谷川清隆 訳

Acta Mathematica **47** (1925), 297-311.

ポアンカレの最後の幾何学定理の拡張
An extension of Poincaré's last geometric theorem

George D. Birkhoff

1. 序

Acta Mathematica の 13 巻に掲載されたポアンカレの受賞論文「三体問題と力学の方程式」(Le problème de trois corps et les équations de la dynamique) は力学の非可積分問題への最初の偉大な挑戦であった．Mittag-Leffler 教授の指導の下に、Acta Mathematica 誌は多くのすぐれた論文を掲載した。しかし、ポアンカレのこの論文ほど科学的に重要な論文はないだろう．その多くの発想、なかんずくその中心部分をなす周期運動に関する発想はその後彼を重要な力学的研究へと自然に導いた．

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 誌の 33 巻に死の直前に発表した、非常に面白い論文「幾何学のある定理について」(Sur un théorème de géométrie) において、ポアンカレは、ある種の幾何学定理 (特別な場合に彼が証明している) が周期軌道に関するいくつかの重要な問題の答えを導き得ることを示した．その直後に[1] わたしがその定理の正しさを証明した方法の特殊性また定理自身の力学的素性から、定理の一般化が示唆されたが、それをここで示す．

ここに Nörlund 教授の招きに応じることにより、Acta Mathematica 誌の刺激的な伝統を打ち立てた Mittag-Leffler 教授に敬意を表したい．

2. 定理の陳述

r, θ を平面の極座標とする．すると $r = a > 0$ は半径 a の円 C の方程式である．円 C およびそれを取り囲む閉曲線[2] Γ にはさまれた二重連結な円環領域を R、同じ円 C およびそれを取り囲む同様な閉曲線 Γ_1 にはさまれた円環領域を R_1 とする．この 2 つがわれわれの興味の対象である．一対一、方向保存 (direct)、連続な点変換 T によって R が R_1 に移るということで 2 つの円環 R と R_1 を関係させる．すなわち、

$$\begin{aligned} C_1 &= T(C), & \Gamma_1 &= T(\Gamma), & R_1 &= T(R), \\ C &= T^{-1}(C_1), & \Gamma &= T^{-1}(\Gamma_1), & R &= T^{-1}(R_1). \end{aligned}$$

記号の意味は明らかであろう．

ポアンカレの最後の定理は次のように拡張できる．

[1] Proof of Poincaré's Geometric Theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **14** または *Bull. Soc. Math. France* **42** を参照せよ．

[2] 閉曲線とは有限の単連結な開連続体とその外側の補開連続体の共通の境界として定義される．円環は入れ子になった 2 つの閉曲線に限られる領域である．この 2 つの曲線が接しなければ円環は二重連結の開連続体である．最後の 8 節以外ではほかのタイプの円環は出てこない．

定理. Γ および Γ_1 は任意の動径線 $\theta=$ 一定と１回しかも１回だけ交わり、T によって C および Γ 上の点はそれぞれ C 上および Γ_1 上の点に移るとし、しかも θ に関して逆方向に動くとする．このとき次の (a)、(b) のどちらかが実現される[1]．

(a) R および R_1 内に T のもとで異なる不動点が 2 つ存在する．

(b) R(または R_1) 内に C に接する円環があって T(または T^{-1}) によってそれ自身の一部に移される．

ポアンカレが発表した形では、Γ と Γ_1 は一致しており、(b) の可能性は面積積分

$$\int\int Prdrd\theta, \quad (P>0)$$

が T のもとで不変であるという仮定によって排除されていた．

Γ と Γ_1 が一致するという条件をはずしたことの重要性は、自由度 2 の力学系において安定な周期運動の近くに無限個の周期運動が存在することを言うのに上の定理が応用できそうなことにある．さらにこのとき、周期的でなく周期運動の一様な極限としての運動の存在もただちに言える．このような準周期運動が実際に存在することは私の知る限り証明されていない[2]．この論文ではこのような力学的応用には立ち入らない．

拡張された定理は面積保存を仮定していないので本質的に位置解析(analysis situs) の分野に属することも注目すべきことである．またいままで不動点が１つしかない可能性も否定できなかったが、今回２つの異なる不動点の存在が確かめられた．

ポアンカレの最後の幾何学定理の n 次元への拡張の可能性に関する未解決の問題について、ここで簡単に触れよう．

自由度 n の力学系における安定な周期運動の近くの運動の解析的性質を吟味し、対応する変換 T の性質を吟味すれば、その周期運動の近くに無数の周期解の存在を言うことができそうである。ポアンカレの定理は解析的な状況の本質的な要素を $n=2$ の場合に定性的に表わしたものに過ぎないように見える．実際、ポアンカレの扱ったもっとも特別な場合だけで十分力学的に広い応用範囲を持ち得る[3]．n 次元へうまく拡張するためには n 次元の解析的取り扱いの定性的に本質的な要素を決定する必要がある．たぶん、これは単純な方法でできるだろう．

3. $\delta-$ 鎖．補題 1.

数 $\delta>0$ を任意に選ぶ．

変換 T によって円 C 上の任意の点 P_0 は C 上の点 $T(P_0)$ に移される．$0\le\alpha_0<\delta$ なる任意の距離 α_0 だけ $T(P_0)$ を半径方向外向きに動かした点を P_1 とする．同様に $T(P_1)$ を $0\le\alpha_1<\delta$ なる α_1 だけ半径外向きに移動した点を P_2 とする．同じことを繰り返して点列

$$P_0, P_1, P_2, \ldots,$$

[1] 曲線 Γ および Γ_1 に関する制限は、これらの曲線が「右側からのみ到達可能」また「左側からのみ到達可能」とすることによって弱めることができる．この用語は Acta Mathematica, Vol.43 のわたしの論文"Surface Transformation and their Dynamical Applications"で定義されている．しかし、それほど一般的でなく単純な定理でも同じタイプの拡張の説明には十分であり、力学への応用にふさわしい．

[2] 注目すべき H.Bohr の研究でこのような運動の解析的な表現が取り扱われている．たとえばかれの以下の最近の論文を参照されたい．Zur Theorie der fast periodischer Functionen, *Acta Math.* Vol.45; Einige Fourierreihe fastperiodischer Functionen, *Math. Zeit.* Vol.23.

[3] 力学系に関するわたしの Chicago Colloquium の講義は近々本として出版される．この本でこれらの主張を確立する．

からなる δ–鎖が得られる．この点列において各点は前の点に T をほどこしたものを半径方向に δ より小さい距離外向きに動かして得られる．δ– 鎖が途切れるのは、ある n に対して n 番目の点 P_n が R の外に出て、もはや T が作用できなくなったときである．このような δ– 鎖は有限であるということにする．

有限 δ– 鎖が存在しないための精密な条件は次のように与えられる．

補題 1. 有限 δ– 鎖が存在しないための必要十分条件は R 内に C に接する開円環 Σ があって、その Σ を T で変換した $T(\Sigma)$ が Σ に含まれ、しかも Σ の外側の境界からの距離が少なくとも δ あることである．

条件が十分であることは明らかである．なぜなら、P がそのような連続体 Σ 内にあれば、$T(P)$ もそうであり、したがって $T(P)$ が $T(\Sigma)$ に含まれることから $T(P)$ を半径方向外向きに δ 未満動かした点も Σ に含まれるからである．だから P_0 が Σ 内にある限り、鎖の相続く要素 $P_1, P_2, \ldots$ は Σ 内したがって R 内にいつづける．

条件が必要であることを確かめるのも容易である．はじめに点 $P_0, P_1, \ldots$ から成る点集合 $M_0, M_1, \ldots$ の性質を考えよう．

集合 M_0 はもちろん円 C そのものである．

集合 M_1 は明らかに次の不等式を満たす開円環である．

$$a \leq r < a + \delta.$$

M_1 は M_0 を含み、C 上の点を除くと残りは内点から成る．

集合 M_2 は M_1 の点をすべて含み、したがって M_0 の点をすべて含む．実際、変換 T をほどこせば P_0 に移るような C の点 P_{-1} を 1 つだけ見つけることができる．だから P_{-1}, P_0, P_1 は 3 点から成る δ– 鎖であり、よって P_1 は M_2 の点でもある．

さらに C の点を除いて M_2 の点はすべて内点である．これを示すのに M_1 に属する点 P_2 を考える必要がないのは明らかである．P_2 が M_1 に属さないとき、対応する P_1 は M_1 の内点である．変換 T は一対一かつ連続であるから、P_1 とその近傍を $T(P_1)$ とその近傍に移す．それに引き続く δ 未満の半径方向外向きの移動によって $T(P_1)$ とその近傍は P_2 とその近傍に移る．それゆえこの場合も P_2 は M_2 の内点である．

最後に M_2 は連結である．なぜなら M_2 は連結集合 $T(M_1)$ を外向きに δ 未満移動させて得られたからである．

こうして集合列 $M_1, M_2, \ldots$ は C において接する開連結連続体列を為す．しかも各集合はその前の集合を含む．有限 δ– 鎖がないとすると、この集合列は無限に続き、しかもすべて R に含まれる．したがって C において接する極限開連結連続体が得られる．この連続体 S はもちろん或る δ– 鎖に属する点の集合である．

次に領域 $T(S)$ を考えよう．点 Q が M_p に属するなら、$T(Q)$ は M_{p+1} に属するから、$T(S)$ は S に含まれ、C に接する開連結連続体である．その上、$T(Q)$ を半径方向外向きに δ 未満移動してもその点はやはり M_{p+1} に属する．こうして、$T(S)$ のどの点も S の境界から半径方向に少なくとも δ だけ離れている．

したがって S が円環であれば補題でいう型の領域が存在することになる．ところが、無限遠から到達できる S の境界が S のすべての境界とは限らない．これが生じるのは S がある領域またはその境界の一部を無限遠から閉じこめている場合であり、そのとき S は円環ではない．

そこでSは円環でないとし、$\overline{S}$を閉じこめられた領域とする．明らかにSと$\overline{S}$からなる$S+\overline{S}$は円環をなす．以下で$S+\overline{S}$が補題1でΣに要求される残りの性質を持っていることを示そう．

SがR内にあるから明らかに$S+\overline{S}$はR内にある．だから$S+\overline{S}$にはTをほどこすことができる．また$S+\overline{S}$にTをほどこすと、それ自身またはそれ自身の一部に移される．というのは、点がSに属せば、TによってSの点に移ることは判っている．一方、点が$\overline{S}$に属せば、Sに閉じこめられているからTによって$T(S)$に閉じこめられた点に移り、したがってもちろんSに閉じこめられている．だからその点は$S+\overline{S}$に属する．さらに同様な議論から、$T(S+\overline{S})$のどの点も$S+\overline{S}$の境界から半径方向に少なくともδだけ離れている．なぜなら、もし、その点が$T(S)$に属していればSの境界に対してその性質を持っているのでもちろん$S+\overline{S}$の境界に対してその性質を持っている．一方、その点が$T(\overline{S})$に属していれば、この点はSに閉じこめられた点から得られたのであって、$T(S)$に閉じこめられている．だからδ未満の半径方向外向きの移動によってSに閉じこめられた点に移るから$S+\overline{S}$に含まれる．この最後のステップはすでに導いたSと$T(S)$の関係とからんでいる．

ゆえにどの場合も$S+\overline{S}$は円環Σを構成し、補題1の性質を満たす．証明は完結した．

4. 極小$\delta-$鎖.

少なくとも1個の有限$\delta-$鎖があるとしよう．このとき最小の正数nがあって$\delta-$鎖$P_0, P_1, \cdots, P_n$が存在し、P_nはRの外に出る．

このような<u>極小</u>$\delta-$鎖にはいくつかおもしろい性質がある．たとえば、明らかにその$\delta-$鎖の点P_iはM_iに属すが、$M_j (j < i)$に属さない．実際、そうでないとすると、もっと少ない要素から成る有限$\delta-$鎖を構成できる．だからP_0はこの$\delta-$鎖の点のうちC上にある唯一の点であり、P_1はこの$\delta-$鎖の点のうち開円環$a < r < a+\delta$内にある唯一の点であり、以下同様である．

もうひとつ必要な性質もすぐ示せる．P_iと$P_j (i \geq 1, j \geq 1)$が同じ動径上にあれば、$T(P_{i-1})$と$T(P_{j-1})$も同じ動径上にあるが、このとき$T(P_{i-1}), T(P_{j-1})$はP_i, P_jと同じ順序で並んでいる．

これを示すために、まず$T(P_{i-1})$と$T(P_{j-1})$は一致しないことに注意しよう．実際、一致したとすればP_{i-1}とP_{j-1}は一致し、鎖の点のうちP_{i-1}とP_{j-1}の間の点はすべてはぶけるし、P_{i-1}とP_{j-1}のうちどちらかもはぶける．これはおかしい．同様の理由でP_iとP_jも一致しない．

さて$T(P_{i-1})$のr座標は$T(P_{j-1})$のr座標より小さいとする．$i < j$ならこの条件は満たされる．4点$T(P_{i-1}), P_i, T(P_{j-1}), P_j$の動径方向の並び方の順序で、証明すべき陳述に合わない順序は

$$T(P_{i-1}), T(P_{j-1}), P_j, P_i,$$

である．ただし、r座標は左から右へふえる．事実、P_iはP_jより外になければならず、P_jはもちろん$T(P_{j-1})$以遠にある．(この順序では$T(P_{j-1})$とP_jが一致することも考えられる.) ところがこのとき明らかにP_jは$T(P_{i-1})$を半径方向外向きにδ未満移動して得られてしまう．同じくP_iは$T(P_{j-1})$から得られてしまう．これは$T(P_{i-1})$がP_iとδ未満しか離れていないことから可能である．したがってP_jはM_iの点であり、P_iはM_jの点であることになる．ところがすでに示した極小$\delta-$鎖の性質により、このうちどちらかは成り立たない．よって4点の並び方は2段落前に述べたものになる．

5. 補助変換 E.

さて $P_0, P_1, \cdots, P_n$ を任意の極小 $\delta-$ 鎖の点とする．上で確立した性質から、$P_i, P_j, P_k, \ldots$ $(i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1, \ldots)$ がこの鎖の点で同一動径上にあれば、$T(P_{i-1}), T(P_{j-1}), T(P_{k-1}), \ldots$ もまったく同じ順序で同じ動径上に並んでいる．

図 1

この動径上をある点 Q が $r = a$ から外向きに動いたとする．第二の点 $\overline{Q}$ を同じ動径上にとって動かそう．ただし $r = a$ からの距離は Q までの距離以上であって、Q からの距離は δ 未満であり、Q が $T(P_{i-1}), T(P_{j-1}), T(P_{k-1}), \ldots$ に一致するときは $P_i, P_j, P_k, \ldots$ に一致するようにする．

この事実はもっとわかり易くつぎのようにグラフ化できる．$r_1, r_2, \ldots$ を $T(P_{i-1}), T(P_{j-1}), \ldots$ の動径距離とし、$s_1, s_2, \ldots$ を $P_i, P_j, \ldots$ の動径距離とする．するとつぎの不等式が得られる．

$$\begin{aligned}
&r_1 < r_2 < r_3 < \ldots, \\
&s_1 < s_2 < s_3 < \ldots, \\
&0 \leq s_1 - r_1 < \delta,\ 0 \leq s_2 - r_2 < \delta, \ldots.
\end{aligned}$$

数の組 $(r_1, s_1), (r_2, s_2), \ldots$ を平面上の点の直角座標にとって、これらの点を次々と線分で結び (Fig.1)、こうして得られた折れ線の両端点に r 軸と 45 度をなす直線をつけ加えて左右に延長する．こうして関数 $s = f(r)$ のグラフが折れ線で与えられる．r を Q の動径座標、s を $\overline{Q}$ の動径座標とすれば、Q と $\overline{Q}$ の間の対応は要請された性質を持つ．

$r = a$ で Q と $\overline{Q}$ が一致することも考えられる．ただしその場合には Q はもちろん点 $T(P_{i-1})$ ではない．なぜなら、もし一致したとすると Q は $T(P_0)$ でなければならず $\overline{Q}$ は Q と異なる P_1 でなければならぬ．いずれにしろ、$r \leq r_1$ のグラフの直線部分を少しなだらかな線分で置き換えれば $r = a$ の出発点で $\overline{Q}$ が Q より上にくる別の対応が得られる．以下ではこれが行なわれたとするのが都合よい．

このようにして我々の考えている極小 $\delta-$ 鎖の点 $P_i, P_j, \ldots$ が乗っているどの動径上にも一対一連続の、移動距離が δ 未満の半径外向きの運動が定義され、この運動によってどの点 $T(P_{i-1}), T(P_{j-1}), \ldots$ も対応する $P_i, P_j, \ldots$ に移る．

これらすべての半径外向きの直線運動は、$r \geq a$ で定義され、移動距離が δ 未満の、平面上の一対一連続な単一の運動によって行なえる．というのは、上の図 (Figure 1) で、r, s 軸に垂直な第三の θ 軸を考え、グラフのすべては適当な $\theta =$ 一定面上に描かれたと考えてみよう．こ

れらの折れ線はすべて r 方向に増大し、かつ面 $s = r$ から δ 未満の距離だけ上側にある．近隣の折れ線の同じ r 座標の点の組を線分で結ぶ．これによって関数 $s = f(r, \theta)$ が定義され、要請された性質を有する $r \geq a$ での外向きの運動 E が得られる．

前 2 節の結果は次のようにまとめることができる．

補題 2. 有限 $\delta-$ 鎖が存在するとする．したがって極小 $\delta-$ 鎖 $P_0, P_1, \ldots, P_n$(n は極小) が存在する．このとき移動距離 δ 未満の半径外向きの一対一連続な運動 E が $r \geq a$ で定義でき、これによって C は外側に移動し、とくに

$$T(P_0), T(P_1), \ldots, T(P_{n-1}),$$

をそれぞれ

$$P_1, P_2, \ldots, P_n,$$

に移す．

6. 補助曲線．補題 III.

次に T のあとに E をほどこす合成変換 TE を考えよう．明らかに TE は R を円環 $E(R_1)$ に移す一対一、方向保存 (direct) 変換であり、円 C はこれによって C を囲む別の連続閉曲線 C_1 に移る．さらに E に対応する極小 $\delta-$ 鎖の各点 $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ は TE によってそれぞれ $P_1, P_2, \ldots, P_n$ に移る．実際、任意の点 P_{i-1} は T によって $T(P_{i-1})$ に移り、次に E によって P_i に移る．P_0 は $C_0 = C$ 上にあるから、P_1 は C_1 上にある．

TE をほどこすことによって、C_0 と C_1 にはさまれた二重連結の円環は C_1 と C_2 にはさまれた同様の円環に移される．第二の円環 C_1C_2 は第一の円環 C_0C_1 に C_1 で接しており、P_2 は C_2 上にある．だから TE を次々とほどこすことによって拡大する円環の列 $C_0C_1, C_1C_2, \ldots, C_{n-1}C_n$ が得られる．各円環は前のものに接し、点 $P_0, P_1, \ldots, P_n$ はそれぞれ $C_0, C_1, \ldots, C_n$ 上にある．

もちろんのことながら、この過程はどれかの円環 $C_{r-1}C_r$ $(r < n)$ が R の外にはみ出てしまえば終わる．ところが C_0C_1 の点はすべて M_1 に属し、C_1C_2 の点はすべて M_2 に属し、以下同様にして、$C_{r-1}C_r$ の点はすべて M_r に属するから極小 $\delta-$ 鎖の定義そのものによって R の外に出られない．一方、C_n 上の P_n は R の外にある．だから円環 $C_{n-1}C_n$ の一部が R の外に出る．

この時点で r, θ 面の点の直交座標として r と θ をとるのが都合よい．この面上で変換 T をどのように表現しても、その他の表現は θ 方向への $2k\pi (k = 1, 2, \ldots)$ の平行移動で得られる．円 C は θ 軸に平行な直線 $r = a$ となり、Γ と Γ_1 は $r = a$ の上に位置し、左右に無限に続く曲線となる．一方 $C_1, C_2, \ldots$ も同様の曲線であって C_1 が C の上に、C_2 が C_1 の上にあり、以下同様である．これらの曲線は各区間

$$2k\pi \leq \theta \leq 2(k+1)\pi,$$

で合同である．円環 $CC_1, C_1C_2, \ldots$ は隣り合う帯になる．合成変換 TE は各帯をすぐ上の帯に移す．

この新しい面で点 P_0 と P_1 を多重点を持たない弧 P_0P_1 で結ぶ．ただしこの弧は帯 C_0C_1 を横断し、しかも C_0, C_1 の点としてはそれぞれ P_0, P_1 のみを有するとする．弧 P_0P_1 は TE によって第二の帯 C_1C_2 を横断する P_1P_2 に移る．さらに P_1P_2 は TE によって第三の帯上の P_2P_3 に

移り、以下同様である (図 2)．明らかに、こうして多重点を持たない曲線 $P_0P_1P_2\cdots P_n$ が得られる．

曲線 $P_0P_1\cdots P_n$ がはじめて R の境界 Γ と交わる点を Q_0 とする．点 Q_0 は明らかに $P_{n-1}P_n$ に属し、しかも端点 P_n でない．TE による $P_0P_1\cdots P_{n-1}Q_0$ の像を考えよう．変換後の曲線 $P_1P_2\cdots P_nQ_1$ は弧

$$P_1P_2, P_2P_3, \cdots, P_{n-1}P_n, P_nQ_1,$$

から成り、明らかに多重点を持たない．この曲線が P_0P_1 と共通点を持たないことは明らかである．それゆえ補助曲線 P_0Q_1 は多重点を持たない．R を横断する曲線 P_0Q_0 は、TE によって一部 R をはみ出し、$E(R_1)$ を横断する曲線 P_1Q_1 に移る．

図 2

厳密に言えば、r, θ を直交座標として考えたとき、点 P_0 の表現は無限にあり、どれか一つを選ぶと右にも左にも $2k\pi$ の距離はなれて合同な曲線 P_0Q_1 が無限に得られる．しかし r, θ を極座標と考え直し、この面で孤 P_0P_1 が多重点を持たないようにすれば、r, θ を直交座標とした新しい面でも P_0Q_1 は互いに異なり、多重点を持たない．

上の結果をまとめると

補題 3. 補題 2 の仮定と記法のもとで、多重点を持たない連続曲線

$$P_0P_1\cdots P_{n-1}Q_0P_nQ_1,$$

があって、合成変換 TE によって R を横断する弧 P_0Q_0 は $E(R_1)$ を横断する弧 P_1Q_1 に移る．また P_0P_1 は C と $E(C)$ にはさまれる円環を横断する．

7. $\delta-$ **定理.**

上記の 3 つの予備的補題をもとに 1 つの定理が証明できる．この定理から 2 節で述べたポアンカレの最後の幾何学定理の拡張が得られる．

$\delta-$ **定理.** Γ と Γ_1 は任意の動径線 $\theta=$ 一定と一度しかも一度だけ交わり、T によって C 上の点と Γ 上の点は (θ に関し) 逆方向に移って、それぞれ C 上および Γ_1 上の点になるとする．このとき任意の $\delta > 0$ に対して次の (a)、(b) のどちらかが成り立つ．

(a) R の点 P が存在し、R_1 の点 $T(P)$ は同じ動径上にあって P からの距離が δ より小さい．

(b) R(または R_1) 内に開円環 Σ で C に接するものがあって、T(または T^{-1}) によって Σ に含まれる円環に移され、しかも Σ の境界からの動径方向の距離は少なくとも δ ある．

この定理を確かめるには、領域 Σ が存在しなければ点 P が存在することを言えばよい．

領域 Σ が存在しないと補題 1 によって有限 $\delta-$ 鎖が存在し、補題 2、3 によって展開された性質から補助変換 E と曲線 $P_0P_1\cdots P_{n-1}Q_0P_nQ_1$ が存在する．

次にこの曲線上を P_0 から Q_0 まで点 A が動くとしよう．するとこのとき TE による像 A_1 は P_1 から Q_1 まで動く．r,θ を直交座標とする平面内に表されたベクトル AA_1 はこの過程の間にある決まった角度だけ回転する (図 2)．これを $rotAA_1$ と記そう．

事をはっきりさせるため、T をほどこすと C 上の点は θ が増す方向に動き、仮説により Γ 上の点は θ が減る方向に動くとする．ベクトル P_0P_1 が正の θ 軸と為す鋭角を α とし、Q_0Q_1 が正の θ 軸と為す角度を β とする．ただし、β は $\pi/2$ と $3\pi/2$ の間の角度である．このとき問題の回転角は明らかに $\beta-\alpha$ に等しいかまたは $\beta-\alpha$ に 2π の整数倍を加えたものになる．以下ではこの回転角が正確に $\beta-\alpha$ であることを示すことが最重要課題である．

補助曲線 P_0Q_1 は C と $E(\Gamma_1)$ にはさまれた帯を横断する．この帯を動径方向に変形して $E(C)$ と $E(\Gamma_1)$ が直線 $r=b$ と $r=c$ となり、C はそのまま不変であるようにしよう ($E(C)$ も $E(\Gamma_1)$ も Γ_1 に関する仮定によって任意の動径線と 1 回だけ交わる連続曲線である)．この間変形途中の曲線に沿って $rotAA_1$ は連続的に変化する．ゆえに、変形後の曲線に沿っての前と同様に測った $\beta-\alpha$ の値は $rotAA_1$ またはそれに前と同じ 2π の整数倍を加えた値のままである．その上、α と β は前と同様

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{2}<\beta<\frac{3\pi}{2},$$

なる不等式を満たす．

さて、帯 $a\le r\le c$ を横断する曲線に変形された補助曲線をさらにこの帯内で P_0,P_1,Q_0,Q_1 を固定したまま変形しよう．ふたたび明らかなように、曲線が多重点を持たない限り、$rotAA_1$ の変化の連続性から上に述べた式は、この変形の過程でずっと成り立つか、あるいはずっと成り立たないかである．

ところがまずもって弧 P_0P_1 は帯 $a\le r\le b$ を横断し、P_1Q_1 はその外にある．ゆえに P_0P_1 はこの帯内で線分 P_0P_1 に変形できる．さらに、弧 $P_1Q_0Q_1$ は帯 $b\le r\le c$ を横断し、P_1,Q_0 または Q_1 の位置を変えずに折れ線 $P_1Q_0Q_1$ へ連続変形できる．ゆえに適当な変形によって折れ線 $P_0P_1Q_0Q_1$ を得る．しかもこれらの点は r が増す順序で並んでおり、P_1 は P_0 より θ 座標が大きく、Q_1 は Q_0 より θ 座標が小さい．この正規位置において $rotAA_1$ が $\beta-\alpha$ と表わされることは自明である．それゆえはじめの補助曲線がどんなに複雑な曲線であったとしても、この式はそれに沿って成り立っていたはずである．

β と α が満たすべき不等式のおかげで点 A が R を横断して P_0 から Q_0 にいたる補助曲線上を動くときに $rotAA_1$ が正であることが言える．

次に修正を受けた変換 TE_λ を考えよう．ただし、E_λ は E に比べて λ 倍、点を動径方向に動かす変換である．つまり E_1 は E に等しく、E_0 は恒等変換であり、どの点も動かない．$TE_\lambda(A)$ を A_1 と表すと、簡単にわかるように λ が 1 から 0 に減っていくとき A と A_1 が途中の λ で一致しない限り、$rotAA_1$ は連続的に変化する．ところで A と A_1 が一致したとすれば定理の (a) が実現してしまう．ゆえにこの可能性は除かれる．したがって λ が減るとともに P_1 と Q_1 は $\theta=$ 一定の線に沿ってそれぞれ P_0 と Q_0 の右と左に動くだけになり、λ が 0 になるまで $rotAA_1>0$

でありつづけるはずである．

だから変換 $T=TE_0$ のもとでの点 A から像 A_1 に向かうベクトルは A が補助曲線 P_0Q_0 に沿って動くとき正方向に回転する．補助曲線を連続的に変えて、円環 R を横断する別の任意の曲線にしたとき、回転角も連続的に変わるはずである．さもなければ不動点があることになり、(a) が得られる．それゆえ回転角は決して 0 にならない．なぜなら定理の仮定によってベクトル AA_1 は A が C 上にあるとき θ の正の成分を有し、A が Γ 上にあるときは θ の負の成分を有することが保証されているからである．こうして、R を横断する任意の曲線に沿ってベクトル AA_1 の全回転角は正である．

$\delta-$ 定理の仮定と結論は T と T^{-1} に関してまったく対称であることに注意する必要がある．この理由から逆変換 T^{-1} をもとに考えることができる．ただし、R と R_1、Γ と Γ_1 の役割を単純に入れ換える．さらに変換 T^{-1} は C と Γ_1 上の点を θ に関し逆方向に動かす．事をはっきりさせるために、T によって C と Γ の点は r,θ を直交座標とする平面内でそれぞれ右と左に動くとしておいた．したがって T^{-1} によって C と Γ_1 の点は同じ平面内でそれぞれ左と右に動く．

この若干の修正を考慮した上で、円環 R_1 を横断する任意の曲線に沿って点 B から T^{-1} による像 B_{-1} までのベクトルの全回転角が負であることが言える．

ところが B は R_1 を横断するので B_{-1} はもちろん R を横断する．したがって B_{-1} を A ととることができる．それゆえ、R を横断する任意の曲線に沿って $rotA_1A$ が負になることが言える．

これはおかしい．なぜなら、ベクトル A_1A の全回転角とベクトル AA_1 の全回転角はまったく同じであり、後者は正であることをすでに示した．

よって $\delta-$ 定理が証明された．

8．証明の完結.

2 節で述べた定理の仮定は $\delta-$ 定理の仮定を含んでいる．加えて、任意の正数 δ に対して $\delta-$ 定理の (b) を排除することができる．それゆえ、どの正数 δ に対しても R の点 P があって、T によって R_1 の同じ動径上の点 $T(P)$ に移され、P からの距離が δ を超えない．このような点 P の列は δ を 0 に近づけるにつれて R および R_1 内に極限点を少なくとも 1 つ有し、この点は T に関して不変である．

こうして R および R_1 に不動点が少なくとも１つあることが確かめられた．

もう一度 r,θ を直交座標とする補助面に戻ろう．r 軸に平行で 2π 離れた２本の直線の間にはさまれる R の領域を点 A が正方向に一回まわったとする．この道に沿っての $rotAA_1$ は明らかに 0 である．なぜなら、C および Γ に沿っては回転は 0 であり、残りの２つの境界では回転は打ち消し合うからである．

明らかにこの閉道中に各不動点は１回だけ含まれる．だから全回転角は異なる不動点のまわりの小さな閉道のまわりの回転角の代数和になる[1]．ところが、単純な 不動点においてはこの回転角は定義より $\pm 2\pi$ である．それゆえ少なくとも２つの不動点がなければならない．ただし、回転 0 の 多重 不動点 K が１つあれば別だが.

「一般の場合」に不動点が１つあればもう１つ不動点があることは、ポアンカレの上の議論による．しかし第二の 別の 不動点の存在の問題はもっと微妙な問題を含んでいる．

不動点 K が１つだけあるとして、我々が用いた議論を若干拡張して矛盾を導こう．

正数 δ を固定して考える代わりに、動径線ごとに異なる $\delta(\theta)$ を使おう．点 P の動径外向き

[1] 不動点が無数にある場合は除いて考えている．

の δ 未満の動きは、この場合 P が乗っている動径線ごとに異なる．$\delta=0$ なら点 P は動かない．明らかにこのような可変の $\delta(\theta)$ に対して $\delta-$ 鎖および極小 $\delta-$ 鎖が定義できる．

今の場合、唯一の不動点 K の乗っている動径線以外では δ を正で十分小さくとることにする．さらに δ は θ に連続的に依存するようにし、つねにいま問題にしている動径線上の任意の P から $T(P)$ までの距離や $T(P)$ から K までの距離より小さくとることは可能である．ただし、この距離は r,θ を直交座標とする平面内のものとする．

このように δ をとると、どの $\delta-$ 鎖の点も不動点 K にはなり得ない．なぜなら、$P\neq K$ なる点から得られる $T(P)$ に $T(P)$ と K の距離よりも小さな δ の動径方向の移動を行っても決して K には到達できないからである．

円環 Σ の外側の境界は K の乗っている動径線が C と会う点で C に接しているとすれば、若干修正されたこの $\delta-$ 鎖に対して補題 1 はここでも成り立つ．ところが 2 節の定理の結論 (b) はいま排除されているから、このような Σ は存在しない．それゆえ、有限 $\delta-$ 鎖が存在し、極小鎖 $P_0,P_1,\cdots,P_n$ がこの特別な $\delta(\theta)$ に対して存在する．

この特別な極小鎖を用いて、補題 2 に合う性質を有する補助変換 E をつくれる．

このとき合成変換 TE を考えて、円環列 $CC_1,C_1C_2,\cdots$ が前と同様得られる．ただし、円環の 2 つの境界が一点で接し得ることが前と違う．点 P_0,P_1 は前と同様に CC_1 内の曲線で結べ、補助曲線

$$P_0P_1\cdots P_{n-1}Q_0P_nQ_1,$$

が補題 3 と同様得られる．ただし、この曲線は交差しない二重点を持ち得る．なぜなら、相続く曲線の列 $C,C_1,C_2,\cdots$ はある一点で接し得るからである．もちろん、点 K はこの円環列の外にあるから補助曲線は K を通らない．

7 節と同じように進んで、曲線 P_0Q_0 に沿っての $rotAA_1$ を考える．ここで A_1 は TE による A の像である．$\delta(\theta)$ の決め方から、A_1 はいつも A と異なることが保証されている．だから前と同様、補助曲線に沿って回転角は正であり、λ を 1 から 0 に減らしたときのパラメーター変換 TE_λ においても正である．それゆえ、A_1 を T による A の像としたとき、この曲線に沿っての $rotAA_1$ も正である．したがって、P_0Q_0 から K を通らない連続変形で得られる R を横断する任意の曲線に沿っても正である．ところがたとえ曲線が K を通っても、K のまわりの回転は 0 であるから $rotAA_1$ の値は影響を受けない。それゆえ R を横断する任意の曲線に沿って $rotAA_1$ は正である．

ところが T^{-1} を考えると、$rotA_1A=rotAA_1$ は負となり矛盾が導かれる．

こうして定理が確立された．

上の議論は簡単に一般化できて、$rotAA_1$ が 0 でない不動点が 2 つあるか、不動点が無数にあるかどちらかであることが示せる．