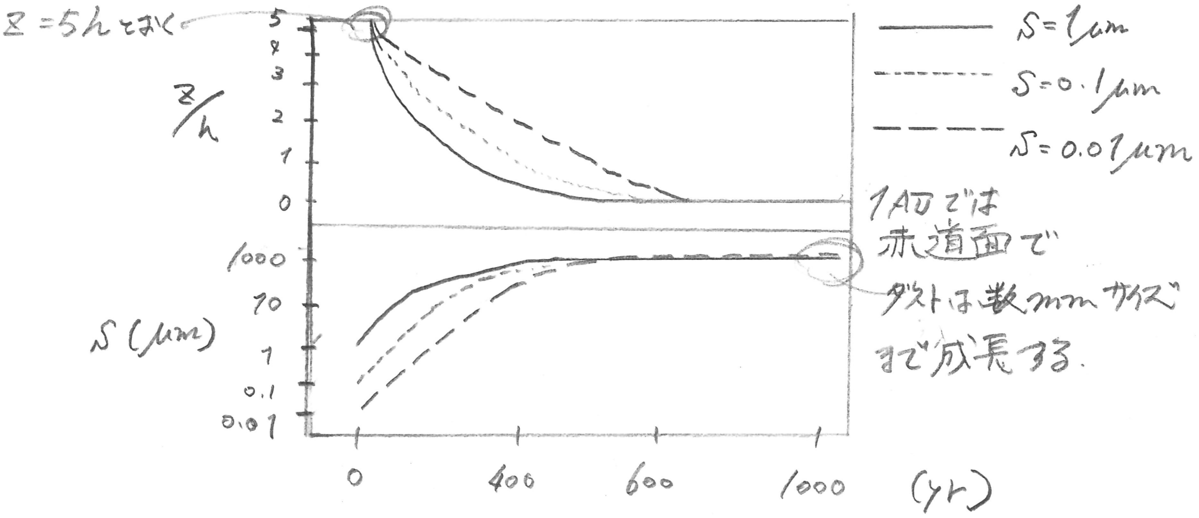
$h = 3\times10^{11}\,cm$

$\Sigma_g = 10^3\ g/cm^2$

$f = 10^{-2}$

$u_{th} = 10^5\,cm/s$

$\rho_m = 3\ g/cm^3$



4.2.2 Setting in the presence of turbulence

ダストが赤道面に落下する際，乱流による巻き上げを受ける場合を考える.

簡単のためにダストとガスは良くカップルしている状況 ($\Omega t_{fric} \ll 1$) を考える.

○乱流によるダスト巻き上げのタイムスケール $t_{diffuse}$ は,

$$t_{diffuse} = \frac{z^2}{D} \qquad (4.22)$$

D は拡散係数であり，一般的には,

$$\begin{cases} D \gtrsim \dfrac{\pi e^{1/2}}{2} \dfrac{\rho_m s h^2 \Omega}{\Sigma_g} & (4.23) \\[2ex] D \sim \nu = \dfrac{\alpha c_s^2}{\Omega} & (4.24) \\[2ex] \alpha \gtrsim \dfrac{\pi e^{1/2}}{2} \dfrac{\rho_m \cdot s}{\Sigma_g} & (4.25) \end{cases}$$

$\begin{cases} \alpha : \text{critical value.} \\ \nu : \text{粘性係数} \end{cases}$

と表せる。

この D を用いて，ダストの鉛直拡散方程式は,

$$\frac{\partial \rho_d}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial z}\left[\rho \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_d}{\rho}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Omega^2 t_{fric} \cdot \rho_d \cdot z\right) \qquad (4.26)$$

このダストの鉛直拡散の式の定常を仮定すると,

$$\frac{\rho_d}{\rho} = \left(\frac{\rho_d}{\rho}\right)_{z=0} \exp\left[-\frac{z^2}{2h_d^2}\right]$$

となる.

ここで，h_d はダストのスケールハイトで $h_d = \sqrt{\dfrac{D}{\Omega^2 t_{fric}}}$ と表す. (4.28)

(4.24)式：$D \sim \dfrac{\alpha c_s^2}{\Omega} = \dfrac{\alpha h^2 \Omega^2}{\Omega} = \alpha h^2 \Omega$

(4.28)式：$D = h_d^2 \cdot \Omega^2 t_{fric}$

$\Rightarrow \dfrac{h_d}{h} \simeq \sqrt{\dfrac{\alpha}{\Omega t_{fric}}}$ となる. (4.29)