谷川清隆 訳

*Michigan Math. J.* **24** (1977), 21-31.

# ポアンカレ・バーコフの不動点定理の証明
# Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem

M. Brown and W.D. Neumann

## 1. 序.

ポアンカレ・バーコフの不動点定理 (ポアンカレの最後の幾何学定理とも呼ばれる) の主張によれば、円環のいわゆる保測ねじれ写像には不動点が少なくとも2つある．この定理はポアンカレ [3] が死の直前に予想として定式化し、特殊な場合について証明した．1913年にジョージ・バーコフ [1] は証明を発表した．ただしこの証明は1つの不動点に関しては正しいが、2つ目の不動点の存在を導くのに1つ目の不動点が指数0を持つ可能性を見逃していた．この間違いは1925年の自身の論文 [2] で修正された．この第二の論文では「保測」の仮定を純粋に位相的な条件に置き換え、「同相写像」をもっと一般の状況に置き換えて、定理を一般化して証明した．ところが、数学者の中には、この証明も間違っていると主張する人がおり、ここ数年、２つ目の不動点の存在の正しい証明を得ようとするいくつかの広範囲にわたる努力がなされてきた．

この論文では、１つ目の不動点の存在に関するバーコフの有名なもともとの証明を単純に修正して２つの不動点の存在を示す初等的な証明を与える．第二の不動点を得るための修正は、バーコフが1925年に位相版の証明の際に１つの不動点から２つの不動点を得るのにスケッチしたものと本質的に同じである．

したがって、この論文はある意味で解説的な論文である．証明を可能な限り見通しよくするために、各境界を一定の角度だけ回転する円環のねじれ同相写像というもっとも簡単な状況に制限する．最終節で指摘するように、証明はこの制限を取り去った場合へほぼ一語一語翻訳可能である．また、証明は円環上の標準的リュベーグ測度以外の一般の測度へも拡張できる．

証明は疑惑にさらされているバーコフの証明に非常に近いので、必要以上に詳しい記述を行なった．これはこの論文が解説的な性格を持つことと軌を一にしている．

## 2. 定理の陳述

$A = \{P \in \mathbf{R}^2 : 1 \le ||P|| \le 2\}$ を円環とする．文献では同相写像 $g : A \to A$ が普通「ねじれ同相写像」と呼ばれるのは、「$A$ の２つの境界を反対の角度方向に回転させる」ときである．これは曖昧である．反時計回りの $\theta$ の回転は時計回りの $2\pi - \theta$ の回転と同じである．この曖昧さを解消する通常のやり方は $A$ の普遍被覆に行くことである．すなわち、同相写像 $g : A \to A$ が ねじれ同相写像 と呼ばれるのは、$\partial A$ 上に不動点を持たず、$A$ の普遍被覆 $\tilde{A} \doteqdot S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le y \le 1\}$ の同相写像 $\tilde{g} : \tilde{A} \to \tilde{A}$ に持ち上がり、しかも $\tilde{A}$ の２つの境界成分を反対方向に動かすときである．

$\tilde{g}$ を $S$ の同相写像 $h$ と見なし、この $h$ を自明な仕方で $\mathbf{R}^2$ 全体に拡張することによって、これから証明する定理を次のように定式化できる．

**定理.** $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ は保測な同相写像で、ある $r_1, r_2 > 0$ に対し

$$\begin{aligned} &h(x,y) = (x - r_1, y), && y \geq 1; \\ &h(x,y) = (x + r_2, y), && y \leq 0; \\ &h(x + 2\pi, y) = h(x,y) + (2\pi, 0), && \end{aligned}$$

を満たすとする．このとき $h$ は同じ周期族に属さない 2 つの異なる不動点 $F_1$ と $F_2$ を持つ．つまり、$F_1 - F_2$ は $(2\pi, 0)$ の整数倍ではない.

注意. 周期性の条件 $h(x + 2\pi, y) = h(x,y) + (2\pi, 0)$ は、$S = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1\}$ への $h$ の制限が、被覆写像 $\pi : S \to A$, $\pi(x,y) = ((y+1)\cos x, (y+1)\sin x)$ による写像 $g : A \to A$ の持ち上げであるという条件に正確に等しい.

我々は $\mathbf{R}^2$ の標準的面積測度 $dxdy$ を考えているから、$A$ 内では非標準的面積、つまり $rdrd\theta$ のかわりに $drd\theta$ を考えているように見えるかもしれない．しかし、極座標で $\phi(r,\theta) = ((r^2 + 2)/3, \theta)$ で与えられる同相写像 $\phi : A \to A$ によって一方の測度はもうひとつの測度の定数倍にうつる.

定理の証明を行なうために、まず回転数と指数についていくつか述べておく必要がある．これは証明に必要な唯一のトポロジーである．証明にはもっとも基本的な被覆の性質しか使わない.

## 3. 回転数と指数

用語. $P$ と $Q$ が $\mathbf{R}^2$ の異なる点のとき、$P$から$Q$への方向 とは $D(P,Q) = (Q-P)/||Q-P||$ のことである.

$X \subset \mathbf{R}^2$ を部分集合とし、$h : X \to \mathbf{R}^2$ を $X$ から $\mathbf{R}^2$ の中への同相写像で不動点を持たないものとする．つまり、すべての $P \in X$ に対して $h(P) \neq P$ とする．$C$ が $X$ 内の任意の曲線のとき、$h$に関する$C$の指数 を、$P$ が曲線 $C$ に沿って動くとき方向 $D(P, h(P))$ が行なう全回転としたい．たとえば、図 1 においてこの方向は時計回りに (負方向に)$1 + 1/2$ 回転する．だから指数は $-(1 + 1/2)$ である.

Figure 1

きちんとした定義をするために、はじめに新しい写像

$$\overline{h} : X \to S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

を

$$\overline{h}(P) = D(P, h(P)) = (h(P) - P)/||h(P) - P||,$$

で定義する．このとき任意の曲線 $C : [a, b] \to X$ に対して、$[a, b]$ は単連結であるから、合成写像 $\overline{h}C : [a, b] \to S^1$ を $S^1$ の普遍被覆へ持ち上げることができる．

図あり

ここで $\pi$ は被覆写像 $\pi(r) = (\cos(r), \sin(r))$ である．持ち上げ $\tilde{C}$ は $\mathbf{R}$ の被覆変換の不定性を除いて一意である．すなわち、$2\pi$ の整数倍を加える不定性がある．ゆえに $\tilde{C}(b) - \tilde{C}(a)$ は持ち上げに依らない．だから次のように定義できる．

$$Ind_h C = (\tilde{C}(b) - \tilde{C}(a))/2\pi.$$

<u>指数の性質.</u>

1. 上で導入した曲線 $C$ または同相写像 $h$ の 1-パラメータ族に対して $Ind_h C$ はパラメータとともに連続に変化する．

2. $C$ が点 $A$ から点 $B$ まで延びていれば、$Ind_h C$ は $mod\ 1$ で方向 $D(A, h(A))$ と $D(B, h(B))$ の間の角度の $(1/2\pi)$ 倍に等しい．

3. $C = C_1 C_2$ が $C_1$ と $C_2$ を端点でつないだものなら (すなわち、$a < c < b$ として $C_1 = C|[a, c]$ および $C_2 = C|[c, b]$)、$Ind_h C = Ind_h C_1 + Ind_h C_2$ である．$C$ を逆方向にたどる曲線を $-C$ とすれば、$Ind_h(-C) = -Ind_h C$ である．

4. $Ind_h C = Ind_{h^{-1}}(h(C))$.

最初の性質はホモトピー持ち上げの性質を被覆へ単純に応用したものである．すなわち、写像 $\overline{h}C : [a, b] \to S^1$ の任意のホモトピーは $\tilde{C}$ のホモトピーに持ち上がる．性質 2 と 3 は自明である．性質 4 は簡単に計算から出る．事実、$Ind_{h^{-1}}(h(C))$ を計算するのに、方向 $D(h(P), P)$ の回転に注目する．これは $\pi$ に $Ind_h C$ を計算するときの方向 $D(P, h(P))$ を加えたものである．だから同じ方向に同じ量だけ回転する．

最後に、今後のために、上で述べたホモトピー持ち上げの性質の相対版について触れておく．端点 $\overline{h}C(a)$ と $\overline{h}C(b)$ を固定する写像 $\overline{h}C$ の任意のホモトピーは $\tilde{C}(a)$ と $\tilde{C}(b)$ を固定する $\tilde{C}$ のホモトピーに持ち上がる．だから $Ind_h C$ を計算するのに、端点を固定しておく限り、はじめに $\overline{h}C$ 上でホモトピーを行なって、それを簡単化することが許される．

## 4. 定理の証明

はじめに記法を導入する．次のようにおく．

$$
\begin{aligned}
&H_+ = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq 1\},\\
&H_- = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \leq 0\},\\
&S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\}.
\end{aligned}
$$

そこで $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を定理のものする．すなわち、$h$ は面積保存、またある $r_1, r_2 > 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
&h(x,y) = (x - r_1, y), && (x,y) \in H_+;\\
&h(x,y) = (x + r_2, y), && (x,y) \in H_-;\\
&h(x+2\pi, y) = h(x,y) + (2\pi, 0).
\end{aligned}
$$

$F$ が $h$ の不動点なら、そのすべての周期像 $F + (2k\pi, 0), k \in \mathbf{Z}$ もそうである．$h$ がたかだか 1 つしかこのような不動点の周期族を持たないと仮定して以下のように矛盾を導こう．$H_-$ から $H_+$ に延びる 2 本の曲線 $C$ と $C'$ で $h$ のすべての不動点を避けて通り、$Ind_h C = 1/2 = -Ind_h C'$ なるものを構成しよう．これは次の補題に矛盾する．

Figure 2.

**補題.** $H_-$ から $H_+$ に延び、$h$ のどの不動点をも通らない任意の曲線 $C$ に対して、

(a) $Ind_h C \equiv 1/2 (mod\ 1)$;

(b) $Ind_h C$ は $C$ に依存しない．

証明. (a) は指数の性質 2 から明らかである．(b) を証明するために $\mathrm{Fix}(h)$ を $h$ の不動点集合としよう．$\mathrm{Fix}(h) = \emptyset$ であるか $\mathrm{Fix}(h) = \{F + (2\pi k, 0) : k \in \mathbf{Z}\}$ である．さらに $A_i \in H_-$ から $B_i \in H_+, i = 1, 2$ へ走る $C_i$ は $\mathbf{R}^2 - \mathrm{Fix}(h)$ 内の 2 つの曲線であるとする．$H_+$ 内で $B_1$ から $B_2$ へ走る任意の曲線 $C_3$ および $H_-$ 内で $A_2$ から $A_1$ へ走る任意の曲線 $C_4$ をとり、$C'$ を閉曲線 $C_1 C_3 (-C_2) C_4$ とする (Figure 2)．$D(P, h(P))$ は $H_+$ および $H_-$ 内で一定であるから、

$Ind_hC' = Ind_hC_1 - Ind_hC_2$ である．だから $Ind_hC_1 = Ind_hC_2$ を示すには $Ind_hC' = 0$ を示さなばならない．ところが基本群 $\pi_1(\mathbf{R}^2 - \mathrm{Fix}(h), A_1)$ は、$A_1$ から出発して曲線 $C_0$ に沿って走り、(もしあるとして) 不動点の近くに達し、この不動点のまわりを一回りし、$-C_0$ に沿って $A_1$ に戻る道によって生成される．ゆえに $C'$ はこのような道の合成へと変形可能だから、このような任意の道に関して $Ind_h$ がゼロであることを示せば十分である (Figure 3 参照)．ところが、単一の不動点を巡るこのような任意の道は Figure 4 に示されるような道 $C''$ に変形可能である．$Ind_hC''$ への上下の水平線の寄与はともにゼロであり、2 本の垂直な線分の寄与は $h$ の周期性によって互いに打ち消し合う．だから $Ind_hC'' = 0$ であり、補題は証明された．円環の場合に Lefschetz の不動点定理の特別な場合を証明したにすぎないことに読者は気づかれたと思う．

Figure 3.

Figure 4.

便宜上、不動点の周期族がもしあれば、それは直線 $x \equiv 0 (mod\ 2\pi)$ 上にあると仮定する．これは自明な座標変換で実現できる．

$W$ は鉛直帯の周期和

$$W = \{(x,y) : \text{ある } k \in \mathbf{Z} \text{ に対して } 2k\pi + \pi/2 \le x \le 2k\pi + 3\pi/2\},$$

を表わすものとする．だから $W$ は不動点のどれも含まない．$\varepsilon > 0$ を選んで

$$||P - h(P)|| > \varepsilon \quad \text{for all} \quad P \in W,$$

とする．これは可能である．すなわち周期性により、コンパクトな領域 $\{(x,y) : \pi/2 \le x \le 3\pi/2, 0 \le y \le 1\}$ における $P$ に対してのみこの条件を満たせばよいことは明らかである．またこの領域上で関数 $\phi(P) = ||P - h(P)||$ は連続かつ正であるから、正の極小値を持つ．

$T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を $T(x,y) = (x, y + (\varepsilon/2)(|\cos(x)| - \cos(x)))$ で定義する．$T$ は任意の鉛直線上で単なる上方への移動であるから (Figure 5)、初等解析 (calculus) より面積保存であることを確認して欲しい．さらに、$T$ は $W$ の点のみを動かし、しかも高々$\varepsilon$ しか動かさない．ゆえに、$Th$ は $W$ 内に不動点を持たない．なぜなら、$P \in W$ が $P = Th(P)$ なら、

$$\varepsilon \ge ||Th(P) - h(P)|| = ||P - h(P)|| > \varepsilon$$

となってしまうからである．

Figure 5.

残りの議論の道筋をまとめておこう．点 $P_0 \in H_-$ があって、ある $n$ に対して $(Th)^n P_0 \in H_+$ であることを示す．これにより、$H_-$ から $H_+$ への $Th$ の「流線」となる曲線 $C$ を見つけることができる．すなわち、この曲線は (端点の 1 つの近くを除いて)$Th$ によりそれ自身に写される．ところが、指数は流線に沿っては簡単に計算できる．$Ind_{Th}C$ が $1/2$ に非常に近いことがわかる．$Th$ は $h$ に近いから、$Ind_h C = 1/2$ であることを導ける．簡単な対称性の議論から、$Ind_h C' = -1/2$ なるもう１つの曲線 $C'$ が存在するから、求める矛盾が導ける．

上で述べた点 $P_0$ が存在することを見るために、次のように進む．

$$D_0 = H_- - (Th)^{-1} H_-, \quad D_1 = (Th) D_0 = (Th) H_- - H_-,$$

と定義する．あるいはもっと一般に

$$D_i = (Th)^i D_0 \quad \text{for} \quad i \in \mathbf{Z},$$

と定義する．$D_1 \subset \mathrm{Int}(S) \cup H_+$ および $Th(\mathrm{Int}(S) \cup H_+) \subset \mathrm{Int}(S) \cup H_+$ であるから、自明な帰納法により、すべての $i \geq 1$ に対して $D_i \subset \mathrm{Int}(S) \cup H_+$ である．同様に、すべての $i \leq 0$ に対して $D_i \subset H_-$ である．とくに、$i > 0$ に対して $D_i \cap D_0 = \emptyset$ であるから、この式に $Th$ のべきを作用させて $j \neq k$ ならいつも $D_j \cap D_k = \emptyset$ であることがわかる．

さて、「面積」とは「rolled up」面

$$S^1 \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2/((x, y) \equiv (x + 2\pi, y))$$

内の面積であるとする．この意味で、各 $D_i$ は同じ面積 (すなわち $2\varepsilon$) を有する．$T$ も $h$ 面積保存であり、$Th$ もそうだからである．だから $i \geq 1$ の $D_i$ はいずれは面積 $2\pi$ の $S$ を埋めつくし、よっていずれは $H_+$ と交わる．

Figure 6.

$D_n \subset (Th)^n H_-$ であるから、$n > 0$ が存在して $(Th)^n H_- \cap H_+ \neq \emptyset$ であることを示したことになる．そのような $n$ に対して、$y$ 座標が極大の点 $P_n \in (Th)^n H_-$ を選ぶ．$P_n$ は一意でなくとも、存在すればよい．なぜなら、周期性により、コンパクトな領域 $Th^n(H_-) \cap \{(x, y) : y \geq 0, 0 \leq x \leq 2\pi\}$ を考えるだけでよく、$y$ はこの領域で連続関数であるから、極大を達成するからである．次を定義しよう．

$$P_i = (x_i, y_i) = (Th)^{i-n} P_n \quad \text{for} \quad i \in \mathbf{Z}.$$

だからすべての $i$ に対して $P_{i+1} = Th(P_i)$ であり、$P_{-1}, P_0 \in H_-$ および $P_n, P_{n+1} \in H_+$ である．$C_0$ を $P_{-1}$ から $P_0$ への直線分とし、$i \in \mathbf{Z}$ に対して $C_i = (Th)^i C_0$ とおく．$P_0$ は実際は $y = 0$ 上にあるが、このことは必要ない (Figure 7)．$C = C_0 C_1 \cdots C_{n-1} C_n$ とおけば、$Th(C) = C_1 C_2 \cdots C_n C_{n+1}$ である．$C$ に関する次の事実が必要である．

Figure 7.

**$C$ の性質.**

1. 曲線 $CC_{n+1} = C_0 \cdots C_{n+1}$ は二重点を持たない.
2. $C$ のどの点の $y$ 座標も $P_{n+1}$ の $y$ 座標より大きくならない.
3. $Th(C)$ のどの点の $y$ 座標も $P_{-1}$ の $y$ 座標より小さくならない.

$C \subset (Th)^n H_-$ であること、および $P_n$ の選び方より $(x, y) \in H_-$ に対して $y \leq y_n \leq y_{n+1}$ であることから性質 2 は当然である．$Th(x, y) = (x', y')$ で $y \geq y_{-1}$ なら $y' \geq y_{-1}$ であることを使って帰納法を行なえば、性質 3 は簡単に証明できる．性質 1 を見るために、$i \neq j$ に対して 2 本の曲線 $C_i$ と $C_j$ を考える．これらは $|i - j| = 1$ なら共通の端点で交わるが、それ以外の点で交わるとする．$Th$ の負の大きなべきを作用させて、$i$ と $j$ を負にできる．ところがこれはおかしい．なぜなら $i$ が正でないとき $C_i$ は完全に帯

$$\{(x, y) : x_0 + (i-1)r_2 \leq x \leq x_0 + ir_2\}$$

の中に含まれ、端点においてのみこの帯の境界と交わるからである (なぜなら、これは $C_0$ に関しては正しく、$H_-$ における $(Th)^{-1}$ の $x$ 成分は単なる $-r_2$ だけの平行移動だからである).
$i \neq j$ に対してこれらの帯はたかだか境界においてしか交わらない.

Figure 8.

いまや $Ind_{Th}C$ が計算できる．構成法より、

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n - r_1, y_n + \delta_1); \quad && 0 \leq \delta_1 \leq \varepsilon, \\ P_0 &= (x_0, y_0) = (x_{-1} + r_2, y_{-1} + \delta_2), && 0 \leq \delta_2 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

だから $D(P_{-1}, P_0)$ と $D(P_n, P_{n+1})$ の間の角度は

$$\theta = \pi - (\arctan(\delta_1/r_1) + \arctan(\delta_2/r_2))$$

であり (Figure 8 参照)、それゆえ、

$$Ind_{Th}C \equiv \theta/2\pi = 1/2 - (1/2\pi)(\arctan(\delta_1/r_1) + \arctan(\delta_2/r_2)) \pmod{1}.$$

$i = 1, 2$ に対して $0 \leq \delta_i \leq \varepsilon < r_i$ であるから $0 \leq \arctan(\delta_i/r_i) < \pi/4$ であり、よって $1/4 < \theta/2\pi \leq 1/2$ であることを確認して欲しい．上の合同関係が等式になることつまり、$Ind_{Th}C = \theta/2\pi$ であることを示そう．直観的な議論をスケッチする．

$Ind_{Th}C$ は $P$ が $C$ に沿って動くときの $D(P, Q), Q = Th(P)$ の全回転角である．発想は、はじめに $P = P_{-1}$ を固定しておいて、$Q$ を $Th(C)$ に沿って $Th(P_{-1}) = P_0$ から $P_{n+1}$ まで動かし、次に $Q$ を $P_{n+1}$ に固定しておいて、$P$ を $C$ に沿って $P_{-1}$ から $P_n$ まで動かすと、同じ全回転が得られることを確認することである．しかし、いまや、$Q$ を $Th(C)$ に沿って動かし、$P$ を $C$ に沿って動かす代わりに、$Q$ を $P_0$ から $P_{n+1}$ まで直線分に沿って動かし、次に $P$ を $P_{-1}$ から $P_n$ まで直線分に沿って動かすことができる．この状況では、簡単に分かるように、全回転は主張通りである (Figure 8 参照)．

詳細な議論のために、写像 $[-1, 0] \to \mathbf{R}^2$ によって曲線 $C_0$ にパラメータを導入し、次に $-1 \leq t \leq n$ に対して $Th(P(t)) = P(t+1)$ であるとして、これを $CC_n$ のパラメータ化 $P : [-1, n+1] \to \mathbf{R}^2$ に拡張する．だから $i = -1, 0, \cdots, n+1$ に対して $P(i) = P_i$ である．

定義により、$Ind_{Th}C$ は

$$\overline{P} : [-1, n] \to S^1, \quad \overline{P}(t) = D(P(t), P(t+1)),$$

から計算できる．代わりに

$$\overline{P}_0 = \begin{cases} \overline{P}(t), & -1 \leq t \leq n, \\ \overline{P}(n), & n \leq t \leq 2n+1, \end{cases}$$

で定義される $\overline{P}_0 : [-1, 2n+1] \to S^1$ が使える．

さて、写像の連続族 $\overline{P}_\lambda : [-1, 2n+1] \to S^1, 0 \leq \lambda \leq n+2$ で、すべて同じ端点を有し、最後の写像 $\overline{P}_{n+2}$ が $\pi - \arctan(\delta_1/r_1)$ を通って $\arctan(\delta_2/r_2)$ からの単なる単調角度増加であるようなものを定義する．すると我々の主張は 3 節の最後で述べたホモトピー持ち上げに関する注意から直ちに得られる．

族 $\overline{P}_\lambda$ を 2 つに分けて定義する．

*Part 1:* $0 \leq \lambda \leq n+1$.

$$\overline{P}_\lambda(t) = \begin{cases} D(P(-1), P(t+1)), & -1 \leq t \leq \lambda - 1; \\ D(P(t-\lambda), P(t+1)), & \lambda - 1 \leq t \leq n; \\ D(P(t-\lambda), P(n+1)), & n \leq t \leq n+\lambda; \\ D(P(n), P(n+1)), & n+\lambda \leq t \leq 2n+1. \end{cases}$$

上で示した任意の $\lambda$ と $t$ に対して、$-1 \leq t_0 < t_1 \leq n+1$ として、$\overline{P}_\lambda$ はつねに $D(P(t_0), P(t_1))$ の形をしており、ゆえにうまく定義されており、$CC_n$ が単純曲線であるから (C の性質 1)、$P(t_0) \neq P(t_1)$ である．

*Part 2:* $n+1 \leq \lambda \leq n+2$. $P' : [0, n+1] \to \mathbf{R}^2$ および $P'' : [-1, n] \to \mathbf{R}^2$ をそれぞれ $P(0)$ から $P(n+1)$ までおよび $P(-1)$ から $P(n)$ までの直線分とする．$0 \leq \mu \leq 1$ に対して

$$\overline{P}_{n+1+\mu}(t) = \begin{cases} D(P(-1), (1-\mu)P(t+1) + \mu P'(t+1)), & -1 \leq t \leq n; \\ D((1-\mu)P(t-n-1) + \mu P''(t-n-1), P(n+1)), & n \leq t \leq 2n+1, \end{cases}$$

を定義する．これがうまく定義されていることを見るために、$P \neq Q$ として右辺がつねに $D(P,Q)$ の形をしていることを確認すべきである．$P=(1-\mu)P(t-n-1)+\mu P''(t-n-1)$ および $Q=P(n+1), n \le t \le 2n+1$ に対して、C の性質 2 より、$P$ はつねに $Q$ より $y$ 座標が小さい．ただし例外は $t=2n+1$ または $\mu=0$ のときであって、そのときは、C の性質 1 より

$$P=P(t-n-1) \neq P(n+1)=Q,$$

である．同様に、C の性質 3 および 1 より、$P=P(-1)$ は決して

$$Q=(1-\mu)P(t+1)+\mu P'(t+1) \quad \text{for} \quad -1 \le t \le n,$$

に等しくならない．

三角法の自明な計算によって、$\overline{P}_{n+2}(t), -1 \le t \le 2n+1$ は、主張通り、角度を単調に $\theta$ だけ増加させることがわかる．これより

$$Ind_{Th}C = \theta/2\pi = 1/2 - (1/2\pi)(\arctan(\delta_1/r_1)+\arctan(\delta_2/r_2)).$$

こうして $Ind_{Th}C$ の計算が完結した．

次に $T_s : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を $T_s(x,y)=(x, y+(s\varepsilon/2)(|\cos(x)|-\cos(x)))$ で定義する．よって $T_0 = id$ および $T_1 = T$ である．すると、$0 \le s \le 1$ に対して $Ind_{T_sh}C$ が定義され、対応する主張が $Th = T_1 h$ に対して成り立つのと同じ論拠で、次が成り立つ．

$$Ind_{T_sh}C \equiv 1/2 - (1/2\pi)(\arctan(s\delta_1/r_1)+\arctan(s\delta_2/r_2)) \pmod{1}.$$

ところが、この合同関係は $s=1$ に関しては実は等式であることを見た．だから $Ind$ の連続性により、すべての $0 \le s \le 1$ に対して、これは等式である．とくに、$s=0$ の場合、望んでいた通り、$Ind_h C = 1/2$ を得る．

議論全体を $h$ の代わりに $h^{-1}$ を使い、$T$ はそのままにして繰り返すことができる．このときすべては左と右が入れ替わり、$Ind_{h^{-1}}C_0 = -1/2$ なる曲線 $C_0$ が得られる．すると $Ind$ の性質 4 より、$C' = h^{-1}C_0$ に対して $Ind_h C' = -1/2$ である．こうして補題に矛盾する曲線 $C$ および $C'$ を見つけることができた．

**5．最後の Remarks.**

証明において $h$ が $S$ の両境界において実際の平行移動であることを必要としなかった．$h$ が両境界を反対方向に動かすことだけで十分である．なぜなら、$h$ を自然な仕方で $\mathbf{R}^2$ 全体に拡張すれば、これはもはや $H_+$ および $H_-$ において面積保存でないからである．しかしこれは問題にならない．証明で必要なのは $S$ において $h$ が面積保存であることだけだからである．

証明はまた円環上の標準的な面積測度以外の測度にも容易に拡張できる．しかし、我々の知る限り、この方向への最良の結果は、それほど直接的に得られるわけではないが、バーコフの位相版であるようだ．これは面積保存を以下の条件に置き換えている．すなわち、円環の一方の境界の開近傍 $U$ で、$U$ が $h(U)$ に非稠密な部分集合として含まれるものはないという条件である．バーコフの証明は、この論文で示したのと同様の方針に従っている．しかし $h$ に対する「近似的流線」$C$ および $C'$ で、円環の内側と外側を結ぶもので、指数 $+1/2$ および $-1/2$ を持つものを構成するのははるかに微妙な問題である．

上で記述した議論を少し拡張するだけで、$h : A \to A$ の周期がちょうど $n$ に等しい周期点の集合の成分の数の正確な下限を得て、ポアンカレ・バーコフの定理を拡張できる．この下限はオイラー関数 $\phi(n)$ の定数倍に漸近する．詳細は第二著者の論文に載る．

## 参考文献


1. G.D. Birkhoff, Proof of Poincaré's geometric theorem. *Trans. Amer. Math. Soc.* **14**(1913), 14-22.
2. G.D. Birkhoff, An extension of Poincaré's last geometric theorem. *Acta Math.* **47** (1925), 297-311.
3. H. Poincaré, Sur un théorème de géométrie. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **33** (1912), 375-407.