2002.10.29

3. ポアンカレの定理 (非可積分性)

参考文献

1. Whittaker, E.T.
   A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, Cambridge University Press, 1952.
   (初版は 1904 年)
2. 齋藤利弥, 「解析力学講義」、日本評論社、1991.
3. 中川克也, 'Direct construction of polynomial first integrals for Hamiltonian systems with a two-dimensional homogeneous polynomial potential', 総合研究大学院大学, 博士論文, 2003.

20 世紀天体力学の最大の成果
　理論的には KAM 理論か
　スプートニクは、天体力学に限らず 20 世紀人類の最高の成果のひとつ

ヨーロッパ
　チコ・ブラーエ (Tycho Brahe)(1546 〜 1601) の観測
　ケプラー (J. Kepler)(1571 〜 1627): 3 法則
　ニュートン (I. Newton)(1643 〜 1727): 運動方程式
　Laplace(1749 〜 1827): ラプラスの魔 (1814):

正準変換と摂動論

運動の積分を見つければいいじゃない.
　$f(q_1, q_2, \ldots, p_1, p_2, \ldots; t) =$ 一定

19 世紀末およびそれ以後
　Bruns の定理 (1887): 古典積分は三体問題の唯一の代数積分である.
　Poincaré の定理 (1890). 制限三体問題には, ヤコビ積分およびそれと同等な積分を除いて

$$\Phi = \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \mu^2\Phi_2 + \ldots = \text{一定}$$

　の形の (解析) 積分は存在しない.

3.1. 序: 積分可能性

3.1.1 可解性

微分方程式

$$\frac{dx_i}{dt} = F(x_1, \ldots, x_N), \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{1}$$

が解ける, とは? N は微分方程式の階数とよばれる.

定義 1. 系 (1) が 求積によって解ける とは, 以下の操作の有限回の組合せによって一般解が得られるときである.

- 加減乗除
- 微分
- 不定積分
- 逆関数を取る
- 代数方程式を解く

定義 2. 関数 $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ が系 (1) の第一積分といわれるのは, 系の任意の解に沿って一定に保たれるときである.

- 積分があると微分方程式の階数を減らすことができる

$$\Phi_1(x_1, \ldots, x_N) = c_1 = \text{一定}$$

のとき, これを x_1 について解けば

$$x_1 = x_1(x_2, \ldots, x_n, c_1)$$

これを (1) 式に代入すれば, (1) は階数 $N-1$ の系になる. 階数が降下する.

同様にして, $N-1$ 個の積分 $\Phi_i(x_1, \ldots, x_n) = c_i,\ i = 1, \ldots, N-1$ があれば,

$$x_i(x_1; c_1, \ldots, c_{N-1}),\ i = 1, \ldots, N-1$$

と書けるから, 系 (1) は

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2(x_1), \ldots, x_{N-1}(x_1)) = \widetilde{F}_1(x_1)$$

となり, これは変数分離で積分できる. すなわち

$$\int \frac{dx}{\widetilde{F}(x)} = \int dt = t + \text{定数}$$

3.1.2 ハミルトン系の積分可能性

自由度 n の (自励) ハミルトン系

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

の第一積分とは, 座標 q_i と共役運動量 p_i の関数であって, 相空間の軌跡に沿って不変なもの.

定理. 関数 Φ が系 (2) の第一積分であるための必要十分条件は, Φ と H のポアッソン括弧がゼロになることである.

証明.

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \{\Phi, H\} = 0$$

3.1.2 リュービル可積分

リュービルの定理. 自由度 n のハミルトン系が

- n 個の解析的一価第一積分 $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ を有し,
- これらが関数的に独立であって,
- 次を満たすとする

$$\{\Phi_i, \Phi_j\} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \Phi_k} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \Phi_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial \Phi_k} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \Phi_k} \right) = 0$$

このとき運動方程式は求積で解くことができる.

3.1.2 完全可積分

アーノルド–リュービルの定理. $H(\mathbf{x})$ は $\mathbf{R}^{2n}$ 上で定義されたハミルトン関数であるとする. ポアッソン括弧も定義されているとする. 以下を仮定する

(1) n 個の滑らかな積分 $F_1(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})$ があって包合関係

$$\{F_i, F_j\} = 0, \quad i, j = 1, \ldots$$

にあり,

(2) 積分はレベル集合

$$C_{\mathbf{a}} = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R} : F_i = \mathbf{a}, i = 1, \ldots, n\}$$

上で独立,

(3) ベクトル場 δ_{F_j} は $C_{\mathbf{a}}$ 上で完備 (...) であるとする.

このとき...

3.2 ポアンカレの定理

制限三体問題の微分方程式

$$\frac{dq_r}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_r},\quad \frac{dp_r}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial p_r},\quad (r=1,2)$$

μ が十分小さければ, H は μ の巾級数に展開できる. すなわち,

$$H=H_0(p)+\mu H_1(q、p)+\mu^2 H_2(q、p)+\ldots$$

および

$$2hH_0=\frac{1}{4p_1^4}+\frac{np_2}{p_1^2}+n^2p_2^2.$$

H_0 のヘシアンはゼロでなく, $(H_1,H_2,\ldots)$ は q_1,q_2 に関し, 周期 2π で周期的である.

ポアンカレの定理:
制限三体問題には, (ヤコビエネルギー積分およびそれと同等な積分を除いて)

$$\Phi=\Phi_0+\mu\Phi_1+\mu^2\Phi_2+\ldots=一定,$$

の形の積分は存在しない.

ただし, Φ は
(q_1,q_2,p_1,p_2,μ) の関数 $q_1,q_2\in\mathbf{R}$, $\mu\le\mu_0$, $(p_1,p_2)\in D$(領域) で一価かつ正則
q_1 と q_2 に関して周期 2π であるとする.
これらの条件の下で, 関数 Φ は μ の巾級数に展開できる. たとえば,

$$\Phi=\Phi_0+\mu\Phi_1+\mu^2\Phi_2+\ldots.$$

$\Phi_0,\Phi_1,\Phi_2,\ldots$ は (q_1,q_2,p_1,p_2) の一価解析関数で, q_1 と q_2 に関して周期的である.

証明.
(1) Φ_0, Φ_1 が満たすべき条件.
$\Phi =$ 一定 が積分であるための必要十分条件はポアッソン括弧

$$(H, \Phi) = 0$$

と表現できる. だから,

$$(H_0, \Phi_0) + \mu\{(H_1, \Phi_0) + (H_0, \Phi_1)\} + \mu^2\{(H_2, \Phi_0) + (H_1, \Phi_1)(H_0, \Phi_2)\} + \ldots = 0,$$

であり, したがって,

$$(H_0, \Phi_0) = 0,$$

および

$$(H_1, \Phi_0) + (H_0, \Phi_1) = 0,$$

である.

(2) Φ_0 は H_0 の関数ではないことを証明する – 背理法

- $\Phi_0 = \psi(H_0)$ なる形の関係があると仮定し, 一価関数であることを示す.
- 式 $H_0 = H_0(p_1, p_2)$ を p_1 について解いて, $p_1 = \theta(H_0, p_2)$ の形の式を得る.
- 領域 D で $\partial H_0/\partial p_1$ がゼロでない限り, θ は引数の一価関数である.
- 関数 $\Phi_0(q_1, q_2, p_1, p_2)$ において p_1 をその値 θ で置き換えると

$$\Phi_0(q_1, q_2, p_1, p_2) = \psi(q_1, q_2, H_0, p_2)$$

なる形の式が得られる.
- Φ_0 は引数の一価関数であるから, ψ は H_0 のみに依存する.
- したがって, 変数 p_1, p_2 が領域 D にいて, D 内で $\partial H_0/\partial p_1$ がゼロでない限り, あるいはもっと一般に, 微分 $\partial H_0/\partial p_1$ と $\partial H_0/\partial p_2$ のどちらか一方が D でゼロでない限り (これは一般に満たされることは明らかである), ψ は H_0 の一価関数である.

- ψ は一価関数であるから, 方程式 $\psi(H) =$ 一定 は微分方程式の一価の積分である.
- したがって $\Phi - \psi(H) =$ 一定 も一価の積分であり, μ の巾級数に展開可能である.
- これは μ で割れるはずである. なぜなら $\Phi_0 - \psi(H_0)$ がゼロだからである.

$$\Phi - \psi(H) = \mu\Phi',$$

のように書くと,
- 方程式 $\Phi' =$ 一定 が一価の解析積分になる.

$$\Phi' = \Phi'_0 + \mu\Phi'_1 + \mu^2\Phi'_2 + \ldots,$$

と書くと,
- 関数 Φ'_0 は一般に H_0 の関数ではない.

- しかし, H_0 の関数である場合は, 同じ操作をほどこして, 第三の一価解析積分に到達する.
- すなわち,

$$\Phi' - \psi'(H) = \mu\Phi'', \quad \text{or} \quad \Phi^{(1)} - \psi^{(1)}(H) = \mu\Phi^{(2)}$$

そして

$$\Phi^{(2)} = \Phi_0^{(2)} + \mu\Phi_1^{(2)} + \mu^2\Phi_2^{(2)} + \ldots,$$

このとき

$$\begin{aligned} \Phi = & \ \psi(H) + \mu\Phi^{(1)} \\ = & \ \psi(H) + \mu\psi(H) + \mu^2\Phi^{(1)} \end{aligned}$$

そのうち μ に依存しない部分は一般に H_0 の関数でない. 以下これを続ける. このようにすれば,

$$\begin{aligned} \Phi = & \ \psi(H) + \mu\Phi^{(1)} \\ = & \ \psi(H) + \mu\psi^{(1)}(H) + \mu^2\Phi^{(1)} \\ = & \ \ldots \\ = & \ \psi(H) + \mu\psi^{(1)}(H) + \ldots + \mu^n\psi^{(n)}(H) + \mu^n\Phi^{(n)} \end{aligned}$$

Φ が H の関数でない限り, ある n のときに

$$\Phi^{(n)} = \Phi_0^{(n)} + \mu\Phi_1^{(n)} + \mu^2\Phi_2^{(n)} + \ldots,$$

の $\Phi_0^{(n)}$ は H_0 のみの関数ではない. つまり, μ がゼロのときに H_0 には還元できない積分が得られるはずある. Φ が H の関数である場合には積分 H と Φ は別物ではない,

言えたこと:

一価解析的な積分 Φ があって H と異なり,

Φ_0 は H_0 の関数であるならば,

積分 Φ を別の積分で同じ性質を持つものから導くことができる. 上の $\Phi^{(n)}$

その積分 $(\Phi^{(n)})$ は μ がゼロのとき H_0 の関数に還元されない.

Φ_0 は H_0 の関数でないと仮定することができる.

(3) Φ_0 が q_1, q_2 を含み得ないことの証明

- 関数 Φ_0 が変数 q_1, q_2 を含むなら, この変数に関して周期的であるから, 次のように書ける

$$\Phi_0 = \sum_{m_1,m_2} A_{m_1,m_2} e^{i(m_1 q_1 + m_2 q_2)} = \sum_{m_1,m_2} A_{m_1,m_2} \zeta$$

- ここで m_1 と m_2 は正または負の整数であり, i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ を表し,
- 量 A_{m_1,m_2} は p_1, p_2 の関数, ζ は A_{m_1,m_2} の指数 co-factor である.
- H_0 は q_1, q_2 を含まないから

$$-(H_0, \Phi_0) = \frac{\partial H_0}{\partial p_1}\frac{\partial \Phi_0}{\partial q_1} + \frac{\partial H_0}{\partial p_2}\frac{\partial \Phi_0}{\partial q_2}.$$

- ところが $\partial\Phi_0/\partial q_r = \sum_{m_1,m_2} i m_r A_{m_1,m_2} \zeta$ であるから, 方程式 $(H_0, \Phi_0) = 0$ は

$$\sum_{m_1,m_2} A_{m_1,m_2} \left(m_1 \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial H_0}{\partial p_2} \right) \zeta = 0.$$

- したがって (この式は恒等式であるから),

$$A_{m_1,m_2} \left(m_1 \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial H_0}{\partial p_2} \right) = 0.$$

- ゆえに,

$$A_{m_1,m_2} = 0 \quad \text{または} \quad m_1 \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial H_0}{\partial p_2} = 0.$$

- ところが後者が可能なのは
  m_1 と m_2 がともにゼロのとき, または
  H_0 のヘシアンがゼロのときのみである.
- いまこのどちらもでもない.
- したがって, 係数 A_{m_1,m_2} は, $A_{0,0}$ を除いてすべてゼロである.
- それゆえ Φ_0 は変数 q_1, q_2 を含まない.

(4) 一般の場合に, 一価の積分の存在が「ϕ_0 が H_0 の関数でないこと」と両立し得ないこと

- Φ_0 と H_0 が座標を含まないから, 方程式

$$(H_1, \Phi_0) + (H_0, \Phi_1) = 0,$$

は,

$$\sum_{r=1}^{2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_r} \frac{\partial H_1}{\partial q_r} - \sum_{r=1}^{2} \frac{\partial H_0}{\partial p_r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_r} = 0 \tag{3.1}$$

となる.

- 関数 H_1 と Φ_1 は q_1, q_2 に関して周期的であるから, 次の形に書ける.

$$\begin{aligned} H_1 &= \sum_{m_1,m_2} B_{m_1,m_2} e^{i(m_1 q_1 + m_2 q_2)} = \sum_{m_1,m_2} B_{m_1,m_2} \zeta, \quad (\text{例えば}) \\ \Phi_1 &= \sum_{m_1,m_2} C_{m_1,m_2} e^{i(m_1 q_1 + m_2 q_2)} = \sum_{m_1,m_2} C_{m_1,m_2} \zeta, \end{aligned}$$

- ここで, m_1 と m_2 は正または負の整数, 係数 B_{m_1,m_2} と C_{m_1,m_2} は p_1, p_2 のみに依存する.

- したがって

$$\frac{\partial H_1}{\partial q_r} = i \sum_{m_1,m_2} B_{m_1,m_2} m_r \zeta, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_r} = i \sum_{m_1,m_2} C_{m_1,m_2} m_r \zeta,$$

より, (3.1) 式は

$$\sum_{m_1,m_2} B_{m_1,m_2} \zeta \left(\sum_{r=1}^{2} m_r \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_r} \right) - \sum_{m_1,m_2} C_{m_1,m_2} \zeta \left(\sum_{r=1}^{2} m_r \frac{\partial H_0}{\partial p_r} \right) = 0$$

または (これは恒等式だから)

$$B_{m_1,m_2} \left(m_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_2} \right) = C_{m_1,m_2} \left(m_1 \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial H_0}{\partial p_2} \right)$$

となる.

- この方程式はすべての p_1, p_2 に対して成り立つ.
- だから, 方程式

$$m_1 \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial H_0}{\partial p_2} = 0,$$

を満たす p_1 と p_2 に対して

$$B_{m_1,m_2} = 0 \quad \text{または} \quad m_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_2} = 0$$

が成り立つはずである.

- [**定義**]. p_1, p_2 の値が $m_1 \partial H_0/\partial p_1 + m_2 \partial H_0/\partial p_2 = 0$ を満たす値を取るとき,
  係数 B_{m_1,m_2} は <u>永年的</u> であると言われる.
- H は与えられた関数であるから, 係数 B_{m_1,m_2} は与えられている. われわれが今考えているような微分方程式で表現される一般の力学系の場合, これらの係数は永年的である限りゼロにならない.
- この場合をはじめに考える (ゼロでない場合).
- $m_1 \dfrac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \dfrac{\partial H_0}{\partial p_2} = 0$ より方程式

$$m_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_2} = 0.$$

- p_1, p_2 は, k_1, k_2 を整数として, 方程式

$$\frac{\partial H_0}{k_1 \partial p_1} = \frac{\partial H_0}{k_2 \partial p_2}$$

  を満たす値であると仮定する.
- $m_1 k_1 + m_2 k_2 = 0$ なる m_1, m_2 の組は無限個ある. $\dfrac{k_1}{k_2} = -\dfrac{m_2}{m_1}$ または $\dfrac{k_2}{k_1} = -\dfrac{m_1}{m_2}$
- これらの組それぞれに対して

$$m_1 \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial H_0}{\partial p_2} = m_1 \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{k_2}{k_1} \frac{\partial H_0}{\partial p_1} = 0$$

  したがって

$$m_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_2} = 0.$$

- これらふたつの式

$$m_1 \frac{\partial H_0}{\partial p_1} = -m_2 \frac{\partial H_0}{\partial p_2}, \quad m_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_1} = -m_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_2}$$

  を比較して

$$\frac{\partial H_0/\partial p_1}{\partial \Phi_0/\partial p_1} = \frac{\partial H_0/\partial p_2}{\partial \Phi_0/\partial p_2}$$

  を得る.

- だからヤコビ行列式

$$\partial(H_0, \Phi_0)/\partial(p_1, p_2) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial H_0}{\partial p_1} & \dfrac{\partial H_0}{\partial p_2} \\ \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial p_1} & \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial p_2} \end{vmatrix}$$

  は, $\partial H_0/\partial p_1$ と $\partial H_0/\partial p_2$ が互いに尽数関係にあるような p_1, p_2 の値すべてに対してゼロとなる.

- こうして, どんなに小さかろうと, 任意の領域において, ヤコビ行列式 (Jacobian) がゼロになるような p_1, p_2 の値の組が無数に存在する.
- ヤコビ行列式は連続関数であるから, 恒等的にゼロでなければならない.
- したがって Φ_0 は H_0 の関数のはずである.
  証明. ...
- ところがこれは (2) で証明したことに反する.
- したがって積分 Φ の存在に関する基本仮定が間違っていることになる.
- つまり, 係数 B_{m_1,m_2} が永年的であって, それのどのひとつもゼロにならなければ, ハミルトン方程式は $H = h$ 以外の一価解析積分を持たない.

(5) 係数 $B_{m_1 m_2}$ に関する制限の除去

- 係数 B_{m_1,m_2} が永年的になったときに, その少なくともひとつがゼロになる場合を考えるべきである.
- 添字の組 (m_1, m_2) と (m_1', m_2') が同じ <u>類</u>(class) に属するとは, これらが関係 $m_1/m_1' = m_2/m_2'$ を満たすときである.
- このとき係数 B_{m_1,m_2} と $B_{m_1',m_2'}$ が同じ類に属す, という.
- (5)-1. まず, 一価積分の非存在に関する (4) の結果が正しいのは, 各類の中に少なくともひとつ B_{m_1,m_2} があって, 永年的になったときにゼロでないときに限ることを示そう.
- 係数 B_{m_1,m_2} がゼロであるとし, 係数 $B_{m_1',m_2'}$ はゼロでないとする.
- p_1, p_2 の値は
$$m_1 \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial H_0}{\partial p_2} = 0$$
  なるものとする.
- このとき
$$m_1' \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2' \frac{\partial H_0}{\partial p_2} = 0$$
  であり,
- したがって
$$B_{m_1,m_2} \left(m_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_2} \right) = 0, \quad B_{m_1',m_2'} \left(m_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_2} \right) = 0.$$
- 関係
$$m_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_2} = 0$$
  は上の前半の式からは出てこないけれども, 後半の式からは出すことができる.
- 証明の残りの部分は (v) と同様である.

- (5)-2. 準備: 類は添字の指数 m_1, m_2 の比によって完全に決定される.
- λ を任意の尽数 (commensurable number, 有理比, 有理数) とし, C は $m_1/m_2 = \lambda$ なる添字の類とする.
- 簡単のため, この類 C がある領域に属する, あるいはその領域 内 にあるとは, この領域内に,

$$\lambda \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + \frac{\partial H_0}{\partial p_2} = 0 \quad \left(m_1 \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial H_0}{\partial p_2} = 0 \right)$$

  を満たす p_1, p_2 の値の組があるとき, である.
  (注意: m_1, m_2 で書くと, 数字が決まってしまう. 類にならない)
- (5)-3. D に含まれるどんな小さな領域 δ においても, 無限個の類があって, 永年的になっても類の係数がすべてゼロにはならないなら, 定理が成り立つことを示そう.
- 式

$$\lambda \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + \frac{\partial H_0}{\partial p_2} = 0.$$

  を満たすような p_1, p_2 の任意の値の組を取ろう.
- λ が尽数であるとし, またこの λ の値に対応する類に対して類の係数が, 永年的になったときにすべてがゼロにはならないとする.
- すると上で述べた論拠がこの値の組に適用できる.
- だから p_1 および p_2 のこの値に対してヤコビ行列式 $\partial(H_0, \Phi_0)/\partial(p_1, p_2)$ はゼロである.
- ところが前提により, どの領域 δ にも, それがどんなに小さくとも, D 内にあれば, このような p_1, p_2 の組が無数にある.
- したがってヤコビ行列式は D のすべての点でゼロであり, よって Φ_0 は H_0 の関数である.
- だから前と同様, H と異なる一価積分は存在しない.

(6) 以上で示したこと

- 考えた系は

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \quad (r = 1, 2)$$

の型の方程式. H は

$$H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \dots,$$

の形に展開することができるとした.

- ここで H_0 の p_1 および p_2 に関するヘシアンはゼロでない,
- H_0 は q_1 と q_2 を含まず, $H_1, H_2, \dots$ は q_1, q_2 の周期関数である.
- 示したこと: これらの方程式には,

エネルギー積分とは独立で,
一価,
q_1 および q_2 の実数すべてに対して,
またある値を越えない μ のすべての値に対して,
さらに領域 D を構成するすべての p_1, と p_2 に対して

正則な積分が存在しない.

- 仮定したこと: D に含まれるどんなに小さな領域においても,
無数の比 m_1/m_2 があって, 対応する係数 B_{m_1,m_2} は永年的になってもゼロにならない.

- この結果はただちに制限三体問題に応用できる. というのは,
- この問題の運動方程式は指定された性格を持ち,
- 現実の展開において関数 H_1 を決めるにあたって最後の条件が満たされることがわかる.
(注意: 実際に確かめていない. H_1 の展開が有限で切れていないこと)
- ポアンカレの定理はこうして確立された.

ポアンカレの定理はケプラー変数に関して一価の, つまり同じ接触楕円を有するすべての軌跡の近傍において一価の積分の非存在を確立する. だからといって別の性格の領域において一価の積分の存在を排除するものではない.

3.3 制限三体問題の方程式の導出

制限三体問題:

2 天体 (太陽 S と木星 J) が互いの重心 O のまわりを円運動する.
質量ゼロの第三体 P が S, J の軌道面内を運動する.
P の運動やいかに?

m_1, m_2 を S, J の質量とし

$$\Phi = \frac{m_1}{SP} + \frac{m_2}{JP}$$

と書く. 第三体の「単位質量」の力関数 (位置ポテンシャルの負) である.

面上に, O を原点とする任意の直交座標 (X, Y) をとる. (U, V) を P の速度成分とする. 運動方程式は

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{\partial\Phi}{\partial X}, \quad \frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{\partial\Phi}{\partial Y}$$

ハミルトン関数を $H = \frac{1}{2}(U^2 + V^2) - \Phi$ と書けば, ハミルトン運動方程式は

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial H}{\partial U}, \quad \frac{dY}{dt} = \frac{\partial H}{\partial V}, \quad \frac{dU}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X}, \quad \frac{dV}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Y}$$

注意. Φ は X, Y と t の関数 $\rightarrow H \neq$ 一定.

母関数を

$$W = U(x\cos nt - y\sin nt) + V(x\sin nt + y\cos nt)$$

として (n は SJ の回転角速度), 接触変換

$$X = \frac{\partial W}{\partial U}, \quad Y = \frac{\partial W}{\partial V}, \quad u = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial W}{\partial y}$$

を行なうと,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial K}{\partial u}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial K}{\partial v}, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial y}$$

となる. ただし,

$$\begin{aligned}
K = \ & H - \frac{\partial K}{\partial t} \\
= \ & \frac{1}{2}(U^2 + V^2) - \Phi - nU(-x\sin nt - y\cos nt) - nV(x\cos nt - y\sin nt) \\
= \ & \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - \Phi + nU(x\sin nt + y\cos nt) - nV(x\cos nt - y\sin nt) \\
= \ & \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - \Phi + nx(U\sin nt - V\cos nt) + ny(U\cos nt + V\sin nt) \\
= \ & \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + n(yu - xv) - \Phi
\end{aligned}$$

Φ は x, y のみの関数. したがって K は t をあからさまに含まない. よって

$$K = \text{一定}$$

ヤコビ積分

別の形の運動方程式

$$q_1 = OP, \quad q_2 = POJ, \quad p_1 = \frac{d}{dt}(OP), \quad p_2 = OP^2\frac{d}{dt}(POJ)$$

このときハミルトン関数は

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^3}{q_1^2}\right) - np_2 - \Phi$$

制限三体問題においては, 小天体の運動方程式は (162 節)

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \quad (r = 1, 2)$$

の形に書ける. ただし,

$$H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \ldots$$

および

$$H_0 = -\frac{1}{2p_1^2} - np_2$$

であり, $H_1, H_2, \ldots$ は q_1, q_2 に関し周期 2π である.

ヘシアン

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial p_1^2} & \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial p_1 \partial p_2} \\ \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial p_1 \partial p_2} & \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial p_2^2} \end{vmatrix}$$

は明らかにゼロである. この状況はポアンカレの定理を証明する際に不都合であるので, 運動方程式の形を修正してヘシアンがゼロでない系を導く.

$H^2 = K$ と書き, $H = h$ をエネルギー積分とする. すると

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{1}{2h}\frac{\partial K}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{1}{2h}\frac{\partial K}{\partial p_r}, \quad (r = 1, 2)$$

が成り立つ. したがって, 新しい関数 H を $K/2\pi$ に等しく取ると, 制限三体問題の微分方程式を

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad (r = 1, 2)$$

の形に書くことができる. ここで, μ が十分小さければ, H は μ の巾級数に展開できる. すなわち,

$$H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \ldots$$

および

$$2hH_0 = \frac{1}{4p_1^4} + \frac{np_2}{p_1^2} + n^2 p_2^2;$$

である. H_0 のヘシアンはゼロでなく, $(H_1, HJ_2, \ldots)$ は q_1, q_2 に関し, 周期 2π で周期的である.