谷川清隆 訳

Houston Journal of Mathematics **10** (1984), 35-41.

平行移動孤に関するブラウワーの補題の新たな証明
A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs

Morton Brown
University of Michigan, Ann Arbor, Michigan 48109

序. 平面の不動点を持たない方向保存同相写像の研究は Brouwer の論文 [3] から始まった．かれはその論文で「平面平行移動定理」を証明した．何人かの著者 [1]、[4]、[6]、[7]、[8] が Brouwer の論文にある曖昧さやギャップについてコメントしたり、簡単化を示唆した．このうち何人かは同様の批判を免れない ([1,p.335]、[5,p.226] 参照)．しかしながら、衆目の一致するところ、Brouwer の理論の基本的出発点は平行移動孤に関する Brouwer の補題にある ([3] の Satz 1)．ただし [7] の著者は Brouwer の証明は間違っていると述べている．[1]、[4]、[7] の著者は Brouwer の補題の別証明を与えている．今回の論文の目的は、Brouwer の補題のさらに別の証明を与えることにある．その証明は index の概念および自由同値性 (free equivalence) の概念に依る．後者はこの論文で導入する．証明の新しさは Alexander イソトピーを使うところにある．別の論文で、平面の同相写像の力学をもっと深く調べるために自由同値性を利用する．

定義. J が平面 R^2 の単純閉曲線で f が J から R^2 の中への不動点を持たない写像なら、$index(f, J)$ は (正に向きづけられた) 単純閉曲線 J から単位円の中への写像 $(f(x) - x)/ \parallel f(x) - x \parallel$ の巻数と定義する．指数 (index) の基本的性質については [2] を参照されたい．

f, g を R^2 の同相写像とする．f が g に <u>強同値</u>(strongly equivalent) とは、2-円盤 $D^2 \subset R^2$ があって $f(D^2) \cap D^2 = \emptyset$ であり、また $g^{-1}f$ が D^2 に台を持つとき、すなわち、$x \notin D^2$ に対して $f(x) = g(x)$ なるときである．f が g に <u>自由同値</u>(freely equivalent) とは、有限列 $f = f_1, \ldots, f_k = g$ があって、各 f_i が f_{i+1} に強同値のときである．f が g に自由同値なら、これらは同一の不動点集合を持つことに注意しよう．実際、$g^{-1}f$ は不動点集合の近傍上で恒等写像である．

h を R^2 の同相写像とする．孤 $\alpha = p_0p_1$ は $h(p_0) = p_1$ かつ $\alpha \cap h(\alpha) = p_1$ のとき h の <u>平行移動孤</u> と呼ばれる．(文献にはもっと弱い定義も見受けられる．たとえば、$h(\alpha) \cap \alpha$ は α または $h(\alpha)$ の「内点」を含まない [すなわち、$h(p_1)$ は p_0 に一致してもよい]、あるいは $h(\alpha - p_1) \cap (\alpha - p_1) = \emptyset$. 後者では $h(p_1) = x \in \alpha - (p_0 \cup p_1)$ が許される． h が不動点を持たず方向保存のとき、このような特別の場合がどちらも起こらないことをあとで示す.)

定理.

定理 1.(Brouwer の補題) f を R^2 の不動点なしの方向保存同相写像とし、$\alpha = p_0p_1$ を f の平行移動孤とする．このとき各整数 $n \geq 2$ に対して $f^n(\alpha) \cap \alpha = \emptyset$ である．

定理 1 の証明を始める前に R^2 の位相に関していくつか補題を述べる．

補題 1. f を平面の方向保存同相写像で $f \mid \alpha = \mathrm{id}$ なるものとする．ここで α は孤である．このとき f は α に相対的に (relative to α) 恒等写像にイソトープである．

この定理の証明は次のとおりである．孤 α を「切り開いて」円盤にし、円盤の外側に Alexander のイソトピーを適用する．

補題 2. F を R^2 の円盤とし b_0x を R^2 の孤 b_0b_1 の固有 (proper) 部分孤で F の内部に含まれるものとする．このとき R^2 の同相写像 ϕ で F を台 (support) にするものがあって、$\phi(b_0b_1) = xb_1$ である．(Fig.1 参照.)

Figure 1

補題 3. f は R^2 の同相写像で $A \subset R^2$ で不動点を持たないとする．このとき、f は $f(A)$ に不動点を持たず、したがって $A \cup f(A)$ に不動点を持たない．

補題 4. J を R^2 の単純閉曲線とし、$n+1$ 個の相続く頂点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ および孤 $\alpha_0 = x_0x_1, \ldots,$ $\alpha_n = x_nx_0$,$(n \geq 1)$ によって分割されているとする．また f は $\alpha_0 \cup \cdots \cup \alpha_{n-1}$ から $\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n$ の上への同相写像で、$f(x_i) = x_{i+1}, i = 0, 1, \ldots, n-1$ とする．このとき、R^2 の (方向保存) 同相写像 ρ があって $\rho|\alpha_0 \cup \cdots \cup \alpha_{n-1} = f|\alpha_0 \cup \cdots \cup \alpha_{n-1}$ および $\rho(\alpha_n) = \alpha_0$ である．さらに、ρ は J 上に不動点を持たず、$\mathrm{index}(\rho, J) = 1$ である．($\mathrm{index}(\rho, J)$ は J を反時計まわりにまわって計算する．これは $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ の順序と同じ方向とは限らない.)

補題 2、3、4 の証明は読者の演習としておく．

Figure 2

定理 1 の証明. (最小の) 整数 $n \geq 2$ があって $f^n(\alpha) \cap \alpha \neq \emptyset$ であると仮定する. $\alpha_k = p_k p_{k+1} = f^k(\alpha), k = 0, 1, 2, \ldots, n$ とし、x を α_n と $\alpha = \alpha_0$ の最初の交点とする (Fig.2 参照).

Figure 3

ケース 1. いちばん簡単な場合、$x = p_0 = p_{n+1}$ をまず調べる (Fig.3 参照). このとき f は p_0 上で周期的であり、α_{n+1} は p_0 から p_1 への孤である. J を単純閉曲線 $J = \alpha_0 \cup \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n$ とし、ρ は R^2 の同相写像であって $\rho|\alpha_i = f|\alpha_i, i = 0, 1, \ldots, n-1$ および $\rho(\alpha_n) = \alpha_1$ なるものとする (補題 4 参照). $f|\alpha_0 \cup \cdots \cup \alpha_{n-1} = \rho|\alpha_0 \cup \cdots \cup \alpha_{n-1}$ であるから、補題 1 より、$\gamma_t|\alpha_0 \cup \cdots \cup \alpha_{n-1} = f|\alpha_0 \cup \cdots \cup \alpha_{n-1}, 0 \leq t \leq 1$ なるイソトピーによって f は ρ にイソトープである. γ_t は $\alpha_0 \cup \cdots \cup \alpha_{n-1}$ 上に不動点を持たないから、これはまた $\gamma_t(\alpha_0 \cup \cdots \cup \alpha_{n-1}) = \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n$ 上に不動点を持たない. ゆえに (補題 3 参照)γ_t は J 上に不動点を持たない. だから γ_t は、J 上に不動点を持たない同相写像を通して $f|J$ を $\rho|J$ にイソトープする. だから $index(f, J) = index(\rho, U) = 1$ である. ゆえに f は J の内部に不動点を持ち、仮説に矛盾する.

Figure 4

ケース2. 一般の場合を特別な場合(ケース1)に帰着させよう．α_n', α_n'' を α_n の部分孤 $p_n x$ および xp_{n+1} としよう．α_0', α_0'' を $\alpha = \alpha_0$ の部分孤 $p_0 x$ および xp_1 とし、J は単純閉曲線 $\alpha_0'' \cup \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n'$ とする(Fig.4参照)．D は $f^{-1}(\alpha_n'')$ を内部に含む円盤とし、$D \cap [f(D) \cup \alpha_0 \cup \cdots \cup \alpha_{n-2}] = \emptyset$ とする．ϕ は R^2 の同相写像であって $f(D)$ に台を持ち、$\phi(\alpha_n \cap f(D)) = \alpha_n' \cap f(D)$ であるとする(補題2参照)．$g = \phi \circ f$ とする．すると g は $f, g(\alpha_0) = \alpha_1, \ldots, g(\alpha_{n-2}) = \alpha_{n-1}$ および $g(\alpha_{n-1}) = \alpha_n'$ に自由同値である(Fig.5参照)．さて E は α_0' を内部に含む円盤で、$E \cap [g(E) \cup \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_{n-1}] = \emptyset$ であるとする．ψ は R^2 の同相写像であって E に台を持ち、$\psi(\alpha_0 \cap E) = \alpha_0'' \cap E$ であるとする．$h = g \circ \psi^{-1}$ とおく．このとき $h(\alpha_0'') = \alpha_1, h(\alpha_1) = \alpha_2, \cdots, h(\alpha_{n-1}) = \alpha_n'$ であり、h は g に自由同値である．だから f は $h = \phi \circ f \circ \psi^{-1}$ に自由同値であり、h は Case 1 の仮説を満たす.

系. h を R^2 の不動点を持たない方向保存同相写像とし、$\alpha = p_0 p_1$ を $h(p_0) = p_1$ かつ $(\alpha - \{p\}) \cap h(\alpha - \{p_1\}) = \emptyset$ なる孤とする．このとき、α は平行移動孤である．すなわち、$h(p_1) \notin \alpha$.

証明. $h(p_1) = p_0$ ならケース $1(n = 1)$ の状況である．残りの議論はケース1の場合に類似である．$h(p_1) = x \in \alpha - \{p_0, p_1\}$ ならケース2の第二の部分に類似の状況である.

Figure 5

参考文献

1. R. B. Barrar, Proof of the fixed point theorems of Poincaré and Birkhoff, *Cand. J. of Math.* **19**(1967), 333-343.

2. M. Brown and W. Neumann, Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem, *Mich Math. J.* **24** (1977), 21-31.

3. L. E. J. Brouwer, Beweis des ebenen translationssatzes, *Math. Ann.* **72** (1912), 37-54.
4. B. de Kérekjártó, The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré, *Acta Sci. Math. Szeged.* **4** (1928/1929), 86-102.
5. B. de Kérekjártó, Über die fixpunktfreien abbildungen der Ebenen, *Acta Sci. Math. Szeged.* **6** (1934).
6. W. Scherrer, Translation über einfach zuzzamenhansenden Gebiete, *Viertelkschr Naturf. Ges Zürich* **70** (1925), 77-84.
7. E. Sperner, Über die fixpunktfreien abbildungen der Ebene, *Hamberger Math. Einzelschr.* **14** (1933), 1-47.
8. H. Terasaka, Ein Beweis des Brouwerschen ebenen Translationsatz, *Japan J. Math.* **7** (1930), 61-69.